

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO - UFRPE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PRPPG
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS - PPGE

MARIA EDUARDA NUNES DE OLIVEIRA

**A APROPRIAÇÃO DE UMA BALANÇA DE DOIS PRATOS DIGITAL PARA/NO
ENSINO DE PROPRIEDADES DA IGUALDADE POR UM PROFESSOR DE
MATEMÁTICA NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

RECIFE - PE
2025

MARIA EDUARDA NUNES DE OLIVEIRA

**A APROPRIAÇÃO DE UMA BALANÇA DE DOIS PRATOS DIGITAL PARA/NO
ENSINO DE PROPRIEDADES DA IGUALDADE POR UM PROFESSOR DE
MATEMÁTICA NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino das Ciências.

Área de concentração: Ensino e Aprendizagem de Ciências e da Matemática.

Orientadora: Prof^a Dr^a Elisângela Bastos de Melo Espíndola.

**RECIFE - PE
2025**

FOLHA DE APROVAÇÃO

MARIA EDUARDA NUNES DE OLIVEIRA

**A APROPRIAÇÃO DE UMA BALANÇA DE DOIS PRATOS DIGITAL PARA/NO
ENSINO DE PROPRIEDADES DA IGUALDADE POR UM PROFESSOR DE
MATEMÁTICA NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Orientadora: Prof^ª. Dra. Elisângela Bastos de Melo Espindola

Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Defendida em: 28 de abril de 2025.

Banca Examinadora

Prof^ª. Dra. Elisângela Bastos de Melo Espindola

Presidente / Orientadora

Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida

Examinador interno

Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Prof^ª Dra. Rosilângela Maria de Lucena Scanoni Couto

Examinadora externa

Instituição: Universidade de Pernambuco - UPE

RECIFE - PE

2025

FICHA CATALOGRÁFICA

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Lorena Teles – CRB-4 1774

O48a Oliveira, Maria Eduarda Nunes de.

A apropriação de uma balança de dois pratos digital para/no ensino de propriedades da igualdade por um professor de matemática no 6º ano do ensino fundamental / Maria Eduarda Nunes de Oliveira. – Recife, 2025.

141 f.; il.

Orientador(a): Elisângela Bastos de Melo Espíndola.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências, apêndice(s) e anexo(s).

1. Propriedades da Igualdade. 2. Teoria dos Campos Conceituais. 3. Abordagem Documental do Didático. 4. Modelo de Apropriação de um recurso por um professor 5. Simulador digital de balança de dois pratos da PhET. I. Espíndola, Elisângela Bastos de Melo, orient. II. Título

CDD 507

*À minha mãe, que, ao me alfabetizar, abriu
para mim um mundo inteiro de possibilidades.*

AGRADECIMENTOS

"Ando e penso sempre com mais de um..." Aprendi ao longo desta trajetória, que nenhum passo é dado sozinho. Como na melodia dos Novos Baianos, que celebra a vida em movimento e em coletivo, esta dissertação não é apenas minha, é feita de encontros, de vozes e mãos que me guiaram, inspiraram e sustentaram. Meu agradecimento é dedicado a cada uma dessas pessoas que caminharam comigo, mesmo que por um trecho, e deixaram sua marca nesta jornada. São presenças que fizeram diferença, que acolheram, ensinaram e, de diferentes formas, ajudaram a construir o caminho até aqui.

Agradeço a Deus por ter sido meu sustento em todos os momentos. Foi Sua presença que me guiou nos dias difíceis, fortaleceu-me nas incertezas e concedeu sabedoria para que eu seguisse com fé e coragem.

À minha orientadora, Elisângela Bastos de Melo Espíndola, meu profundo agradecimento pelos quase seis anos de orientação, marcados por aprendizado, partilha e crescimento. Tive o privilégio de ser orientada por uma profissional extraordinária e, acima de tudo, por uma pessoa admirável. Obrigada por sua paciência, dedicação, escuta e confiança no meu potencial, mesmo quando eu mesma duvidava.

Aos meus pais, Djanir Rodrigues e Nelson Cavalcanti, meus maiores exemplos de amor, força e dedicação. Obrigada por cada gesto de apoio, por cada palavra de incentivo e por nunca medirem esforços para que eu pudesse chegar até aqui. Esta conquista também é de vocês, pois foi construída sobre os alicerces de tudo o que me deram, com tanto amor e sacrifício.

Ao meu companheiro, Jamerson Lira, sua presença nos momentos mais difíceis foi essencial para que eu pudesse chegar até aqui. Obrigada por acreditar em mim, mesmo quando eu duvidei; por compreender minhas ausências e por celebrar comigo cada pequena conquista. Agradeço pelas incontáveis marmitas, por sempre me lembrar dos meus objetivos e me trazer de volta quando a rotina parecia me sufocar. Obrigada, acima de tudo, por escolher caminhar comigo por esse caminho torto que é a vida. Este trabalho carrega muito do que somos juntos.

À minha melhor amiga, Alícy Bessone, que torce por mim há mais de dez anos, obrigada por celebrar minhas vitórias como se fossem suas e por me lembrar, nos momentos difíceis, da minha força. Sua amizade é casa, colo e aconchego. Afinal, quem tem uma Lilica, tem tudo.

Às minhas “tired girls”: Maria Carolina, Mayara Lima e Wilma Nascimento, minha mais sincera gratidão. Obrigada por cada conversa nos intervalos dos turnos, por me substituírem para que eu pudesse escrever e por sempre oferecerem um ombro amigo. Vocês me lembraram, inúmeras vezes, que eu não estava sozinha. A vida pode nos levar para muitos lugares, mas levarei comigo, para sempre, o apoio que recebi de vocês ao longo desses dois anos.

Também quero expressar minha gratidão aos meus amigos: Juliana, Elaine e Vinícius. Muito obrigada por todo o apoio, pelo incentivo nos momentos difíceis e, principalmente, pelos momentos de descontração que tornaram os dias mais leves.

Às amigas do “bajos ingresos”: Daniele Coutinho e Mirele Alves, um presente que o PPGEC me deu, companheiras que viveram de perto essa loucura que é o mestrado. Sou grata por todos os conselhos, desabafos, fofocas, críticas (não foram poucas, rs) e pelas brigas nos trabalhos em grupo. Obrigada por celebrarem cada pequena vitória comigo e por não soltarem minha mão nos momentos difíceis.

Aos meus irmãos, por serem apoio, referência e parte essencial da minha história. Em especial, a Felipe Oliveira, por me levar à escola durante tantos anos, por acreditar no meu caminho e, à sua maneira, me incentivar ao longo de toda a jornada. Sua generosidade e cuidado fizeram diferença quando eu mais precisei, e esta conquista carrega muito do seu gesto, da sua presença e do seu coração.

Agradeço à Universidade Federal Rural de Pernambuco, que me acolhe desde 2018, e ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, assim como a todos os professores que, de forma direta ou indireta, contribuíram para minha formação ao longo desta caminhada. Agradeço, especialmente, ao Prof Dr. Jadilson Ramos de Almeida e Profa. Dra. Rosilângela Maria de Lucena Scanoni Couto, membros da banca de qualificação, pelas valiosas contribuições, sugestões e críticas que enriqueceram significativamente este trabalho.

Expresso, ainda, minha gratidão à FACEPE pela concessão da bolsa e pelo financiamento que tornou possível a realização desta pesquisa.

RESUMO

A presente pesquisa tem por objetivo analisar a apropriação de uma balança de dois pratos digital para/no ensino de Propriedades da Igualdade, por um professor de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental. Referimo-nos ao simulador de uma balança de dois pratos, disponível na *Physics Education Technology Platform*, identificado por Explorador da Igualdade Básico (EIB). A pesquisa, de uma parte, ancora-se na Teoria dos Campos Conceituais quanto à análise de situações-problema, invariantes operatórios e representações simbólicas acerca dos conceitos envolvidos no ensino e na aprendizagem das Propriedades da Igualdade. De outra parte, o Modelo de Apropriação de um Recurso por um Professor foi tomado como norte para a análise das fases de pré-apropriação e apropriação original do EIB. Por meio da metodologia de investigação reflexiva, desenvolvemos o estudo sobre o sistema de recursos do professor-participante da pesquisa e em particular, uma análise sobre sua forma de ensinar as Propriedades da Igualdade em uma turma do 6º ano. A construção e análise dos dados sobre o processo de pré-apropriação do recurso, ocorreu por meio de entrevistas a partir do manuseio do EIB pelo professor e de seu planejamento para usá-lo com os estudantes. Para a análise da apropriação original, foram realizadas observações de classe e entrevista. Dentre os resultados da pesquisa, discutimos as regras de ação e invariantes que compuseram seus esquemas de utilização do recurso e as diferentes orquestrações instrumentais que foram engendradas pelo professor. Grosso modo, os resultados sugerem que, apesar de utilizar a balança de dois pratos no ensino das Propriedades de Igualdade, ao resolver a ficha de exercícios e utilizar o EIB, o professor explorou as situações-problema predominantemente em uma perspectiva aritmética. Assim, o sinal de “=” foi tratado em seu sentido operacional, como indicador de um resultado.

Palavras-chave: Propriedades da Igualdade; Teoria dos Campos Conceituais; Abordagem Documental do Didático; Modelo de Apropriação de um recurso por um professor; Simulador digital de balança de dois pratos da PhET.

ABSTRACT

This research aims to analyze the appropriation of a digital two-pan balance for/in the teaching of Properties of Equality by a 6th-grade mathematics teacher. We refer to the two-pan balance simulator available on the Physics Education Technology (PhET) Platform, identified as the Basic Equality Explorer (BEE). On one hand, the research is grounded in the Theory of Conceptual Fields regarding the analysis of problem situations, operational invariants, and symbolic representations related to the concepts involved in the teaching and learning of the Properties of Equality. On the other hand, the Teacher's Resource Appropriation Model guided the analysis of the pre-appropriation and original appropriation phases of the BEE. Using the reflective investigation methodology, we developed a study on the resource system of the participating teacher, particularly analyzing their way of teaching the Properties of Equality in a 6th-grade class. The construction and analysis of data on the pre-appropriation process of the resource were conducted through interviews based on the teacher's handling of the BEE and their planning for its use with students. For the analysis of the original appropriation, classroom observations and interviews were carried out. Among the research results, we discuss the rules of action and invariants that composed their schemes of resource use, as well as the different instrumental orchestrations engendered by the teacher. Broadly speaking, the results suggest that, although the teacher used the two-pan balance in teaching the Properties of Equality when solving the worksheet and using the BEE, they predominantly explored problem situations from an arithmetic perspective. Thus, the "=" sign was treated in its operational sense, as an indicator of a result.

Keywords: Properties of Equality; Theory of Conceptual Fields; Documental Approach to Didactics; Teacher's Resource Appropriation Model; PhET digital two-pan balance simulator.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Exemplo de simulação no Explorador da Igualdade da PhET.....	18
Figura 2 - Material manipulável da balança de dois pratos e exercícios.....	22
Figura 3 - Exemplo de atividade proposta com balança de dois pratos.....	23
Figura 4 - Exemplo de respostas de estudantes para atividades com a balança de dois pratos.....	23
Figura 5 - Balança de dois pratos utilizada na atividade em sala de aula.....	24
Figura 6 - Balança virtual com representação de valores negativos.....	25
Figura 7 - Exemplo de identificação de sentença que representa uma equivalência.....	30
Figura 8 - Problema de estrutura multiplicativa (com todo desconhecido).....	31
Figura 9 - Problema de composição (com parte desconhecida).....	31
Figura 10 - Problema proposto pela professora durante a aula.....	34
Figura 11 - Imagens com a balança de dois pratos para elaboração de problemas.....	34
Figura 12 - Trecho do Livro dos mortos mostrando Anubis na “Pesagem do coração”.....	43
Figura 13 - Balança de dois pratos.....	44
Figura 14 - Exemplo sobre o peso metálico - LD da Coleção Desafios da Matemática.....	50
Figura 15 - Exemplo da diferença entre peso e massa na coleção A Conquista da Matemática.....	51
Figura 16 - Exemplo da Coleção Matemática Bianchini - Propriedades da igualdade.....	52
Figura 17 - Exemplo da Coleção Superação - Propriedades da igualdade.....	52
Figura 18 - Exemplo do LD do 6º ano da coleção Superação - Capítulo “Igualdade”.....	55
Figura 19 - Exemplo do LD do 6º ano da coleção Superação - Capítulo “Medidas de Massa”.....	55
Figura 20 - Modelo de apropriação de um recurso por um professor.....	64
Figura 21 - RESR de recursos de Tales.....	73
Figura 22 - Habilidade EF06MA14 no LD - A Conquista da Matemática.....	75
Figura 23 - Recurso indicado no LD do 6º ano - Coleção A Conquista da Matemática.....	76
Figura 24 - Slides introdutórios sobre o Princípio Aditivo e Multiplicativo do professor.....	77
Figura 25 - Ficha de exercícios do professor Tales.....	80
Figura 26 - Foto de caderno de um estudante do 6º ano.....	84
Figura 27 - Foto do caderno de um estudante - Resolução do item 02.....	85
Figura 28 - Item 03 da lista de exercícios do professor Tales.....	87
Figura 29 - Item 06 da lista de exercícios do professor Tales.....	89

Figura 30 - Item 05 e 07 da lista de exercícios do professor Tales.....	90
Figura 31 - Tela do EIB - Modo Básico.....	97
Figura 32 - Exemplo no EIB sobre a utilização do princípio aditivo na determinação do termo desconhecido.....	114

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Habilidades da BNCC.....	16
Quadro 2 - Elementos da organização matemática no Explorador Básico de Igualdade - PhET.....	19
Quadro 3 - Levantamento das pesquisas com estudantes na resolução de problemas com equação do 1º grau envolvendo a balança de dois pratos.....	20
Quadro 4 - Exemplos de Q1 e Q9.....	24
Quadro 5 - Pesquisas com análises de LD envolvendo a balança de dois pratos.....	26
Quadro 6 - Introdução ao conteúdo de equação do 1º grau.....	27
Quadro 7 - Distribuição das atividades que abordam equivalências usando recurso de balança.....	29
Quadro 8 - Pesquisas com análises da prática docente com o uso da balança de dois pratos.....	32
Quadro 9 - Resumo com as principais concepções do sinal de Igualdade.....	45
Quadro 10 - Significados do símbolo de Igualdade.....	46
Quadro 11 - Relações reflexiva, simétrica e transitiva.....	46
Quadro 12 - Princípios de equivalência.....	47
Quadro 13 - A balança de dois pratos em capítulos de LD do 6º ano - Medidas de Massa (MM) e de Propriedades de Igualdade (PP).....	49
Quadro 14 - Slides com situações sobre o Princípio Aditivo do professor.....	77
Quadro 15 - Slides com situações sobre o Princípio Aditivo do professor usando a balança.....	78
Quadro 16 - Adaptação do Problema 04 pelo professor.....	79
Quadro 17 - Adaptação do item 02 pelo professor.....	81
Quadro 18 - Adaptação do item 03 pelo professor.....	82
Quadro 19 - Análise da resolução do item 01 da ficha de exercícios do professor Tales.....	84
Quadro 20 - Análise da ficha de exercícios do professor Tales - item 02.....	86
Quadro 21 - Análise da ficha de exercícios do professor Tales - item 03.....	87

Quadro 22 - Item 04 da ficha de exercícios do professor Tales.....	88
Quadro 23 - Análise da ficha de exercícios do professor Tales - item 04.....	89
Quadro 24 - Análise da ficha de exercícios do professor Tales - item 06.....	90
Quadro 25 - Análise da ficha de exercícios do professor Tales - itens 05 e 07.....	91
Quadro 26 - Simulação no EIB do Item 02 da ficha de exercícios.....	92
Quadro 27 - Simulação no EIB do Item 03 da ficha de exercícios.....	93
Quadro 28 - Simulação no EIB do Item 04 da ficha de exercícios.....	94
Quadro 29 - Simulação no EIB do Item 07 da ficha de exercícios.....	95
Quadro 30 - Exemplo proposto por Tales sobre o cálculo da massa desconhecida.....	97
Quadro 31 - Análise da situação de cálculo da massa desconhecida proposta por Tales.....	98
Quadro 32 - Exemplo proposto por Tales sobre a comparação das massas de dois animais iguais ou diferentes - EIB no Modo Básico.....	98
Quadro 33 - Análise da situação de cálculo da massa desconhecida proposta por Tales.....	99
Quadro 34 - Comparação das massas de frutas iguais ou diferentes - EIB no Modo Básico..	99
Quadro 35 - Comparação das massas de frutas diferentes - EIB no Modo Básico.....	100
Quadro 36 - Exemplo com massas diferentes apresentado por Tales - Modo laboratório.....	101
Quadro 37 - Atividade sobre múltiplos apresentada por Tales.....	101
Quadro 38 - Orquestrações instrumentais previstas pelo professor Gilberto.....	103
Quadro 39 - OI - DT encaixada e simultânea com a OI - EP no Grupo A.....	104
Quadro 40 - OI - OEP sequenciada com OI-S no Grupo A.....	105
Quadro 41 - OI - DA encaixada e sequenciada com OI-S no Grupo A.....	106
Quadro 42 - OI - EP sequenciada com OI- OEP no Grupo B.....	107
Quadro 43 - OI-S encaixada e sequenciada com OI-DA no Grupo B.....	107

Quadro 44 - OI - DT encaixada e simultânea com a OI - OEP no Grupo C.....	108
Quadro 45 - OI - DA no grupo C.....	109
Quadro 46 - OI - EP encaixada e simultânea com a OI - OEP no Grupo C.....	109
Quadro 47 - OI - DA encaixada e simultânea com a OI - OEP no Grupo C.....	110
Quadro 48 - OI - EP encaixada e simultânea com a OI - OEP no Grupo D.....	111
Quadro 49 - OI - S no Grupo D.....	112
Quadro 50 - OI - EP encaixada e simultânea com a OI - DA no Grupo D.....	112
Quadro 51 - Esquemas de utilização do EIB na apropriação original do professor.....	113

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	15
1.1 DAS MOTIVAÇÕES INICIAIS À PROBLEMÁTICA DE PESQUISA.....	16
1.1.1 O que apontam as pesquisas sobre o uso da balança de dois pratos no ensino das propriedades da igualdade e de equações do 1º grau?.....	21
1.2 QUESTÕES E OBJETIVOS DA PESQUISA.....	36
1.3 ESTRUTURA DOS CAPÍTULOS DA DISSERTAÇÃO.....	38
2 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS.....	38
2.1 AS NOÇÕES DE CONCEITO E DE CAMPO CONCEITUAL.....	39
2.2 A RELAÇÃO DIALÉTICA ENTRE SITUAÇÕES E ESQUEMAS.....	41
2.3 O CAMPO CONCEITUAL CORRELATO AO TEMA DA PESQUISA.....	42
2.3.1 O princípio de equilíbrio da balança de dois pratos.....	44
2.3.2 O sinal de igual e seus significados: operacional e relacional.....	45
2.3.3 As relações de igualdade e os princípios de equivalência.....	47
2.3.3 Propriedades das operações com números naturais.....	48
2.3.4 As medidas de massa e as propriedades da igualdade.....	49
2.3.5 O termo desconhecido e a equação do 1º grau.....	54
3 AS BASES TEÓRICAS SOBRE A APROPRIAÇÃO DE RECURSOS POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA.....	57
3.1 A ABORDAGEM INSTRUMENTAL.....	57
3.2 A ABORDAGEM DOCUMENTAL DO DIDÁTICO.....	58
3.3 AS ORQUESTRAÇÕES INSTRUMENTAIS.....	60
3.4 A NOÇÃO DE APROPRIAÇÃO E SUAS FASES.....	61
3.5 O MODELO DE APROPRIAÇÃO DE UM RECURSO POR UM PROFESSOR.....	63
4 A METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO REFLEXIVA.....	66
4.1 OS PRINCÍPIOS DA METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO REFLEXIVA.....	66
4.2 A CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS SOBRE A FASE DE PRÉ-APROPRIAÇÃO.....	70
4.3 A CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS SOBRE APROPRIAÇÃO ORIGINAL.....	70
5 RESULTADOS DA PESQUISA.....	72
5.1 O PERFIL E O SISTEMA DE RECURSOS DO PROFESSOR TALES PARA O/NO ENSINO SOBRE AS PROPRIEDADES DE IGUALDADE NO 6º ANO.....	72
5.1.1 O uso da ficha de exercícios do professor, em sala de aula, sobre “Igualdade” e “Cálculo do Termo Desconhecido”.....	83
5.1.2 Análise a priori das possibilidades do uso do EIB relacionadas à ficha de exercícios do professor Tales.....	92
5.2 A PRÉ-APROPRIAÇÃO DO SIMULADOR EIB PELO PROFESSOR TALES.....	96
5.3 A APROPRIAÇÃO ORIGINAL DO SIMULADOR EIB PELO PROFESSOR.....	103
5.4 O PÓS-APROPRIAÇÃO ORIGINAL DO EIB PELO PROFESSOR TALES.....	114
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	117

1 INTRODUÇÃO

A presente pesquisa se insere no projeto “Praxeologias e Recursos para o Estudo de Relações da Igualdade em Sentenças Matemáticas no Ensino Fundamental” financiado pela Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE) no âmbito do Edital 35/2022 do Programa de Bolsas de Pós-Graduação (PBPG).

No decorrer deste capítulo, de forma introdutória, apresentamos as motivações iniciais que nos conduziram ao desenvolvimento da presente pesquisa que versa sobre: a apropriação de uma balança de dois pratos digital, ou seja, do simulador “Explorador da Igualdade Básico (EIB)” disponível na *Plataforma Physics Education Technology* (PhET) por um professor de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental.

Na sequência, expomos um levantamento acerca de estudos sobre o uso da balança de dois pratos para/no ensino das Propriedades da Igualdade e de Equações do 1º grau e como isso serviu de base para a construção da problemática e da tessitura do quadro teórico e metodológico da presente pesquisa. Bem como, o delineamento dos objetivos e por fim, a estrutura dos demais capítulos desta dissertação.

1.1 DAS MOTIVAÇÕES INICIAIS À PROBLEMÁTICA DE PESQUISA

O surgimento do nosso interesse acerca do estudo de/sobre recursos para/no ensino de Propriedades da Igualdade e Equações do 1º Grau, no 6º ano do Ensino Fundamental (EF) advém das pesquisas que desenvolvemos no âmbito do projeto “Trabalho documental docente: recursos dos (as)/para professores (as) de Matemática”, no curso de Licenciatura em Matemática (LM) da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), no seio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) e do grupo de pesquisa Laboratório Científico de Aprendizagem, Pesquisa e Ensino (LACAPE) da UFRPE.

Desde então, a escolha pelo cenário de pesquisa no 6º ano do EF, leva em conta o fato de que “o processo de transição da fase dos anos iniciais para a fase dos anos finais, da etapa do Ensino Fundamental, requer uma atenção cuidadosa para a sua especificidade, pois esta última deverá consolidar o caminho alicerçado na fase anterior” (Pernambuco, 2019, p.56). Ademais, sentimos que a partir da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) ocorreu uma formalização da Álgebra como área de conhecimento, de tal forma que nos interessamos em investigar os recursos voltados para o ensino da habilidade: EF06MA14 -

“Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas” (Brasil, 2018, p. 303). Ressaltamos que no Currículo de Pernambuco (Pernambuco, 2019a) temos a seguinte inserção de texto a essa habilidade: *“por exemplo, explorando a metáfora da balança”*¹.

No que diz respeito ao estudo dos objetos de conhecimento da Álgebra, como podemos verificar no Quadro 1, a habilidade EF06MA14 se destaca, consideravelmente, na transição entre os objetos de conhecimento do 3º, 4º e 5º anos (Relações de Igualdade, Propriedades da Igualdade, Noção de Equivalência) e previstos para o 7º ano (Equações polinomiais do 1º grau).

Quadro 1 - Habilidades da BNCC

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
3º ano	Relação de igualdade	(EF03MA11): Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.
4º ano	Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão	(EF04MA13): Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão para aplicá-las na resolução de problemas. (EF04MA14): Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.
	Propriedades da igualdade	(EF04MA15): Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.
5º ano	Propriedades da igualdade e noção de equivalência	(EF05MA10): Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. (EF05MA11): Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
6º ano	Propriedades da igualdade	(EF06MA14): Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
7º ano	Equações polinomiais do 1º grau	(EF07MA18): Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

Fonte: Brasil (2018).

Inicialmente, no âmbito do LCAPE e do PIBIC (Oliveira, 2020), desenvolvemos uma análise de livros didáticos (LD) do 6º ano aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2020 em torno da habilidade “EF06MA14”. Posteriormente,

¹ (EF06MA14PE) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas (**por exemplo, explorando a metáfora da balança**).

enveredamos pelo caminho de investigarmos recursos digitais possíveis de serem utilizados no estudo dos objetos de conhecimento (Quadro 1) relacionados à habilidade EF06MA14.

Na pesquisa do PIBIC (Oliveira, 2020), chamou-nos a atenção a tendência de introdução do tema Propriedades da Igualdade, nos LD do 6º ano, a partir do recurso da balança de dois pratos. A exemplo de outras pesquisas, como a de Oliveira e Corcho (2010), Santos (2021), Lima (2019), Silva (2023).

Grosso modo, podemos ponderar que o uso da balança de dois pratos relacionado ao estudo de equação do 1º grau nos LD não ocorre somente no Brasil. Ponte, Branco e Matos (2009) apontam que já no século XVI, em Portugal, nos livros de Álgebra de Pedro Nunes², esse recurso era usado para o ensino dos princípios de equivalência e práticas de resolução de equações. Nessa direção, Araújo (2009), ao analisar LD franceses do *collège*³ (Coleção DiMathème; Coleção Diabolo) demonstra situações em que a balança é utilizada em ambas coleções no estudo de equações do 1º grau. Tendo em vista, a utilização da técnica de neutralizar termos ou coeficientes, efetuando a mesma operação nos dois membros da igualdade, que se justifica pelos princípios de equivalência (aditivo e multiplicativo).

Como exemplo, no PNLD 2020, no LD da coleção “Araribá Mais Matemática”, nas orientações ao professor, afirma-se que a balança de dois pratos “contribui para a construção do sentido de equivalência que prevalece quando é feita a mesma operação com o mesmo valor, em cada membro da igualdade” (Gay; Silva, 2018 p. 68). E, que “o tema igualdade será mais bem compreendido pelos alunos por meio do uso de objetos concretos, como a balança de pratos em equilíbrio” (Gay; Silva, 2018, p. 69). Tais colocações favoráveis ao uso da balança de dois pratos ainda podem ser verificadas na coleção “Araribá Mais Matemática” no atual PNLD 2024. E, são estendidas a outros autores de LD. Nessa direção, podemos identificar na Coleção Desafios da Matemática: “A ideia de associar o equilíbrio da balança às condições de igualdade ou de desigualdade em uma sentença matemática favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático por analogia” (Silveira, 2022, p. 15).

Além disso, podemos identificar nos LD sugestões sobre o uso de outros recursos relacionados à representação da balança de dois pratos, na versão digital e com o uso de material concreto. Como o recurso indicado no LD do 6º ano da coleção “A Conquista da Matemática” (Giovanni Júnior, 2022): o *Polypad* (<https://polypad.amplify.com/pt/p#algebra>). Já na coleção Desafios da Matemática sugere-se:

² O português Pedro Nunes (1502-1578) foi um dos matemáticos europeus de maior fama no século XVI. Para saber mais: https://books.google.com.br/googlebooks/images/kennedy/insert_link.png.

³ Correspondente aos anos finais do Ensino Fundamental brasileiro.

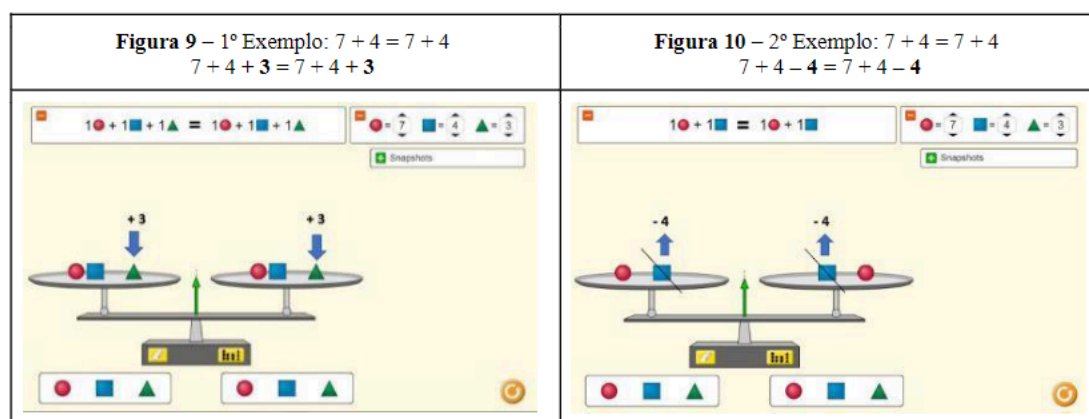
Para o trabalho com igualdades e desigualdades, se possível, construa uma balança com os estudantes, utilizando um cabide, dois barbantes presos nas extremidades do cabide e sacos presos a esses barbantes. Coloque objetos nos sacos e mostre aos estudantes que, quando os sacos estão na mesma altura, a balança fica em equilíbrio (ou seja, existe uma igualdade entre as medidas de massa); quando um saco está mais baixo que outro, a balança fica em desequilíbrio (ou seja, há uma desigualdade entre as medidas de massa) (Silveira, 2022, p.15, manual do professor).

Já no estudo que desenvolvemos no PIBIC, em torno da habilidade EF06MA14 (Oliveira, 2021), buscamos analisar o recurso “Aprendendo equações através das balanças (https://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/fabrica_virtual/), da Rede Interativa Virtual de Educação (RIVED) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUI), haja vista, pesquisas já realizadas com o uso desse recurso (França, 2019; Fuck; Almeida; Pereira, 2017). Mas, podemos constatar que esse recurso já não se encontrava disponível na internet. De forma, que investigamos possibilidades de uso das balanças digitais propostas na *Plataforma Physics Education Technology* (PhET)⁴, da Universidade do Colorado Boulder, a saber:

- Explorador da Igualdade (EI):
(https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/equality-explorer);
- Explorador de Igualdade Básico (EIB):
(https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/equality-explorer-basics).

Por exemplo, na Figura 1, podemos verificar uma possibilidade de exploração do recurso “Explorador da Igualdade”, no modo laboratório, para o desenvolvimento das habilidades (EF04MA14), (EF04MA15) e (EF06MA14). Ou seja, um exemplo versando sobre a noção de equivalência (por adição e subtração de objetos com as mesmas medidas).

Figura 1 - Exemplo de simulação no Explorador da Igualdade da PhET



Fonte: Almeida, Oliveira e Espíndola (2021, p.843).

⁴ Tais recursos na PhET são gratuitos e de fácil acesso, podendo ser usados *on-line* ou *off-line*.

Ademais, à luz da Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1999), no Quadro 2, expomos elementos de organizações matemáticas (tipos de: tarefas, técnicas, tecnologias) possíveis de ser implementadas em sala de aula por meio do Explorador da Igualdade Básico:

Quadro 2 - Elementos da organização matemática no Explorador Básico de Igualdade - PhET

Tipos de Tarefas	Descrição das técnicas	Tecnologias
T₁: Mostrar, por meio de exemplos, uma relação entre quantidades equivalentes de objetos.	τ_1: Colocar objetos em ambos os lados da balança do EBI até obter o seu equilíbrio (O_1).	θ_1: Noção de igualdade em uma situação-problema, envolvendo equilíbrio. θ_2: Interpretação do sinal de igualdade como equivalência.
T₂: Escrever diferentes sentenças de adições de números naturais que resultem na mesma soma.	τ_2: Aplicar τ_1 . Relacionar os objetos apresentados em cada lado da balança aos seus valores numéricos (O_3). Converter a figura dos objetos em linguagem numérica na sentença de adição (O_2).	θ_1, θ_2 θ_3: Identificação do sentido de igualdade em uma operação numérica de adição.
T₃: Mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona um mesmo número a cada um desses termos.	τ_3: Aplicar τ_2 . Adicionar um mesmo tipo de objeto em ambos os lados da balança para verificar seu equilíbrio (O_1) e verificar a igualdade na sentença de adição (O_2).	$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ θ_4: Princípio aditivo de equivalência.
T₄: Mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se subtrair um mesmo número a cada um desses termos.	τ_4: Aplicar τ_2 . Subtrair um mesmo tipo de objeto em ambos os lados da balança para verificar seu equilíbrio (O_1) e verificar a igualdade na sentença de adição (O_2).	$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ θ_4: Princípio aditivo de equivalência.
T₅: Determinar o termo desconhecido em uma igualdade matemática envolvendo adição e subtração.	τ_5: Colocar apenas em um lado da balança um dos objetos (círculo ou quadrado). Adicionar objetos que representam o algarismo "1" em um ou dois lados da balança (O_1). Subtrair um mesmo número em ambos os lados da balança até chegar no valor do objeto (círculo ou quadrado) (O_2).	$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ θ_4: Princípio aditivo de equivalência.
T₆: Determinar o termo desconhecido em uma igualdade matemática envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão.	τ_6: Colocar apenas em um lado da balança um dos objetos (círculo ou quadrado). Adicionar objetos que representam o algarismo "1" em um ou dois lados da balança (O_1). Subtrair uma mesma quantidade em ambos os lados da balança, verificando o seu equilíbrio. <i>Dividir, por um mesmo número, os dois membros da balança para chegar ao valor do objeto (círculo ou quadrado) (O_2).</i>	$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ θ_4: Princípio aditivo de equivalência. θ_5: Princípio multiplicativo de equivalência.

Fonte: Oliveira, Almeida e Espíndola (2021, p.5).

Tendo em vista as pesquisas já realizadas (Oliveira, 2020, 2021; Oliveira, Almeida e Espíndola, 2021 e Almeida, Oliveira e Espíndola, 2021), na continuidade de nossos estudos sobre a habilidade EF06MA14 da BNCC, já no âmbito da construção da presente pesquisa de mestrado, consideramos inicialmente essencial, fazer um levantamento bibliográfico, em torno das dissertações e teses já existentes versando sobre o uso da balança de dois pratos no ensino de Propriedades da Igualdade e de Equação do 1º grau, na versão analógica ou digital (da PhET ou de outras plataformas) ou em representações presentes nas situações-problema de livros didáticos ou de outros recursos disponíveis na internet.

1.1.1 O que apontam as pesquisas sobre o uso da balança de dois pratos no ensino das propriedades da igualdade e de equações do 1º grau?

Por meio de uma busca no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes (CTDC), verificamos as pesquisas realizadas entre 2014-2025 contendo análises em torno do uso da balança de dois pratos nos anos iniciais e finais do EF. Usando os critérios de busca “Equação do 1º Grau”, “balança de dois pratos”, “Equações do 1º Grau”, “Equações do primeiro grau” e “Propriedades da Igualdade”; encontramos 39 dissertações, Excluindo-se os trabalhos repetidos, não disponíveis no CTDC e anteriores à Plataforma Sucupira, analisamos 26 dissertações.

Vale explicar, que a partir do uso da tecla “Ctrl F” fomos lendo em todas as 26 dissertações, os dados referentes à balança de dois pratos. Diante disso, selecionamos 13 trabalhos que julgamos abordar de forma mais consistente esse recurso. Essas dissertações foram organizadas da seguinte forma: 1. Pesquisas com estudantes na resolução de problemas com equação do 1º grau envolvendo a balança de dois pratos; 2. Pesquisas em livros didáticos sobre problemas envolvendo a balança de dois pratos e 3. Pesquisas sobre a prática docente no ensino de equações do 1º grau usando a balança de dois pratos.

- **Pesquisas com estudantes na resolução de problemas com equação do 1º grau envolvendo a balança de dois pratos**

No Quadro 3, apresentamos os 7 trabalhos que identificamos sobre a resolução de problemas com equação do 1º grau envolvendo a balança de dois pratos por estudantes. Isto correspondeu a maior parte das pesquisas identificadas no CTDC.

Quadro 3 - Levantamento das pesquisas com estudantes na resolução de problemas com equação do 1º grau envolvendo a balança de dois pratos

Tipo	Título	Autor(a)	Ano	Instituição
D1	Aprendizagem significativa de equações de primeiro grau: um estudo sobre a noção de equivalência como conceito subsunçor.	Vivianne Beatriz Hummes	2014	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
D2	Uma proposta para o ensino e aprendizagem de equações e inequações do 1º grau através de recursos lúdicos e manipuláveis.	Prisciane Valleriote Pinheiro	2019	Universidade Estadual do Norte Fluminense

D3	Isolar o x, isolar o y....e agora? recursos tecnológicos digitais como mediadores na resolução de equações do 1º grau.	Rosiméri Corrêa França	2019	Colégio Pedro II
D4	Atividades investigativas na resolução de equações do 1º grau por alunos do sétimo ano.	Viviane Menezes de Souza Machado	2019	Universidade Federal do Acre
D5	Equação do 1º grau: a compreensão da equivalência nos anos iniciais.	Nayana Silva Santos Araujo	2020	Universidade Estadual de Santa Cruz
D6	Ensino de Equação Polinomial do Primeiro Grau por meio do uso da balança de dois pratos.	Carlos Alberto Souza Araujo	2022	Universidade Federal do Vale do São Francisco
D7	O ensino de equações com a utilização de uma balança virtual que inclui a representação de números negativos.	Lucas Oliveira de Carvalho	2023	Universidade Federal de São João Del Rei

Fonte: Autoria própria.

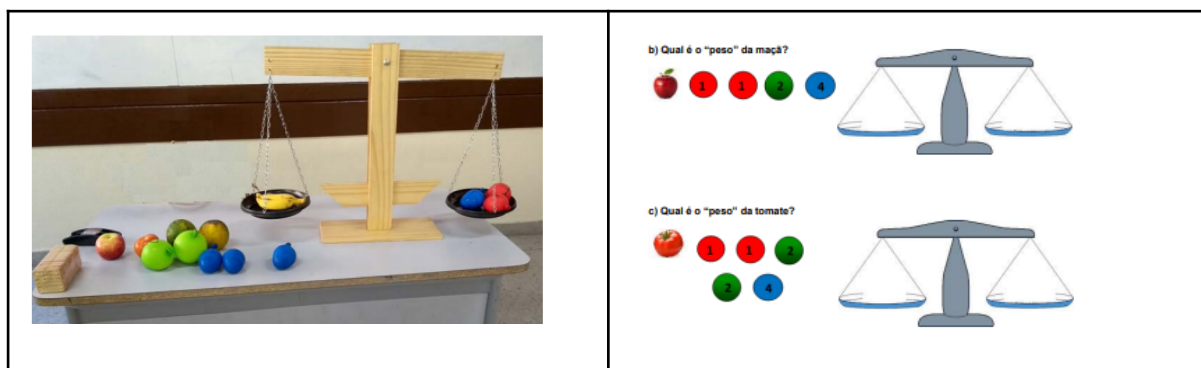
Na **D1**, Hummes (2014), com base na Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) (Ausubel, 1980) buscou compreender se o conceito de equivalência, a partir da associação entre o equilíbrio de uma balança de dois pratos e a igualdade existente entre os termos de uma equação, pode facilitar a Aprendizagem Significativa de equações do primeiro grau? Em sua pesquisa, foram utilizadas as seguintes balanças digitais:

- Objeto Digital de Aprendizagem (ODA): Balanza algebraica (http://nlvm.usu.edu/es/nav/topic_t_2.html).
- ODA: Balanza algebraica - que utiliza também números negativos. (http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_324_g_4_t_2.html?open=instructions&from=topic_t_2.html).
- ODA: Equação do 1º Grau (<http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/381>).

Hummes (2014) enfatiza que durante as atividades com os ODAs da Balanza Algebraica os alunos puderam manipular os pesos e blocos de forma dinâmica, o que permitiu que compreendessem as operações necessárias para resolver as equações. No âmbito da TAS, “os alunos demonstraram que o conceito de equivalência foi um conceito âncora para o aprendizado de equações do primeiro grau” (Hummes, 2014, p. 100). Entretanto, a autora aponta que a balança de dois pratos não é suficiente por si só para garantir a aprendizagem significativa uma vez que, embora a noção de equivalência seja um conceito fundamental, outros aspectos, como a linguagem algébrica e a representação simbólica também precisam ser trabalhados de forma intencional.

Na **D2**, Pinheiro (2019) ao apresentar uma proposta lúdica para o ensino de Equações e Inequações do 1º grau para o Ensino Fundamental, para estudantes do 7º ano, ela partiu do manuseio de uma balança de dois pratos (Figura 2) e bolinhas com pesos, pacotes de biscoito, frutas e verduras. Por meio da experimentação de situações diversas com esse recurso, os estudantes foram convidados a registrar os resultados em papel e lápis.

Figura 2 - Material manipulável da balança de dois pratos e exercícios



Fonte: Machado (2019, p. 45-47).

A manipulação dos objetos no recurso (Figura 2), de forma anterior, à proposição de tarefas propostas em LD envolvendo a balança de dois pratos, de acordo com Pinheiro (2019), facilitou a compreensão dos estudantes sobre o princípio aditivo no processo de resolução de equações do 1º grau.

Na **D3**, França (2019) analisou em que medida o uso de tecnologias digitais pode minimizar as dificuldades dos alunos do 3º ano do Ensino Médio, de um colégio estadual do Rio de Janeiro, na resolução de equações do 1º grau. Neste contexto, ela utilizou:

- A “Balança” da Rede Interativa Virtual de Educação (RIVED) - https://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/fabrica_virtual/
- PAT2Math - (Personal Affective Tutor to Math)⁵.

Sobre os resultados de sua pesquisa, França (2019), destaca a ineficiência dos recursos tecnológicos se não estiverem inseridos em uma sequência didática cuidadosamente planejada para esse fim. Sendo necessária a mobilização de conhecimentos tecnológicos e pedagógicos do professor para alcançar os objetivos traçados para a aprendizagem dos estudantes.

Na **D4**, Machado (2019), buscou compreender como atividades investigativas com equações do 1º grau contribuem para a formação do pensamento algébrico de estudantes de uma turma de 7º ano. Com base em Ponte, Brocardo e Oliveira (2016): exploração e formulação de questões; conjecturas; testes e reformulação e justificação e avaliação. Na

⁵ Para saber mais sobre o PAT2Math, acesse : <http://pat2math.unisinos.br>.

Figura 3, expomos uma das situações-problema que foi proposta aos estudantes envolvendo a balança de dois pratos.

Figura 3 - Exemplo de atividade proposta com balança de dois pratos

Atividade 1 – A figura a seguir representa uma balança em equilíbrio. Escreva duas sentenças matemáticas que representam essa situação, sabendo que o prato direito terá o peso de 40 kg.

Figura 4: Balança em equilíbrio



Fonte: Machado (2019, p. 45).

Para a atividade (Figura 3), na análise de Machado (2019), como podemos visualizar na Figura 4, a concepção de Educação Algébrica linguístico-pragmática explica o pensamento da aluna, pois vincula o papel da Álgebra como instrumento de resolução de problemas. Já o estudante Dutra usou uma sentença diferente para cada lado da balança, mas entendeu que a balança deveria continuar em equilíbrio, por isso os resultados tinham que ser iguais. Ele, além de pensar algebricamente, consegue usar uma linguagem algébrica na resolução.

Figura 4 - Exemplo de respostas de estudantes para atividades com a balança de dois pratos

Exploração e formulação de questões	ESQUERDO $20 + 20 =$ 40 DIREITO $2 + 2 + 6 + 30 =$ 40	Exploração e formulação de questões	$2x - 40 = 40$ $4 \cdot 30$
Conjecturas	Procurei posição numérica que se aproximasse de 40 e que fosse par (20+20) e (2+2+6+30).	Conjecturas	Fig. 1 Fiz duas contas, uma equação e um multiplicação normal, deram a igualdade 40
Testes e reformulação	$20 + 20 = 40$ $2 + 2 + 6 + 30 = 40$	Testes e reformulação	$2x - 40 = 40$ $2x = 40 + 40$ $2x = 80$ $x = 40$ $4 \cdot 30 = 120$ $120 - 80 = 40$
Justificação e avaliação	As duas contas estiveram certas, pois as soma deram 40.	Justificação e avaliação	As duas deram a mesma quantidade, 40

Resolução da estudante Santana.

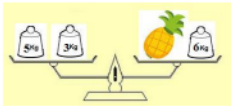
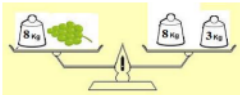
Resolução do estudante Dutra.

Fonte: Machado (2019, p. 52-53).

Na **D5**, Araujo (2020), investigou o desempenho e as estratégias de resolução utilizadas por alunos do 5º ano, na resolução de problemas envolvendo equação do 1º grau, no que diz respeito à Equivalência. Dentre os resultados, verificou-se que apenas 7 dentre 99 alunos do 5º ano conseguiram responder corretamente à Questão 9 (Q9) relacionada à

Questão 1 (Q1). Esta última obteve 43 acertos (item a) e 45 acertos (item b).

Quadro 4 - Exemplos de Q1 e Q9

Q9: Escreva uma expressão matemática que possa representar o equilíbrio das balanças da Q1.	Q1: Sabendo que as balanças seguintes estão equilibradas, ou seja, o peso no prato da direita é o mesmo peso no prato da esquerda, descubra qual o peso de cada uma das frutas: a)  b) 
--	--

Fonte: Araujo (2020, p. 115).

Dentre as conclusões de sua pesquisa, Araujo (2020), sinaliza que o ícone da balança é importante para o entendimento e introdução do ensino de equação. Mas, é preciso explorar o significado relacional da igualdade; pois, essa exploração pode auxiliar o entendimento das propriedades simétrica, reflexiva e transitiva, próprias da relação de Equivalência. Além disso, destaca-se que é preciso trabalhar a transposição entre o ícone e a sentença matemática, talvez trabalhando as duas formas de maneira simultânea; admitir e trabalhar as respostas dos alunos a partir das diversas formas de representação como, por exemplo, a retórica, a sincopada, a icônica e não somente a simbólica.

Na **D6**, Araujo (2023), tratou o uso dos materiais manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de Matemática, em específico a utilização da balança de dois pratos no ensino de cálculo da raiz de uma equação de 1º grau. A pesquisa ocorreu com 7 alunos do 8º ano do EF. Nessa pesquisa, partiu-se de um diagnóstico e depois foi proposta a construção de uma balança de dois pratos, usando um cabide, linha de nylon e isopor de marmita (Figura 5). Por fim, realizou-se outro diagnóstico.

Figura 5 - Balança de dois pratos utilizada na atividade em sala de aula

	Manual de orientações de como construir a balança: 1- Fura as duas marmitas de isopor (ou outro material escolhido para os pratos da balança) em três pontos igualmente espaçados. 2- Amarra em cada marmita um pedaço de fio, mas tem cuidado que o fio tem de ser do mesmo tamanho. 3- Pendura as marmitas de isopor no cabide. 4- Pendurar o cabide, de modo que os pratos da balança não toquem em nada. 5- Testar a balança com a mesma quantidade de bolas de gude para verificar se a balança fica em equilíbrio.
---	---

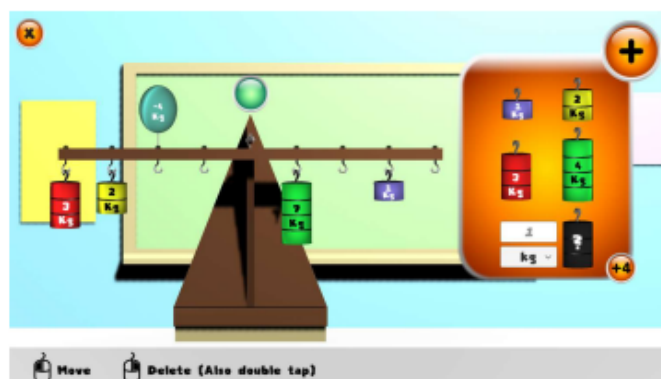
Fonte: Araujo (2023, p. 51).

Araujo (2023), aponta que mesmo tendo realizado o uso de material manipulável (Figura 5), pode-se perceber no pré-diagnóstico e no pós-diagnóstico que os estudantes

preferiram utilizar outras técnicas de resolução de equações. Isso ficou perceptível, pois, mesmo conseguindo chamar a atenção deles com a construção e o uso de um material manipulável, não se chegou ao objetivo definido na pesquisa, que seria o entendimento e domínio da técnica da realização de mesma operação em ambos os membros. Possivelmente, por maior familiaridade, por exemplo, com a técnica de transposição de termos e de contagem (cálculo mental). Ademais, pontua-se sobre as limitações da aplicação da balança: “vale ressaltar que nem toda equação pode ser representada na balança. Por exemplo, a equação com incógnita de valor negativo ou racional” (Araujo, 2023, p. 64).

Na **D7**, Carvalho (2023), buscou analisar a aplicabilidade em sala de aula de uma balança de torque virtual, criada pelo pesquisador, para representar de forma interativa uma equação do 1º grau. Utilizou-se uma balança projetada com a capacidade de modelar o conjunto dos números racionais positivos (Q^+) e o simétrico desse conjunto. Isto é, a manipulação de pesos de valores positivos e negativos. Essa balança virtual foi desenvolvida na plataforma Unity, um programa de computador para desenvolvimento de jogos eletrônicos.

Figura 6 - Balança virtual com representação de valores negativos



Fonte: Carvalho (2023, p. 31).

Carvalho (2023), pondera que mesmo com a utilização da balança de torque virtual, a principal dificuldade ainda apresentada pelos alunos foi referente às operações compensatórias. Aparentemente, eles entenderam os conceitos de equilíbrio e igualdade matemática, e que esses estão interligados. Porém, “mesmo relacionando esses conceitos com a resolução de expressões algébricas, mais da metade dos alunos ainda demonstraram um conhecimento insuficiente para formalizar e sistematizar certas técnicas de resolução ao tentarem descobrir o valor desconhecido da equação” (Carvalho, 2023, p.54).

Diante do mapeamento no CTDC (Quadro 3), das pesquisas realizadas com estudantes sobre a resolução de problemas com equação do 1º grau envolvendo a balança de dois pratos,

podemos inferir o seguinte:

- As pesquisas com balança de dois pratos tem sido proposta aos estudantes na resolução de problemas, a partir da elaboração de sequências didáticas com testes diagnósticos baseados em uma diversidade de recursos: simuladores digitais disponíveis na internet (ex. Balança Algebraica) ou produzidos pelo pesquisador (ex. plataforma Unity, Figura 6); confeccionados em madeira (Figura 2); uso de materiais alternativos (ex. cabides de roupa, Figura 5); uso de problemas dos LD ou de sites da internet.
- As pesquisas com os estudantes têm revelado dificuldades na resolução de problemas envolvendo a balança de dois pratos, sobretudo em relação ao domínio da linguagem algébrica; a transposição entre o ícone desse recurso e a sentença matemática e a compreensão e utilização do princípio aditivo e multiplicativo na resolução de equações.
- As pesquisas versando sobre a resolução de problemas pelos estudantes envolvendo o uso da balança de dois pratos apontam a necessidade de um planejamento criterioso para o uso desse recurso em sala de aula, levando em conta as suas limitações e seus benefícios.

Na sequência do mapeamento das pesquisas, apresentamos aquelas voltadas especificamente para a análise de LD.

• **Análise de livros didáticos sobre problemas envolvendo a balança de dois pratos**

No CTDC, identificamos 4 dissertações (D) que desenvolveram análises sobre o uso da balança de dois pratos em livros didáticos, expostas no Quadro 5.

Quadro 5 - Pesquisas com análises de LD envolvendo a balança de dois pratos

D	Título	Autor	Ano	Instituição
D8	Conversando com o livro didático: o que está sendo explicado sobre equações de primeiro grau?	Fernanda de Abreu Lima	2019	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
D9	Equação do 1º grau em livros didáticos de matemática antes e após a BNCC.	Andre Delfino dos Santos	2021	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
D10	A inserção da álgebra nos anos iniciais com ênfase no pensamento algébrico: uma análise sob a ótica da teoria antropológica do didático.	Reinaldo Manoel da Silva	2022	Universidade Federal de Pernambuco

D11	Noções iniciais de equações do 1º grau em livros didáticos de matemática para o ensino fundamental.	Gabryella Vasconcelos da Silva	2023	Universidade Federal de Pernambuco
-----	---	--------------------------------	------	------------------------------------

Fonte: Autoria própria.

Na **D8**, Lima (2019), pesquisou o ensino introdutório das equações de 1º grau em consonância com o conceito de emancipação intelectual. Por meio do papel de uma agente questionadora e explicadora (a pesquisadora). Ao analisar a abordagem sobre equações do 1º grau no LD da coleção *Praticando Matemática – 7º ano* (Andrini; Vasconcellos, 2015), Lima (2019) chama a atenção, por exemplo, ao fato de o uso da balança funcionar como um recurso do tipo “*embrutecedor - faça assim*”. Pois, dizer que as equações funcionam de modo semelhante ao de uma balança equivale a dizer que é *quase a mesma coisa*. “No entanto, [...] entre equações e balanças de dois pratos há diferenças consideráveis, conseguimos produzir significado apenas para algumas equações” (Lima, 2019, p. 65).

Em **D9**, Santos (2021, p. 103), analisou como o ensino da equação do 1º grau é abordado em LD de Matemática antes e após a publicação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)⁶. No Quadro 6, temos como Santos (2021), demonstra a introdução de equação do 1º grau, presente em 5 de 8 LD analisados.

Quadro 6 - Introdução ao conteúdo de equação do 1º grau

Título – ano de publicação	Introdução ao conteúdo de equação 1º grau
Tempo de Matemática (2010)	Traz a imagem de uma balança em equilíbrio afirmando que “como a balança está em equilíbrio, temos ‘pesos’ iguais nos dois pratos.” (NAME, 2010, p.93)
Matemática do Cotidiano (2015)	Possui a imagem de uma balança e a seguinte afirmação: “antes do surgimento das balanças digitais, para saber o ‘peso’ de alguma coisa se utilizavam balanças de dois pratos. Atualmente essas balanças podem ser encontradas em antiquários ou museus, mas ainda são muito úteis para aprender matemática.” (BIGODE, 2015, p. 164)
Matemática Ideias e Desafios (2015)	Inclui a imagem de uma balança em equilíbrio afirmando que “a ilustração ao lado mostra uma balança de dois pratos equilibrada. Quando isso ocorre, a massa dos objetos colocados em um prato é igual a massa dos objetos que estão no outro prato.” (MORI; ONAGA, 2015, p.148).
Matemática Bianchini (2018)	Há a imagem de uma balança afirmando que “perceba que ela está em equilíbrio, pois os pratos estão na mesma altura, ou seja, o total da massa dos objetos colocados no prato 1 é igual ao total da massa dos objetos colocados no prato 2. Representando por x a massa, em grama, de cada pote de mel, podemos

⁶ LD's: Tempo de Matemática (Name, 2010); Projeto Teláris Matemática (Dante, 2015); Matemática do Cotidiano (Bigode, 2015); Matemática Ideias e Desafios (Mori e Onaga, 2015); Matemática Bianchini (Bianchini, 2018); Coleção Apoema Matemática (Longen, 2018); A Conquista da Matemática (Giovanni Júnior e Castrucci, 2018) e Araribá Mais Matemática (Gay e Silva, 2018).

	escrever: $x + x + 50 = x + 200$. Essa sentença matemática é expressa por uma igualdade e apresenta um elemento desconhecido. Ela é um exemplo de equação.” (BIANCHINI, 2018, p. 121).
Araribá Mais Matemática (2018)	A introdução trata da igualdade através da imagem de uma balança em equilíbrio , afirmando que “para que uma balança de dois pratos fique equilibrada, é necessário que a massa total dos objetos que estiverem em um dos pratos seja igual à massa total dos objetos que estiverem no outro prato. Nesse caso, podemos representar a massa dos objetos que estão nos dois pratos com uma sentença matemática em que há o sinal de igual (=), denominada igualdade.” (GAY; SILVA, 2018, p.170).

Fonte: Adaptado de Santos (2021, p.102, grifo nosso).

Além das observações sobre a introdução do conteúdo Equação do 1º Grau nos LD analisados (Quadro 6), na pesquisa de Santos (2021), ele afirma: “Em todos os livros analisados, percebemos a forte tendência, em exemplos e exercícios, da utilização da balança em equilíbrio e, em alguns livros, também a balança em desequilíbrio”. O que nos leva a considerar que o uso da balança de dois pratos como recurso didático para o ensino de equações do 1º grau é amplamente difundido nos livros didáticos de Matemática. De tal forma que se pode perceber que há uma tradição em relação ao uso da imagem da balança no ensino das equações, como algo já arraigado na cultura escolar.

Na **D10**, Silva (2022), buscou analisar à luz da Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1999), a BNCC e as praxeologias matemáticas presentes nas duas coleções mais vendidas no PNLD (2019) buscando indícios de tarefas que possibilitem o trabalho com o pensamento algébrico dos estudantes nos anos iniciais. Na pesquisa de Silva (2022), especialmente, sobre a categoria “Explorando a igualdade como expressão de uma relação entre quantidades” se destaca que a balança é um recurso muito usado para desenvolver este conhecimento nos alunos. Afirma-se que “é comum, nos livros didáticos encontrarmos atividades que exploram este tipo de situação fazendo uso deste recurso para trabalhar com a relação de equivalência entre dois membros da equação separados pelo sinal de “=” (Silva, 2022, p. 45).

A propósito da análise das praxeologias matemáticas, essa ocorreu em relação ao bloco formado pelo tipo de tarefa e pela técnica $[t, \tau]$ denominado de bloco prático-técnico, presentes nos dois LD (Buriti Mais Matemática e Ápis) dos anos iniciais. No Quadro 7, expomos o panorama das tarefas (TI) e dos subtipos de tarefas (ti) as quais é trabalhado o aspecto relacional do sinal da igualdade, identificadas por Silva (2022).

Quadro 7 - Distribuição das atividades que abordam equivalências usando recurso de balança

Tipo de Tarefa		Tarefa (t)
TI5	Justificar equivalência em balança de dois pratos.	ti 5.1 - Justificar equivalência em balança de dois pratos a partir da adição da mesma quantidade em ambos os membros
		ti 5.2 - Justificar equivalência em balança de dois pratos a partir da subtração da mesma quantidade em ambos os membros.
		ti 5.3 - Justificar equivalência em balança de dois pratos a partir da multiplicação dos dois membros por uma mesma quantidade.
		ti 5.4 - Justificar equivalência em balança de dois pratos a partir da divisão dos dois membros por uma mesma quantidade
TI6	Identificar sentença que representa uma equivalência.	ti 6.1 - Identificar a sentença que apresenta uma dada equivalência.
TI7	Representar uma equivalência através de sentenças.	ti 7.1 - Representar através de uma sentença uma equivalência qualquer.
TI8	Criar uma situação de equivalência.	ti 8.1 - Criar uma equivalência a partir de pesos já determinados.
TI9	Determinar a massa desconhecida de um objeto em situações de balanças de dois pratos.	ti 9.1 - Determinar o valor unitário da massa de um objeto numa dada equivalência.
		ti 9.2 - Determinar o valor unitário da massa de dois objetos tomando a massa de um deles como referência para descobrir do outro.

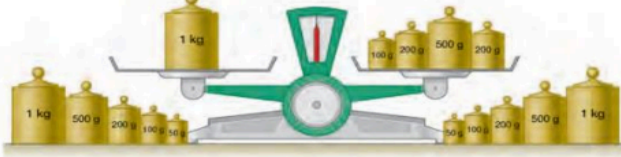
Fonte: Silva (2022, p. 87-88, adaptado).

Sobre o Quadro 7, os tipos de tarefas TI5, TI6 e TI7 configuram-se apenas na coleção Buriti especificamente nas turmas do 4º ou 5º ano. TI9 apresentou uma maior incidência nessa coleção e também em relação à quantidade de tarefas que abordam o aspecto da equivalência.

Um exemplo da tarefa “TI6” (Identificar sentença que representa uma equivalência) e do subtipo de tarefa “ti 6.1” (Identificar a sentença que representa a equivalência entre várias sentenças), pode ser visto no “item a” da Figura 7 (a seguir), cuja técnica se refere à: “ti 6.1.1” - Partindo da ideia de equilíbrio da balança perceber que a sentença que o sinal que deve separar ambos os membros é o sinal de igualdade, pois ambos os membros têm mesmo valor.

Figura 7 - Exemplo de identificação de sentença que representa uma equivalência

2 Observe a balança de dois pratos que está em equilíbrio.



a) Entre as sentenças a seguir, marque com um **X**, qual representa a relação entre as massas dos pratos da balança acima.

☒ $1\ 000\text{ g} = 100\text{ g} + 200\text{ g} + 500\text{ g} + 200\text{ g}$

☐ $1\ 000\text{ g} > 100\text{ g} + 200\text{ g} + 500\text{ g} + 200\text{ g}$

☐ $1\ 000\text{ g} < 100\text{ g} + 200\text{ g} + 500\text{ g} + 200\text{ g}$

b) O que acontecerá com a balança se colocarmos um peso de 500 g em cada um dos pratos? **Continuará em equilíbrio.**

c) Represente essa nova situação por meio em uma sentença.
 $500\text{ g} + 1\ 000\text{ g} = 100\text{ g} + 200\text{ g} + 500\text{ g} + 200\text{ g} + 500\text{ g}$

Fonte: Silva (2022, p. 84) - Mais Buriti Matemática, 5º ano (2017 p.124).

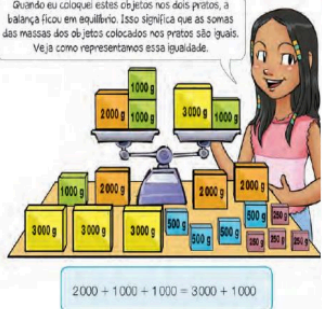
No “item c”, da Figura 7, podemos constatar um exemplo de outro tipo de tarefa, “T 17 - Representar uma equivalência através de sentenças. Especialmente, para o subtipo “ti 17 - representar através de uma sentença uma equivalência qualquer” (Silva, 2022).

Sobre a **D11**, Silva (2023), analisou sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), tipos de situações relacionadas às estruturas aditivas e multiplicativas propostas para desenvolver as primeiras noções relacionadas às equações do 1º grau em livros didáticos (LD) de matemática do 4º ano, do 5º ano e do 6º ano do ensino fundamental. Dentre todas as situações analisadas, o recurso que se sobressaiu foi a representação da balança de dois pratos. No âmbito do campo das estruturas aditivas, as situações de composição foram as mais recorrentes. Essas situações correspondem a relações entre parte-todo, sendo uma das partes ou do todo desconhecido. Por exemplo, na Figura 8, temos um exemplo do campo aditivo, de problemas de composição em que conhecemos as partes e temos o todo desconhecido.

Figura 8 - Problema de estrutura multiplicativa (com todo desconhecido)

1) Veja o experimento realizado por Camila.

Quando eu coloquei estes objetos nos dois pratos, a balança ficou em equilíbrio. Isso significa que as somas das massas dos objetos colocados nos pratos são iguais. Veja como representamos essa igualdade.



2000 + 1000 + 1000 = 3000 + 1000

Agora, responda:

- Se Camila colocar um objeto de 2000 g em cada um dos pratos da balança, ela continuará em equilíbrio? Justifique sua resposta.
- Escreva uma igualdade representando essa situação.
- E se Camila colocar um objeto de 250 g em um prato e um de 500 g no outro prato? O que irá ocorrer?
- Indique um modo de Camila acrescentar dois objetos em cada prato e a balança continuar em equilíbrio.

Fonte: Buriti mais (2017, p. 55).

Parte	4000	+}	?	Todo
Parte	250			

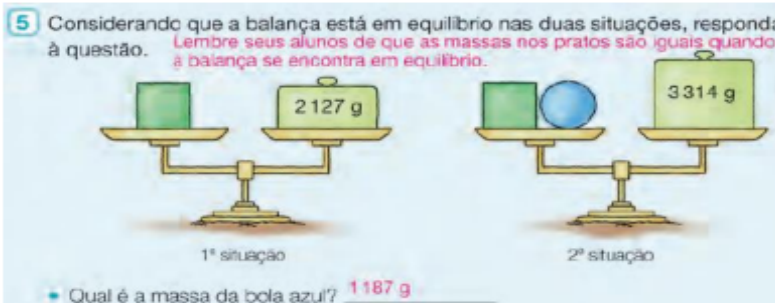
Parte	4000	+}	?	Todo
Parte	500			

Fonte: Silva (2023, p. 102-103, adaptado).

Já na Figura 9, temos um exemplo em que é necessário determinar uma parte desconhecida.

Figura 9 - Problema de composição (com parte desconhecida)

5) Considerando que a balança está em equilíbrio nas duas situações, responda à questão. Lembre seus alunos de que as massas nos pratos são iguais quando a balança se encontra em equilíbrio.



1ª situação

2ª situação

Qual é a massa da bola azul? 1187 g

Fonte: Buriti mais (2017, p. 63).

Parte	2127	+}	3314	Todo
Parte	?			

Fonte: Silva (2023, p. 100).

Diante do mapeamento no CTDC (Quadro 8), das pesquisas em livros didáticos envolvendo a balança de dois pratos, podemos constatar o seguinte:

- As pesquisas revelam o uso da balança de dois pratos em LD dos anos iniciais e finais do EF para o ensino das Propriedades da Igualdade e de Equações do 1º grau tanto na introdução quanto nos exercícios propostos aos estudantes.
- As pesquisas apontam para a necessidade do professor conhecer os diferentes tipos de tarefas ou situações-problemas que são propostas nos LD, bem como, as técnicas de resolução. Além do campo conceitual que é explorado por meio da balança de dois pratos.

- As pesquisas indicam que se faz importante um olhar reflexivo sobre as tarefas ou situações-problemas envolvendo a balança de dois pratos em LD.

Por fim, expomos a seguir o que conseguimos identificar em termos de pesquisas sobre a análise das práticas docentes em aulas tratando o uso da balança de dois pratos.

- **Análise da prática docente no ensino de equações do 1º grau usando a balança de dois pratos**

No Quadro 8, apresentamos os 2 trabalhos que identificamos sobre análises da prática docente. Isto correspondeu a menor parte das pesquisas identificadas no CTDC.

Quadro 8 - Pesquisas com análises da prática docente com o uso da balança de dois pratos

Tipo	Título	Autor	Ano	Instituição
D12	As decisões didáticas de um professor de matemática sob o ponto de vista do desenvolvimento do pensamento algébrico.	Livia Elaine da Silva Santos	2022	Universidade Federal de Pernambuco
D13	Elementos e efeitos do contrato didático: uma análise das relações frente ao conteúdo resolução e elaboração de problemas envolvendo equações polinomiais do 1º grau.	Ívia Mayara Moraes dos Santos	2023	Universidade Federal de Pernambuco

Fonte: Autoria própria.

Na **D12**, Santos (2022), buscou analisar, à luz da Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1986), as decisões didáticas de um professor de matemática do 7º ano do Ensino Fundamental, com foco no desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes. Por meio de entrevistas semiestruturadas e análise de planejamentos de aula. No contexto do ensino da equação do 1º grau, o professor utilizou a balança de dois pratos como o instrumento principal para introdução do conceito da equação do 1º grau, e justificou sua escolha da seguinte forma:

Professor: Então a balança de dois pratos para nós aqui que é um pouco do interior, a gente vê isso muito na feira, eu vejo minha mãe comprar massa de tapioca com a balancinha de pratos, então isso é o cotidiano, isso é o que os alunos veem, é o que eles presenciam, então por isso eu trago, eu tento trazer situações que eles estão vivendo. Por isso que eu trouxe a balança de dois pratos (Santos, 2022, p. 101).

Sobre a pesquisa de Santos (2022), destacamos a decisão do professor em iniciar as aulas sobre Equação do 1º Grau com:

- O jogo digital *Balança de dois pratos* disponível no site da Editora Moderna:

(https://web.moderna.com.br/web/buritiplus-2019/conteudo-digital-detalle/-/asset_publisher/Fvd2k3W6nqR3/content/balanca-de-dois-pratos?EhOrigemLista=1).

No jogo *Balança de dois pratos*, os estudantes utilizam as dicas disponíveis em sua tela para comparar ou calcular a massa dos sólidos e recebem o feedback sobre a resposta, bem como pontuações à medida que acertam os desafios. Neste contexto, o professor decidiu propor o jogo digital “Balança de dois pratos” no laboratório de informática da escola, antes da aplicação de uma ficha de exercícios, justificando:

Professor: Infelizmente às vezes a gente não tem material suficiente, por exemplo, não tem computadores suficientes para todos os alunos, mas sempre que possível a gente tenta criar algumas salas, pegar algum notebooks para todo mundo ficar com um aparelho e assim a gente trabalhar, mas é: a gente tenta fazer com que seja frequente o uso dessas outras maneiras, outras plataformas, enfim (Santos, 2022, p. 99).

Além disso o professor relatou outras vivências com experimentos utilizando a balança de dois pratos:

Professor: Pronto é assim... como nós temos situações-problema com balança de dois pratos, a balança de dois pratos não é um recurso tão difícil da gente conseguir ou até mesmo de montá-la, eu já cheguei a montar uma balança de dois pratos na sala de aula com um bastão e dois livros, então é algo que é prático pra ser feito [...] (Santos, 2022, p.104).

Dentre outros resultados dessa pesquisa, Santos (2022), discute que ficou evidente uma concepção de ensino que pode promover um certo efeito, pois ao realizar uma prática educativa num ambiente diferente do habitual como o laboratório de informática, o professor cria uma mudança de cenário, que ajuda a promover o efeito novidade, aos olhos dos alunos. Contudo, pondera-se sobre o fato que não é “unicamente a atividade que irá levar o aluno a pensar e construir significado acerca do que está sendo estudado, pois as instruções que são dadas pelo professor revelam muito mais sobre a sua intencionalidade em ajudar o aluno do que propriamente a atividade correspondente” (Santos, 2022, p. 123).

Na **D13**, Santos (2023), à luz da Teoria das Situações Didáticas, por meio de entrevistas semiestruturadas, investigou as relações contratuais entre professor e alunos no contexto da resolução e elaboração de problemas matemáticos, com foco no conteúdo de equações polinomiais do 1º grau. A autora destaca que a elaboração de problemas pelos alunos, embora recomendada em documentos oficiais como a BNCC e os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PC/PE), não é uma prática comum nas salas de aula. A pesquisa

buscou analisar como a ruptura do contrato didático, provocada pela proposta de elaboração de problemas, altera as relações didáticas e os efeitos que emergem nesse processo.

Neste cenário, as imagens de três balanças (dentre outras) foram propostas para que os alunos em grupo escolhessem uma delas para elaborar um problema (Figura 11). Convém ressaltar que a professora respondeu antes um problema (Figura 10), como modelo aos alunos.

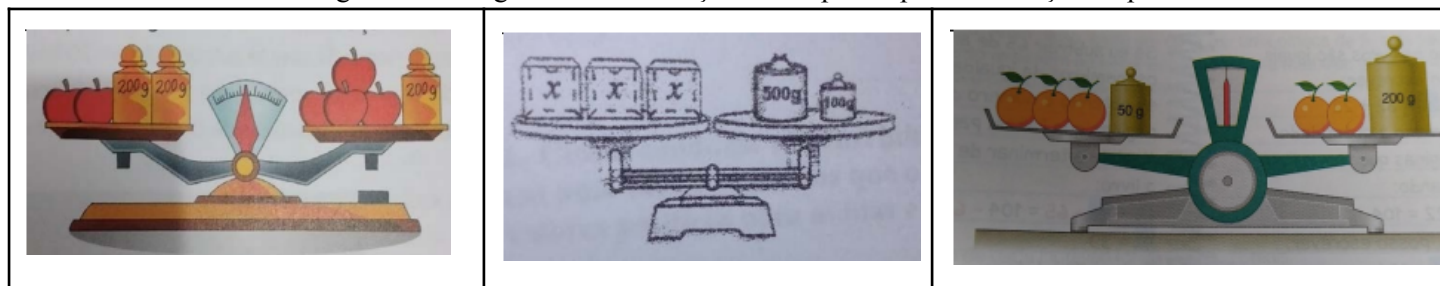
Figura 10 - Problema proposto pela professora durante a aula

2. Abaixo temos uma balança de dois pratos, para equilibrá-la, foram usadas barras de chocolates com a mesma massa e alguns pesos. Com base nessas informações, cada barra de chocolate tem?



Fonte: Santos (2023, p. 154).

Figura 11 - Imagens com a balança de dois pratos para elaboração de problemas



Fonte: Santos (2023, p.83).

Santos (2023), pondera que os alunos foram surpreendidos com a proposta da elaboração de problemas, mas, rapidamente aceitaram as negociações do desafio de aprofundar o pensamento e liberar a criatividade. Ao observar os problemas criados pelos grupos de alunos, aponta-se que todos os problemas elaborados foram baseados nas imagens fornecidas pela professora, as quais estavam relacionadas aos problemas resolvidos na atividade anterior. Como exemplo, um dos problemas criados pelos alunos foi: *"Abaixo temos uma balança de dois pratos equilibrada, nela foram colocadas laranjas e alguns pesos, com base nas informações quanto pesa cada laranja?"*. Nessa direção, a professora participante da pesquisa conclui *"os alunos criaram problemas parecidos com outros problemas"*. O que se coaduna com o contrato didático em cena.

A propósito das pesquisas versando sobre a análise da prática docente, ao tratar sobre o uso da balança de dois pratos no ensino de equações do 1º grau, destacamos:

- As pesquisas sobre o planejamento de aulas pelo professor de matemática e em sala de aula, têm um quantitativo reduzido em relação aquelas de análise de

livros didáticos e resolução de problemas pelos estudantes envolvendo o uso da balança de dois pratos.

- Faz-se importante investigar o processo de planejamento das aulas do professor de matemática quanto aos recursos que são selecionados e o que motiva a escolha desses recursos.
- Há necessidade de investigações acerca da prática docente sobre como o professor aborda o uso da balança de dois pratos em sala de aula. E, os efeitos dessas abordagens na aprendizagem dos estudantes.

Diante do exposto até aqui, avançamos na direção de expor como formulamos nossas questões de pesquisa e delineamos os objetivos relativos a essas questões, em diálogo, com os quadro teórico e metodológico adotado.

1.2 QUESTÕES E OBJETIVOS DA PESQUISA

Inicialmente, buscamos desenvolver um olhar sobre o planejamento e prática de um professor de matemática para/no ensino de Propriedades da Igualdade no 6º ano. Consideramos esse trabalho inicial fundamental para melhor compreendermos o cenário do ensino sobre esse tema e os conhecimentos do professor sobre o uso da balança de dois pratos a fim de responder à seguinte questão: **Quais os recursos utilizados pelo professor no planejamento de suas aulas sobre Propriedades da Igualdade e as situações-problema, envolvendo a balança de dois pratos, que ele costuma utilizar em sala de aula com seus estudantes no 6ª ano?** Diante disso, sentimos a necessidade de apurar os conceitos matemáticos que se revelam no uso que o professor faz da balança de dois pratos, na resolução de situações-problema.

Para tanto, recorreremos à Teoria dos Campos Conceituais (TCC) (Vergnaud, 1990), especialmente, no que diz respeito aos elementos constituintes de um conceito (situações, invariantes operatórios e representações simbólicas). Levando-se em conta que as Propriedades da Igualdade não são isoladas no campo da Álgebra, ou seja, esse conceito se coaduna com outros conceitos, por exemplo, do campo dos Números e Operação e das Grandezas e Medidas. Ademais, na TCC, a relação dialética entre situações e esquemas, em especial, baseia a Abordagem Instrumental (Rabardel, 1995) e a Abordagem Documental do Didático (ADD) (Gueudet; Trouche, 2008, 2010) para o estudo do trabalho do professor com os recursos (dentro e fora da sala de aula), como veremos adiante.

No que diz respeito à parte central da presente pesquisa, que é estudar a apropriação de uma balança de dois pratos digital, ou seja, do simulador EIB (da PhET) por um professor de matemática do 6º ano, esclarecemos que o termo “apropriação” se refere a um desdobramento da Abordagem Documental do Didático (ADD) (Gueudet; Trouche, 2008, 2010), proposto por Trgalová e Rousson (2017), denominado: *Modelo de Apropriação de um Recurso por um Professor*.

A ADD tem como principal objetivo “compreender o desenvolvimento profissional dos professores por meio do estudo de suas interações com os recursos, seus usos e projetos em/para seu ensino” (Trouche *et al.* 2020, p. 1). Haja vista, o avanço dos recursos disponíveis na internet e como isso causou mudanças profundas na maneira como os professores escolhem os recursos, os usos que eles fazem deles, dentre outros aspectos.

Por sua vez, o *Modelo de Apropriação de um Recurso por um Professor* (Trgalová; Rousson, 2017), busca estudar a interação do professor com um dado recurso, em três fases: o momento inicial (pré-apropriação); o primeiro uso efetivo desse recurso (apropriação original) e usos posteriores (reapropriação). Em virtude do exposto, elaboramos a seguinte questão:

Como um professor de matemática do 6º do Ensino Fundamental se apropria do recurso EIB para o ensino de Propriedades da Igualdade?

Dito isso, expomos os seguintes objetivos da pesquisa:

Objetivo geral:

- Analisar a apropriação de uma balança de dois pratos digital (o Explorador da Igualdade Básico- PhET) para/no ensino de Propriedades da Igualdade, por um professor de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental.

Objetivos Específicos:

- Identificar os recursos utilizados pelo professor no planejamento e ensino das Propriedades da Igualdade do 6º ano, em particular por meio das situações-problema, envolvendo a balança de dois pratos.
- Verificar os invariantes operatórios e as representações simbólicas presentes na resolução das situações-problema sobre as Propriedades da Igualdade, apresentadas pelo professor em sala de aula.
- Identificar os processos de pré-apropriação e apropriação original do Explorador da Igualdade Básico por um professor de matemática do 6º ano.

Na sequência, deste primeiro capítulo de “Introdução” ao trabalho de nossa dissertação, apresentamos como estruturamos os capítulos sobre: o quadro teórico, a metodologia, a análise de dados e as considerações finais da pesquisa.

1.3 ESTRUTURA DOS CAPÍTULOS DA DISSERTAÇÃO

Após o Capítulo 1, o quadro teórico da pesquisa é apresentado no segundo e no terceiro capítulos. No segundo capítulo tratamos de expor os principais fundamentos da Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1990) e considerações sobre o campo conceitual em torno das Propriedades da Igualdade, na intersecção entre o campo dos Números e Operações, Grandezas e Medidas e Álgebra.

No terceiro capítulo, apresentamos as bases teóricas do *Modelo de Apropriação de um Recurso por um Professor*, que são: Abordagem Instrumental (Rabardel, 1995); Abordagem Documental do Didático (Gueudet; Trouche, 2008, 2010) e Orquestração Instrumental (Trouche, 2004; Drijvers *et al.* 2010) e processos de apropriação (De Vaujany, 2006).

No quarto capítulo é apresentada a Metodologia de Investigação Reflexiva, desenvolvida no seio da Abordagem Documental do Didático, em relação aos seus cinco princípios. Bem como, o percurso metodológico que foi adotado para o estudo anterior e durante a fase de pré-apropriação e da apropriação original do recurso Explorador da Igualdade Básico, por um professor de matemática, do 6º ano do Ensino Fundamental.

No quinto capítulo, apresentamos os resultados da pesquisa. Esses resultados são organizados em três etapas: o perfil e o sistema de recursos do professor Tales para o/no ensino sobre as propriedades de igualdade no 6º ano; a análise e discussão sobre a pré-apropriação e posteriormente, sobre a fase de apropriação original e algumas considerações sobre essas duas fases. Nas considerações finais, expomos os achados da pesquisa, algumas limitações no percurso metodológico e perspectivas de investigações futuras.

2 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), na definição de Vergnaud (1990, p. 135), é “uma teoria cognitivista que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, sobretudo aquelas relacionadas com as ciências e as técnicas”.

Vergnaud (1990) explica que a TCC não é específica da Matemática, embora inicialmente tenha sido criada para explicar o processo de conceitualização progressiva das estruturas aditivas, multiplicativas, das relações número-espço e da álgebra.

De modo geral, no Brasil, podemos considerar que a TCC tem sido abordada em pesquisas no cenário da Didática da Matemática, em duas direções: 1. Nas investigações envolvendo conceitos matemáticos específicos e 2. Nas investigações sobre o trabalho de professores de matemática (dentro e fora da sala de aula) por meio do desvelamento dos seus esquemas de utilização de artefatos ou de recursos, respectivamente, à luz da Abordagem Instrumental (Rabardel, 1995) e da Abordagem Documental (Gueudet; Trouche, 2008, 2010). Por exemplo: Silva (2021); Damascena (2024); Feitoza, Gitirana e Rodrigues (2024).

A propósito disso, neste capítulo apresentamos os pressupostos fundamentais da TCC e algumas considerações sobre os conceitos correlatos ao objeto de conhecimento “Propriedades da Igualdade”. E, no Capítulo 3, abordamos com mais detalhes o uso da TCC na Abordagem Instrumental e na Abordagem Documental.

2.1 AS NOÇÕES DE CONCEITO E DE CAMPO CONCEITUAL

De acordo com Vergnaud (2002), um campo conceitual é, por definição, um conjunto de situações e um conjunto de conceitos. Vergnaud (1990) define que um conceito (C) é formado pela tríade de conjuntos (S, I, R), onde:

- S é o conjunto das situações que dão sentido ao conceito (referências);
- I é o conjunto dos invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) na qual se baseia a operacionalidade dos esquemas (significados);
- R é o conjunto das representações simbólicas do conceito, suas propriedades, situações e os procedimentos (significantes).

Segundo Vergnaud (1985, p. 249), “um conceito remete a várias situações. Porém, reciprocamente, uma situação remete a vários conceitos”. Dessa forma, é necessário se levar em conta na análise de um conceito, um conjunto relativamente vasto de situações, entre as quais existem parentescos (analogias, contrastes, variações...). Vergnaud (1993), pondera sobre duas ideias em relação ao sentido de situação:

- 1) a da variedade: existe grande variedade de situações num campo conceitual dado; as variáveis de situação são um meio de construir sistematicamente o conjunto das classes possíveis;
- 2) a da história: os conhecimentos dos alunos são elaborados por situações num campo que eles enfrentaram e dominaram progressivamente, sobretudo para as primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que se pretende ensinar-lhes (Vergnaud, 1993, p.12).

O conceito de situação não tem, aqui, o sentido de situações didáticas (Brousseau, 1986), mas antes o sentido de tarefa. Compreende-se assim, que qualquer situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, cuja natureza e dificuldades próprias é importante conhecer. Para Vergnaud (1996) são as situações que dão sentido ao conceito. Mas o sentido não está nas situações em si mesmas, assim como não está nas palavras nem nos símbolos. Isto é, são os esquemas, os comportamentos e sua organização, evocados no sujeito por uma situação ou por um significante (representação simbólica) que constituem o sentido dessa situação ou desse significante para esse indivíduo.

Segundo Vergnaud (1985, p. 245), “o conceito de representação é essencial para analisar a formação dos conhecimentos operatórios e para analisar os processos de transmissão dos conhecimentos”. Dentre os diferentes sistemas de significantes, temos a linguagem natural, gestos, desenhos, esquemas, tabelas, expressões da álgebra, etc.

A representação não se refere somente à utilização pelo sujeito de sistemas de significantes sociais linguísticos ou não linguísticos: por certo, a comunicação social é um critério importante da existência da representação; porém, existem outros critérios, notadamente o da emergência em situação de uma conduta nova, apoiada sobre a descoberta e a utilização pelo sujeito, de uma propriedade ou de uma relação pertinente (Vergnaud, 1985, p. 245).

Nessa direção, é indispensável, por exemplo na Matemática, fazer a distinção entre os diferentes sistemas de significantes (linguagem natural, gestos, desenhos, esquemas, tabelas, expressões da álgebra) e os diferentes componentes do significado (invariantes, inferências, regras de ação, predições). Por exemplo, quando escrevemos “ 2×1 ”, isto pode representar uma multiplicação, mas em outras situações, isso pode ter o sentido, do resultado de uma partida de futebol.

Sobre os invariantes operatórios (IO), esses são constituídos pelos conceitos em ação e teoremas em ação. O componente conceito-em-ação é um conhecimento necessário e

pertinente para resolver um problema. Já o componente teorema em ação é uma proposição formulada pelo sujeito com a finalidade de resolver um problema proposto, de forma que esse teorema pode ser verdadeiro ou falso. Os IO permanecem implícitos na maioria das vezes, podendo se tornar explícitos nas ações do sujeito e depende das situações nas quais ele é chamado a agir.

2.2 A RELAÇÃO DIALÉTICA ENTRE SITUAÇÕES E ESQUEMAS

A relação entre situação e esquema é considerada como fundamental na análise dos processos de aprendizagem e das atividades dos sujeitos. Como explica Vergnaud (2005):

A relação entre os conceitos de situação e de esquema é fundamentalmente dialética, no sentido de que não há esquema sem situação como também não há situação sem esquema. Visto que é o esquema que permite identificar uma situação como fazendo parte de uma certa classe. Eu digo bem uma classe porque o esquema se endereça efetivamente a uma classe de situações (Vergnaud, 2005, p. 125-126).

Um esquema é composto por quatro componentes: objetivos e subjetivos; regras de ação, tomada de informação e controle; inferências e invariantes operatórios (operacionais). Então, na identificação dos esquemas de um sujeito em situação é possível se verificar:

- As antecipações do objetivo a ser alcançado, dos efeitos a esperar e das eventuais etapas intermediárias;
- As regras de ação do tipo “se-então” que permitem gerar a sequência de ações do sujeito;
- As inferências (raciocínios) que permitem calcular as regras e antecipações baseadas nas informações e no sistema de invariantes operacionais disponíveis que dispõe o sujeito.
- Os invariantes operacionais que pilotam o reconhecimento pelo sujeito dos elementos pertinentes para a situação e a tomada de informações sobre a situação a ser tratada (Rabardel, 1995, p. 88, tradução nossa)⁷.

Os objetivos são considerados como o componente intencional dos esquemas. Ou seja, os objetivos fornecem aos esquemas sua funcionalidade. Vergnaud (1985, p. 250) afirma que “as regras de ação constituem um nível relativamente próximo da ação observável”. Pois estas, podem ser consideradas como o componente gerador do esquema, o passo a passo, ou seja, a série de ações visando atingir um objetivo.

Os invariantes operatórios se configuram como o componente propriamente epistêmico do esquema. Os conceitos em ação permitem reter as informações pertinentes e

⁷ Tradução nossa de: des anticipations du but à atteindre, des effets à attendre et des étapes intermédiaires éventuelles ; - des règles d'action de type “si-alors” qui permettent de générer la suite des actions du sujet ; - des inférences (raisonnements) qui permettent de calculer les règles et les anticipations à partir des informations et du système d'invariants opératoires dont dispose le sujet ; - des invariants opératoires qui pilotent la reconnaissance par le sujet des éléments pertinents de la situation, et la prise d'informations sur la situation à traiter (Rabardel, 1995, p. 88).

selecionar os teoremas em ação necessários para o engendramento de regras de ação, tomada de informações e controle para atingir o (s) objetivo (s). Já, as inferências nos remetem a certas operações de pensamento do sujeito sobre as consequências de suas ações, sejam por um viés sistemático ou mesmo oportunista. Por exemplo, na escolha de uma alternativa, diante das suas vantagens.

A propósito dos quatro componentes dos esquemas, Vergnaud (1985) adverte sobre as condutas observáveis que testemunham a existência dos cálculos e das expectativas dos sujeitos, mas seu conteúdo não é facilmente identificável. Dada essa ressalva, “os conceitos de regra de ação e de invariante operatório são, justamente, os elementos indispensáveis para caracterizar o conteúdo dos esquemas” (Vergnaud, 1985, p.250).

2.3 O CAMPO CONCEITUAL CORRELATO AO TEMA DA PESQUISA

Tendo em vista, o objeto de conhecimento “Propriedades da Igualdade” no 6º ano (na transição dos anos iniciais para os finais do EF) e as perspectivas de ensino e de aprendizagem, bem como, de abordagens de LD desse tema por meio do uso da balança dois pratos, já expostas no capítulo anterior. Buscamos aqui, pontuar algumas reflexões e considerações sobre os conceitos matemáticos envolvidos quando se utiliza esse recurso.

Para Ponte, Branco e Matos (2009) a balança de dois pratos facilita a compreensão dos princípios de equivalência (aditivo e multiplicativo) e pode ser utilizada em situações, por exemplo, em que os estudantes possam: a) Descrever como podem determinar a medida desconhecida de objetos e b) Traduzir a situação de equilíbrio da balança por meio de uma equação. Porém, eles destacam a atenção que se deve ter ao fato que muitos alunos nunca viram uma balança desse tipo e não têm uma compreensão intuitiva do seu funcionamento. Sendo assim, o uso da balança implica que:

[...] A aprendizagem dos alunos depende do modo como este material é usado. É importante que os alunos possam fazer as suas experiências e discutir os resultados uns com os outros, bem como relacionar o que se passa na balança com o que se passa nas expressões algébricas (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 95).

Por sua vez, Lins e Gimenez (1997) discutem o uso da balança de dois pratos para "ensinar" resolução de equações como uma abordagem "facilitadora", mas não num sentido muito otimista. Para esses autores, as abordagens facilitadoras são baseadas na ideia de que uma certa estrutura que é posta em jogo na manipulação de "concretos" é, depois, por um processo de abstração, transformada em "formal". Com base em experimentos ingleses, na

solução de equações, sobre o que acontecia quando as crianças passavam de atividades "concretas" para outras "formais", para "surpresa", as crianças - embora achando o material concreto "útil" - não viam relação entre o que haviam feito no "concreto" e o que haviam feito no "formal" (Lins; Gimenez, 1997, p. 107). Percebendo-se assim, de que faltava um material intermediário, que "preenchesse o vazio" entre uma coisa e outra. Um cuidado em um dos exemplos de Lins e Gimenez (1997) é apresentado da seguinte forma: Para a equação " $3x + 10 = 100$ " é possível produzir significado a partir da balança de dois pratos, no entanto, para a equação " $3x + 100 = 10$ ", temos que ponderar sobre como tirar 100 de 10 em uma balança de dois pratos? Discute-se que o uso da balança não suporta a abstração das operações com números negativos, inviabilizando a produção de significados para operações em $\mathbb{Z}$.

Mencionar a afirmação " $3x + 100 = 10$ " é equivalente a " $3x = -90$ ", acompanhada da justificação "pois posso retirar '100' de cada um dos pratos de uma balança mantendo-a em equilíbrio", para nós, professores, talvez não pareça tão monstruoso, pois possivelmente alternamos de um objeto a outro sem esforço, passamos da balança à equação de modo automático e, de acordo com a situação, consideramos uma ou outra. Mas para um aluno de ensino fundamental essa alternância não é evidente, possivelmente ele procure ver na equação aquilo que consegue ver na balança de dois pratos. Afinal, a equação está associada a esse objeto (Lima, 2019, p. 36).

Oliveira (2010) e Brito Menezes (2006) ao analisarem os efeitos do contrato didático (Brousseau, 1986) em aulas de Matemática no 7º ano do EF, refere-se à balança de dois pratos como sendo um exemplo clássico do *uso abusivo da analogia* quando utilizada, de forma inadequada, como metáfora do princípio da equivalência. Pois, quando a mesma é utilizada de forma abusiva não atinge o seu objetivo, pois não dará conta do conceito de equivalência. Por exemplo, Oliveira (2010) analisa que o professor usa a analogia da balança de dois pratos tratando o conceito de equação de forma inadequada e até equivocada, ao confundir os conceitos de sentença fechada e sentença aberta; quando ele afirma que a sentença fechada $10\text{kg} = 6\text{kg} + 4\text{kg}$ representa uma equação.

Na pesquisa de Almeida (2016) fica explícito no contrato didático com os alunos que o professor de matemática apesar de apresentar a resolução da equação usando o princípio aditivo, não deixa de enfatizar que a técnica de "passar para o outro lado e mudar o sinal" é uma forma prática de resolver a equação do 1º grau.

Isso aqui é mais para vocês terem consciência de como funciona a equação (...) não é só pegar um número e passar para o outro lado e mudar o sinal... Não é só isso que acontece... Apesar da gente fazer isso de forma prática, mas tem isso aqui por traz (Almeida, 2016, p. 250).

Dito isso, consideramos que há vários conceitos envolvidos no ensino do objeto de conhecimento Propriedades da Igualdade, no cenário do EF, especialmente do 6º ano. E, que

se faz necessário levar em consideração nas situações-problema envolvendo a balança de dois pratos, o papel dessa representação simbólica (significante) e como isso pode desencadear a mobilização de teoremas em ação corretos ou equivocados. De forma que aqui reafirmamos nosso interesse sobre o planejamento e o ensino desse tema, pelo professor de matemática.

A propósito de tais conceitos, no documento Organizador Curricular Trimestral de Pernambuco, temos para o objeto de conhecimento Propriedades de Igualdade (referente à habilidade EF06MA14), os seguintes conteúdos: operações numéricas e suas propriedades; aplicação dos princípios aditivo e multiplicativo; determinação de elemento desconhecido em uma igualdade matemática envolvendo representação simbólica; resolução de problemas envolvendo a equação do 1º grau do tipo $ax + b = c$, no conjunto dos números naturais, por meio de tentativa, princípio da igualdade e/ou técnica de equivalência (Pernambuco, 2025). A seguir apresentamos algumas considerações sobre tais conceitos e expandimos para o trato de outros, como: o princípio de equilíbrio de uma balança de dois pratos, os significados atribuídos ao sinal de igual e o uso da balança de dois pratos na interface do campo das Grandezas e Medidas (quanto a grandeza massa) com o da Álgebra.

2.3.1 O princípio de equilíbrio da balança de dois pratos

Há registros na História do uso da balança de dois pratos no antigo Egito em 2.400 a.C. com funções que transcendiam o uso comercial, associando-se a rituais religiosos e simbologias cósmicas, conforme Zuin (2023), um dos exemplos mais marcantes é o "Julgamento de Osíris", descrito no Livro dos Mortos, onde o coração do falecido era pesado contra a pena da deusa Maat, representando a verdade e a justiça cósmica (Figura 12).

Figura 12 - Trecho do Livro dos mortos mostrando Anubis na “Pesagem do coração”



Fonte: Zuin (2023, p. 4).

Zuin (2003) indica que o uso da balança no comércio no Antigo Egito começou a se consolidar de forma mais prática a partir do Império Médio (c. 2050–1650 a.C.), mas ganhou maior relevância durante o Império Novo (c. 1550–1070 a.C.). Inicialmente, seu emprego estava restrito a transações envolvendo metais preciosos (ouro, prata, cobre) e produtos de alto valor, como pedras semipreciosas e medicamentos.

Segundo Pereira, Silva e Lourenço (2016, p. 2), a balança de dois pratos, em seu “modelo tradicional possui dois pratos que comparam diretamente um objeto de massa conhecido em um dos pratos, com outro de massa desconhecida no outro prato”.

Figura 13 - Balança de dois pratos



Fonte: Pereira, Silva e Lourenço (2016, p. 2).

Pereira, Silva e Lourenço (2016) explicam que a balança de dois pratos é um instrumento de medição baseado no princípio da alavanca, utilizado para determinar a massa de objetos por comparação. Seu funcionamento consiste em uma barra horizontal (haste) equilibrada sobre um fulcro central, com dois pratos suspensos nas extremidades. Quando um objeto de massa desconhecida é colocado em um dos pratos, massas conhecidas (geralmente pesos padrão) são adicionadas ao prato oposto até que o equilíbrio seja alcançado. Nesse estado, a haste fica nivelada, indicando que os torques gerados pelos pesos em ambos os lados se equivalem.

2.3.2 O sinal de igual e seus significados: operacional e relacional

Conforme Ciani *et al.* (2017, p. 1), o símbolo da igual “talvez seja um dos símbolos mais utilizados na Matemática, desde os anos iniciais até o ensino superior. Quase sempre não lhe é dada a devida importância e atenção à sua utilização e nem lhe é atribuída a “culpa” por erros graves na resolução de questões matemáticas”. De acordo com Cavalcanti e Câmara dos

Santos (2013, p. 1) “na literatura encontramos estudos que discutem, basicamente, duas noções diferentes do sinal de igualdade. Uma noção “operacional”, e outra “relacional” envolvendo a ideia de equivalência”. No Quadro 9 apresentamos um detalhamento dessas duas noções, na visão de Matos e Cavalcanti (2010).

Quadro 9 - Resumo com as principais concepções do sinal de Igualdade

Contextos	Categorias de análise (a priori)	Expressões (exemplos)	Principal finalidade do símbolo “=”	Principais características do símbolo “=”
Operações aritméticas	Concepção Operacional	$8 + 7 =$ $8 + 7 + 5 + 9 =$	Indicar um cálculo a ser realizado ou o local do resultado.	Aspecto assimétrico (um lado é dado, o outro precisa ser preenchido/encontrado)
Igualdades aritméticas	Concepção Igualdade Relacional	$6 + 5 = 11$ $5 + 7 = 4 + 8$ $15 = 7 + 8$	Indicar que o que está no lado direito do “=” é igual, idêntico ou equivalente ao que está no lado esquerdo.	Relação de igualdade que inclui: identidade única de significado e equivalência dos diferentes significantes.

Fonte: Matos e Cavalcanti (2010, p. 10).

A propósito das concepções operacional e relacional (Quadro 9), Vergnaud (1986) pondera sobre as significações do sinal de igualdade: “é o mesmo que, dá como resultado”, “é equivalente a”. Segundo Kieran (1981), na perspectiva operacional, o sinal de igual indica uma operação a ser realizada; esta perspectiva se relaciona ao campo da Aritmética; enquanto na perspectiva relacional, o sinal de igual indica uma equivalência entre ambos os membros da igualdade. Nesse sentido, refere-se ao campo da álgebra.

De acordo com as orientações metodológicas do Currículo de Pernambuco deve ficar clara a importância de se compreender os significados do sinal de igualdade para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Nesta direção, uma compreensão relacional do sinal de igualdade implica entender que ele representa uma relação de equivalência.

Nos anos iniciais, essa relação é, muitas vezes, interpretada como significando “é a mesma quantidade que” ao expressar uma relação entre quantidades equivalentes. Quando se explora a equivalência, os estudantes precisam saber que $8 = 8$ e $8 = 3 + 5$ são escritas verdadeiras e que $8 + 3 = 11 + 8$ é falso, já que $8 + 3$ e $11 + 8$ não são equivalentes (Pernambuco, 2019b, p.32).

Para Gomes e Noronha (2022, p. 14) “a compreensão da noção de equivalência se torna relevante desde a infância, por possibilitar que os sujeitos façam deduções, relacionem, busquem, compreendam e registrem diferentes significados simbólicos e numéricos”. Entretanto, frequentemente, a concepção operacional é transmitida durante os anos iniciais e a relacional durante os anos finais, o Quadro 10 apresenta alguns exemplos.

Quadro 10 - Significados do símbolo de Igualdade

Concepção	Definição	Exemplo
Operador	O símbolo de igualdade indica a realização direta de uma operação e exposição do seu resultado. Ou seja, no local após o símbolo de igual, deve ser escrito o resultado da operação. A igualdade, então, ganha um sentido de “operador”. Noção unidireccional (Molina, 2004) $4 + ? = 12$	$2 + 6 = 8$
Equivalência	O símbolo de igualdade indica a comparação, ou equivalência entre dois membros de uma expressão. Noção bidireccional (Molina, 2006) $4 + 8 = 12 + 0$	$2 + 6 = 3 + 5$ $8 = 8$

Fonte: Gomes e Noronha (2022, p. 14)

Bandarra (2011) também discute que existem duas interpretações em relação ao significado da igualdade, sendo a operacional, na qual o aluno considera que o sinal representa dar a resposta da operação, e a relacional, que representa a noção de equivalência submetida a esse sinal. No próximo tópico (2.3.2), refinamos outros conceitos.

2.3.3 As relações de igualdade e os princípios de equivalência

Ao nos referirmos ao conceito de “igualdade”, destacamos a alusão aos conceitos de relação reflexiva, simétrica e transitiva (Quadro 11). Em termos matemáticos, a relação de igualdade é simétrica (se $a = b$ então $b = a$, para quaisquer elementos a e b), é reflexiva ($a = a$, para todo o elemento a) e é transitiva (se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$ para quaisquer elementos a , b e c) (Ponte; Branco; Matos, 2009).

Quadro 11 - Relações reflexiva, simétrica e transitiva

Relações	Definição	Característica	Exemplo
Reflexiva	Uma relação R em um conjunto A é chamada de reflexiva se $(x, x) \in R$ para todo elemento $x \in A$.	Todo x está relacionado a si mesmo, isto é: $x = x$, para qualquer x .	$5 = 5$
Simétrica	Uma relação R em um conjunto A é chamada de simétrica se $(y, x) \in R$ sempre que $(x, y) \in R$.	Se x está relacionado a y , então y está relacionado a x , isto é: $x = y \Leftrightarrow y = x$, para quaisquer a e b .	$5 = 2 + 3 \Leftrightarrow 2 + 3 = 5$
Transitiva	Uma relação R em um conjunto A é chamada de transitiva se, sempre que $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$, $x, y, z \in A$.	Se x está relacionado a y , e y está relacionado a z , então x está relacionado a z , isto é: $x = y$ e $y = z \Rightarrow x = z$, para quaisquer x, y e z .	$5 = 2 + 3$ e $2 + 3 = 4 + 1$ $\Rightarrow 5 = 4 + 1$

Fonte: Autoria própria.

Outros conceitos relacionados à igualdade dizem respeito aos princípios de equivalência (Quadro 12), esses se distinguem em princípio aditivo e multiplicativo.

Quadro 12 - Princípios de equivalência

Princípio	Definição	Características	Exemplo
Aditivo	Se $a=b$ então $a+c=b+c \in \mathbb{R}$ e vice e versa. Se $a+c=b+c$ então $a=b$, $a=b$ então $a+c=b+c$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.	Somando-se a ambos os membros de uma equação a mesma expressão, obtém-se uma equação equivalente à dada.	$2+1+3=1+1+4$ $6=6 \Rightarrow$ $2+1+3+5=1+1+4+5$ $11=11$
Multiplicativo	Se $a=b$ então $a.c=b.c$ e vice-versa. Se $a.c=b.c$ então $a=b$ ou $a=c$ então $a.c=b.c$ quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.	Multiplicando a ambos os membros de uma equação por um mesmo número (diferente de zero), obtém-se uma equação equivalente à dada.	$4+3=5+2$ $7=7 \Rightarrow$ $(4+3) \cdot 3=(5+2) \cdot 3$ $21=21$

Fonte: Autoria própria.

2.3.3 Propriedades das operações com números naturais

Marques (2014), explica que no conjunto dos números naturais, duas operações estão definidas: a adição e a multiplicação. A adição é uma função que, para cada par de números naturais (x, y) , associa a soma $x + y$. Ela é representada pelo símbolo $+$ e estabelece uma correspondência entre o par (x, y) pertencente ao conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e o elemento $x + y$ no conjunto $\mathbb{N}$, onde x e y são chamados parcelas. Conforme esta definição, sendo x, y e z números naturais, as seguintes propriedades são válidas:

1. **Propriedade associativa da adição:** $(x + y) + z = x + (y + z)$. Isto é, ao tentar somar mais de dois números, realizamos as adições aos pares. A propriedade associativa permite que a ordem das somas não altere o resultado, organizando a operação de forma flexível.
2. **Propriedade comutativa da adição:** $x + y = y + x$. Isso significa que podemos trocar as posições dos números ao somar, e o resultado permanece o mesmo.
3. **Propriedade do elemento neutro da adição:** Existe um número 0 tal que $x + 0 = 0 + x$ para qualquer número natural x . Isso indica que adicionar 0 a qualquer número natural resulta no próprio número, caracterizando o zero como o elemento neutro da adição. Por exemplo: $7 + 0 = 7$.
4. **Lei do cancelamento da adição:** Se x, y e a são números naturais, então $x + a = y + a$ implica que $x = y$.

5. **Lei do anulamento:** A soma de dois números naturais é zero se, e somente se, ambos os números forem iguais a zero. Ou seja, $x + y = 0$ implica que $x = 0$ e $y = 0$.

A multiplicação é uma função que associa cada par (x,y) de números naturais ao número natural $x \cdot y$, além disso, pode ser interpretada como a adição repetida de parcelas iguais. Sejam x , y e z números naturais e a multiplicação definida conforme anteriormente. As seguintes propriedades são válidas:

1. **Propriedade comutativa da multiplicação:** $x \cdot y = y \cdot x$. Isto é, a ordem dos fatores não altera o produto.
2. **Propriedade do elemento neutro da multiplicação:** Existe um número $1 \in \mathbb{N}$ tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ para qualquer número natural x . Por exemplo, $8 \cdot 1 = 1 \cdot 8 = 8$, ou seja, multiplicar qualquer número natural por 1 resulta no próprio número.
3. **Propriedade associativa da multiplicação:** $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$. Isso significa que a ordem das operações em uma multiplicação encadeada não afeta o resultado.
4. **Propriedade distributiva:** A multiplicação é distributiva em relação à adição, conforme as seguintes expressões:
 - a) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ (distributiva à esquerda).
 - b) $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (distributiva à direita).

A propriedade distributiva permite distribuir um fator sobre os termos de uma soma, sendo também conhecida como “colocar em evidência”.

2.3.4 As medidas de massa e as propriedades da igualdade

A fim de melhor compreendermos as relações existentes entre o uso da balança de dois pratos, na unidade temática das Grandezas e Medidas e sua aplicação no estudo das Propriedades da igualdade na unidade temática Álgebra, voltamos nosso olhar para as habilidades da BNCC (dos anos iniciais ao 6º ano), referentes à grandeza massa.

Conforme a BNCC a grandeza massa, como objeto de conhecimento, deve começar a ser estudada durante os anos iniciais, no 1º ano do EF, a partir de situações de comparação de massa com base nas noções de “mais pesado” e “mais leve”. No 2º ano, são introduzidas *situações de comparação, estimativa e medição* com unidades de medida não padronizadas ou padronizadas (o grama e o quilograma). No 3º ano, *as situações de estimativa e medição* são expandidas para a utilização de unidades de medida não padronizadas e padronizadas mais usuais (quilograma, grama e miligrama), reconhecendo-as em leitura de rótulos e embalagens, entre outros. Já no 4º ano, essas situações são retomadas com vistas à valorização e respeito à

cultura local. E no 5º ano, ocorre a proposta de elaboração e resolução de problemas recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.

Especialmente, no 6º ano, a elaboração e resolução de problemas é proposta sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento. Um efeito dessas recomendações nos livros didáticos do 6º ano, é que podemos constatar, dentro das limitações do que identificamos em 5 das 13 coleções aprovadas no PNLD 2024, que os autores de LD do 6º ano do EF, abordam a balança de dois pratos a partir de duas tendências, quanto aos exemplos ou tarefas propostas aos estudantes:

I - O uso da balança de dois pratos apenas no capítulo sobre Propriedades da Igualdade. Por exemplo: LD da coleção “Desafios da Matemática” (Silveira, 2022) e “Araribá Conecta Matemática” (Gay; Silva, 2022).

II - O uso da balança de dois pratos no capítulo sobre Propriedades da Igualdade e no capítulo específico das Medidas de Massa. Por exemplo: LD das coleções “Superação” (Teixeira, 2022); “A Conquista da Matemática” (Giovanni Júnior, 2022) e “Matemática - Bianchini” (Bianchini, 2022).

No Quadro 13, expomos a quantidade de exemplos e de tarefas abordando a balança de dois pratos de cada LD. O uso desse recurso na articulação entre o campo das Grandezas e Medidas e da Álgebra para nós é um ponto de reflexão em aberto, haja vista, a influência que os LD podem ter sobre a prática de ensino do professor de matemática. Como podemos perceber, o uso da balança de dois pratos tem sido algumas vezes negligenciado na resolução de situações-problema nos capítulos específicos que tratam sobre as medidas de massa.

Quadro 13 - A balança de dois pratos em capítulos de LD do 6º ano - Medidas de Massa (MM) e de Propriedades de Igualdade (PI)

Coleção/ Capítulos	Medidas de Massa		Propriedades de Igualdade		Total
	Exemplos	Tarefas	Exemplos	Tarefas	
Matemática - Bianchini	0	1	0	2	3
A Conquista da Matemática	1	3	0	1	5
Desafios da Matemática	0	0	2	3	5
Araribá Conecta Matemática	0	0	2	0	2
Superação	0	1	2	3	6
Total	1	5	6	9	21

Fonte: Autoria própria.

Com efeito sobre o exposto no Quadro 13, se de uma parte, podemos perceber, em menor medida, o uso da balança de dois pratos no capítulo sobre Medidas de Massa, de outra parte, nos capítulos sobre as Propriedades de Igualdade, o uso que se faz da balança de dois pratos, por algumas vezes minimiza as situações-problemas envolvendo as medidas de massa. O que nos leva a refletir sobre a dialética ferramenta-objeto (Douady, 1986), tendo em consideração, essa questão em aberto: quais os efeitos sobre quando a grandeza massa serve de ferramenta ao estudo de equações, de problemas do campo aditivo, dentre outros, e como se difere quando, especificamente, é um objeto de estudo?

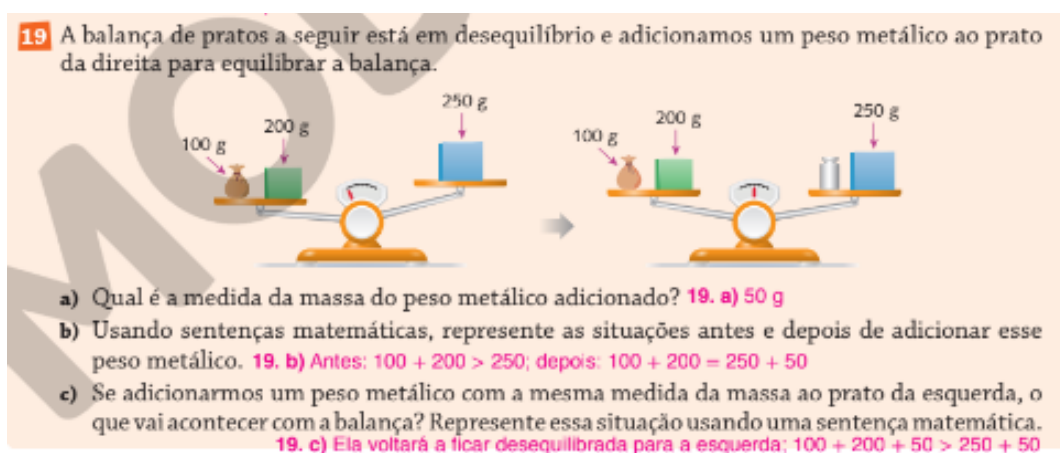
Ainda em torno de nossas reflexões sobre o uso da balança de dois pratos em LD, no estudo de Medidas de Massa e das Propriedades da Igualdade, consideramos importante ressaltar a distinção entre os conceitos de peso e massa, as situações-problemas e o papel da representações simbólicas em tela.

Vale ressaltar que no sentido usual da língua portuguesa, o “peso” pode ser considerado como um objeto (pedaço de metal):

- Pedaço de qualquer metal utilizado como padrão de avaliação nas balanças (Dicionário online - Michaelis, 2025);
- Pedaço de metal de um peso determinado que serve para pesar outros corpos, usado como padrão em balanças (Dicionário online de português - Dicio, 2025).

Podemos observar, que alguns autores de LD fazem alusão ao peso metálico como um objeto. Nesse caso, os estudantes são levados a calcular a medida de massa do peso metálico. Por exemplo, isto pode ser verificado na Coleção Desafios da Matemática (Silveira, 2022).

Figura 14 - Exemplo sobre o peso metálico - LD da Coleção Desafios da Matemática



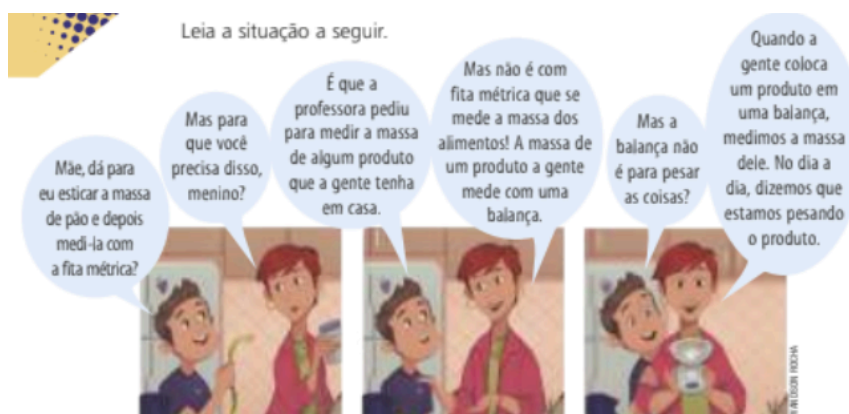
Fonte: Silveira (2022, p. 94).

A noção de “peso metálico” nos parece essencial para evitar confusões sobre a noção de peso como utilizada no cotidiano. A propósito da diferenciação entre peso e massa, Silveira (2022) pondera:

É importante explicar a diferença entre massa e peso. Com base na explicação, peça que reflitam a respeito da adequação ou não da declaração: “Eu peso 60 kg”. Diga a eles que é comum o uso da palavra “peso” como sinônimo de “massa”, mas que esses termos têm significados diferentes. De modo simplificado, podemos falar que o peso de um corpo é a força exercida sobre ele pela atração gravitacional da Terra e a massa é a quantidade de matéria presente em um corpo (Silveira, 2022, p.261).

Na Figura 15, temos um exemplo em que, embora se explique a expressão correta “medindo a massa”, leva-se a parecer aceitável dizer que estamos “pesando o produto”.

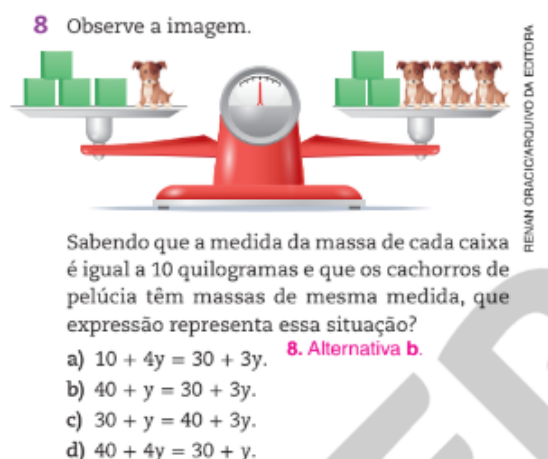
Figura 15 - Exemplo da diferença entre peso e massa na coleção A Conquista da Matemática



Fonte: Giovanni Júnior (2022, p. 258).

Sobre o papel das unidades de medidas de massa, nas situações problemas especialmente apresentadas no estudo das Propriedades de Igualdade, entre os LD que consultamos (Quadro 13), podemos observar que ocorre por parte de alguns autores uma tendência de desconsiderar a unidade de medida de massa, dando ênfase a um transformismo para a representação algébrica (alfa-numérica) da situação apresentada na balança de dois pratos. Na Figura 16, temos o seguinte exemplo:

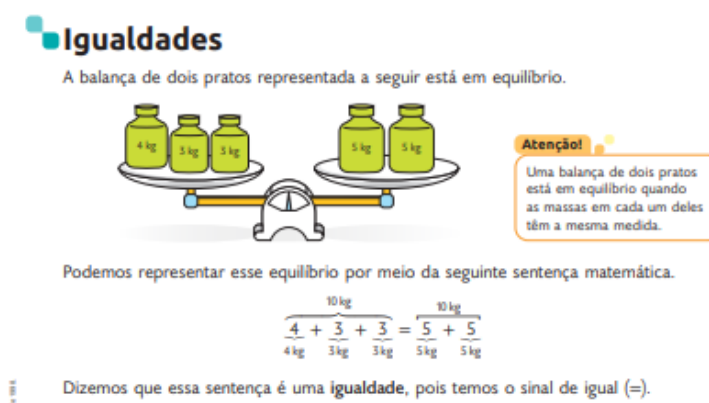
Figura 16 - Exemplo da Coleção Matemática Bianchini - Propriedades da igualdade



Fonte: Bianchini (2022, p.119).

Diferentemente, no exemplo da Figura 17, o autor do LD expressa as unidades de medida de massa, em um exemplo na introdução do capítulo “Igualdades”. O que nos parece poder influenciar as abordagens do professor sobre esse tema em sala de aula, tendo em vista, a articulação, em menor ou em maior medida, entre os campos conceituais (Álgebra e Grandezas e Medidas).

Figura 17 - Exemplo da Coleção Superação - Propriedades da igualdade



Fonte: Teixeira (2022, p.65).

Outro aspecto importante, é que no Campo das Grandezas e Medidas, estudos baseados na Teoria dos Campos Conceituais, tem chamado à atenção para os seguintes tipos de situações: comparação, medição e produção (Figueiredo; Bellemain; Teles, 2014). Pensamos que tais situações se aplicam ao uso da balança de dois pratos.

Nas situações de medida, podemos considerar as situações de transformação de unidades de massa (ex.: kg em g, ou vice-versa) e de operacionalização de massa (adição,

subtração, multiplicação e divisão envolvendo medidas de massa). Vale pontuar que a distinção entre uma grandeza e sua medição é essencial. A massa de um objeto não varia. O que pode variar é a representação da medida em função da unidade que foi tomada como referência para medir a massa. Por exemplo: $100\text{g} = 1\text{kg}$. Os números se alteram em relação à medida (menor ou maior) adotada.

Nas situações de comparação é possível determinar, dados dois objetos, se eles têm mesma massa ou qual dos dois tem maior massa, de forma perceptiva (visual), ou por comparação de suas medidas.

Levando-se em conta que a massa é definida como uma grandeza física que mede a quantidade de matéria contida num corpo ou objeto, as situações de produção, pode envolver o estudante produzir um objeto (ou corpo) com massa menor ou maior ou de um objeto de massa igual ao de outro dado.

2.3.5 O termo desconhecido e a equação do 1º grau

Segundo Silva (2024, p. 52), “falar sobre equações como conteúdo a ser abordado por professores que ensinam nos anos iniciais, especificamente no 4º e 5º ano, pode parecer que está se tratando de algo impossível”. Ao se levar em consideração as equações apenas como uma combinação de letras e números. Pois, como sinaliza Squalli (2002) a aparição da letra tende a marcar a diferença entre a Aritmética e a Álgebra. Assim, quando nos deparamos com as representações simbólicas “ + 4 = 8” e “ $x + 4 = 8$ ”, geralmente, é fato que o primeiro tipo de representação costuma ser mais relacionado ao cálculo do termo desconhecido (até o 6º ano) e o segundo, ao de equação (no 7º ano). Sobre isso, convém a ponderação que:

O simbolismo alfanumérico é, de fato, considerado como o sistema semiótico da álgebra por excelência. No entanto, a partir de uma perspectiva semiótica, os sinais também podem ser algo muito diferente. Palavras ou gestos, por exemplo, são sinais por conta própria, - "semioticamente" falando, eles podem ser sinais genuinamente algébricos, como as letras. Claro que, isso não significa que eles são equivalentes ou que podemos simplesmente substituir um por outro (Almeida, 2017, p. 73).

Conforme Almeida (2017), há duas vertentes acerca da álgebra escolar, as quais compreendem-na como: (a) uma linguagem específica utilizada para representar valores, essencialmente desconhecidos; e (b) uma maneira peculiar de pensar acerca de situações matemáticas. Dessa forma, o que precisa ser levado em conta nos casos das representações “ + 4 = 8” e “ $x + 4 = 8$ ”, não é apenas os símbolos envolvidos, mas a forma de pensar dos

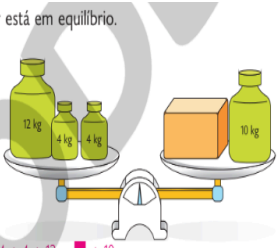
estudantes para determinar o valor desconhecido (a incógnita). À luz da Teoria dos Campos Conceituais, podemos dizer que se trata de verificar os invariantes operatórios (teoremas em ação e conceitos em ação) mobilizados para resolver a equação. Nesse caso, é possível que o estudante se utilize do sinal de igual em sentido operacional (baseado no campo aritmético) ou relacional (baseado no campo algébrico).

A propósito do uso de técnicas utilizadas para resolver as equações do 1º grau, as pesquisas (Araújo, 2009; Barbosa, 2011), descrevem:

- Tentativa e erro - por procedimentos aritméticos, ocorre a substituição da incógnita por valores numéricos, predominando o significado operacional do sinal de igual.
- Transpor termos ou coeficientes, invertendo as operações - com base nas propriedades das operações inversas, por exemplo, se $a = 1$: “ $x + b = c$, então $x = c - b$ ”; se $b = 0$, “ $ax = c$, então “ $x = \frac{c}{a}$ ”. Neste caso, o significado operacional do sinal de igual é também privilegiado.
- Neutralizar termos ou coeficientes, efetuando a mesma operação nos dois membros da igualdade - referente aos princípios de equivalência: aditivo e multiplicativo.

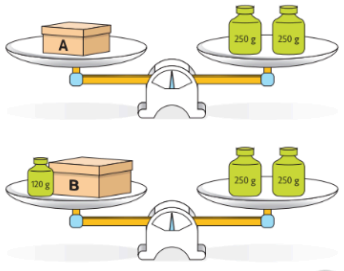
Essencialmente, a técnica de neutralização de termos, baseada nos princípios de equivalência (aditivo e multiplicativo) é aquela que se conecta com o significado relacional do sinal de igual. Portanto, refere-se ao “pensamento algébrico”. Particularmente, consideramos que as representações de equações, com o uso do sinal de igual ou com a balança de dois pratos nem sempre se conectam com a ideia de equivalência. Neste sentido, convém identificar as escolhas dos professores ao ensinar seus estudantes, se eles fazem uso da balança em uma perspectiva de aplicação dos princípios de equivalência (Figura 18, abaixo), ou se faz apelo a tentativa e erro (Figura 19).

Figura 18 - Exemplo do LD do 6º ano da coleção Superação - Capítulo “Igualdade”

98. A balança a seguir está em equilíbrio.  98. a) Resposta: $4 + 4 + 12 = \blacksquare + 10$. a) Usando um $\blacksquare$ para representar a medida da massa da caixa laranja escreva no caderno uma igualdade que represente o equilíbrio da balança. b) Calcule no caderno a medida da massa da caixa laranja. 98. b) Resposta: 10 kg	Atividades 98. a) Como a balança está em equilíbrio, a soma das medidas das massas que estão no prato à esquerda é igual à soma das que estão no prato à direita. Usando o $\blacksquare$ para representar a medida da massa da caixa laranja, a igualdade que representa o equilíbrio da balança é dada por: $4 + 4 + 12 = \blacksquare + 10$ b) Para calcular a medida da massa da caixa laranja, na igualdade obtida no item anterior, adicionamos os números que estão no primeiro membro e, depois, subtraímos o número 10 dos dois membros da igualdade. $4 + 4 + 12 = \blacksquare + 10$ $20 = \blacksquare + 10$ $20 - 10 = \blacksquare + 10 - 10$ $10 = \blacksquare$ Portanto, a massa da caixa laranja mede 10 kg.
---	--

Fonte: Teixeira (2022, p.66; LXII).

Figura 19 - Exemplo do LD do 6º ano da coleção Superação - Capítulo “Medidas de Massa”

32. Cada balança a seguir está em equilíbrio, isto é, a medida da massa em cada prato é a mesma.  De acordo com essas balanças, qual é a medida da massa da caixa A? E a da caixa B? 32. Respostas: A: 500 g; B: 380 g.	32. Como as balanças estão em equilíbrio, a medida de massa da caixa A é dada pela soma das medidas de massa de cada peça do outro prato, ou seja, 500 g, pois $250 + 250 = 500$. A medida de massa da caixa B é dada pela soma das medidas de massa das peças do outro prato menos a medida da massa da peça que está sobre o prato com a caixa B, ou seja, 380 g, pois $250 + 250 - 120 = 380$.
--	--

Fonte: Teixeira (2002, p.216; CV).

Para o cálculo da medida de “A” (Figura 19), podemos perceber certa limitação, para explorar a perspectiva da equivalência. Pois, já parece explícito que o estudante precisa apenas somar as medidas (250g + 250g) para obter a medida desconhecida (A). O que suscita uma situação de composição na qual temos duas partes conhecidas e o todo desconhecido (Silva, 2023), do campo conceitual das estruturas aditivas (Silva, 2023), tendo as medidas de massa como ferramenta. Ou, uma situação de medição (operacionalização de medidas de massa), sendo ferramentada pelo conceito de adição. No caso, do cálculo da medida B (Figura 19), também podemos perceber, que ainda que possível utilizar o princípio de equivalência aditivo (em uma perspectiva algébrica), o autor preferiu apelar para procedimentos baseados na Aritmética.

Pelo exposto neste capítulo, reafirmamos nosso interesse em torno da questão: Quais os recursos utilizados pelo professor no planejamento de suas aulas sobre Propriedades da

Igualdade e as situações-problema, envolvendo a balança de dois pratos, que ele costuma utilizar em sala de aula com seus estudantes no 6^a ano? Pois, cremos que nem sempre a escolha de exercícios com representações da balança de dois pratos produz a aplicação do significado relacional do sinal de igual, portanto, dos princípios de equivalência. Sendo esses, os conceitos diretamente ligados ao pensamento algébrico na resolução de equações.

No próximo capítulo, apresentamos o caminho teórico que adotamos mais precisamente para a outra questão de pesquisa: Como um professor de matemática do 6º do Ensino Fundamental se apropria do recurso EIB para o ensino de relações de Igualdade? Para tanto, expomos as bases teóricas do *Modelo de Apropriação de um Recurso*, a seguir.

3 AS BASES TEÓRICAS SOBRE A APROPRIAÇÃO DE RECURSOS POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, a fim de melhor compreendermos o *Modelo de Apropriação de um Recurso por um Professor* (Trgalová, 2021; Rousson, 2017; Trgalová; Rousson, 2017), que tomamos como referência para o estudo da apropriação do Explorador da Igualdade Básico por um professor de Matemática, no cenário do planejamento/do ensino sobre as Propriedades da Igualdade no 6º ano, apresentamos os elementos dos quadros teóricos em que esse se ancora, a saber: Abordagem Instrumental (Rabardel, 1995); Abordagem Documental do Didático (Gueudet; Trouche, 2008); Orquestração Instrumental (Trouche, 2004; Drijvers *et al.* 2010) e processos de apropriação (De Vaujany, 2006).

3.1 A ABORDAGEM INSTRUMENTAL

A Abordagem instrumental (AI) (Rabardel, 1995) procede de estudos em “Ergonomia⁸ Cognitiva” e refere-se à “aprendizagem da utilização/integração/aplicação de ferramentas tecnológicas ou qualquer outro recurso que se apresenta como instrumento na pesquisa, no ensino e na aprendizagem de objetos de saberes” (Henriques, 2021, p. 251).

Rabardel (1995) define um instrumento como uma entidade mista formada por dois componentes: I - um artefato (material ou simbólico) produzido pelo sujeito ou por outros e II. Um ou vários esquemas de utilização associado(s), resultante(s) de uma construção própria do sujeito, autônomo ou de uma apropriação de esquemas sociais de utilização. Segundo Rabardel (1995), uma gênese instrumental, ou seja, a transformação de um artefato em instrumento ocorre a partir dos processos de instrumentalização e de instrumentação.

O processo de instrumentalização, cuja orientação é do sujeito para o artefato, consiste no reconhecimento das potencialidades e das limitações do artefato, por meio da manipulação e exploração das suas propriedades e características. Enquanto, no de instrumentação, “há o desenvolvimento de esquemas de utilização e da ação instrumentada para aquele artefato, de acordo com as necessidades e objetivos do sujeito, a fim de resolver um dado problema” (Feitosa; Gitirana; Rodrigues, 2024, p. 5).

Os esquemas de utilização são aqueles ligados à utilização de um artefato. Esses esquemas devem ser instanciados em função do contexto específico de cada situação. Eles se

⁸ Para saber mais, visite o site da ABERGO - Associação Brasileira de Ergonomia e Fatores Humanos : <https://www.abergo.org.br/o-que-%C3%A9-ergonomia>.

atualizam em virtude dos procedimentos adequados às singularidades das situações. Os esquemas de utilização se referem às: 1. Atividades relativas às tarefas “secundárias”, isto é, aquelas relacionadas à gestão das características e propriedades particulares do artefato. 2. Atividades primárias, principais, orientadas para o objeto da atividade, e para as quais o artefato é um meio de realização (Rabardel, 1995, p. 91). No caso das atividades ligadas às tarefas secundárias, os esquemas são definidos como esquemas de uso (E.Us.) e nas tarefas primárias, os esquemas são definidos como esquemas de ação instrumental (E.A.I.).

A base da noção de esquema utilizada por Rabardel (1995) advém da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990). Como vimos, no Capítulo 2, na TCC se considera que é nos esquemas que devemos procurar o conhecimento em ação dos sujeitos, ou seja, os elementos cognitivos que permitem que a ação do sujeito seja operatória.

Grosso modo, a partir da Abordagem Instrumental, desenvolvida por Rabardel, especialmente, no âmbito da Didática da Matemática, encontramos pesquisas ora mais voltadas para a Abordagem Documental do Didático, ora para as Orquestrações Instrumentais. Entretanto, podemos dizer que o *Modelo de Apropriação de um Recurso por um Professor* (Trgalová, 2021; Rousson, 2017) conjuga elementos, ao mesmo tempo, desses dois quadros teóricos. Como veremos adiante.

3.2 A ABORDAGEM DOCUMENTAL DO DIDÁTICO

Conforme Gueudet e Trouche (2021, p. 142), a ADD foi desenvolvida “em um contexto de proliferação de recursos disponíveis aos professores, particularmente recursos on-line. Este contexto destacou a importância de estudar as interações entre os professores e os recursos que eles mobilizam na sua atividade profissional”.

A ADD considera os professores envolvidos em uma atividade profissional finalizada mediada por um objetivo (que pode ser mais ou menos geral). Por exemplo: preparar e implementar uma aula sobre Propriedades da Igualdade no 6º ano do Ensino Fundamental. “O conjunto de situações correspondentes a um mesmo objetivo constitui o que se denomina classe de situações da atividade profissional” (Rabardel; Bourmaud, 2005).

Com base nas noções de artefato e instrumento e nos processos de gênese instrumental (Rabardel, 1995), Gueudet e Trouche (2008), desenvolveram a noção de gênese documental, distinguindo um recurso de um documento.

Na ADD, a instrumentalização - é relativa aos processos de apropriação e/ou reutilização de recursos e a instrumentação se refere à influência exercida pelos recursos na atividade prática do professor (Xavier Neto; Silva; Trouche, 2019).

Vale ressaltar que ocorre uma relação dialética entre os processos de instrumentação e instrumentalização. Na instrumentalização: o professor se apropria dos recursos, ajusta-os, adapta-os, enriquece-os e reorganiza-os segundo seu objetivo de ensino. Enquanto na instrumentação: os recursos ferramentam o professor e influenciam sua atividade docente. Assim, pode-se considerar que esses processos marcam as evoluções de práticas e de conhecimentos profissionais docentes, especialmente, induzidos pelo trabalho sobre/com os recursos para o ensino.

Gueudet e Trouche (2010) sintetizam a relação entre documentos e recursos na ADD através da seguinte expressão: “Documento = recursos combinados + esquema de utilização”.

Na ADD, o significado atribuído aos esquemas de utilização, alude àquele da Abordagem Instrumental (Rabardel, 1995), baseado na Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1990). Sobre os recursos recombinaos, se leva em conta o trabalho documental do professor. De acordo com Trouche *et al.* (2020), o trabalho do professor com recursos, em sala de aula ou fora dela, incluem a seleção, a modificação e a criação de novos recursos. “Esse trabalho criativo é denominado trabalho documental do professor, e seus resultados documentação do professor” (Trouche *et al.*, 2020, p.2).

Os recursos dos professores vão compor o que, na ADD, compreende-se por sistema de recurso. Esse sistema não é apenas uma lista de recursos, pois tais recursos possuem vínculos com o trabalho do professor.

É importante enfatizar que só podemos acessar uma parte desse sistema, pois ele é dinâmico e vivo, estando em constante evolução. Essa dinâmica do sistema de recursos e a sua heterogeneidade tornam a sua análise muito complexa. No sistema de recursos de um professor, por exemplo, diferentes recursos podem ser usados para a mesma classe de situações e, ao mesmo tempo, o mesmo recurso pode ser usado para várias classes de situações (Rocha, 2021, p. 43).

Levando em consideração a multiplicidade de recursos do professor, o sistema de recursos pode ser definido como o conjunto formado por todos os recursos utilizados pelo professor, que combinado com os esquemas de utilização formam documentos – constituindo assim, o sistema documental do professor.

No próximo tópico, apresentamos outro elemento de base do *Modelo de Apropriação de um Recurso* que é o de Orquestração Instrumental.

3.3 AS ORQUESTRAÇÕES INSTRUMENTAIS

Ao desenvolver a noção de Orquestração Instrumental, Trouche (2005), compara a sala de aula com uma orquestra. Assim como um maestro rege a orquestra, o professor conduz os estudantes a utilizar artefatos e transformá-los em instrumentos didáticos. Esses instrumentos didáticos, por sua vez, permitirão que eles resolvam as situações matemáticas. Conforme Trouche (2005):

Uma orquestração instrumental é o arranjo sistemático e intencional dos elementos (artefatos e seres humanos) de um ambiente, realizado por um agente (professor) no intuito de efetivar uma situação dada e, em geral, guiar os aprendizes nas gêneses instrumentais e na evolução e equilíbrio dos seus sistemas de instrumentos. (Trouche, 2005, p. 126).

A OI se baseia em três elementos essenciais, a saber: configuração didática, modo de execução e desempenho didático. Conforme Lucena, Gitirana e Trouche (2016, p. 3):

A configuração didática diz respeito à organização da sala de aula e às escolhas didáticas feitas pelo professor no que concerne à tarefa matemática, aos recursos a serem disponibilizados, às funções dos indivíduos envolvidos, entre outros aspectos. Já o modo de execução consiste na operacionalização da configuração didática desenvolvida previamente pelo professor com foco na gênese instrumental dos estudantes. No desempenho didático, o professor pode perceber, a partir do modo de execução, situações que não foram previstas na configuração didática. Diante destas, o professor faz emergir as decisões ad hoc. Além disto, pode analisar se o desempenho da orquestração instrumental criada foi favorável ou não aos seus objetivos didáticos (Lucena; Gitirana; Trouche; 2016, p. 3).

De acordo com Drijvers *et al.* (2010) e Rousson (2017), as OI podem ser distintas de acordo com a tarefa solicitada aos alunos em duas grandes categorias: 1. Coletivas (OI -C) - os alunos da classe inteira têm um tempo de troca entre eles e/ou com o professor; 2. Individuais (OI-I) - os alunos trabalham individualmente, em dupla ou em grupos, para resolver uma dada tarefa. Dentre outros exemplos, temos a:

- OI Demonstração Técnica (DT) - faz referência ao momento em que o professor mostra como se utiliza, por exemplo, um compasso; ou, no caso de um artefato digital, a demonstração técnica de suas funcionalidades.
- OI - Explicação pelo Professor (EP) - vai além da demonstração dos aspectos técnicos de utilização do artefato e envolve o conteúdo matemático.
- OI - Orientação e Explicação pelo Professor (OEP) - o professor explica aos alunos o conteúdo matemático. Ele chega a propor questionamentos sobre o tema. A discussão é limitada e comandada pelo professor.

- IC - Discussão entre Atores (DA) - ocorrem discussões entre o professor e os alunos ou entre os alunos a fim de melhorar a compreensão da tarefa. A discussão é mais livre e menos regulada do que no tipo de OI-OEP.
- OI Trabalho e Acompanhamento (TA) - os alunos trabalham individualmente ou em pequenos grupos com o artefato. Enquanto isso, o professor circula entre eles para auxiliá-los.
- OI *Sherpa*⁹ (S) - está relacionada ao momento em que um aluno ou vários alunos fazem uso da tecnologia para apresentar aos demais seu trabalho ou, por exemplo, uma estratégia de resolução. Nessa OI, o aluno realiza ações requeridas por outro aluno ou pelo professor.

Um outro aspecto das OI diz respeito às suas composições. Gitirana e Lucena (2021) apresentam as seguintes:

- encaixadas e simultâneas - são distintas e que são executadas simultaneamente, havendo certa dependência entre elas, uma vez que para que uma ocorra, dependerá da ocorrência da outra.
- sequenciadas com intervalos entre elas - tem-se orquestrações distintas e executadas com tempo de execução sequencial (uma após a outra) ou com intervalos de tempo (horas, dias, semanas etc.) entre elas.
- paralelas - são distintas, executadas de forma independentes, mas simultaneamente.

No *Modelo de Apropriação de um Recurso*, veremos adiante (3.5) que as orquestrações instrumentais, na fase de pré apropriação de um recurso são consideradas como aquelas “previstas”, enquanto aquelas que se consolidam na fase da apropriação original são consideradas como “efetivas”.

3.4 A NOÇÃO DE APROPRIAÇÃO E SUAS FASES

Ao realizar uma análise do sentido etimológico do termo “apropriação”, Batista (2018) explica que este tem sua origem latina em: *appropriationem*.

Segmentando o termo, chegamos ao prefixo a-, em latim ad-, que, como preposição, significa “aproximação, direção para (geralmente com ideia de movimento)” (Faria, 1956, p. 28). Também há a raiz próprio, em latim proprius, que significa “[...] o que é propriedade de, que pertence a, particular, especial, característico [...]”; e também, “[...] permanente, duradouro, sólido, estável” [...], conforme Faria (1956, p. 781). O

⁹ Sherpa em alusão ao trabalho de Trouche (2004).

termo termina com o sufixo -ação, -tionem em latim, um pospositivo que, de acordo com o dicionário Houaiss (Houaiss; Villar; Franco, 2001), é formador de substantivos verbais de ação (Batista, 2018, p. 211).

Em dicionários da língua portuguesa, o verbete “apropriação” significa:

- 1. Ação ou efeito de apropriar, de tomar algo para si, de se apossar de algo, legal ou ilegalmente; apoderamento, empossamento: apropriação do espaço público. 2. Ação ou efeito de apropriar, de tomar algo para si, de se apossar de algo, legal ou ilegalmente; apoderamento, empossamento: apropriação do espaço público. 3. Apoderação de algo que está abandonado ou que aparentemente não tem proprietário (Ferreira, 2024).
- 1. Ato ou efeito de apropriar (-se), ação de apoderar-se de algo, legal ou ilegalmente. 2. Ato de tornar algo adaptado ou adequado a um fim ou uso; adaptação, adequação. 3. Ato de apoderar-se de algo abandonado ou aparentemente sem dono; invasão, ocupação (Michaelis, 2024).

Tais significados apresentam semelhanças com aqueles da língua francesa:

Approprier: 1. Rendre propre, convenable à un usage, à une destination. Approprier son discours au public. = adapter. Rangez cet objet à la place appropriée. = convenable. 2. S'APPROPRIER: faire sien; s'attribuer la propriété de (ce qui appartient à un autre). S'approprier el bien d'autrui. = s'emparer, usurper. Ele s'est approprié les livres qu'on lui avait prêtés. » Appropriation - Action de s'approprier une chose (surtout sans en avoir le droit) (Le Robert, 2006, p. 62).

Consideramos que um aspecto importante em torno do conceito de apropriação é entendê-lo como um processo. Nesta direção, por exemplo, Silva (2019, p. 9) pontua que “a apropriação de tecnologia é o processo pelo qual os usuários de uma tecnologia a adotam, testam suas possibilidades mediante o uso e a modificam para satisfazer suas necessidades ou desejos”. Nesse processo de apropriação, ocorrem transformações pelas quais, “a partir de um conjunto de condições iniciais (a tecnologia como projetada), chega-se a um estado final (a tecnologia em uso)” (Silva, 2019, p.67).

Segundo Proulx (2016, p.46) quando falamos em apropriação, “não há simplesmente o domínio técnico do objeto; há também um gesto de integração com a vida cotidiana”. Isto é, se ocorre apenas o domínio do objeto técnico sem integrá-lo à vida profissional, pessoal, doméstica, não há, uma verdadeira apropriação. Assim, a apropriação resulta de certas condições, tais como:

- Acessibilidade ao dispositivo técnico - isto é uma pré-condição, pois se não temos acesso, não há apropriação;

- Integração do uso na vida cotidiana; visto que é preciso ter algo para fazer com o objeto técnico, senão não há apropriação;
- Inovação - um uso abre a possibilidade de criação, ou seja, são atividades que geram novidades, na prática;
- Mediação por uma comunidade de prática e a representação política organizacional do usuário.

Em particular, De Vaujany (2006), discute que a apropriação de um objeto, como um longo processo que se inicia bem antes da etapa de sua utilização e se estende por muitos anos após a primeira rotina de uso. Este processo ocorre em três fases:

1. Pré-apropriação, quando um objeto é apresentado, discutido ou mencionado pela primeira vez. O que corresponde à interpretação inicial do objeto por um utilizador.
2. Apropriação original, após a etapa de pré-apropriação, havendo uma aceitação do objeto, começa a ocorrer a instalação de rotinas.
3. Reapropriação, que é o desenvolvimento de novas práticas de utilização do objeto.

Essas fases propostas por De Vaujany (2006), são aquelas, em especial, adotadas no *Modelo de Apropriação de um Recurso por um professor* (Trgalová; Rousson, 2017).

3.5 O MODELO DE APROPRIAÇÃO DE UM RECURSO POR UM PROFESSOR

Com base nas ideias de De Vaujany (2006), Trgalová e Rousson (2017), propõem no campo da Didática da Matemática estudar a apropriação de um recurso por um professor, como um processo de aprendizagem contínuo e de longa duração. Esse processo é proposto nas três fases seguintes:

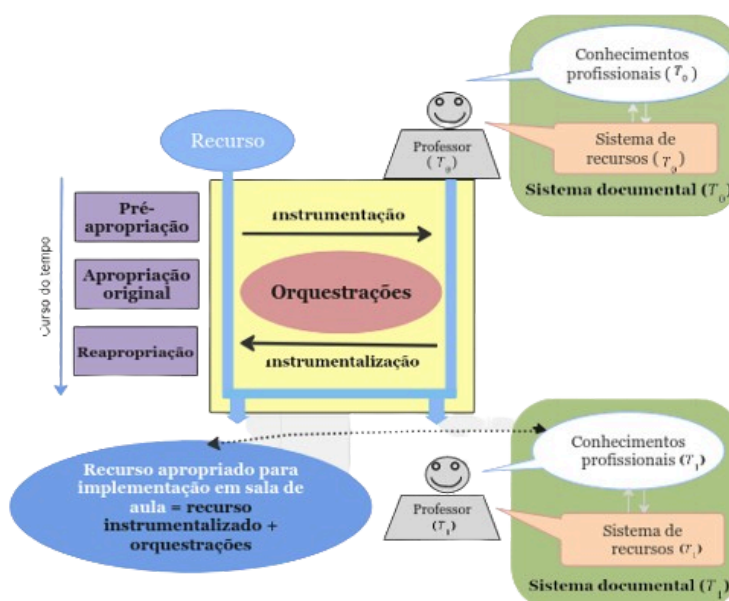
1. Pré-apropriação - primeiro contato do professor com o recurso;
2. Apropriação original - Primeira implementação do recurso em sala de aula;
3. Reapropriação - Possíveis revisões e adaptações do recurso a novos usos.

Vale ressaltar que as fases de apropriação de um recurso ocorrem de forma temporal. Essas fases são circunstanciais. Nessa direção, um aspecto importante, baseado na ADD, é conhecer o sistema de recursos docente. Sabendo-se que o sistema de recursos evolui ao longo do tempo, em uma dada fase de pré-apropriação (T_0) esse não será o mesmo em uma fase de reapropriação do mesmo recurso (T_1).

Como vimos na ADD, os recursos são associados a esquemas de utilização, formando documentos. De acordo com Trouche *et al.* (2020), os documentos desenvolvidos por um

professor também formam um sistema, denominado de sistema documental do professor. O *Modelo de Apropriação de um Recurso por um Professor* (Figura 20) leva em conta o fato que o professor desenvolve novos conhecimentos profissionais e muda seus sistemas de recursos e documental a partir de apropriações de novos recursos.

Figura 20 - Modelo de apropriação de um recurso por um professor



Fonte: Trgalová (2021, p. 118).

Retomando, o que já apresentamos:

- Na Abordagem Instrumental: **Instrumento** = *artefato + esquemas de utilização*.
- Na Abordagem Documental do Didático: **Documento** = *recursos recombinaados + esquemas de utilização*.
- No Modelo de Apropriação de um Recurso por um Professor - **Recurso apropriado para implementação em sala de aula** = *recurso instrumentalizado + orquestrações*.

Gueudet e Trouche (2010) explicam que um esquema de utilização comporta em particular regras de ação e invariantes operatórios que dizem respeito aos conhecimentos profissionais dos professores, conforme a TCC (Vergnaud, 1990). Podemos dizer que já na fase de pré-apropriação, os conhecimentos profissionais dos professores emergem como pontos-chave para suas interpretações sobre o potencial de um recurso para a aprendizagem dos estudantes de um dado saber matemático.

Sobre as orquestrações instrumentais, na fase de pré-apropriação, considera-se que elas não são ainda inteiramente detalhadas em termos de configuração didática e modos de

execução. Mas, podemos visualizar o processo de sua construção, o que o professor pensou inicialmente em realizar na sala de aula (Lira, 2022). Isto se faz importante para percebermos o que o professor adota e o que ele descarta, no caminho de suas decisões didáticas diante das escolhas possíveis para o uso de um recurso.

Esses aspectos das OI previstas são igualmente importantes para analisarmos os tipos de orquestrações efetivas, na fase de apropriação original, a fim de identificarmos, por exemplo, se estão iguais ou diferentes em relação ao que foi previsto, quais modificações ocorreram em sala de aula e refletirmos sobre o desempenho didático em tela.

Na presente pesquisa, vamos nos deter a estudar as fases de pré-apropriação e de apropriação original do EIB, devido a delimitação do tempo da pesquisa. A construção e análise de dados da pesquisa está ancorada na Metodologia de Investigação Reflexiva que passamos a apresentar no próximo capítulo.

4 A METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO REFLEXIVA

Ao iniciarmos este capítulo, ressaltamos que a presente pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética e Pesquisa da UFRPE sob o nº CAAE 85633424.9.0000.9547 e que após emissão do Parecer Consubstanciado de nº 7.428.495 foi consolidada a construção e análise dos dados. Ao Comitê de Ética, foram apresentados os objetivos e os elementos metodológicos da presente pesquisa com a sua devida relevância e aplicabilidade. Além da elaboração de documentos e autorizações (em anexo).

4.1 OS PRINCÍPIOS DA METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO REFLEXIVA

Com o objetivo de analisar a apropriação de uma balança de dois pratos digital (o EIB-PhET) para/no ensino de Propriedades da Igualdade, por um professor de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental, adotamos a Metodologia de Investigação Reflexiva (MIR) desenvolvida no âmbito da Abordagem Documental do Didático.

Segundo Gueudet e Trouche (2021), a maior parte dos trabalhos com referência na ADD têm adotado o “estudo de caso”, que nos permite olhar para os detalhes de gêneses documentais de indivíduos ou coletivos. Na presente pesquisa, temos um estudo de caso individual, ou seja, com um único professor.

O processo de construção e análise de dados na MIR (Gueudet; Trouche, 2021) ocorre por meio de trocas com o professor, a fim de identificarmos sua visão sobre suas atividades profissionais. A coleta de dados ocorre em torno dos dados fornecidos sobre os recursos do professor. Particularmente, numa perspectiva didática, com base em algum conteúdo escolar (matemático). O sujeito da pesquisa, não apenas participa da construção de dados, ele também é partícipe da análise desses dados.

De acordo com Trouche *et al.* (2020) a MIR se norteia por cinco princípios, que passamos a apresentá-los com base nos procedimentos metodológicos que adotamos para pesquisa.

1. O princípio de uma ampla coleção de recursos materiais usados e produzidos durante o trabalho documental.

Como etapa preliminar ao estudo da apropriação do Explorador de Igualdade Básico (EIB) da PhET, buscamos levantar, analisar e discutir com a participação de um professor de

matemática do 6º ano do Ensino Fundamental, os recursos utilizados por ele no planejamento e execução de suas aulas, sobre Propriedades da Igualdade. Assim, a análise do trabalho do professor ocorreu antes e durante os processos de pré-apropriação e de apropriação original do EIB. Pois, consideramos essencial, conhecer os recursos utilizados pelo professor para/em suas aulas sobre Propriedades da Igualdade com o intento de nos inteirarmos de seus conhecimentos e de suas práticas de ensino sobre esse tema. E, de seus efeitos sobre suas interpretações e possibilidades de utilização do EIB.

2. O princípio do acompanhamento de longa duração.

Esse princípio leva em conta o fato que as gêneses documentais são processos em desenvolvimento e os esquemas de utilização de um recurso se desenvolvem ao longo do tempo. No nosso caso, desenvolvemos a pesquisa com um professor de matemática (doravante identificado pelo codinome Tales) no período de quatro meses (julho a outubro). Isto é, da sua adesão à pesquisa até a realização de uma entrevista final sobre seu processo de apropriação do EIB.

3. O princípio do acompanhamento em todos os lugares (dentro e fora da sala de aula).

Sobre esse princípio, convém ressaltar que:

A sala de aula é um local importante onde o ensino planejado é implementado, uma implementação que requer adaptações, revisões e improvisações. No entanto, uma parte significativa do trabalho dos professores ocorre fora da sala de aula: (na escola, por exemplo, na sala dos professores, em casa ou em cursos de formação continuada) (Trouche *et al.* 2020, p. 8).

A pesquisa se desenvolveu na Rede Municipal de Ensino de Itapissuma - PE (RMEI). Essa rede de ensino possui quatro escolas que ofertam os anos finais do EF, sendo uma escola localizada na zona rural e três na zona urbana deste município. Devido à distância da escola localizada na zona rural, escolhemos desenvolver a pesquisa naquelas situadas na zona urbana. Durante o mês de julho, a partir do acesso ao grupo de professores de Matemática das escolas urbanas, no *WhatsApp*, compartilhamos um questionário (via *Google Forms*), a fim de levantarmos a disponibilidade, em particular, dos professores do 6º ano do EF em participarem da nossa pesquisa.

Além disso, levantamos outras informações (Apêndice A) sobre: Formação docente (graduação e pós-graduação); experiência profissional, especialmente no 6º ano do EF; vínculo empregatício na RMEI (temporário ou efetivo); conhecimento dos professores sobre a

plataforma PhET; contato pessoal de telefone e email, caso aceitassem participar das próximas etapas da pesquisa.

Com base no retorno das respostas ao questionário (Apêndice A), apenas o professor Tales, do 6º ano do EF, se colocou à disposição para participar da pesquisa. A partir disso, agendamos com ele, no mês de julho, uma primeira entrevista (pelo *Google Meet*) para levantar informações sobre o seu sistema de recursos e suas impressões sobre o ensino de Propriedades da Igualdade, no 6º ano.

Nesse momento, também apresentamos a PhET e mostramos o Explorador da Igualdade Básico, explicando que gostaríamos que ele o analisasse para que em um próximo encontro, comentasse o que achou desse recurso e como poderia utilizá-lo em sala de aula. Assim, demos início a fase de pré-apropriação do EIB pelo professor Tales. Essa fase aconteceu em ambientes escolhidos pelo professor (casa, escola, etc.) de forma livre, quanto aos horários de acesso à plataforma PhET.

No mês de agosto, de forma remota (pelo *Google Meet*) ocorreu a entrevista sobre a fase de pré-apropriação do recurso EIB. Já a investigação acerca da fase de apropriação original ocorreu na escola (em setembro), por meio da observação de suas aulas em uma turma do 6º ano. Bem como, uma entrevista (em outubro) após a utilização desse recurso.

4. O princípio do acompanhamento reflexivo do trabalho documental, em que a visão do professor sobre seu próprio trabalho é amplamente requisitada.

Na ocasião do primeiro encontro com o professor, propomos a produção de sua Representação Esquemática do Sistema de Recursos, seguida de uma entrevista. Essa ferramenta tem sido utilizado na ADD, levando-se em conta aspectos externos e internos ao sujeito da pesquisa, pois trata-se de:

- Uma representação externa, uma esquematização, que poderá ser explorada pelo pesquisador, que busca desta inferir os elementos da estrutura do sistema documental do professor.
- Uma representação interna, no sentido que ela demonstra o modo pelo qual o professor se representa e deseja apresentar àquele que o interroga, os elementos da organização de seu trabalho (Gueudet; Trouche, 2008, p.2)

Além disso, buscamos questionar o professor Tales sobre:

- O período em que ele pretendia trabalhar, no 6º ano do EF, a habilidade da BNCC: EF06MA14 - Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo

número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.

- As dificuldades dos estudantes no desenvolvimento da habilidade EF06MA14.
- Os recursos utilizados no planejamento das aulas sobre a habilidade EF06MA14.

No momento, Tales estava ensinando “Frações”, para posteriormente, trabalhar com as Propriedades de Igualdade. Ao final da entrevista solicitamos ao professor que compartilhasse conosco as fichas de exercícios que ele pretendia utilizar, bem como, outros recursos. Além de possíveis fotos do quadro branco e dos cadernos dos alunos. Ademais, ficamos à espera dele nos indicar os dias das aulas sobre o tema para que pudéssemos observá-las.

Por meio da RESR, dados da entrevista e recursos fornecidos pelo professor (slides, ficha de exercícios, sites) enveredamos pelo caminho de desvendar as fontes e as motivações do professor na escolha desses recursos. A fim de termos uma melhor percepção de suas aulas sobre as Propriedades da Igualdade. Em especial, sobre a ficha de exercícios, intitulada por Tales “*Igualdade e identificação de número desconhecido*”, desenvolvemos uma análise sobre os invariantes operatórios identificáveis por meio da forma como ele explicou cada um dos seus exercícios aos estudantes do 6º ano, em duas aulas, observadas e videogravadas. E, buscamos verificar possibilidades de articulação de tais exercícios com as simulações do EIB.

5. O princípio de confrontação, do ponto de vista do professor com seu trabalho documental e a materialidade desse trabalho

Com base nesse princípio, a materialidade do trabalho do professor é proveniente, por exemplo, da coleção de seus recursos materiais ou mesmo das práticas de ensino de suas aulas. Essencialmente, o ensino das Propriedades da Igualdade, na turma do 6º ano, que o professor Tales escolheu para acompanharmos suas aulas, foi mediado por uma ficha de exercícios “*Igualdade e identificação de número desconhecido*”. Em virtude disso, a implementação da utilização do EIB nessa turma foi norteadada pela forma como o professor demarcou o tempo para concluir a resolução dos itens desta ficha.

Ainda sobre a ficha do professor, convém ressaltar que dentre sete exercícios, cinco deles foram propostos com o uso da balança de dois pratos. De forma que durante o processo de análise dos dados, o professor foi convidado a refletir sobre as situações-problema envolvendo a balança de dois pratos na forma em papel e digital (pelas simulações do EIB).

Pelo exposto, refinamos nos próximos tópicos os procedimentos metodológicos em torno das fases de pré-apropriação e apropriação original do EIB.

4.2 A CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS SOBRE A FASE DE PRÉ-APROPRIAÇÃO

Como vimos, a apropriação de um recurso é um processo longo e dinâmico. Esse processo se inicia com a fase, denominada de pré-apropriação. Rousson (2017) destaca que as informações desta fase tendem a ser reduzidas, visto que ainda não houve uma utilização efetiva do recurso pelo professor em sala de aula. Contudo, de forma antecipada à regência de suas aulas, convém considerar os processos de instrumentalização-instrumentação, que emergem ao professor se debruçar sobre a análise de um recurso, ou seja, os efeitos desse recurso sobre si mesmo e como ele começa já a organizar mentalmente como esse pode ser utilizado com seus alunos.

Explicamos que após o professor ter analisado o Explorador de Igualdade Básico (de modo livre e individual), no encontro com ele, de forma remota (gravada pela plataforma *Google Meet*), buscamos nesse momento, à medida em que o simulador da balança digital foi exposto, questioná-lo sobre: O que você achou do simulador? Você acessou o modo básico e o laboratório do simulador? Como pode ser explorada a determinação do termo desconhecido utilizando o simulador? Quais atividades serão propostas aos estudantes? De que forma?

Com base na videogravação desse encontro, procedemos à análise dos dados, buscando identificar os tipos de situações, as representações simbólicas, as regras de ação e os invariantes operatórios subjacentes, nas simulações do EIB pelo professor. Bem como, mapear as orquestrações instrumentais previstas para o uso do EIB na turma do 6º ano. Isto é as configurações didáticas e modos de execução imaginados pelo professor, no seu planejamento para aula com o EIB.

Ressaltamos que esse momento ocorreu uma semana antes de duas aulas, marcadas pelo professor, para uso do EIB na turma do 6º ano.

4.3 A CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS SOBRE APROPRIAÇÃO ORIGINAL

Nesta fase, fizemos a observação e registro de duas aulas em que o simulador foi implementado utilizando anotações, capturas de fotos, áudios e vídeos. As aulas em que foi utilizado o EIB durou 100 min. No dia da aplicação do EIB contamos com a participação de 16 estudantes (registramos a ausência de 5 estudantes).

O professor não avisou com antecedência aos estudantes que utilizaria o EIB nas aulas. Ele apenas lhes indicou que daria continuidade à correção da ficha de exercícios *“Igualdade e identificação de número desconhecido”*.

Durante o processo de observação das aulas do professor, fomos registrando as configurações didáticas, modos de exploração e desempenho didático em torno do uso do EIB. Ao longo das análises sobre as OI, identificamos os seus tipos e suas composições.

Explicamos que de modo informal, chegamos a fazer algumas perguntas a Tales já logo após o final das aulas, tais como: O que você achou da experimentação do simulador em sala de aula? Quais as dificuldades dos alunos para utilizar o simulador? E as suas?

Após assistirmos e analisarmos o vídeo das aulas com o EIB, bem como, revermos outras informações de nosso acompanhamento sobre o ensino das Propriedades da Igualdade, pelo professor, realizamos uma última entrevista, no mês seguinte, com questões mais elaboradas, a fim de esclarecermos as nossas dúvidas sobre a forma como ele decidiu usar o simulador e de como pretendia usá-lo novamente.

Relembramos aqui que o professor Tales não conhecia o EIB e durante a nossa pesquisa, essa foi a primeira vez que ele o utilizou em sala de aula. Durante nossas análises sobre a fase de apropriação original, retomamos ao que ele tinha nos apresentado, na fase de pré-apropriação, o que nos ajudou a compreender o que se passou ao ele decidir usar esse novo recurso e os fatores que impactaram seu processo de apropriação. Por via de seus esquemas de utilização ou dos efeitos do desempenho didático nas orquestrações implementadas em sala de aula.

Os resultados desse trabalho são apresentados no capítulo seguinte.

5 RESULTADOS DA PESQUISA

Neste capítulo, explanamos o perfil profissional e o sistema de recursos do professor Tales. Além do cenário de ensino das Propriedades de Igualdade, em uma turma do 6º ano do EF da RMEI, que circundou a sua fase de pré-apropriação e de apropriação original do simulador Explorador da Igualdade Básico (EIB). Levando-se em consideração, a importância de situarmos a apropriação de tal recurso no tempo (T) no que diz respeito aos seus conhecimentos e seus recursos para o ensino de Propriedades da Igualdade, no que tange a habilidade da BNCC: EF06MA14 - Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.

5.1 O PERFIL E O SISTEMA DE RECURSOS DO PROFESSOR TALES PARA O/NO ENSINO SOBRE AS PROPRIEDADES DE IGUALDADE NO 6º ANO

O professor Tales, licenciado em Matemática e especialista em Neurociências e Psicopedagogia, no momento da pesquisa, estava cursando o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) na UFRPE. Ele informou atuar como professor efetivo em duas redes municipais de ensino: na de Itapissuma - PE (com estudantes do EF) e na de Vitória de Santo Antão - PE (com estudantes do EF).

Com quinze anos de experiência docente, Tales expôs sua preferência por turmas do 6º ano do EF. De forma que, no ano letivo vigente (2024), ele estava trabalhando com as três turmas do 6º ano da escola da Rede Municipal de Ensino de Itapissuma (RMEI).

Professor: Os meninos do 6º ano te chamam de tio, né? É “tio” direto, tem um que me chama de pai. É muita “onda”, os meninos do 6º ano. Eles são assim. Mas, eu gosto.

As características dos estudantes do 6º ano, apontadas por Tales, revelam seus conhecimentos sobre a atenção a ser dada, especialmente, em Matemática, aos fatores da transição estudantil dos anos iniciais para os anos finais do EF. Como sinaliza as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica (DCNGEB), no 6º ano há que se superar:

Os problemas localizados na passagem das séries iniciais e a das séries finais dessa etapa, decorrentes de duas diferentes tradições de ensino. Os alunos, ao mudarem do

professor generalista dos anos iniciais para os professores especialistas dos diferentes componentes curriculares, costumam se ressentir diante das muitas exigências que têm de atender, feitas pelo grande número de docentes dos anos finais (Brasil, 2003, p. 20).

O professor apontou a necessidade de “*retomar*” o ensino de conteúdos estudados, anteriormente, pelos estudantes para “*prosseguir*” com aqueles previstos para o 6º ano. Sobre os estudantes do 6º ano do ano letivo vigente, ele comentou:

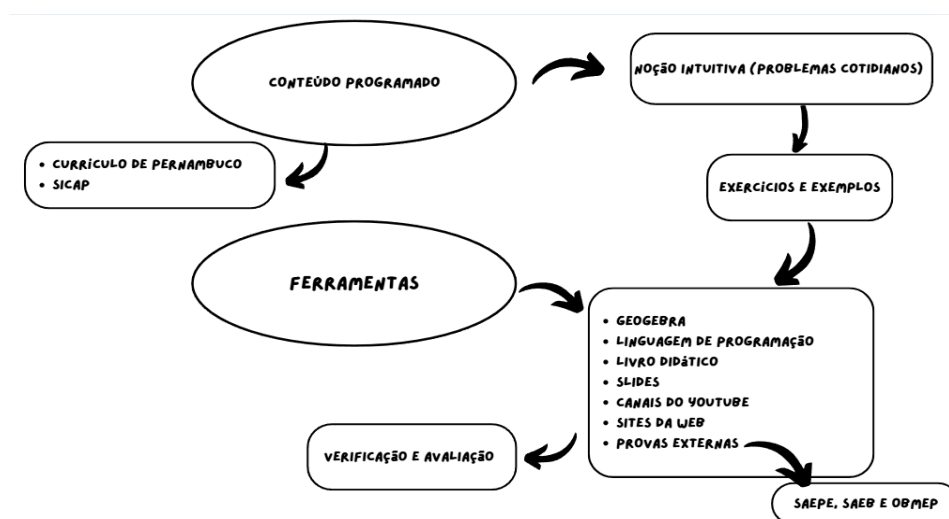
Professor: Eu procuro ver a realidade dos meninos, procuro contextualizar os assuntos com a realidade deles. Comparando com outros anos, essas três turmas que estou do 6º ano, os alunos são bons. Então acredito que os resultados sobre os assuntos estão melhores que os dos anos anteriores.

Tais considerações apontam indícios da atenção do professor com o seu conhecimento prévio dos alunos e a sequência dos conteúdos matemáticos a serem estudados no 6º ano. O que nos remete às orientações das DCNGEB:

§ 2º A transição entre as etapas da Educação Básica e suas fases requer formas de articulação das dimensões orgânica e sequencial que assegurem aos educandos, sem tensões e rupturas, a continuidade de seus processos peculiares de aprendizagem e desenvolvimento (Brasil, 2003, p. 69).

Ao adentrarmos no estudo sobre o Sistema de Recursos de Tales (Figura 21), ele mencionou o GeoGebra e a linguagem de programação, relacionando-os a sua dissertação de mestrado, em andamento no PROFMAT, cuja construção de produto educacional¹⁰ envolve tais recursos na elaboração de uma sequência didática acerca de conteúdos de Geometria e Funções.

Figura 21 - RESR de recursos de Tales



Fonte: Protocolo da pesquisa.

¹⁰ Ao final do PROFMAT é prevista a apresentação de um produto educacional além da dissertação de mestrado.

Na RESR (Figura 21), podemos constatar que Tales relacionou o “conteúdo programado” aquele previsto no documento disponível na internet pela Secretaria Estadual de Educação e Esportes de Pernambuco (SEE-PE), o “Organizador Curricular por Bimestre” (Pernambuco, 2019c). E, no Sistema de Controle de Atos de Pessoal (SICAP) da Secretaria Municipal de Educação de Itapissuma - PE.

Como previsto no documento da SEE - PE e no SICAP, ao questionarmos Tales sobre em que bimestre ele trabalhava, no 6º ano do EF, a habilidade da BNCC: “EF06MA14 - Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas”? Ele afirmou: “*Eu trabalho mais no terceiro bimestre*”.

Tales explicou que costuma preparar suas aulas sobre diversos conteúdos com base nos recursos: livro didático e site do portal da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) (<https://portaldaobmep.impa.br/>).

Professor: Eu utilizo o portal da Obmep, pego questões de lá. Vejo algumas questões associadas ao tema do livro didático.

Particularmente, sobre o Livro Didático (LD), a coleção adotada na escola (da RMEI) é “A Conquista da Matemática” (Giovanni Júnior, 2022). No que diz respeito à abordagem dada à habilidade EF06MA14 no LD dessa coleção, podemos constatar a apresentação de uma página destinada a este tema (Figura 22), a saber: na Unidade 2 - “Cálculos com Números Naturais”.

Figura 22 - Habilidade EF06MA14 no LD - A Conquista da Matemática

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS**Propriedades da igualdade**

Neste tópico os estudantes ampliam a compreensão com relação à ideia de igualdade, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade EF06MA14.

Atividades

As atividades propostas nesse bloco têm como objetivo desenvolver aspectos relacionados às habilidades EF06MA12 e EF06MA14.

Na **atividade 1**, espera-se que os estudantes percebam como, em caso de números compostos por mais ordens, o arredondamento pode facilitar a estimativa de determinado resultado. Se julgar relevante, sugerir aos estudantes que façam o cálculo exato, usando o algoritmo da subtração e, também, uma calculadora.

Na **atividade 2**, os estudantes precisam determinar o valor desconhecido na balança de pratos em equilíbrio, aplicando a propriedade da igualdade. Para ampliar o trabalho com essa atividade, sugere-se utilizar o recurso indicado no **Ampliando** desta página.

PROPRIEDADES DA IGUALDADE

Acompanhe a situação a seguir.

Júlia está poupando dinheiro para comprar um jogo e já tem 35 reais. Hoje ela ganhou 4 reais de sua mãe e guardou esse dinheiro. Podemos escrever a seguinte sentença para representar a quantia que Júlia tem.

$$35 + 4 = 39$$

Imagine que amanhã Júlia ganhe 7 reais de seu avô e junte esse valor à quantia que já tinha. Para descobrir a nova quantia de Júlia, podemos calcular:

$$35 + 4 + 7 = 46 \quad \text{ou} \quad 39 + 7 = 46$$

Observe que esses dois cálculos têm resultados iguais e podemos escrever:

$$35 + 4 + 7 = 39 + 7$$

Quando adicionamos um mesmo número aos dois membros de uma igualdade, ela não se altera. Além disso, uma igualdade também não se altera se subtraímos dos dois membros um mesmo número. Por exemplo:

$$125 + 23 + 52 = 148 + 52 \quad 125 + 23 - 48 = 148 - 48$$

Além disso, quando multiplicamos os dois membros de uma igualdade por um mesmo número, ela não se altera. Do mesmo modo, uma igualdade também não se altera se dividimos os dois membros por um mesmo número. Por exemplo:

$$2 \cdot (12 + 3) = 2 \cdot 15 \quad (12 + 3) : 5 = 15 : 5$$

Podemos utilizar essas propriedades para descobrir um valor desconhecido em uma igualdade.

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

- Há dez anos um município tinha 2993475 habitantes. Hoje ele tem 4238592. Arredonde esses números para a unidade de milhão exata mais próxima e calcule a diferença entre essas quantidades. **1 000 000 ou 1 milhão.**
- Observe a balança em equilíbrio. Qual é a massa do cubo? **10 kg**
- Elabore um problema envolvendo cálculos com números naturais e troque com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Vocês podem se inspirar nas situações das atividades anteriores.

Resposta pessoal. Exemplo de resposta na seção **Resoluções comentadas** deste Manual.



66

AMPLIANDO**Link**

POLYPAD. **The Mathematical Playground**. [S. l.], c2022. Disponível em: <https://pt.mathigon.org/polypad>. Acesso em: 21 ago. 2022.

Nesse link, nas opções à esquerda na tela, na aba **Arquivo**, no item **Álgebra**, na opção **Escala de equilíbrio**, explorar com os estudantes propriedades da igualdade, atribuindo valores aos símbolos que podem ser colocados e retirados nos pratos da balança desse recurso virtual.

Fonte: Giovanni Júnior (2022, p. 66).

Como podemos observar na Figura 22, a habilidade EF06MA14 é abordada no LD da coleção “A Conquista da Matemática” a partir da resolução de situações-problema, explorando aspectos das habilidades do 3º ano ao 5º ano: EF03MA11; EF04MA14 e EF05MA10¹¹. Após a noção da apresentação dos princípios aditivo e multiplicativo da

¹¹ EF03MA11 : Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença;

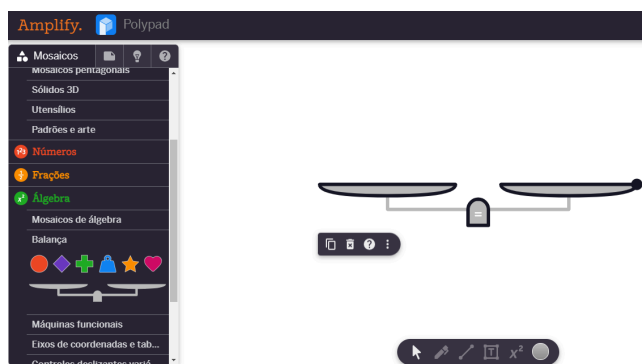
EF04MA14 : Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.

EF05MA10 : Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.

igualdade, no referido LD é proposta uma tarefa sobre o termo desconhecido (a massa do cubo) representado em uma balança de dois pratos. Na entrevista com Tales, solicitamos que ele comentasse tal abordagem do LD. Diante disso, o professor explicou que não pretendia utilizar o LD em tela, por considerar a sua abordagem sobre o tema: “ *muito superficial*”. No momento, ele indicou já ter uma ficha de exercícios preparada sobre Propriedades de Igualdade e que pretendia usá-la “*mais uma vez*” com seus estudantes do 6º ano.

Durante a entrevista também perguntamos ao professor se ele já tinha tentado acessar o recurso indicado na nota de rodapé do LD: o *Polypad* (Figura 23). Diante de tal provocação, sobre o proposto no LD, adotado na escola, ele comentou que não tinha feito isso, pois não tinha “*parado para vê-lo*”.

Figura 23 - Recurso indicado no LD do 6º ano - Coleção A Conquista da Matemática



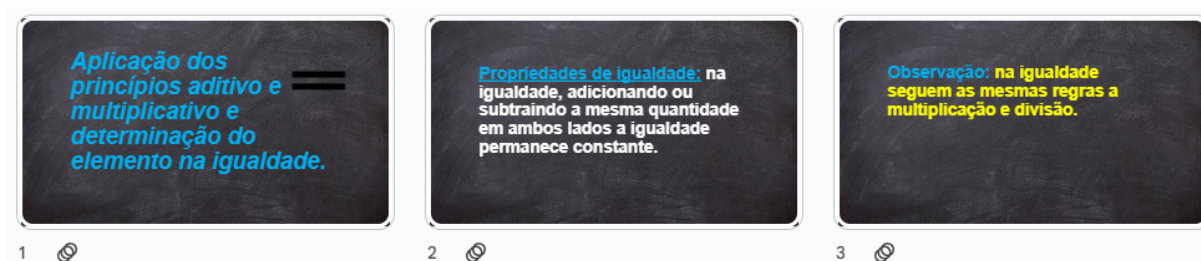
Fonte: <https://polypad.amplify.com/pt/p#algebra>. Giovanni Júnior (2022, p. 66).

Ao questionarmos Tales se ele já havia utilizado algum outro recurso digital para o ensino da temática da habilidade EF06MA14, ele enfatizou o seguinte:

Professor: Recurso digital para isso, não. Eu conheço o GeoGebra. Mas, eu uso o GeoGebra na parte de geometria e construções. Eu nunca utilizei não, eu trabalho mais essa questão de problemas do cotidiano e também provas externas, meu parâmetro maior é esse.

A propósito do sistema de recursos de Tales, especialmente, tivemos acesso a um conjunto de 21 slides (Anexo A) que ele utilizou durante o período da pandemia de COVID19 sobre o Princípio Aditivo e Multiplicativo. Na Figura 24, podemos observar como ele introduz tais princípios.

Figura 24 - Slides introdutórios sobre o Princípio Aditivo e Multiplicativo do professor



Fonte: Protocolo da pesquisa.

No Quadro 14, apresentamos duas situações-problema, dos slides de Tales, envolvendo o princípio aditivo, sendo uma com adição e outra com subtração.

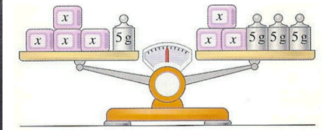
Quadro 14 - Slides com situações sobre o Princípio Aditivo do professor

Problema 1	Problema 2
Problema 1: Um estudante do 6º ano quer saber o valor do número que está escondido. Qual é esse número ? $36 + \# = 51$	Problema 2: O número que falta para manter a igualdade na figura abaixo é $\# - 5 = 20$
Solução do problema 1	Solução do problema 2
Solução: $36 + \# = 51$ $36 + \# - 36 = 51 - 36$ $\# = 15$	Solução: $\# - 5 = 20$ $\# - 5 + 5 = 20 + 5$ $\# = 25$

Fonte: Protocolo da pesquisa.

As situações propostas com a utilização da balança de dois pratos (Quadro 15) também são voltadas para o princípio aditivo.

Quadro 15 - Slides com situações sobre o Princípio Aditivo do professor usando a balança

Problema 3	Problema 4
Problema 3: Observe o equilíbrio da balança e encontre o valor de x: 	Problema 4: Encontre o valor x, a partir da seguinte balança: 
Solução do problema 3	Solução do problema 4
Solução: $X + X + 100 = 500$ $X + X + 100 - 100 = 500 - 100$ $X + X = 400$ $X = 200$	Solução: $X + X + X + X + 5 = X + X + X + 5 + 5 + 5$ $4x + 5 = 3x + 15$ $4x + 5 - 5 = 3x + 15 - 5$ $4x = 3x + 10$ $4x - 3x = 3x - 3x + 10$ $X = 10$

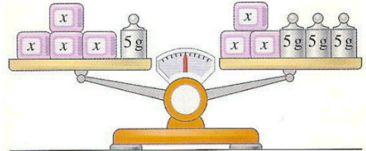
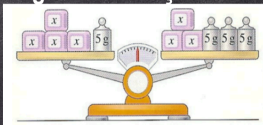
Fonte: Protocolo da pesquisa.

Segundo Tales, ele tem os slides mencionados acima, guardados para as turmas do 6º ou do 7º ano. Dependendo das condições da turma, ele os utiliza ou não. Durante o período de pandemia ele os utilizou bastante, depois disso, “*não mais*”.

Tendo em vista o trabalho documental de Tales na construção dos referidos slides, constatamos que o **Problema 04** foi adaptado do site do *Clubes de Matemática da OBMEP*.¹² No Quadro 16, podemos perceber que o professor suprimiu as alternativas do problema original. Ao observarmos as respostas apresentadas no slide (Quadro 16) podemos perceber que Tales optou por responder o **Problema 04**, utilizando o princípio aditivo.

¹² Sobre a imagem utilizada, localizamos o uso desta em outro problema diferente no site da OBMEP: <http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-de-gincana-pesando-caixas/>.

Quadro 16 - Adaptação do Problema 04 pelo professor

Problema original	Problema adaptado pelo professor
Problema João distribuiu várias caixas com massa x kg em uma balança de dois pratos, conforme mostra a figura abaixo.  Em relação à massa x, podemos dizer que é um número - que expresso em gramas é múltiplo de 3. - maior que 0,01 kg. - que expresso em quilogramas é múltiplo de 10. - menor que 0,001 kg. - que expresso em decigramas é múltiplo de 100.	Problema 4: Encontre o valor x, a partir da seguinte balança: 
Solução Como a figura mostra equilíbrio entre os dois pratos, temos que $4x + 5 = 3x + 15$ e, assim, $x = 10g$. Como essa massa corresponde a • 0,01 kg; • 0,1 hg; • 1 dag; • 100 dg; • 1000 cg; • 10 000 mg; então a massa em decigramas é um número múltiplo de 100.	Solução: $x + x + x + x + 5 = x + x + x + 5 + 5 + 5$ $4x + 5 = 3x + 15$ $4x + 5 - 5 = 3x + 15 - 5$ $4x = 3x + 10$ $4x - 3x = 3x - 3x + 10$ $x = 10$

Fonte: Autoria própria.

No que diz respeito ao portal da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) (<https://portaldaobmep.impa.br/>), podemos constatar o uso desse site pelo professor, na ficha de exercícios que ele nos apresentou com o título “*Igualdade e identificação de número desconhecido*” (Figura 25) - com questões selecionadas das edições da OBMEP dos anos de 2011, 2012 e 2019. Todas do *nível 1* voltadas para estudantes de 6º ou 7º anos do Ensino Fundamental.

Figura 25 - Ficha de exercícios do professor Tales

IGUALDADE E IDENTIFICAÇÃO DE NÚMERO DESCONHECIDO

Nome do Estudante: _____

6º ano: ____ - Matemática – Data: ____/____/____

Exercícios e problemas

01. Descubra o número # nas igualdades abaixo:

a) $2 + \# = 7$

b) $3 + \# + \# = 9$

c) $8 - 5 = \#$

d) $2 \times \# = 18$

e) $6 - \# = 5$

f) $\frac{\#}{3} = 12$

02. Uma balança de dois pratos está em equilíbrio. Do lado direito temos 13kg e do outro lado, 5kg e dois pesos desconhecidos. Determine o valor de x.



03. Abaixo segue uma balança em equilíbrio. Determine o peso do bloco X.



04. Na figura seguinte temos duas devidamente equilibradas. A partir dos pesos conhecidos, determine os pesos A e B.



05.(OBMEP-2012) A balança da figura está equilibrada. Os copos são idênticos e contêm, ao todo, 1400 gramas de farinha. Os copos do prato da esquerda estão completamente cheios e os copos do prato da direita cheios até metade de sua capacidade. Qual é o peso, em gramas, de um copo vazio?



- a) 50 b) 125 c) 175 d) 200

06.(OBMEP-2019) Qual é o número que está escondido pelo borrão?

$$17 - 3 = 20 - 16 + \text{borrão}$$

- a) 10 b) 11 c) 12 d) 13

07.(OBMEP-2011) Um queijo foi partido em quatro pedaços de mesmo peso. Três desses pedaços pesam o mesmo que um pedaço mais um peso de 0,8 kg. Qual era o peso do queijo inteiro?



- a) 1,2kg
b) 1,5kg
c) 1,6kg
d) 1,8 kg

Fonte: Protocolo da pesquisa.

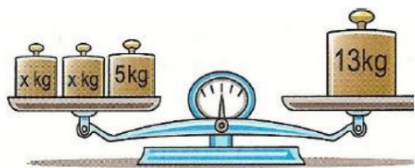
Particularmente, sobre o item 01 da ficha “Descubra o número # nas igualdades abaixo”, Tales afirmou que o elaborou com base em seus conhecimentos sobre “o cálculo do número desconhecido”. Para ele, faz-se importante envolver todas as operações (adição,

subtração, multiplicação e divisão de números naturais) no cálculo do número desconhecido. Sendo assim, propôs de forma diversificada as tarefas do **item 01**.

Em relação ao **item 02**¹³, a exemplo das mudanças no problema 04 (do slide - Quadro 18), o professor também o propôs de forma diferente em relação àquele proposto na ficha do site do Professor Marcos Gomes (<https://www.professormarcosgomes.com/>).

Para o **item 02** (Quadro 17), a fim de tornar o enunciado mais compreensível para seus estudantes, podemos perceber que Tales decidiu chamar a atenção para os “dois pesos desconhecidos”, cada um representado por “x”, além de indicar a medida dos “pesos conhecidos”. De tal forma, que se não houvesse a figura da balança, os estudantes também conseguiriam responder a situação-problema.

Quadro 17 - Adaptação do item 02 pelo professor

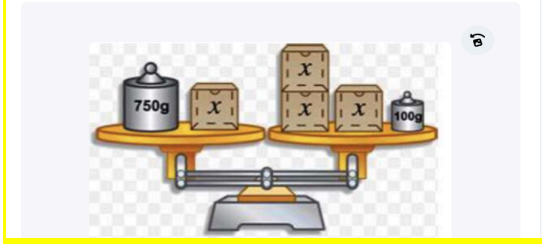
Site Prof.Marcos Gomes	Problema adaptado pelo professor
79) Considere a balança em equilíbrio na figura.  O valor representado pela letra x é _____.	02. Uma balança de dois pratos está em equilíbrio. Do lado direito temos 13kg e do outro lado, 5kg e dois pesos desconhecidos. Determine o valor de x. 

Fonte: Protocolo da pesquisa.

Os **itens 03 e 04**, esses foram selecionados de sites da internet, que no momento da entrevista, o professor afirmou não recordá-los. Pois, havia elaborado a ficha de exercícios já “fazia algum tempo, a mais de dois anos”. Tendo em vista, o aprofundamento dos recursos utilizados pelo professor na construção da ficha de exercícios, realizamos uma busca na internet e identificamos que os **itens 03 e 04** podem ser encontrados no site *Brainly* (<https://brainly.com.br/materia/matematica>). No caso do **item 03**, Tales optou em usar a imagem da balança modificando o enunciado que se apresenta no site Brainly. Como podemos observar no Quadro 18, Tales usa “peso” em vez de massa e não indica a unidade de medida “grama”.

¹³ Sobre a imagem utilizada no problema, há indícios que seja de outro problema diferente proposto no ENCEJA-MEC. Vale ressaltar que essa imagem circula na internet adaptada por vários outros professores.

Quadro 18 - Adaptação do item 03 pelo professor

Site <i>Brainly</i>	Problema adaptado pelo professor
A imagem abaixo representa uma balança em equilíbrio. Nesta balança estão quatro caixinhas de massa iguais a x e dois pesos com massa equivalente a 750g e 100g. João, ao observar tal balança, faz o seguinte questionamento a seu amigo Pedro: “Qual será a massa, em gramas, das 4 caixinhas juntas?” Para que Pedro responda corretamente, qual terá de ser a resposta que ele deverá dar ao João? 325 g. 650 g. 975 g. 1300 g. 1625 g. 	03. Abaixo segue uma balança em equilíbrio. Determine o peso do bloco X. 

Fonte: Autoria própria.

Podemos perceber que Tales propõe no enunciado dos problemas (**itens 02, 03 e 04**) o uso do termo “peso”. Bem como, podemos encontrar nos **itens 05 e 07** (OBMEP-2011 e OBMEP-2012) alusão ao peso e não à massa, utilizando a linguagem cotidiana, em que o termo “pesar” é utilizado com o significado de “determinar a massa de um corpo”. O que pode suscitar uma certa confusão entre massa e peso¹⁴.

Outro aspecto da ficha de exercícios de Tales, para utilização no 6º ano, que nos chamou à atenção diz respeito ao uso dos diferentes símbolos para representar o número desconhecido (# e as letras “x”, “a” e “b”). No caso do uso das letras, isso revela traços dos processos de instrumentação-instrumentalização, pois sinaliza um reflexo dos impactos das características dos recursos (no caso, das imagens das balanças disponíveis na internet) sobre as escolhas didáticas do professor. Bem como, ocorreu durante o seu trabalho documental de constituição de seus slides, que aqui já foram apresentados.

Na sequência de nossas análises e discussões sobre os recursos de Tales para o/no ensino das Propriedades de Igualdade, vale explicar, que no momento da entrevista com o professor, ele mencionou que iria trabalhar com a ficha de exercícios (Figura 25) no bimestre letivo. Diante disso, acordamos com ele a observação das aulas com o uso desta ficha em uma turma do 6º ano da RMEI, à sua escolha.

Sobre a previsão do uso da ficha, Tales comentou que pretendia responder no quadro branco alguns itens, como “*exemplo e explicação*” e propor aos estudantes responderem

¹⁴ De maneira simplificada, massa é uma medida da quantidade de determinado material e o peso está relacionado à força com que determinada massa é atraída pela Terra.

outros itens em casa ou na sala de aula, “*valendo ponto*”. Além disso, pretendia escolher para a prova bimestral, um dos itens desta ficha.

Professor: Eu vou usar a mesma metodologia, resolução de problemas [...] Gosto de fazê-los pensar, usar o raciocínio lógico. As questões da OBMEP são boas para isso. Assim, são seis aulas por semana, eu acredito que duas semanas dá pra explorar bem essa parte. Eu pretendo explorar no primeiro dia uma introdução do que vou trabalhar e só após isso utilizar o aplicativo.

Mediante a observação do uso da ficha de exercícios em sala de aula, a seguir (4.1.1) refinamos as situações, os invariantes operatórios e as representações simbólicas acerca dos conceitos de: “Igualdade” e “Cálculo do Termo Desconhecido” aplicados por Tales, na turma do 6º ano. Sendo isso, realizado por meio das explicações do professor e de suas respostas no quadro branco (registradas em vídeo) e fotos dos cadernos dos estudantes. A fim de termos uma visão da abordagem de tais conceitos pelo professor e possíveis influências sobre a sua apropriação do recurso digital EIB. Haja vista, que no início do trabalho com a ficha de exercícios, Tales já havia tido contato com o EIB por meio da entrevista, em que indicamos tal recurso para sua análise.

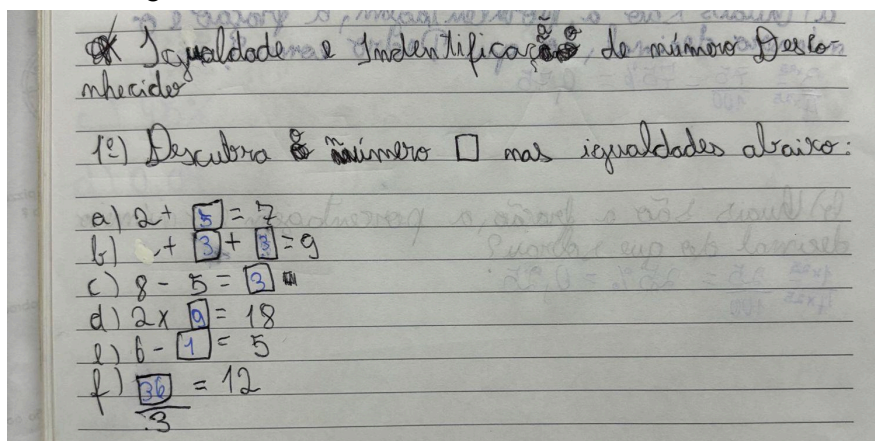
5.1.1 O uso da ficha de exercícios do professor, em sala de aula, sobre “Igualdade” e “Cálculo do Termo Desconhecido”

Antes da observação das aulas, Tales comentou o perfil da turma do 6º ano, escolhida por ele, sobre as dificuldades referentes às Propriedades da Igualdade:

Professor: A questão que envolve o primeiro membro e o segundo membro, calcular de um lado e do outro, eles têm essa dificuldade inicialmente. Mas assim, trabalhando a questão intuitiva, utilizando por exemplo, a parte de balanças que é a ideia de equilíbrio, dá para ter uma melhoria na questão do aprendizado deles. Eu mesmo faço isso.

Constatamos que o professor antecipou na turma do 6º ano, o **item 01** da ficha de exercícios, em uma aula antes daquelas que realizamos a observação (100 min). Na ocasião, tivemos acesso a uma foto do caderno de um dos estudantes (Figura 26) sobre a aula realizada anteriormente, em que podemos averiguar que o professor escreveu no quadro branco: o título “Igualdade e Identificação de Número Desconhecido” e a resolução do **item 01** da ficha de exercícios, a saber: “Descobrir o número  nas igualdades”. Com a mudança do símbolo “#” para o “”.

Figura 26 - Foto de caderno de um estudante do 6º ano



Fonte: Protocolo da pesquisa.

Constatamos que o **item 01** - “Descobrir o número nas igualdades” foi organizado em torno de seis situações. Sendo duas situações envolvendo subtração, uma com multiplicação, uma com divisão e duas com adições. Com base na explicação e modos de resolução propostos por Tales, apresentamos no Quadro 19, o que conseguimos identificar como invariantes operatórios.

Quadro 19 - Análise da resolução do item 01 da ficha de exercícios do professor Tales

Letra “a” do item 01 da ficha de exercícios: $2 + \boxed{} = 7$.
Invariantes operatórios: Teorema em ação: Por meio da tentativa e erro é possível descobrir qual o valor que deve ser adicionado a 2 para se obter o resultado igual a 7. Adiciona-se os números do lado esquerdo e indica-se o resultado do lado direito. Conceito em ação: Propriedade da adição: fechamento. Significado operacional do sinal de igual.
Letra “b” do item 01 da ficha de exercícios: $3 + \boxed{} + \boxed{} = 9$.
Invariantes operatórios: Teorema em ação: Por meio da tentativa e erro é possível descobrir dois números iguais que deve ser adicionado a 3 para se obter o igual a 9. Devem ser adicionados dois números iguais. Adiciona-se os números do lado esquerdo e indica-se o resultado do lado direito. Conceito em ação: Propriedade da adição: associativa $(3+3) + 3 = 9$. Significado operacional do sinal de igual.
Letra “c” do item 01 da ficha de exercícios: $8 - 5 = \boxed{}$.
Invariantes operatórios: Teorema em ação: Por meio da tentativa e erro é possível descobrir o valor da diferença de $8 - 5$. Subtrai-se os números do lado esquerdo e indica-se o resultado do lado direito. Conceito em ação: Propriedade da subtração de números naturais (no conjunto dos números naturais, a diferença só existe quando o primeiro número (minuendo) for maior ou igual ao segundo número (subtraendo). Significado operacional do sinal de igual.
Letra “d” do item 01 da ficha de exercícios: $2 \times \boxed{} = 18$.

Invariantes operatórios:

Teorema em ação: Por meio da tentativa e erro é possível descobrir qual o número que deve ser multiplicado por 2 para se obter o produto 18. Multiplica-se os números do lado esquerdo e indica-se o resultado do lado direito.

Conceito em ação: Propriedade da multiplicação: fechamento. Significado operacional do sinal de igual.

Letra “e” do item 01 da ficha de exercícios: $6 - \square = 5$

Invariantes operatórios:

Teorema em ação: Por meio de cálculo mental é possível descobrir qual número deve ser subtraído de 6 para se obter o valor da diferença 5. Subtrai-se os números do lado esquerdo e indica-se o resultado do lado direito.

Conceito em ação: Propriedade da subtração de números naturais (no conjunto dos números naturais, a diferença só existe quando o primeiro número (minuendo) for maior ou igual ao segundo número (subtraendo). Significado operacional do sinal de igual.

Letra “f” do item 01 da ficha de exercícios: $\frac{\square}{3} = 12$

Invariantes operatórios:

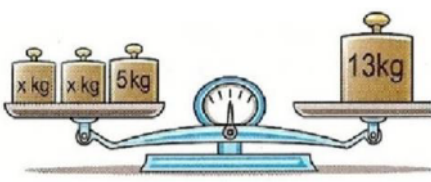
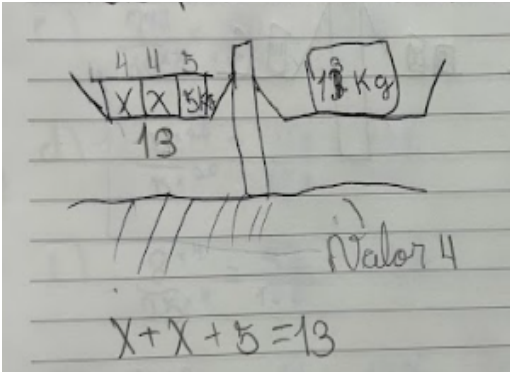
Teorema em ação: Por meio da tentativa e erro é possível descobrir qual o número que devo dividir por 3 para obter o quociente igual a 12. Divide-se os números do lado esquerdo e indica-se o resultado do lado direito.

Conceito em ação: Propriedade da divisão de números naturais (no conjunto dos números naturais, a divisão só existe quando o dividendo for maior ou igual que o divisor). Significado operacional do sinal de igual.

Fonte: Autoria própria.

Sobre o **item 02**, por meio da foto de caderno de um dos estudantes, podemos verificar na Figura 27, como foi proposta a resposta pelo professor no quadro branco.

Figura 27 - Foto do caderno de um estudante - Resolução do item 02

02. Uma balança de dois pratos está em equilíbrio. Do lado direito temos 13kg e do outro lado, 5kg e dois pesos desconhecidos. Determine o valor de x. 	
--	--

Fonte: Protocolo da pesquisa.

Em relação à resolução do **item 02** no dia em que a ficha foi aplicada aos estudantes, o professor Tales explicou:

Professor: Se temos 5kg de um lado da balança e 13kg do outro, quanto precisamos somar aos 5kg para que a balança fique em equilíbrio? 8kg, certo? Agora, não queremos apenas saber o total que falta, mas sim determinar os dois pesos que estão faltando. Esses dois pesos têm o mesmo valor, certo? Então, 8 dividido por 2 é igual a 4. Então, cada um deles pesa 4kg.

Compreendemos pela *explicação oral do professor* que de um lado da balança, tem-se 5 kg, enquanto, do outro, há 13 kg. Para equilibrar os dois lados, é necessário somar ao lado de 5 kg uma quantidade que compense a diferença entre eles. Como a diferença entre os dois lados é de 8 kg, isto é o necessário para equilibrar a balança. Em seguida, ele explicou que os 8 kg correspondem a dois objetos (dois pesos). Ao dividir 8kg por 2, concluiu-se que cada objeto tem 4 kg.

Pelo exposto podemos compreender que no processo de resolução da situação-problema, ao fazer a leitura do que é representado na balança na forma algébrica, no quadro branco “ $x + x + 5 = 13$ ”, não é aplicado o princípio aditivo da adição. Sendo essencialmente, utilizada uma sucessão de operações aritméticas.

Embora em sua *explicação oral* o professor se refira a unidade de medida de massa - quilograma (kg), ao escrever a equação “ $x + x + 5 = 13$ ”, essa unidade de medida desaparece. Assim, faz-se importante considerar a unidade de medida kg na situação em tela. Ou seja, a representação: $4\text{kg} + 4\text{kg} + 5\text{kg} = 13\text{kg}$.

Pensamos que esta é uma questão em aberto: descobrir o valor de “x” aqui em referência a “*pesos desconhecidos*”, em que medida isso gera confusão em relação à aprendizagem da grandeza massa? Da mesma forma, quando se trata o “x” por valor ou número desconhecido, desconsiderando a unidade de medida de massa (no caso, kg).

Com base na explicação e no método de resolução apresentado pelo professor, no **item 02**, organizamos no Quadro 20 o que podemos inferir da situação e dos indícios de invariantes operatórios em tela. Sendo estes em torno das representações de valores desconhecidos ou de medidas desconhecidas.

Quadro 20 - Análise da ficha de exercícios do professor Tales - item 02

item 02 da ficha de exercícios:

Equação: $x + x + 5 = 13$ e/ou $x + x + 5\text{kg} = 13\text{kg}$.



Invariantes operatórios:

Teorema em ação: É preciso descobrir as medidas de “x” que permitem manter a balança em equilíbrio. Ao se resolver a operação do lado esquerdo se obtém o resultado do lado direito. Por meio da tentativa e erro é possível descobrir qual o valor que deve ser adicionado a 5 para se obter o valor 13. Sabendo-se que a medida que falta para equilibrar a balança é 8kg e tendo-se duas medidas desconhecidas, divide-se 8kg por dois.

Conceito em ação: Princípio de equilíbrio de uma balança de dois pratos. Significado operacional do sinal de igual. Operações de adição e de divisão. Medidas de Massa.

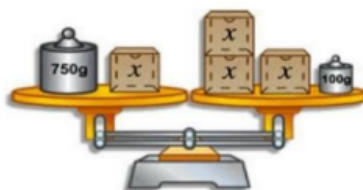
Fonte: Autoria própria.

Quanto ao **item 03** (Figura 28), na explicação oral do professor, ele fez alusão à “lei do cancelamento”:

Professor: Neste caso, podemos retirar uma caixa de cada lado, e assim podemos cancelar o “x”. Cancela de um lado, depois cancela do outro. Depois disso, se você soube resolver a segunda questão (item 2), também saberá resolver a terceira. A única diferença é que tem um “x” a mais.

Figura 28 - Item 03 da lista de exercícios do professor Tales

03. Abaixo segue uma balança em equilíbrio. Determine o peso do bloco X.



Fonte: Protocolo da pesquisa.

Consideramos que o fato da imagem (Figura 28) da balança apresentar as caixas (com o “x” em ambos os lados, representando a indeterminação da medida de massa delas) influenciou a escolha do professor em tratar a lei do cancelamento. Vejamos sua explicação:

Professor: São 750g de um lado e 100g do outro. Quanto devo adicionar ao lado de 100g para equilibrar os dois lados? A diferença entre os dois lados é de 650g, o que significa que precisamos somar 650g ao lado mais leve para alcançar o equilíbrio. Esses 650g são divididos igualmente entre duas caixas de “peso” desconhecido. Assim, ao dividir 650 por 2, concluímos que cada uma dessas caixas tem um valor de 325g. Portanto, cada um dos “pesos” desconhecidos tem o valor de 325g.

Pelo exposto, podemos perceber que o professor fez a opção de determinar a medida desconhecida por procedimentos aritméticos. Isto é, de modo semelhante ao que ocorreu na resolução do **item 02**, depois de indicar o cancelamento das caixas, ele representou a equação: $750 = x + x + 100$, não chegando a dar continuidade à resolução do **item 03**, com a aplicação do princípio aditivo (que seria a subtração de 100 em ambos os lados do sinal de igual). Diante disso, inferimos os seguintes invariantes operatórios.

Quadro 21 - Análise da ficha de exercícios do professor Tales - item 03

Item 03 da ficha de exercícios:

Equação: $750 + x = x + x + x + 100$ e/ou $750g + xg = xg + xg + xg + 100g$.

Invariantes operatórios:

Teorema em ação: Pela Lei do Cancelamento, pode-se retirar “x” em ambos os lados da balança.

Por meio da tentativa e erro é possível descobrir qual o valor que deve ser adicionado a 100 para se obter o valor 750. Sabendo-se que a medida que falta para equilibrar a balança é 650g e tendo-se duas medidas desconhecidas, divide-se essa medida (650g) por dois.

Conceito em ação: Princípio de equilíbrio de uma balança de dois pratos. Lei do cancelamento. Significado relacional do sinal de igualdade. Operações de adição e de divisão. Medidas de massa.

Fonte: Autoria própria.

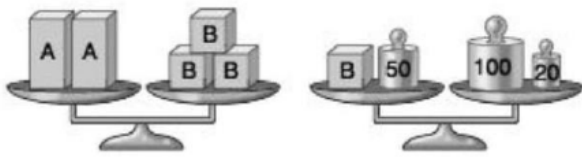
Quanto ao **item 04**, Tales inicialmente orientou os estudantes a resolvê-lo a partir da balança do lado direito e depois explicou:

Professor: A balança está em equilíbrio, de um lado temos 120 e do outro, 50. Quanto precisamos adicionar aos 50 para que o total seja 120? 70, certo? Então o peso B é igual a 70.

No **item 04**, (Quadro 22) podemos perceber que não ocorre a indicação de unidades de medida de massa. Apenas são indicadas letras e números representando, respectivamente, os pesos desconhecidos e conhecidos.

Quadro 22 - Item 04 da ficha de exercícios do professor Tales

04. Na figura seguinte temos duas devidamente equilibradas. A partir dos pesos conhecidos, determine os pesos A e B.



Handwritten student work:

pesos A e B

210

210

$B = 70$

$B + 50 = 120$

105

Fonte: Protocolo da pesquisa.

Na sequência da resposta ao **item 04**, Tales se voltou para a balança à esquerda, destacando para os estudantes que B valia 70. Sendo assim, como em um prato da balança tinha o total de três caixas de B, $70 + 70 + 70 = 210$. Como a balança estava em equilíbrio, o peso total das caixas de A deveria ser igual ao peso total das caixas de B. Então, para

encontrar o valor de A, ele dividiu 210 por 2, já que as duas “caixas de A” precisavam somar o total de 210. Assim, ao dividir 210 por 2, Tales encontrou que cada “caixa de A” valia 105.

Tales ainda comentou que: *“Um erro comum dos estudantes é colocar o peso total que está faltando. Por exemplo, o peso que falta é 210, mas como há “2A”, o valor correto deve ser 105, pois é o valor de “A”, e não o valor total”*. Supomos que tal comentário decorre de suas experiências com o uso da mesma ficha de exercícios com outros estudantes.

Quadro 23 - Análise da ficha de exercícios do professor Tales - item 04

Item 04 da ficha de exercícios: Equações: (1) $A + A = B + B + B$ e (2) $50 + B = 100 + 20$.
Invariantes operatórios: Teorema em ação: É preciso calcular o valor de B da balança do lado direito para depois calcular o valor de A na balança do lado esquerdo. A balança só fica equilibrada se o “peso” de ambos os lados for o mesmo. Por meio da tentativa e erro é possível descobrir qual o valor que deve ser adicionado a 50 para se obter o total igual a 120. Sabendo-se que $B = 70$, $B + B + B$ ($3 \times B = 210$). Sabendo-se o número que falta para equilibrar a balança à 210 e tendo-se dois valores desconhecidos, divide-se esse número por dois. Conceito em ação: Princípio de equilíbrio de uma balança de dois pratos. Significado operacional do sinal de igual. Operações de adição e de divisão.

Fonte: Autoria própria.

Sobre o **item 06** (Figura 29), selecionado do portal da OBMEP, o professor orientou os estudantes a resolverem o “primeiro lado” da igualdade, para depois, o “segundo lado”.

Figura 29 - Item 06 da lista de exercícios do professor Tales

06.(OBMEP-2019) Qual é o número que está escondido pelo borrão ?

$$17 - 3 = 20 - 16 + \text{borrão}$$

- a) 10 b) 11 c) 12 d) 13

Fonte: Protocolo da pesquisa.

Conforme a explicação de Tales, percebemos que ele trata a noção de equivalência entre os membros da igualdade. E, insiste sobre o uso do cálculo mental de adições e subtrações. Como detalhamos no Quadro 24.

Professor: No primeiro lado, 17 menos 3 dá quanto? 14. Se de um lado temos 14, para que seja uma igualdade, o outro lado também deve ter 14. E no outro lado, 20 menos 16 dá quanto? 4. Qual número preciso somar a 4 para chegar a 14?. Assim, vocês chegarão a obter a resposta.

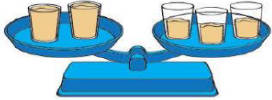
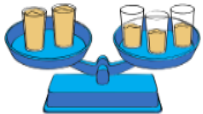
Quadro 24 - Análise da ficha de exercícios do professor Tales - item 06

Item 06 da ficha de exercícios:Equação: $17 - 3 = 20 - 16 + \square$ **Invariantes operatórios:****Teorema em ação:** Por meio de cálculo mental é possível descobrir qual o valor que deve ser adicionado a 4 para se obter o total igual a 14. Ao resolver a operação do lado esquerdo se obtém o resultado do lado direito.**Conceito em ação:** Operações de subtração e de adição. Significado operacional do sinal de igual.

Fonte: Autoria própria.

No que diz respeito aos **itens 05 e 07**, ambos do portal da OBMEP, Tales não os resolveu no dia das aulas observadas. Ele explicou que seria um desafio para os estudantes para ser entregue na próxima aula e comentou: “*Essa (05) daqui é a mais difícil, vou deixar para vocês resolverem*”. O professor também explicou durante a aula que os estudantes deveriam utilizar a lei do cancelamento no **item 07**, assim depois seria semelhante ao **item 02**: “*Se os quatro pedaços de queijo têm o mesmo “peso”, vocês podem retirar um pedaço de cada lado. Assim, vejamos, a situação vai ficar muito parecida com a questão 2.*”

Figura 30 - Item 05 e 07 da lista de exercícios do professor Tales

05.(OBMEP-2012) A balança da figura está equilibrada. Os copos são idênticos e contêm, ao todo, 1400 gramas de farinha. Os copos do prato da esquerda estão completamente cheios e os copos do prato da direita cheios até metade de sua capacidade. Qual é o peso, em gramas, de um copo vazio ?  a) 50 b) 125 c) 175 d) 200	QUESTÃO 11 ALTERNATIVA D No prato da direita temos três metades de copo de farinha; no prato da esquerda temos dois copos cheios, o que é o mesmo que quatro metades de copo de farinha. Como ao todo temos 1400 gramas de farinha, o que equivale a sete metades de copos, cada metade equivale a 200 gramas de farinha. Logo, no prato da esquerda temos 800 gramas de farinha e no da direita temos 600 gramas de farinha, ou seja, há $800 - 600 = 200$ gramas de farinha a mais no prato da direita. Por outro lado, há um copo a mais no prato da esquerda; como os copos são idênticos, esse copo extra equilibra a farinha extra do prato da esquerda e concluímos que um copo vazio pesa 200 gramas. 
07.(OBMEP-2011) Um queijo foi partido em quatro pedaços de mesmo peso. Três desses pedaços pesam o mesmo que um pedaço mais um peso de 0,8 kg. Qual era o peso do queijo inteiro ?  a) 1,2kg b) 1,5kg c) 1,6kg d) 1,8 kg	QUESTÃO 2 ALTERNATIVA C Se tirarmos um pedaço de queijo de cada um dos pratos da balança, ela continua equilibrada, pois todos os pedaços têm o mesmo peso. Logo, dois pedaços de queijo pesam 0,8 kg; como o queijo foi partido em quatro pedaços, vemos que o queijo inteiro pesa $2 \times 0,8 = 1,6$ kg.

Fonte: Site da OBMEP.

Com base nas respostas apresentadas no site da OBMEP, podemos inferir as seguintes situações e invariantes operatórios.

Quadro 25 - Análise da ficha de exercícios do professor Tales - itens 05 e 07

Item 05 da ficha de exercícios: Equação: $x + x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$
Invariantes operatórios: Teorema em ação: Por meio da tentativa e erro, pode-se verificar que sete metades de copo somam 1400 gramas, permitindo determinar que cada metade equivale a 200 gramas. Pela Lei do Cancelamento, pode-se retirar um copo cheio de farinha de ambos os lados da balança. Dessa forma, no prato esquerdo, restará um copo cheio de farinha, enquanto no prato direito permanecerão uma metade de copo de farinha. Sabendo-se que $400 - 200 = 200$ a diferença de peso entre os pratos é de 200 gramas, essa diferença equivale ao peso de um copo vazio, assim, cada copo pesa 200 gramas. Conceito em ação: Princípio de equilíbrio de uma balança de dois pratos. Significado relacional do sinal de igual. Medidas de massa.
Item 07 da ficha de exercícios: Equação: $x + x + x = 0,8 + x$
Invariantes operatórios: Teorema em ação: Pela Lei do Cancelamento, pode-se retirar um queijo em ambos os lados da balança. Sabendo-se que a quantidade de quilos que falta para equilibrar a balança é 0,8 kg e tendo-se duas medidas desconhecidas, divide-se esse número (0,8) por dois. Por meio da tentativa e erro, soma-se 0,4 quatro vezes. Conceito em ação: Princípio de equilíbrio de uma balança de dois pratos. Lei do cancelamento. Significado relacional do sinal de igual. Medidas de massa.

Fonte: Autoria própria.

Na aula seguinte em que foi prevista a entrega pelos estudantes das respostas dos **itens 05 e 07**, o professor nos confirmou que utilizaria o simulador EIB com eles. Diante disso, marcamos uma entrevista sobre a fase de pré-apropriação do simulador EIB em busca de compreendermos sua gênese instrumental e as orquestrações previstas pelo professor para uso deste recurso em sala de aula.

No intervalo de tempo entre a finalização das observações das aulas e a realização da entrevista sobre a fase de pré-apropriação, sentimos a necessidade de termos uma melhor compreensão de possíveis usos da balança digital do EIB, em consonância com o trabalho já realizado pelo professor, em sala de aula, com as representações da balança. Diante disso, expomos a seguir (5.1.2) algumas limitações e possibilidades observadas nas simulações pessoais do EIB que realizamos em diálogo com as situações-problema da ficha de exercícios de Tales.

5.1.2 Análise a priori das possibilidades do uso do EIB relacionadas à ficha de exercícios do professor Tales

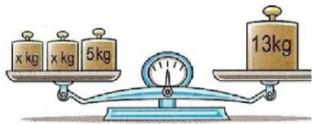
De acordo com Trgalová (2020), dentro das perspectivas de pesquisas com o Modelo de Apropriação de um Recurso, temos:

A análise de recursos digitais para identificar elementos ou características que facilitem sua apropriação. A flexibilidade para permitir a instrumentalização do recurso parece ser uma dessas características. A dimensão didática que oferece uma “análise a priori” do recurso (explicação do objetivo de aprendizagem, as intenções dos designers, as escolhas didáticas com sua justificativa, etc.) também pode ajudar os professores a se apropriarem dele (Trgalová, 2020, p. 63, tradução nossa).¹⁵

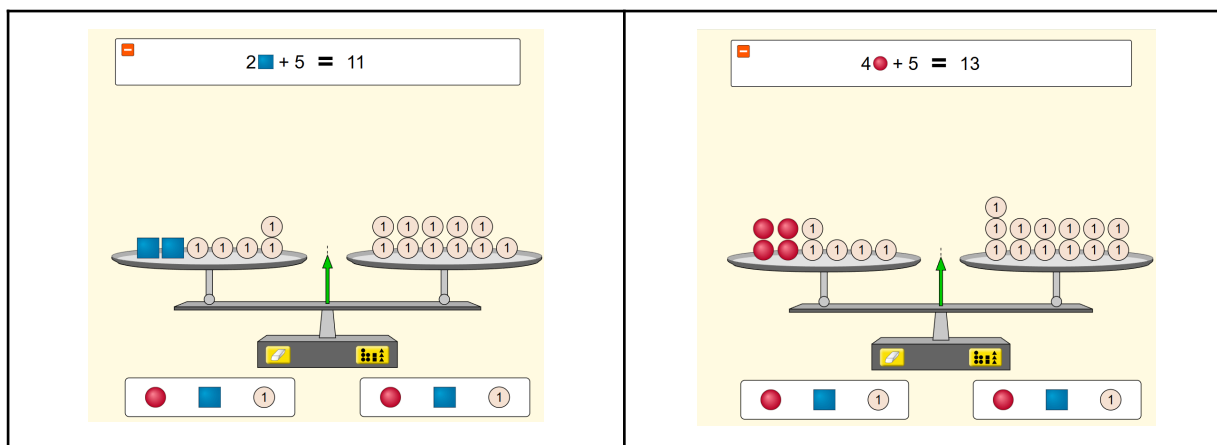
Na direção do exposto acima, por Trgalová (2020), explanamos algumas limitações e alguns caminhos possíveis para o uso do EIB.

Sobre a situação proposta por Tales, **no item 02** na sua ficha de exercícios.

Quadro 26 - Simulação no EIB do Item 02 da ficha de exercícios

Exemplo: $x + x + 5 = 13$. 02. Uma balança de dois pratos está em equilíbrio. Do lado direito temos 13kg e do outro lado, 5kg e dois pesos desconhecidos. Determine o valor de x. 	
Limitação 1: No modo básico se colocamos, em um lado da balança 2 massas desconhecidas + 5u, a única forma de equilíbrio é com 11u no outro lado da balança. Visto que a massa do cubo é pré-determinada no EIB como 3.	Limitação 2: No modo básico se colocamos o valor 13u de um lado da balança, a única forma de equilíbrio é tendo 4 massas desconhecidas + 5 do outro lado da balança. Visto que a massa da esfera é pré-determinada no EIB como 2u.

¹⁵ L'analyse de ressources numériques pour identifier des éléments ou des caractéristiques facilitant leur appropriation. La flexibilité permettant une instrumentalisation de la ressource semble être une telle caractéristique. La dimension didactique proposant une « analyse a priori » de la ressource (explicitation de l'objectif d'apprentissage, des intentions des concepteurs, des choix didactiques avec leur justification...) pourrait également aider les enseignants à se l'approprier.

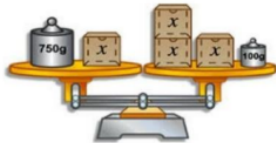


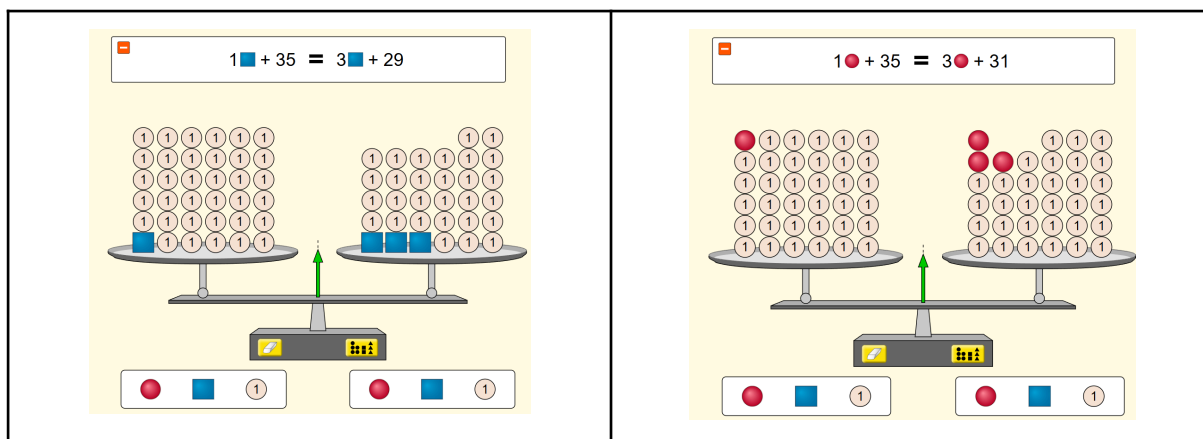
Fonte: Autoria própria.

Pelo exposto no Quadro 26, uma possibilidade de uso do EIB para o **item 02** da ficha de exercícios de Tales, seria adaptar a proposição de situações, a fim de se obter como resposta seja “2” ou “3” unidades (u) para a medida desconhecida. Por meio de sucessivas retiradas dos objetos e unidades de ambos os lados da balança, percebendo sempre como se pode obter o equilíbrio desses lados.

No Quadro 27, uma possibilidade de uso do EIB para o **item 03** da ficha de exercícios de Tales, além de uma adaptação para situações, a fim de se obter como resposta apenas ou “2” ou “3” para a medida desconhecida.

Quadro 27 - Simulação no EIB do Item 03 da ficha de exercícios

Exemplo: $750 + x = x + x + x + 100$. 03. Abaixo segue uma balança em equilíbrio. Determine o peso do bloco X. 	
Limitação 1: No modo básico se colocamos, em um lado da balança 1 massa desconhecida + 35u, a única forma de equilíbrio é com 3 massas desconhecidas + 29u no outro lado da balança. Visto que no EIB a maior quantidade de objetos que podem ser colocados na balança é 36 e a massa do cubo é pré-determinada como 3.	Limitação 2: No modo básico se colocamos, em um lado da balança 1 massa desconhecida + 35u, a única forma de equilíbrio é com 3 massas desconhecidas + 31u no outro lado da balança. Visto que no EIB a maior quantidade de objetos que podem ser colocados na balança é 36 e a massa da esfera é pré-determinada como 2.



Fonte: Autoria própria.

Como exposto no Quadro 27, temos a restrição de o número máximo de objetos que podem ser colocados em cada lado da balança ser 36, limitando a proposição de equações com valores muito altos. Fato semelhante pode ser verificado no Quadro 28, em relação à situação do **item 04**.

Quadro 28 - Simulação no EIB do Item 04 da ficha de exercícios

Exemplo: $A + A = B + B + B$ e $50 + B = 100 + 20$.

04. Na figura seguinte temos duas devidamente equilibradas. A partir dos pesos conhecidos, determine os pesos A e B.

Limitação para a situação 2: No modo básico se colocamos, em um lado da balança 1 massa desconhecida + 33u, a única forma de equilíbrio é com 36u no outro lado da balança. Visto que no EIB a maior quantidade de objetos que podem ser colocados na balança é 36 e a massa do cubo é pré-determinada como 3.

Fonte: Autoria própria.

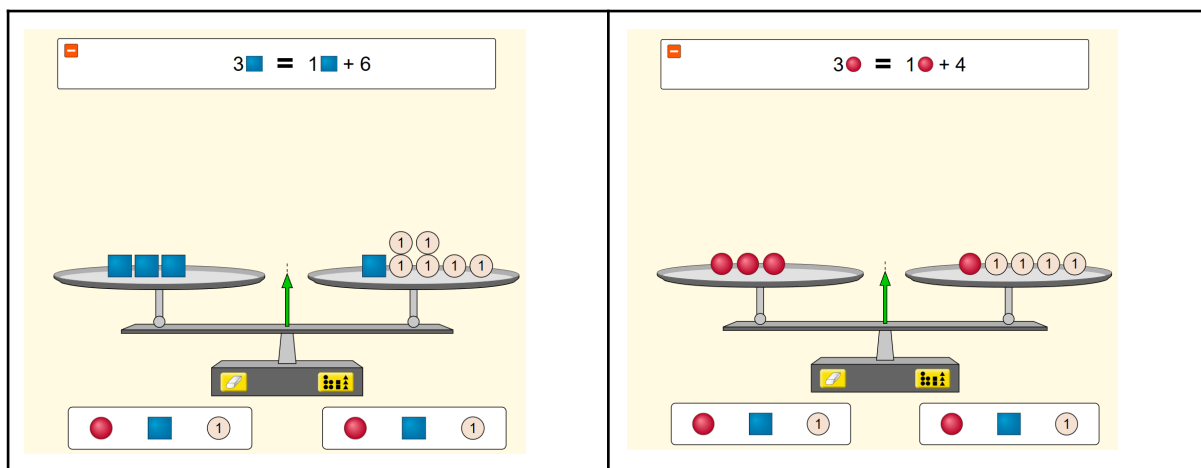
No Quadro 28, apresentamos uma possibilidade de uso do EIB para o **item 04** da ficha de exercícios de Tales. Assim como no quadro anterior, a adaptação da situação foi feita com o objetivo de obter como resposta exclusivamente “2” ou “3” para a medida desconhecida. Além disso, de se considerar a limitação da representação de equações com valores elevados. Contudo, é possível explorar de um lado da balança tentativas isoladas para se descobrir o valor de uma esfera ou do cubo usando os números. E, depois, estabelecer relações entre os múltiplos de 6 (divisível por 2 e 3).

No **item 05** da ficha de exercícios, não foi possível sugerir uma adaptação para a situação devido às limitações do recurso. O simulador não oferece funcionalidades que permitam trabalhar com frações e números decimais.

Em relação ao **item 06** da ficha de exercícios, não foi possível propor uma adaptação para a situação, devido a limitação do recurso uma vez que o simulador não oferece funcionalidades que permitam a utilização da operação de subtração.

Quadro 29 - Simulação no EIB do Item 07 da ficha de exercícios

Exemplo: $x + x + x = 0,8 + x$	
07.(OBMEP-2011) Um queijo foi partido em quatro pedaços de mesmo peso. Três desses pedaços pesam o mesmo que um pedaço mais um peso de 0,8 kg. Qual era o peso do queijo inteiro ?  a) 1,2kg b) 1,5kg c) 1,6kg d) 1,8 kg	
Limitação 1: No modo básico se colocamos em um lado da balança 3 massas desconhecidas, a única forma de equilíbrio é com 1 massa desconhecida + 6u no outro lado da balança. Visto que no EIB a massa do cubo é pré-determinada como 3.	Limitação 2: No modo básico se colocamos em um lado da balança 3 massas desconhecidas, a única forma de equilíbrio é com 1 valor desconhecido + 4u no outro lado da balança. Visto que no EIB a massa da esfera é pré-determinada como 2.



Fonte: Autoria própria.

No Quadro 29, apresentamos uma possibilidade de uso do EIB para o item 04 da ficha de exercícios de Tales. Assim como no quadro anterior, a adaptação da situação foi realizada com o objetivo de obter como resposta exclusivamente “2” ou “3” para a medida desconhecida. Além disso, não é possível utilizar números decimais no simulador.

Ressaltamos que a análise, aqui apresentada (5.1.2), não foi compartilhada com o professor para evitar interferências em seu processo de pré-apropriação. A seguir (5.2) discutimos a entrevista realizada com Tales sobre sua fase pré-apropriação do EIB.

5.2 A PRÉ-APROPRIAÇÃO DO SIMULADOR EIB PELO PROFESSOR TALES

Relembrando, com base no *Modelo de Apropriação de um Recurso* (Trgalová, 2021; Rousson, 2017): um **Recurso apropriado para implementação em sala de aula = recurso instrumentalizado + orquestrações**. Pelo exposto, na fase de pré-apropriação, de uma parte, buscamos discutir a instrumentalização do recurso EIB por Tales e de outra parte, as orquestrações instrumentais elaboradas por ele, visando o uso desse recurso em sala de aula, denominadas de “orquestrações previstas”.

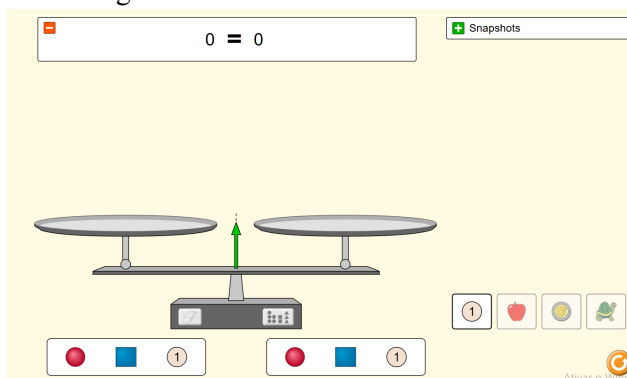
Após, o período que dispomos ao professor para que ele analisasse o EIB, na entrevista (de modo remoto e com acesso ao EIB) podemos assim constatar o efeito das primeiras impressões do recurso sobre o professor, mediante, seus comentários sobre a facilidade de manuseá-lo e de descobrir suas ferramentas, bem como, as suas potencialidades para o ensino das Propriedades da Igualdade.

Vale ressaltar que Tales, por curiosidade, chegou a manusear outro recurso disponível na PhET (o Explorador de Igualdade), mas o descartou para usá-lo no 6º ano, baseando-se em seus conhecimentos sobre os números inteiros negativos não serem abordados neste ano.

Professor: Não tive nenhuma dificuldade com os simuladores, são bastante intuitivos. Os dois simuladores são excelentes, mas o “Explorador de Igualdade Básico” se adequa melhor para os 6º anos. O Explorador de Igualdade eu achei um pouco acima, entendeu? Porque ele já envolve operações com valores desconhecidos negativos. Aí, eu acho assim: para o aluno no 6º ano, acho que está um pouco acima.

A partir da exibição da tela do EIB, Tales iniciou seus comentários sobre o “modo básico” (Figura 31), com a opção dos objetos geométricos.

Figura 31 - Tela do EIB - Modo Básico



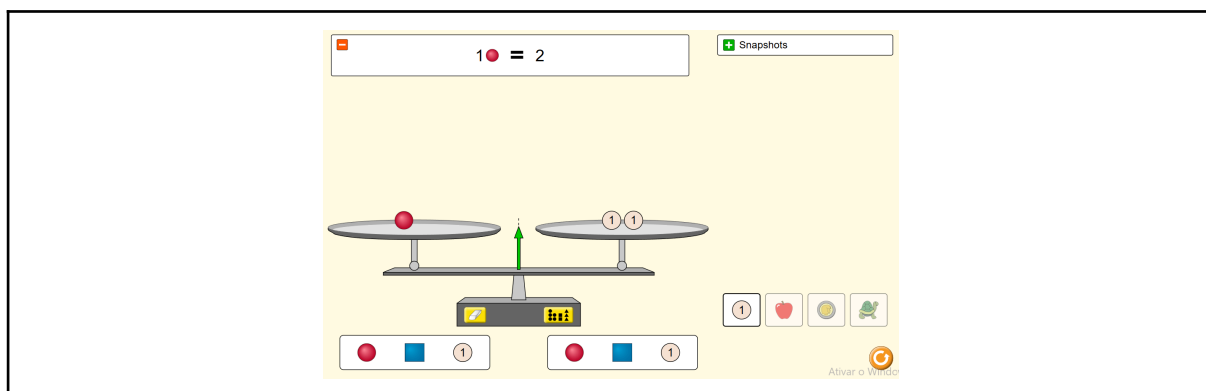
Fonte: Protocolo da pesquisa.

Tales afirmou que poderia se abordar no EIB, a relação da quantidade de objetos com o equilíbrio da balança. Segundo seu comentário:

Professor: Vi a questão da quantidade, né? Pronto, eu posso trabalhar com bolinhas vermelhas, e também posso trabalhar com cubinhos azuis e aí distribuir as quantidades. A partir disso, os alunos vão perceber a questão do equilíbrio na balança.

Além disso, ele apresentou um exemplo que permite determinar o termo desconhecido a partir da distribuição de diferentes objetos na balança. No Quadro 30, temos uma situação, no modo básico do EIB, com objetos geométricos. Nesse caso, o termo desconhecido foi representado por uma “esfera vermelha” pelo professor.

Quadro 30 - Exemplo proposto por Tales sobre a situação de cálculo da massa desconhecida



Fonte: Protocolo da pesquisa.

Pelo exposto no Quadro 30 apresentamos abaixo (Quadro 31) o que podemos apreender das regras de ação e dos invariantes operatórios para a situação de cálculo do termo desconhecido apresentada por Tales.

Quadro 31 - Análise da situação de cálculo da massa desconhecida proposta por Tales

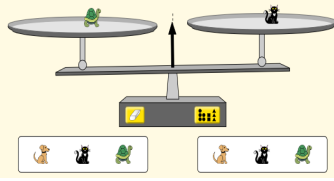
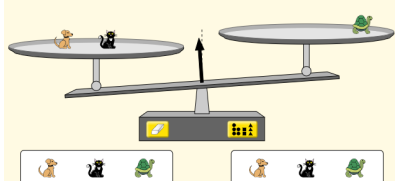
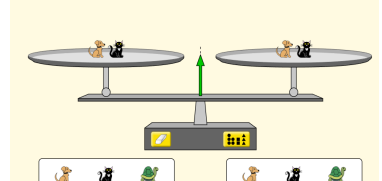
Exemplo: ● = 1+1
Regras de ação: Se adicionarmos uma esfera vermelha do lado esquerdo e uma esfera com numeral “1” do lado direito temos um desequilíbrio da balança. Para o equilíbrio da balança, adiciona-se mais uma esfera com numeral “1” do lado direito. Invariantes operatórios: Teorema em ação: É preciso descobrir a medida de “●” que permite manter a balança em equilíbrio. Por meio de tentativa e erro, procura-se adicionar as medidas do lado direito que resultem na mesma massa do lado esquerdo. Conceito em ação: Princípio de equilíbrio de uma balança de dois pratos. Significado operacional do sinal de igual. Operação de adição. Medidas de massa.

Fonte: Autoria própria.

Sobre a situação apresentada no Quadro 31, vale ressaltar que Tales percebeu a variação da massa do cubo para 3, determinada pelo próprio recurso. Ou seja, no EIB há essas duas possibilidades de situações: a “esfera vermelha” igual a 2 (● = 1+1) e o “cubo” igual a 3 (■ = 1+1+1). Vale destacar, que assim o professor se restringiu a apresentar apenas tal perspectiva operacional do sinal de igual.

Sobre os demais objetos (animais, frutas e moedas), no modo básico do EIB, Tales explicou somente o que pode perceber, nas simulações com os animais e as frutas. No caso dos animais (Quadro 32), apresentamos as situações de equilíbrio e desequilíbrios seguintes.

Quadro 32 - Exemplo proposto por Tales sobre a situação de comparação das massas de dois animais iguais ou diferentes - EIB no Modo Básico

$1 \text{ 🐸} > 1 \text{ 🐱}$	$1 \text{ 🐶} + 1 \text{ 🐱} > 1 \text{ 🐸}$	$1 \text{ 🐶} + 1 \text{ 🐱} = 1 \text{ 🐶} + 1 \text{ 🐱}$
		

Fonte: Protocolo da pesquisa.

Em relação às situações no modo básico utilizando animais, Tales analisou que nenhum deles possui a massa igual a do outro e não há possibilidade da massa de dois animais iguais ou diferentes ser igual a de um outro animal, como analisamos no Quadro 33. Assim, a

balança de dois pratos só fica equilibrada quando são adicionados animais iguais em ambos os pratos da balança.

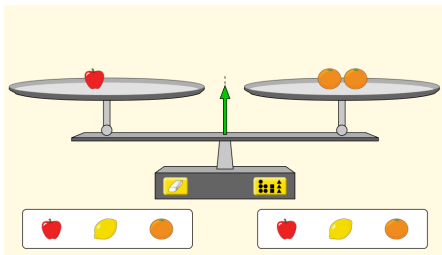
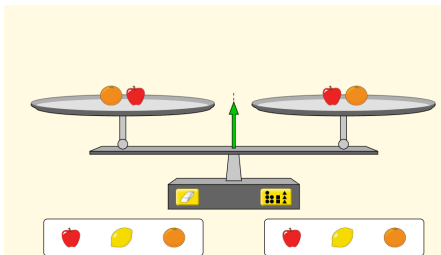
Quadro 33 - Análise da situação de cálculo da massa desconhecida proposta por Tales

Exemplo:	$1\text{ gato} + 1\text{ cachorro} = 1\text{ gato} + 1\text{ cachorro}$
Regras de ação: Se adicionamos um animal idêntico em cada lado da balança (gato, cachorro ou tartaruga) temos uma situação de equilíbrio. Se adicionamos um animal diferente em cada lado da balança temos uma situação de desequilíbrio. Se tentarmos determinar a massa de um animal, não será possível, pois nenhum deles é igual a soma dos outros dois. Invariante operatório: Teorema em ação: Para que a balança fique em equilíbrio é necessário que tenhamos animais idênticos (com massas idênticas) em ambos os lados da balança. Conceito em ação: Princípio de equilíbrio de uma balança de dois pratos. Significado relacional do sinal de igual. Medidas de massa.	

Fonte: Autoria própria.

Em relação à análise com as frutas no EIB, no exemplo 1 do Quadro 34, percebemos as mesmas regras de ação e invariantes operatórios apresentados no Quadro 31. Já no exemplo 2, temos semelhança com o que foi apresentado com os animais (Quadro 33).

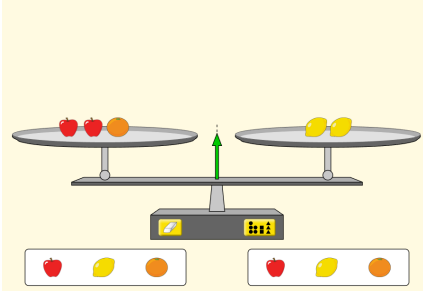
Quadro 34 - Situação de comparação das massas de frutas iguais ou diferentes - EIB no Modo Básico

Exemplo 1	Exemplo 2
$1\text{ maçã} = 2\text{ laranja}$	$1\text{ maçã} + 1\text{ laranja} = 1\text{ maçã} + 1\text{ laranja}$
	

Fonte: Autoria própria

Uma situação diferente que o professor Tales constatou, foi que usando frutas diferentes, poderia se chegar ao equilíbrio da balança. O que nos remete a habilidade da BNCC (EF03MA11): Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.

Quadro 35 - Situação de comparação das massas de frutas diferentes - EIB no Modo Básico

$2\text{🍎} + 1\text{🍌} = 2\text{🍌}$	$1\text{🍌} + 1\text{🍌} + 1\text{🍌} = 1\text{🍌} + 1\text{🍌}$
	Regra de ação: Ao se tentar colocar frutas (iguais ou diferentes) em ambos os lados da balança, é possível observar situações de equilíbrio e desequilíbrio. Invariantes operatórios: Teorema em ação: A adição de duas medidas diferentes em ambos os lados da balança podem resultar na mesma massa. Conceito em ação: Princípio de equilíbrio de uma balança de dois pratos. Significado relacional do sinal de igual. Adição. Medidas de Massa.

Fonte: Autoria própria.

Tales argumentou que, após os estudantes compreenderem o conceito de equilíbrio por meio da manipulação livre do recurso, no modo básico do EIB, o próximo passo seria utilizar a tela no “modo laboratório” para atribuir “pesos” específicos a esses objetos.

Professor: Depois que eles perceberem isso aí, eu vou querer o quê? Atribuir valores a esses objetos, né? Essas bolinhas... A partir daí, eu posso criar uma lógica em cima disso. Então, com base nas modificações, o equilíbrio da balança também vai se modificar.

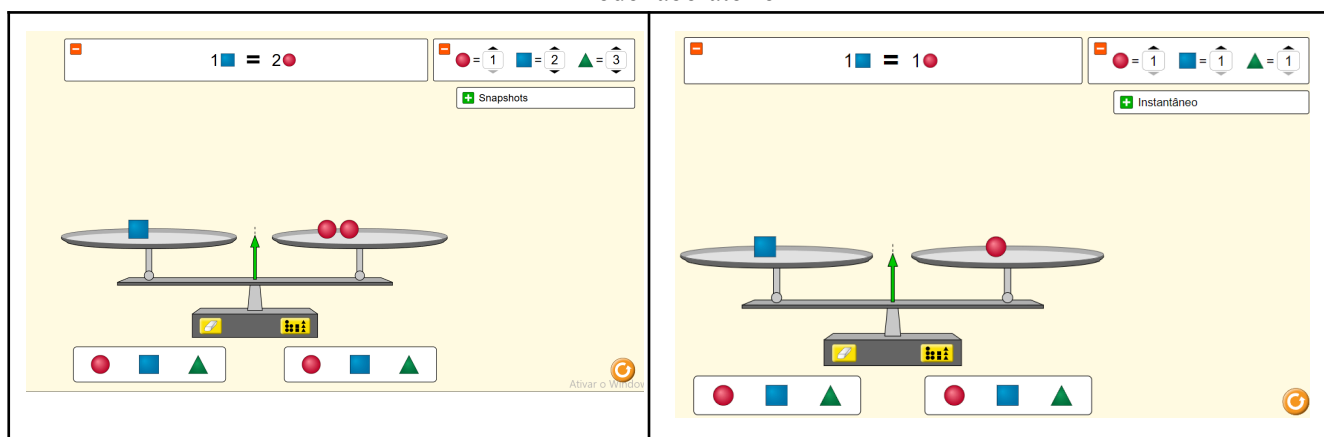
Tales também ressaltou a importância de explicar aos estudantes que os objetos geométricos permanecem o mesmo, enquanto seu “peso” pode aumentar ou diminuir. De acordo com ele, de forma intuitiva, os alunos podem associar mudanças de “peso” a alterações no tamanho ou formato do objeto. Para essa situação, Tales apresentou uma crítica ao recurso, pelo seguinte exemplo:

Professor: Se eu tenho uma maçã que, por exemplo, pesa 100g, como ela pode pesar 200g e continuar com o mesmo formato? Por isso, é mais fácil, inicialmente, trabalhar assim: se eu tenho uma maçã de 100g e quero acrescentar mais peso, coloco outra maçã de 100g. A partir disso, vou encontrando o valor desconhecido do outro prato.

Na tela do modo laboratório, Tales propôs duas situações, uma em relação aos objetos com massas iguais e outra com objetos de massas diferentes. Em ambos os casos, é possível atribuir medidas de 1 a 20 unidades à massa de cada objeto (cubo, esfera, pirâmide). Isto é uma condição do próprio simulador.

Por exemplo, no Quadro 36, podemos observar como o professor fez a regulação no painel de medidas (no canto superior da tela do recurso), ora para a massa de todos os objetos igual a medida “1 unidade”, ora para cada um deles com massas diferentes (1, 2 e 3 unidades). Explorando assim, procedimentos aritméticos da operação de adição.

Quadro 36 - Exemplos com situações de massas diferentes e iguais apresentados por Tales -
Modo laboratório



Regras de ação: Se atribuirmos medidas diferentes ou iguais para os objetos (esfera, cubo, pirâmide) e colocá-los em ambos os lados da balança, é possível observar situações de equilíbrio ou desequilíbrio. Isso depende de calcularmos quanto devemos adicionar à massa de um objeto para ficar com a mesma massa de outro objeto.

Invariantes operatórios:

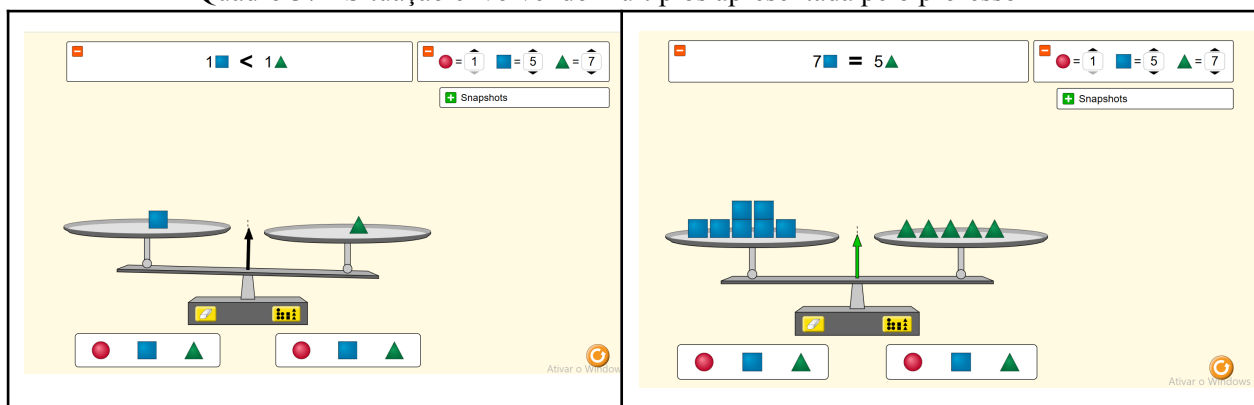
Teoremas em ação: O equilíbrio da balança é determinado pelo resultado da soma das medidas em ambos os lados da balança.

Conceito em ação: Princípio de equilíbrio de uma balança de dois pratos. Significado operacional do sinal de igual. Adição. Medidas de Massa.

Fonte: Protocolo da pesquisa.

Tales também apresentou uma situação para explorar o conceito de múltiplos, estabelecendo valores fixos para os objetos geométricos. No exemplo, do Quadro 37, cada cubo foi definido com massa equivalente a 5 unidades, enquanto cada pirâmide equivalia a 7 unidades. Ele propôs como regra que no prato esquerdo da balança só poderiam ser adicionados cubos, enquanto no prato direito apenas pirâmides seriam permitidas. Por meio dessa atividade, os estudantes perceberiam que, ao adicionar mais formas a cada lado, criariam combinações que resultam em múltiplos dos objetos (com massas iguais a 5 e 7).

Quadro 37 - Situação envolvendo múltiplos apresentada pelo professor



Regras de ação: Se colocamos 7 cubos (cada um com massa de 5 unidades) do lado esquerdo da balança e 5 pirâmides (cada uma com massa 7 unidades) do lado direito da balança, tem-se uma situação de equilíbrio, devido o produto de 7×5 ser igual a 35 em ambos os lados.

Invariante operatório:

Teoremas em ação: É preciso escolher para a massa (em ambos os lados da balança) um valor que seja múltiplo ao mesmo tempo de dois números. A massa de cada lado da balança deve ser divisível pela quantidade de objetos.

Conceito em ação: Princípio de equilíbrio de uma balança de dois pratos. Múltiplos de um número natural. Significado operacional do sinal de igual.

Fonte: Protocolo da pesquisa.

Durante a entrevista, o professor colocou que até o momento foi o que ele conseguiu perceber sobre as possibilidades para usar o EIB com os estudantes.

Em relação ao planejamento para o uso do EIB, dentre todas as possibilidades apresentadas por Tales, as situações com massas iguais e diferentes apresentadas no Quadro 36, foram aquelas priorizadas para serem utilizadas na turma do 6º ano escolhida por ele, em sala de aula. Tales declarou que formaria grupos e permitiria que os estudantes explorassem o recurso de maneira livre.

Professor: A minha ideia é formar equipe com os alunos. De três a quatro. E aí eles começarem a testar a questão da balança, entendeu? O meu objetivo é fazer isso com eles.

Tales justificou a preferência pelo uso do EIB “em equipe” devido às dificuldades dos estudantes em manusear o computador.

Professor: Eu já fiz atividades usando o computador com eles e eu percebi o seguinte: alguns alunos têm dificuldade até em manusear o teclado do computador. E, em equipe, fica um que toma logo a frente, a iniciativa para depois os outros fazerem, entendeu?

O professor afirmou que levaria para a sala de aula o seu *notebook* pessoal a fim de realizar o uso do EIB com os estudantes. Isto ocorreria sem a apresentação de exemplos prévios por ele. Ou seja, cada equipe teria a sua própria experiência com o simulador.

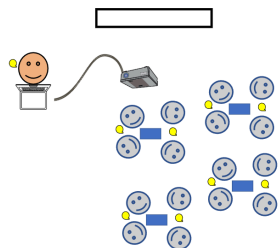
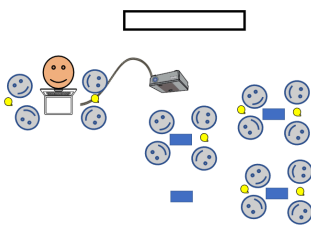
Professor: Eu prefiro que eles mexam primeiro pra depois eu direcionar. Eu não vou direcionar logo no início, não. Porque eles podem até construir uma maneira, né? Ou até manusear de maneira até melhor que eu. Eu gosto de deixar eles um pouco à vontade, principalmente nessa questão de manusear um aplicativo.

Durante a entrevista, o professor Tales explicou que pretendia dar início à participação da turma apresentando aos estudantes as ferramentas e funcionalidades do simulador EIB. Isso poderia ser organizado com o uso do *notebook* conectado a um projetor, permitindo que todos os estudantes da turma pudessem acompanhar essa atividade juntos. Após esse momento, ele pretendia organizar a participação da turma de maneira que cada grupo tivesse a oportunidade de interagir com o simulador Explorador de Igualdade em seu *notebook*.

Diante do exposto, ainda que de maneira pouco consistente, visto que essas OI foram pensadas, no âmbito do planejamento da aula (uma semana antes desta ocorrer), identificamos que o professor elaborou, inicialmente, uma OI - Demonstração Técnica (DT)

encaixada e simultânea com uma OI - Orientação e Explicação pelo Professor (OEP). Como indica Gitirana e Lucena (2021), essas OI, embora distintas, foram pensadas para serem executadas simultaneamente.

Quadro 38 - Orquestrações instrumentais previstas pelo professor

OI - Demonstração Técnica (DT) encaixada e simultânea com uma OI - Orientação e Explicação pelo Professor (OEP).	
Configuração didática	Modo de execução
	OI- DT: O professor explica aos estudantes o que é o simulador e apresenta suas principais ferramentas. OI - EOP: O professor indicará ações que possibilitam manter a balança em equilíbrio ou desequilíbrio respondendo as dúvidas dos estudantes.
OI - Orientação e Explicação pelo Professor (OEP) sequenciada com a OI- Discussão entre os atores (DA).	
Configuração didática	Modo de execução
	OI-EOP: O professor convida cada grupo, de forma organizada, para explorar o simulador de maneira livre, permitindo que experimentem situações de equilíbrio na balança. Durante essa interação, o professor vai observar e orientar os estudantes. OI: DA: O professor junto com os estudantes comentam o que está ocorrendo nas simulações com o EIB.

Fonte: Autoria própria.

No Quadro 38, temos o que o professor nos apontou, na fase de pré-apropriação, a seguir (5.3) apresentamos de fato o que ocorreu na fase apropriação original.

5.3 A APROPRIAÇÃO ORIGINAL DO SIMULADOR EIB PELO PROFESSOR

No dia da aplicação do EIB na turma do 6º ano, o professor Tales iniciou a aula solicitando que os estudantes se organizassem em quatro grupos (A,B, C e D). Enquanto isso, ligou seu notebook e acessou o EIB no site da PhET. A partir disso explicou aos estudantes:

Professor: *Eu só tenho um computador, certo? Ai, o que eu peço a vocês? Vocês fiquem sentados nos lugares das suas equipes, ninguém vai ficar se levantando, eu vou levar o computador e a equipe vai ficar manuseando o meu computador. Ai vocês irão testar um aplicativo. Esse aplicativo você pode usar no celular. Mas, eu instalei no meu computador e a gente vai trabalhar com o computador. Ai vocês vão manusear esse aplicativo e eu vou ficar observando. Ai, é só esperar, está certo?*

No uso do EIB, o professor priorizou o modo laboratório, que contém os objetos geométricos e a tela com as indicações da massa dos objetos.

Inicialmente, podemos constatar que Tales implementou uma OI paralela, isto é, distinta e executada de forma independente, mas simultaneamente (Gitirana; Lucena, 2021); ao propor em se ocupar com um grupo de estudantes, enquanto os outros deveriam terminar de resolver a ficha de exercícios da aula anterior.

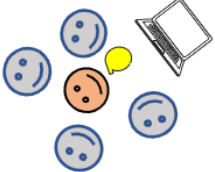
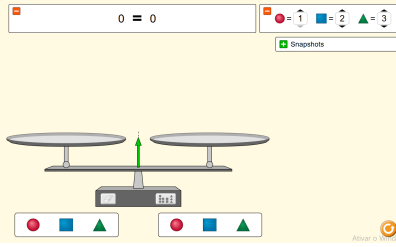
Professor: *Enquanto um grupo estiver usando o simulador, os estudantes dos outros grupos irão resolver as últimas questões (itens 5 e 7) e se tiver outras sem resolver da ficha de exercícios, certo?*

Diante disso, realizamos a observação do uso do EIB, grupo a grupo. Isto ocorreu à medida que o professor foi se deslocando com o seu *notebook* de um grupo a outro. Pois, ele desistiu de utilizar o projetor no dia da aula.

• Grupo A

O professor começou a interagir com o **Grupo A** por meio de uma OI - Demonstração Técnica (DT), encaixada e simultânea com uma OI - Explicação pelo Professor (EP). Ao apresentar aos estudantes as ferramentas e funcionalidades do simulador Explorador de Igualdade Básico, ele explicou: *"O que é que temos aqui? Temos uma balança. Nesses pratos aqui você vai adicionar objetos e observar quando atinge ou não a igualdade. Desse modo vocês vão testar equilibrar a balança"*. Como podemos observar no Quadro 39, a configuração didática dessas OI, envolveu o uso compartilhado de um notebook entre o professor e quatro estudantes (Grupo A), com os seguintes modos de execução:

Quadro 39 - OI - DT encaixada e simultânea com a OI - EP no Grupo A

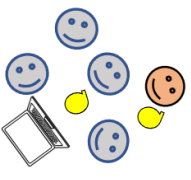
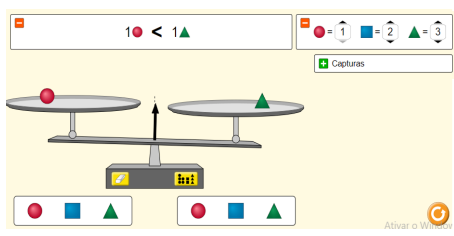
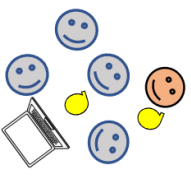
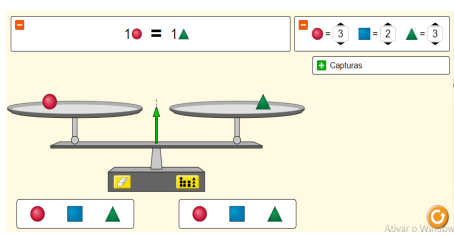
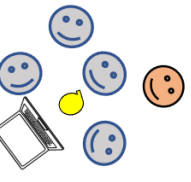
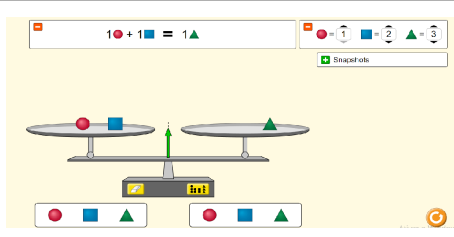
Configuração didática	Modo de execução	Simulação no EIB
	OI - DT: O professor explicou aos estudantes que eles poderiam inserir objetos geométricos nos pratos da balança. E, mostrou os valores indicativos das massas desses objetos, pré-definidos por ele (1, 2 e 3). OI - EP: O professor explicou que ao adicionar objetos em ambos os lados da balança, essa poderia ficar em equilíbrio ou desequilíbrio. Assim os estudantes deveriam testar colocar objetos dos dois lados até atingir o equilíbrio e a igualdade (=).	

Fonte: Protocolo da aula observada.

Em seguida, Tales convidou uma das estudantes para realizar a simulação na balança enquanto as demais observavam suas ações, dando início à uma OI - Orientação e Explicação

pelo Professor (OEP) sequenciada com uma OI-Sherpa (S); cuja configuração didática mudou. Pois, a estudante do Grupo A (E1- A) passou a manusear o notebook.

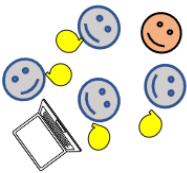
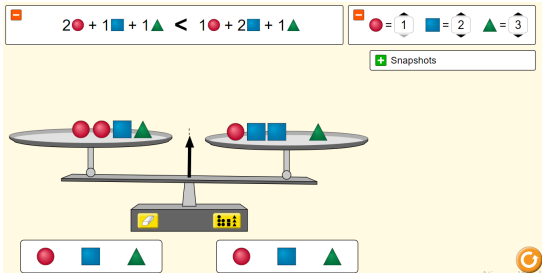
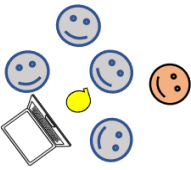
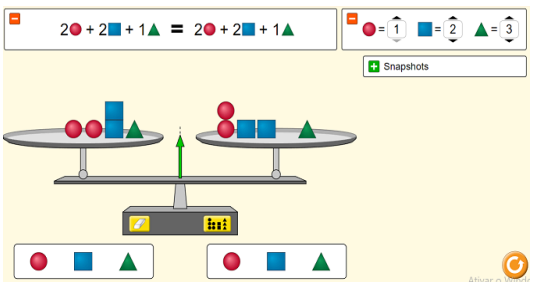
Quadro 40 - OI - OEP sequenciada com OI-S no Grupo A

Configuração didática	Modo de execução	Simulação no EIB
	OI - OEP₁: O professor solicitou a uma estudante (E1-A) que ela escolhesse dois objetos diferentes para colocar em cada lado da balança. Ela escolheu colocar 1 esfera e 1 pirâmide. A partir disso ele chamou a atenção para o desequilíbrio da balança.	
	OI - OEP₂: O professor pediu para E1-A alterar os valores das figuras (no lado direito da barra superior) a fim de colocar a balança em equilíbrio. Ela escolheu colocar 3 na esfera, 2 no quadrado e 3 na pirâmide. A partir disso ele chamou a atenção para o equilíbrio da balança, ao adicionar uma esfera e uma pirâmide em pratos opostos.	
	OI - S: O professor pediu para E1-A criar uma nova situação de equilíbrio. Ela escolheu colocar 1 na esfera, 2 no quadrado e 3 na pirâmide. Depois acrescentou de um lado da balança 1 esfera e um cubo e do outro uma pirâmide. A partir disso ela demonstrou o equilíbrio da balança e a igualdade (na tela do EIB).	

Fonte: Protocolo da pesquisa.

Ainda no Grupo A, deu-se início a outra OI. O professor deixou os outros estudantes à vontade para sugerir a E1- A, criar uma nova situação de equilíbrio na balança. Temos assim, outras duas configurações didáticas (Quadro 41), pela qual o professor passou a observar as ações do Grupo A. Para esta configuração tivemos uma OI - Discussão entre atores (DA) encaixada e sequenciada com uma OI Sherpa (S).

Quadro 41 - OI - DA encaixada e sequenciada com OI-S no Grupo A

Configuração didática	Modo de execução	Simulação no EIB
	OI - DA: A estudante E1-A, (usando 1 na esfera, 2 no cubo e 3 na pirâmide), ouvindo as sugestões do grupo, colocou um cubo no prato esquerdo e uma esfera no prato direito da balança; depois uma pirâmide de cada lado e foi adicionando aleatoriamente outros objetos, mantendo assim a balança em desequilíbrio.	
	OI-S: O estudante E2-A propôs para resolver a situação de desequilíbrio da balança (anterior), a adição de um cubo do lado esquerdo e uma esfera do lado direito, explicando que se deveria ter a quantidade de objetos iguais em ambos os lados.	

Fonte: protocolo da pesquisa.

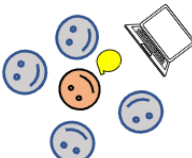
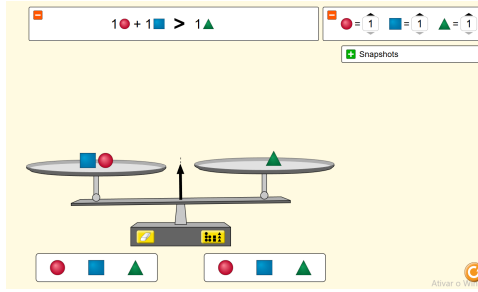
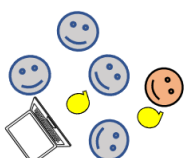
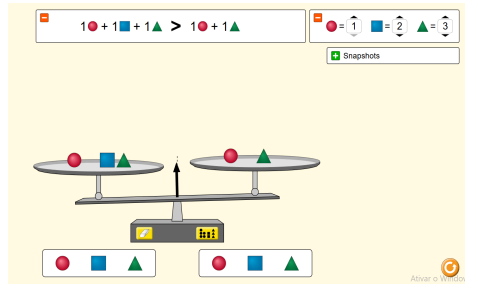
Após a interação com o Grupo A, o professor passou a interagir com o **Grupo B**.

• Grupo B

A participação do Grupo B foi iniciada pelo professor Tales de modo semelhante ao que ocorreu no Grupo A, com uma OI - Demonstração Técnica (DT), encaixada e simultânea com uma OI - Explicação pelo Professor (EP) (Quadro 39).

O professor explicou: “*Isso aqui é um aplicativo em que estamos utilizando a ideia de balança, vocês vão colocando o ‘peso’ aí e trabalham com a ideia de quantidade*” e mostrou aos estudantes como colocar objetos nos pratos da balança. Após esse momento, Tales deu início a uma OI - EP sequenciada com uma OI - OEP.

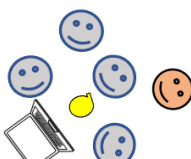
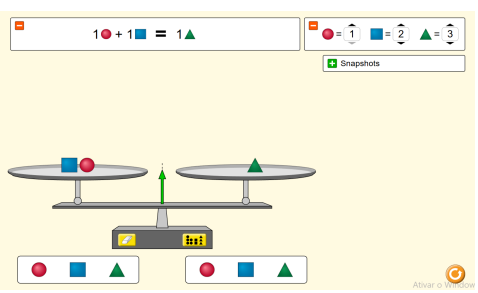
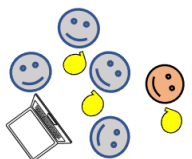
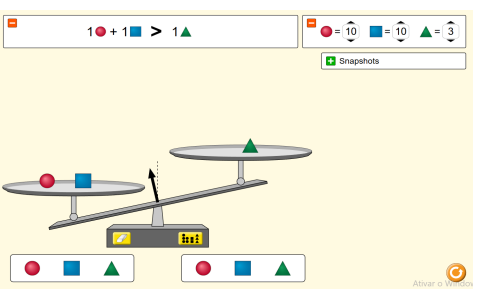
Quadro 42 - OI - EP sequenciada com OI - OEP no Grupo B

Configuração didática	Modo de execução	Simulação no EIB
	OI - EP: O professor ajustou todos os valores dos objetos (cubo, esfera e pirâmide) para 1. Depois acrescentou um cubo e uma esfera de um lado da balança e uma pirâmide do lado direito. E foi adicionando sucessivos objetos mostrando o equilíbrio e o desequilíbrio da balança.	
	OI - OEP: O professor modificou os valores das massas dos objetos (para 1, 2 e 3) e solicitou a uma estudante (E1-B) que ela escolhesse objetos diferentes para colocar em cada lado da balança. Ela escolheu colocar 1 pirâmide, 1 esfera e 1 cubo (lado esquerdo) da balança e 1 esfera e 1 pirâmide (lado direito), criando uma situação de desequilíbrio. A partir disso, o professor concluiu dizendo que precisaria ser posto um cubo do lado direito para deixar a balança em equilíbrio.	

Fonte: protocolo da pesquisa.

A partir da situação acima (Quadro 42), o professor convidou outro estudante do Grupo B, para manusear o *notebook*.

Quadro 43 - OI - S encaixada e sequenciada com OI - DA no Grupo B

Configuração didática	Modo de execução	Simulação no EIB
	OI - S: A estudante (E2-B), colocou 1 cubo e 1 esfera no prato esquerdo da balança e 1 pirâmide no prato direito, criando uma situação de equilíbrio.	
	OI - DA: A estudante (E3-B), ouvindo as sugestões do grupo, alterou as medidas da massa da esfera (para 10) e do cubo (para 10), causando uma situação de desequilíbrio. O professor explicou porque a balança estava em desequilíbrio, chamando a atenção para as medidas da massa, de forma que ficassem com a mesma soma	

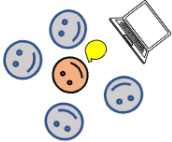
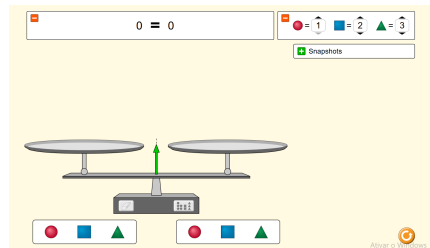
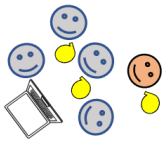
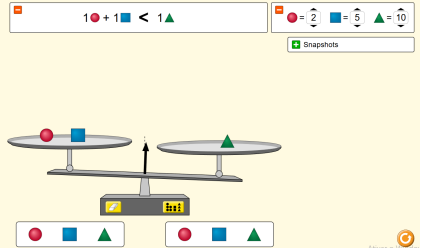
	em ambos os lados.	
--	--------------------	--

Fonte: Protocolo da aula observada.

• Grupo C

O professor Tales deu início à participação do Grupo C com uma OI - Demonstração Técnica (DT), encaixada e simultânea com uma OI - Explicação pelo Professor (OEP), explicando: “Isso aqui é uma balança, certo? E aí vocês vão colocar pesos nessa balança para tentar equilibrá-la”. No Grupo C, assim como nos demais grupos, a configuração didática envolveu o uso de um notebook compartilhado entre o professor e quatro estudantes.

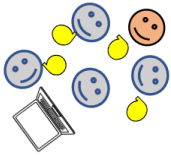
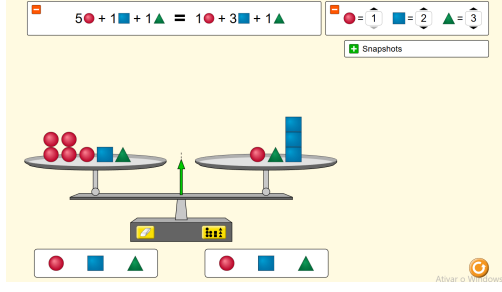
Quadro 44 - OI - DT encaixada e simultânea com a OI - OEP no Grupo C

Configuração didática	Modo de execução	Simulação no EIB
	OI - DT: O professor apresentou aos estudantes do Grupo C, o simulador no modo “laboratório” com as representações de objetos geométricos (esfera =1, cubo =2 e pirâmide =3) e explicou aos estudantes que eles poderiam inserir objetos geométricos nos pratos da balança.	
	OI - OEP: O professor modificou os valores das massas dos objetos para 1, 5 e 10, e pediu para que os estudantes manuseassem o aplicativo. Os estudantes (E1-C e E2-C), modificaram as massas do objeto e colocaram 1 esfera e 1 cubo no prato esquerdo da balança e 1 pirâmide no prato direito, criando uma situação de desequilíbrio. O professor interferiu para explicá-los porque a balança estava em desequilíbrio.	

Fonte: Protocolo da aula observada.

Em seguida, dando início à uma OI - DA, outro estudante (E3-C), ouvindo as sugestões do grupo, utilizou o simulador modificando novamente a massa dos objetos e adicionando objetos em ambos os lados da balança para gerar uma situação de equilíbrio.

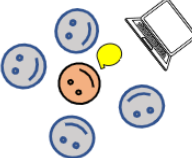
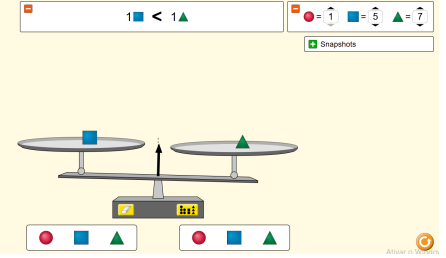
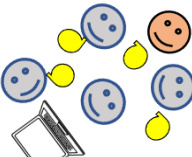
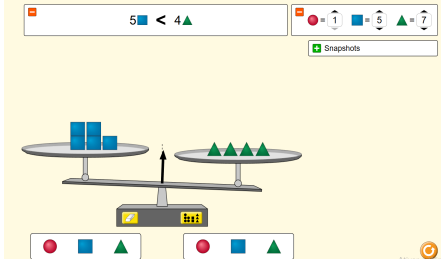
Quadro 45 - OI - DA no grupo C

Configuração didática	Modo de execução	Simulação no EIB
	OI - DA: O estudante (E3-C), colocou 5 esferas, 1 cubo e 1 pirâmide no prato esquerdo da balança e 1 pirâmide, 1 esfera e 3 cubos no prato direito, criando uma situação de equilíbrio. O professor explicou que o equilíbrio foi gerado por a soma das massas está $10=10$ em cada lado da balança.	

Fonte: Protocolo da aula observada.

Após isso, o professor Tales propôs um desafio: equilibrar a balança utilizando apenas cubos e pirâmides. Tales explicou: “*O quadrado tem peso 5 e o triângulo tem peso 7. O desafio é equilibrar a balança utilizando apenas quadrados e triângulos, sem alterar o peso de nenhum deles*”.

Quadro 46 - OI - EP encaixada e simultânea com a OI - OEP no Grupo C

Configuração didática	Modo de execução	Simulação no EIB
	OI - EP: O professor modificou as medidas de massa dos objetos (cubo = 5 e pirâmide = 7) e solicitou que os estudantes deixassem a balança em equilíbrio utilizando apenas cubos e pirâmides.	
	OI - DA: A estudante E1-C, seguindo as sugestões das colegas de grupo, realizou sua primeira tentativa de equilíbrio na balança posicionando sequencialmente um cubo no lado esquerdo e uma pirâmide no lado direito, buscando deixar a balança em equilíbrio.	

Fonte: Protocolo da aula observada.

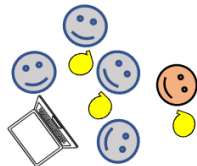
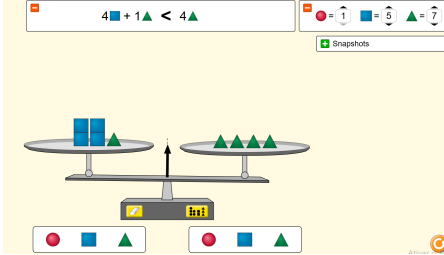
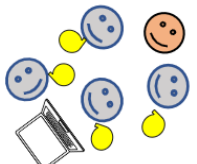
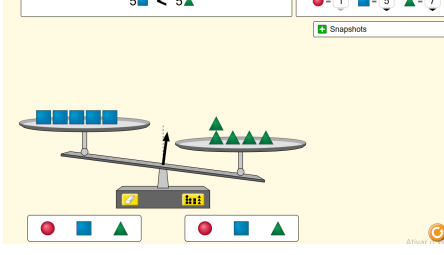
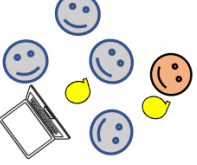
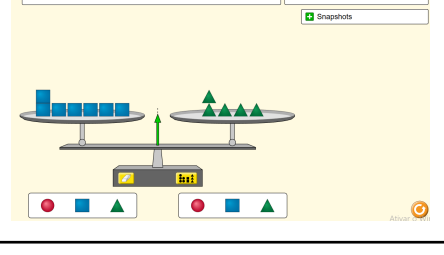
O grupo C iniciou sua primeira tentativa de equilibrar a balança adicionando 1 cubo no prato esquerdo da balança (onde já havia um cubo colocado pelo professor) e 1 pirâmide no prato direito da balança (onde também havia uma pirâmide colocada pelo professor), esta

tentativa sugere que as estudantes atribuíram valores iguais aos objetos geométricos, tratando cubos e pirâmides como elementos que possuem a mesma medida de massa.

Percebendo que a estratégia inicial não estava equilibrando a balança, a estudante E2-A propôs uma nova abordagem: "*E se a gente tirasse um cubo daqui e colocasse um triângulo? Acho que assim daria certo!*". No entanto, quando a colega E1-A começou a fazer essa alteração, o professor interveio para reorientar a atividade.

Tales esclareceu que a proposta do exercício não permitia substituir os objetos, mas sim trabalhar apenas com adições e subtrações dos mesmos elementos já presentes em cada lado da balança, ou seja, poderiam manipular apenas cubos no lado onde já havia cubos e pirâmides onde estas já estavam posicionadas.

Quadro 47 - OI - DA encaixada e simultânea com a OI - OEP no Grupo C

Configuração didática	Modo de execução	Simulação no EIB
	OI - DA: A estudante E1-C, seguindo as sugestões das colegas de grupo, realizou sua segunda tentativa de equilíbrio na balança retirando 1 cubo e adicionando 1 pirâmide do lado esquerdo, buscando deixar a balança em equilíbrio. O professor interveio para explicar novamente as regras para solução do desafio.	
	OI - DA: A estudante E1-C, seguindo as sugestões das colegas de grupo, realizou sua terceira tentativa de equilíbrio na balança posicionando sequencialmente um cubo no lado esquerdo e uma pirâmide no lado direito, buscando deixar a balança em equilíbrio.	
	OI - OEP: A estudante E1-C, seguindo as instruções do professor, adicionou 2 cubos no prato esquerdo da balança, deixando-a em equilíbrio.	

Fonte: Protocolo da aula observada.

Após isso, o professor destacou para o Grupo C:

Professor: Viu, atingiu o equilíbrio? Observou os números ali? Por que aconteceu isso? Veja, vou explicar o porquê. Tá vendo que aqui tem 5? (apontando para as pirâmides). E qual o peso do triângulo? 7. 7×5 , quanto é? 35. Se tem que estar em

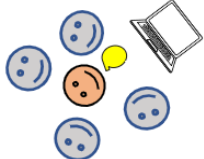
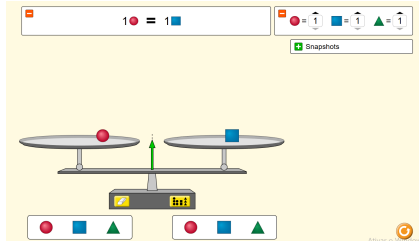
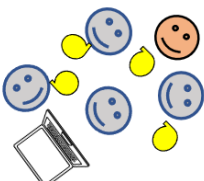
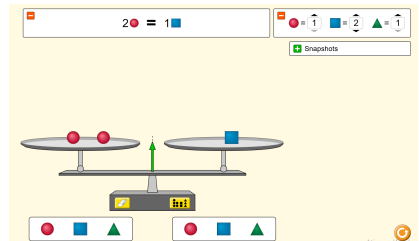
equilíbrio, o outro também tem que estar 35. Então, aqui eu peguei o quê? Os múltiplos de 5 e os múltiplos de 7.”

• Grupo D

O professor Tales iniciou a atividade no Grupo D de modo semelhante ao que ocorreu no Grupo A, B e C, com uma uma OI - Demonstração Técnica (DT), encaixada e simultânea com uma OI - Explicação pelo Professor (EP), apresentando o simulador no modo laboratório e apontando para os estudantes o que ocorre quando se adiciona objetos geométricos diferentes em cada lado da balança.

Tales explicou: “*Eu tenho uma balança, certo? E aqui em cima eu tenho os pesos de cada objeto desses. Vocês devem acrescentar objetos nesses pratos*”. Em seguida (Quadro 48), ele convidou os estudantes para realizarem a simulação na balança, intervindo quando necessário.

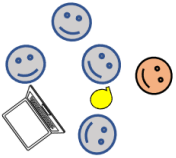
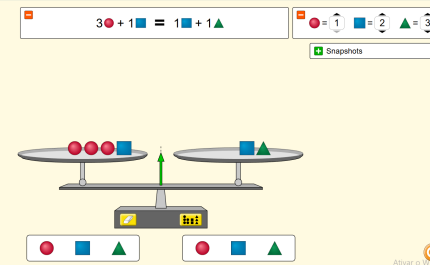
Quadro 48 - OI - EP encaixada e simultânea com a OI - OEP no Grupo D

Configuração didática	Modo de execução	Simulação no EIB
	OI - EP: O professor ajustou todos os valores dos objetos (cubo, esfera e pirâmide) para 1, mostrando objetos nos pratos da balança, explicando uma situação de equilíbrio.	
	OI - OEP: O professor modificou o valor da massa do cubo para 2 e solicitou que os estudantes utilizassem o simulador. Eles escolheram colocar 2 esferas no prato esquerdo da balança e 1 cubo no prato direito da balança. A partir disso, Tales chamou atenção para o equilíbrio da balança.	

Fonte: Protocolo da aula observada.

Dando início à OI - S, outra estudante utilizou o simulador, adicionando objetos em ambos os lados da balança para criar uma situação de equilíbrio.

Quadro 49 - OI - S no Grupo D

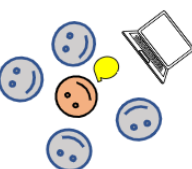
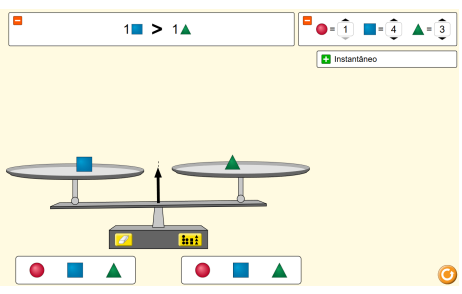
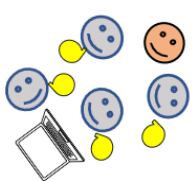
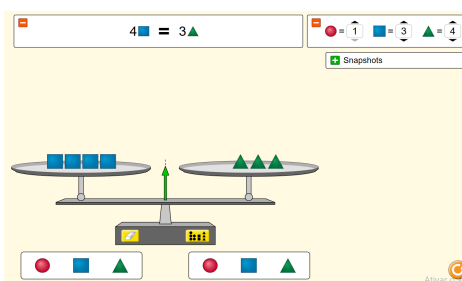
Configuração didática	Modo de execução	Simulação no EIB
	OI - S: A estudante (E2-D), colocou 1 cubo e 1 esfera no prato esquerdo da balança e 1 pirâmide no prato direito, criando uma situação de equilíbrio. Tendo “5” como resultado da soma das massas de cada lado da balança.	

Fonte: Protocolo da aula observada.

Após isso, Tales modificou o peso dos objetos e explicou: “*O quadrado pesa 3 e o triângulo pesa 4. O desafio é equilibrar a balança usando apenas quadrados e triângulos, sem modificar o peso de nenhum deles e sem usar nenhum círculo.*”

O estudante E1-D, ouvindo sugestões dos colegas, iniciou sua primeira tentativa de equilibrar a balança.

Quadro 50 - OI - EP encaixada e simultânea com a OI - DA no Grupo D

Configuração didática	Modo de execução	Simulação no EIB
	OI - EP: O professor modificou as medidas de massa dos objetos (cubo = 4 e pirâmide = 3) e solicitou que os estudantes deixassem a balança em equilíbrio utilizando apenas cubos e pirâmides.	
	OI - DA: O estudante E1-D, seguindo as sugestões do grupo, fez sua primeira tentativa de equilibrar a balança, colocando 4 cubos no prato esquerdo e 3 pirâmides no direito, obtendo equilíbrio.	

Fonte: Protocolo da aula observada.

Os estudantes desse grupo resolveram o desafio na primeira tentativa, demonstrando compreensão da proposta da atividade. Isto é, eles não adicionaram os objetos aleatoriamente, pelo contrário, planejaram antecipadamente a quantidade exata de objetos que seriam

colocados em cada prato da balança. Quando o Grupo D conseguiu equilibrar a balança, o professor fez a seguinte explicação:

Professor: Aqui, quanto é o peso do triângulo? 4. Quantos triângulos têm aí? 3. E, 3×4 , quanto é? 12. Se a balança tem que ficar em equilíbrio, aqui tem que ser 12 (apontou para o prato direito da balança) e aqui também tem que ser 12 (apontou para o prato esquerdo da balança), né não? Quanto é o peso do quadradinho? 3. Quantos quadradinhos têm? 4. Então, 3×4 ? 12 também.

Com base, nas OI apresentadas e retomando os indícios sobre os esquemas de utilização do EIB apresentados na fase de pré-apropriação e retomados pelo professor na apropriação original, podemos em síntese (Quadro 51) expor os as regras de ação e os invariantes operatórios para as situações vivenciadas pelo professor em sala de aula.

Quadro 51 - Esquemas de utilização do EIB na apropriação original do professor

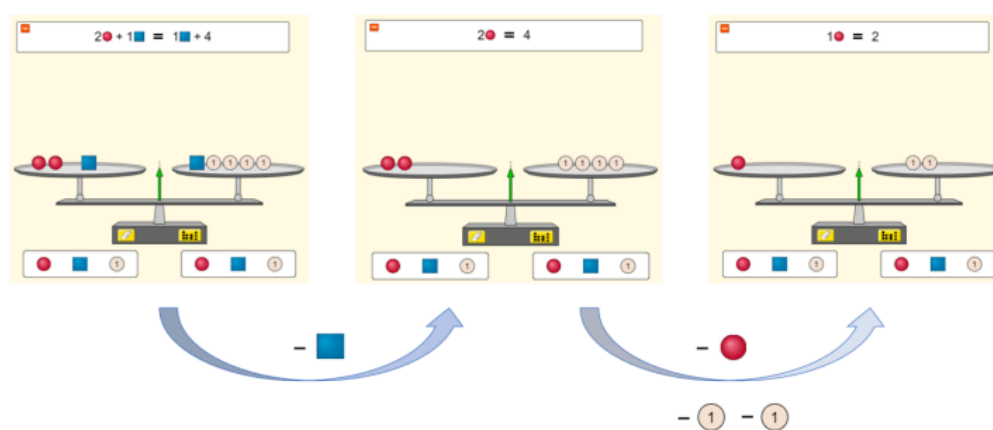
Grupos	Situações	Regras de ação e invariantes operatórios
A B, C e D	Situação com massas diferentes	Regras de ação: Se atribuírmos medidas diferentes ou iguais para os objetos (esfera, cubo, pirâmide) e colocá-los em ambos os lados da balança, é possível observar situações de equilíbrio ou desequilíbrio. Isso depende de calcularmos quanto devemos adicionar à massa de um objeto para ficar com a mesma massa de outro objeto. Invariantes operatórios: Teoremas em ação: O equilíbrio da balança é determinado pelo resultado da soma das medidas em ambos os lados da balança. Conceito em ação: Princípio de equilíbrio de uma balança de dois pratos. Significado operacional do sinal de igual. Adição. Medidas de Massa.
B e D	Situação com massas iguais	
C e D	Situação envolvendo múltiplos	Regras de ação: Se colocamos 7 cubos (cada um com massa de 5 unidades) do lado esquerdo da balança e 5 pirâmides (cada uma com massa 7 unidades) do lado direito da balança, tem-se uma situação de equilíbrio, devido o produto de 7×5 ser igual a 35 em ambos os lados. Se colocamos 4 cubos (cada um com massa de 3 unidades) do lado esquerdo da balança e 3 pirâmides (cada uma com massa 4 unidades) do lado direito da balança, tem-se uma situação de equilíbrio, devido o produto de 4×3 ser igual a 12 em ambos os lados. Invariante operatório: Teoremas em ação: É preciso escolher para a massa (em ambos os lados da balança) um valor que seja múltiplo ao mesmo tempo de dois números. A massa de cada lado da balança deve ser divisível pela quantidade de objetos. Conceito em ação: Princípio de equilíbrio de uma balança de dois pratos. Múltiplos de um número natural. Significado operacional do sinal de igual.

Fonte: Autoria própria.

Pelo exposto no Quadro 51, podemos constatar que nem todos os grupos tiveram a mesma experiência com o EIB. Por exemplo, os grupos C e D foram aqueles em que os estudantes lidaram com situações envolvendo múltiplos. O Grupo A experienciou apenas situações envolvendo massas iguais (pré-definidas na tela do EIB).

Em particular, sobre as situações envolvendo objetos e medidas de massa diferentes, isso nos remete ao que Vergnaud (1987) afirma sobre ser a partir de problemas que dão origem a equações do tipo $ax + b = cx + d$ que a álgebra se torna uma ferramenta mais pertinente que a aritmética para resolvê-los. À medida que o processo de resolução desse tipo de equação se realiza com a ajuda de transformações que conservam um sentido de igualdade que não é próprio do pensamento aritmético. Por exemplo, Almeida (2022) apresenta como no EIB, no modo básico, poderíamos desenvolver a aplicação do princípio aditivo para resolver equações.

Figura 32 - Exemplo no EIB sobre a utilização do princípio aditivo na determinação do termo desconhecido



Fonte: Almeida (2022, p. 66).

Sobre as escolhas do professor em utilizar o modo laboratório do EIB, isso causou uma limitação quanto à possibilidade de explorar a determinação do termo desconhecido, bem como, a aplicação dos princípios de equivalência. A propósito disso e de outras questões, no próximo tópico (5.4) buscamos esclarecê-las.

5.4 O PÓS-APROPRIAÇÃO ORIGINAL DO EIB PELO PROFESSOR TALES

Após a utilização do Explorador da Igualdade Básico pelo professor em sala de aula, na entrevista que realizamos, buscamos compreender melhor suas impressões sobre o uso desse recurso com a turma do 6º ano e as diferenças entre o que ele nos tinha apresentado na fase de pré-apropriação.

Ao questionarmos sua decisão em não utilizar o projetor, como ele havia previsto, na fase de pré-apropriação (5.2). O professor explicou que não o utilizou, por considerar que por

meio do manuseio no *notebook*, grupo a grupo, ele poderia acompanhar melhor os estudantes. E, que se já mostrasse de forma geral a todos, o EIB, isso poderia fazê-los perder o interesse pelo simulador.

O uso pelo professor do modo laboratório do EIB, baseado no manuseio dos objetos (cubo, pirâmide e esfera) e do ícone com “*as mudanças dos números*” na tela do simulador, segundo o professor: “*foi eficaz*”. O professor afirmou que o uso do recurso ocorreu conforme o esperado, sem imprevistos relevantes. Para ele, o EIB “*é um recurso eficaz na compreensão do equilíbrio da balança*”.

Ao ser questionado sobre alguma dificuldade dos estudantes em relação ao uso do EIB, o professor comentou: “*Assim, pelo que eu percebi, não*”. Embora, tenha ocorrido algum receio por parte de alguns estudantes em manusear o *notebook*, devido a falta de habilidade com o *touchpad*, visto que ele não ofereceu aos estudantes, um *mouse*. Ficou evidente, que um notebook para ser compartilhado entre ele e os estudantes não foi uma situação “*ideal*”. Mas, teve como favorável ele verificar a interação e o envolvimento dos estudantes com o simulador “*mais de perto*”.

Como já foi dito, enquanto o professor estava com um grupo de estudantes, aos demais, foi solicitado que concluíssem a resolução da ficha de exercícios “*Igualdade e identificação de número desconhecido*”. Durante a aula, vários estudantes dos outros grupos, vieram por curiosidade, observar o que estava se passando com o manuseio do EIB. O que de certa forma, na visão do professor, pode ter favorecido a compreensão dos estudantes que ficaram para usar o recurso depois.

Podemos perceber que o professor experimentou situações diferentes nos quatro grupos (A, B, C e D). Além disso, a gestão do tempo foi diferente em cada grupo. No Grupo A, possivelmente, por ser o primeiro a interagir com o EIB, ele demorou mais tempo. Para o professor, quando ele começou a perceber que os estudantes estavam já entendendo “*o que ele queria que eles entendessem*”, já podia passar para outro grupo.

Tales considerou que os estudantes gostaram do EIB, mas, devido ao tempo das aulas, “*não deu para todos os alunos fazerem as simulações*”. Contudo, o professor afirmou que não o utilizaria novamente nessa turma. E, no bimestre, não daria mais para usar em outra turma diferente. Para Tales, o fato de propor o uso do EIB, já depois da ficha de exercícios, foi algo que serviu “*para reforçar a noção de equilíbrio da balança*”.

Como já foi dito, nessas duas aulas, enquanto o professor estava com um grupo, os outros concluíram os exercícios da aula anterior, terminando assim a sequência de ensino

sobre Propriedades da Igualdade. Tales nos indicou que dentre os exercícios propostos aos estudantes, ele selecionou só uma questão, apenas o **item 07** (da ficha de exercícios) para a prova. Pois, ele estava ensinando frações no bimestre, segundo o professor: *“um tema que demanda mais tempo para a compreensão dos estudantes”*.

Para um uso futuro do EIB, Tales afirmou que poderia pensar sobre como utilizar esse recurso antes da ficha de exercícios, para desenvolver a noção intuitiva da balança. Por ter sido a primeira vez que estava usando o EIB em sala de aula, ele *“precisou entender como ele funcionava e o que dava para fazer com ele, mas não deu para experimentar tudo”*.

Tales explicou que a decisão sobre a reutilização desse recurso em turmas futuras dependerá de uma avaliação diagnóstica da turma, para ele identificar o nível da turma e ajustar suas estratégias. Mostrando uma postura reflexiva:

Professor: Não será automático assim, não vou dizer que vou usar o recurso toda vez que eu for ensinar propriedades da igualdade no 6º ano. Isso vai ser condicionado às necessidades específicas dos alunos. Não deu para explorar tudo do recurso nessa aula, mas em outras vezes, pode ser explorado mais o modo básico.

De acordo com o que acompanhamos das aulas do professor, pudemos constatar que, se não fosse a proposta de participar da pesquisa, ele teria encerrado o ensino das Propriedades da Igualdade, com a ficha de exercícios.

Sobre a possibilidade de reapropriação do EIB pelo professor, convém destacar o aspecto temporal. Pois para um estudo sobre a reapropriação desse recurso seria importante identificarmos a evolução dos conhecimentos profissionais do professor; da inter-relação do EIB com o seu sistema de recursos e a reverberação disso nas orquestrações instrumentais previstas e efetivas em sala de aula (Lira, 2022). Dessa forma, não convém tratarmos de reapropriação durante a implementação de um recurso em sala de aula pelo professor, por exemplo, com outro grupo de alunos, se esta ocorrer durante o mesmo período de experimentação da apropriação original.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve por objetivo analisar a apropriação de uma balança de dois pratos digital (o Explorador da Igualdade Básico - PhET) para/no ensino de Propriedades da Igualdade, por um professor de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental.

No Capítulo 1, na introdução dessa dissertação, expomos como chegamos a nos interessar sobre o uso da balança de dois pratos no ensino de equações do 1º grau e das Propriedades da Igualdade, especialmente no 6º ano, no qual ocorre a transição entre os anos iniciais e finais. Pois comumente, as Propriedades da Igualdade são utilizadas para o cálculo do termo desconhecido, por vezes, utilizando-se os princípios de equivalência, mas, sem considerar que os estudantes estão lidando com a resolução de equações. Isto é um fato que observamos, nas observações das aulas do professor Tales, ao constatarmos que em nenhum momento ele mencionou a resolução de equações. Todo o tempo, ele se referiu ao termo desconhecido, utilizando expressões como “descobrir o número que falta” ou “encontrar o valor que deixa a balança em equilíbrio”.

Ao mapearmos as pesquisas, verificamos a escassez de trabalhos voltados, especificamente, para a análise do planejamento de aulas com o uso da balança de dois pratos pelo professor de Matemática e suas práticas de ensino em sala de aula com esse recurso, visto que encontramos, sobretudo, a aplicação de situações-problema elaboradas por pesquisadores. Isso, de certa forma, fortaleceu nossas intenções de pesquisa, no sentido de compreender a apropriação do EIB, de forma processual, acompanhando de fato, como esse recurso foi sendo integrado ao cenário do ensino das Propriedades da Igualdade pelo professor, em uma turma do 6º ano.

No Capítulo 2, a inserção da Teoria dos Campos Conceituais na nossa pesquisa nos ajudou a entender como a balança de dois pratos perpassa o campo dos Números e das Operações, das Grandezas e Medidas e da Álgebra. Nessa direção, um olhar para o uso da balança de dois pratos nos capítulos de LD, para nós, ainda suscitam diversas inquietações, na direção de uma melhor análise sobre o uso deste recurso no campo das Grandezas e Medidas e no campo da Álgebra, ou seja, como a balança é abordada no capítulo das Medidas de Massa e no de Propriedades de Igualdade.

Uma dessas inquietações, situa-se no que Douady (1996) aponta sobre a ocorrência do uso de certas ferramentas explícitas em situações-problema e como essas se relacionam aos teoremas em ação (Vergnaud, 1990) já construídos anteriormente pelo estudante. Assim,

como as Medidas de Massa já são estudadas ao longo dos anos iniciais, verificamos de modo geral, que essas se situam no capítulo de LD, do 6º ano, sobre as Propriedades da Igualdade, antes mesmo de serem objeto de estudo no capítulo de Medidas de Massa.

Para nós, se os princípios de equivalência (aditivo e multiplicativo) não são abordados ao ser usada a balança de dois pratos, não podemos afirmar que esse recurso está a serviço do desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes. Poderia assim, ser considerado no campo conceitual de situações envolvendo massa (comparação, medição ou produção), como discutimos no Capítulo 2. Dito de outra forma, tão importante quanto observarmos como a representação da balança de dois pratos aparece em situações-problema é identificarmos o significado (os invariantes operatórios - os teoremas e conceitos em ação) que estão em jogo. Por exemplo, se estão mais voltados para o uso do significado operacional ou relacional do sinal de igual, diante do que se pretende para a aprendizagem dos estudantes.

No Capítulo 3 e 4, respectivamente, apresentamos as bases teóricas e metodológicas do *Modelo de Apropriação de um Recurso*. Convém acrescentar que a princípio esse modelo foi desenvolvido sobre a apropriação de um jogo digital “À la ferme”, por professores do ensino infantil francês. No Brasil, Lira (2022) o utilizou para o estudo da apropriação de jogos sobre equação do 1º grau propostos em livros didáticos por professores do Ensino Fundamental. No nosso caso, ao guiarmos nossa pesquisa por esse modelo, consideramos que ele foi fundamental para compreendermos as etapas do processo vivido pelo professor Tales na incorporação do simulador digital Explorador da Igualdade Básico (EIB) ao seu ensino.

O *Modelo de Apropriação de um Recurso*, no que diz respeito às fases de pré-apropriação e apropriação original proporcionou identificarmos as primeiras interações do professor com o recurso EIB, quais potencialidades do simulador foram consideradas para a sua prática de ensino, bem como, os indícios acerca dos sentidos atribuídos ao uso da balança digital em suas escolhas didáticas.

No que diz respeito ao Capítulo 5, em que expomos a análise e discussão dos resultados, reforçamos o registro que antes do estudo sobre a pré-apropriação do EIB pelo professor Tales, ao buscarmos estudar seu sistema de recursos nos chamou a atenção o LD do 6º ano adotado na escola, da coleção “A Conquista da Matemática” (Giovanni Júnior, 2022). Contudo, podemos perceber que o professor não o estava utilizando por este conter poucos exemplos e tarefas, no capítulo sobre as Propriedades de Igualdade. Também percebemos que no capítulo destinado ao estudo de Medidas de Massa, o LD dessa coleção se destaca quanto

às situações-problema envolvendo a balança de dois pratos. O que nos leva à reflexão: em que medida, os professores, de modo geral, consultam o que é proposto nesses dois capítulos? E, articulam o uso da balança de dois pratos no tocante ao campo da Álgebra e das Grandezas e Medidas?

Além disso, podemos constatar que o recurso digital, o *Polypad* (proposto no LD da coleção A Conquista da Matemática) não havia despertado a atenção do professor. A princípio, isso nos surpreendeu, pelo fato do professor costumar propor aos seus estudantes situações utilizando a representação da balança de dois pratos e ter em mãos tal LD. Porém, consideramos que isso favoreceu nosso estudo sobre a apropriação do EIB, levando-se em conta que, de fato, foi a primeira vez que o professor Tales teve contato com um simulador de balança digital.

Apesar do professor não ter utilizado os slides que eles nos apresentou, como componente do seu sistema de recursos, isso nos ajudou a reforçar a identificação dos conhecimentos do professor sobre os princípios aditivos e multiplicativo na resolução de equações do primeiro grau. É fato que a ficha de exercícios “*Igualdade e identificação de número desconhecido*” - foi o recurso preponderante utilizado pelo professor antes de sua apropriação original do EIB. A imersão na análise da forma como o professor resolveu os itens propostos nesta ficha, elucidou consideravelmente como ele abordou a habilidade EF06MA14, em uma turma do 6º ano.

Creemos que a escolha por Tales das situações-problema envolvendo as representações com balanças, demonstram efeitos consideráveis de tais recursos disponíveis na internet, sobre o trabalho documental do professor. Por exemplo, vimos como as figuras de balanças utilizadas pelo professor são enormemente adaptadas e modificadas também por outros professores, quanto aos enunciados das situações-problema. Outro aspecto importante é que, algumas dessas representações, envolvem o uso de letras ou não, a omissão das medidas de massa, dentre outros aspectos que pensamos ser possível serem investigadas para uma melhor compreensão dos significantes (representações simbólicas) em jogo e os seus efeitos na aprendizagem dos estudantes.

Na análise que realizamos acerca da ficha de exercícios “*Igualdade e identificação de número desconhecido*”, podemos perceber que, mesmo sendo necessárias algumas adaptações, seria possível utilizar o EIB no modo básico. É evidente que não compartilhamos essa informação com o professor, a fim de não interferir em seu processo de apropriação. A nossa opção em utilizar o modo básico para demonstrar as limitações e possibilidades do EIB

ocorre porque no modo laboratório não se faz possível trabalhar com a determinação do termo desconhecido.

Além disso, utilizamos a tela com os objetos geométricos, pois, assim como no modo laboratório, as demais telas (animais, frutas e moedas) não apresentavam possibilidades para a determinação do termo desconhecido. No entanto, destacamos que, na tela com “animais”, é possível explorar o princípio aditivo e as relações de igualdade (simétrica, reflexiva e transitiva), enquanto na tela com “frutas” é possível explorar exclusivamente o princípio aditivo.

Nos procedimentos metodológicos adotados para a fase de pré-apropriação do EIB, depois de apresentar esse recurso ao professor e dar um certo tempo para que ele o analisasse, marcamos uma entrevista sobre sua análise deste recurso. Possivelmente, em investigações futuras, cremos que valeria a pena realizar mais encontros para o estudo da fase de pré-apropriação, pois achamos que ela foi muito rica, em termos de nos possibilitar entender o que o professor experienciou sozinho, suas descobertas pessoais sobre o recurso. Dizemos isto, porque ele descobriu formas de utilização do recurso mais do que conseguir aplicar em duas aulas com seus estudantes da turma do 6º ano.

De forma que, não foram esgotadas as possibilidades de uso do EIB, na fase de pré-apropriação pelo professor. E, mesmo para as que foram levantadas, seria necessário mais aulas para que fossem implementadas em sala de aula. Sobre isso, vale ressaltar que se o professor houvesse aplicado sequencialmente o EIB, na mesma turma ou até em outra turma, ainda não poderíamos considerar como uma reapropriação do recurso. Pois, o seu sistema de recursos e a sua base de conhecimentos ainda estariam estanciadas no Tempo (T_0).

Compreendemos que a organização mental de como pode ser usado um recurso, na fase de pré-apropriação ainda é fluida e pouco definida, ou seja, está sujeita a mudanças. Entretanto, nessa fase temos acesso ao início do processo de elaboração dos esquemas de utilização de um recurso e esses serão estabilizados ao longo do tempo.

Durante a pré-apropriação, observamos que o professor analisou o EIB com base em seus conhecimentos prévios e experiências com a balança de dois pratos em sua forma analógica, priorizando os aspectos visuais e operacionais do simulador, nesta fase, o professor apresentou, por meio do simulador EIB na tela em seu modo básico, situações que possibilitavam o trabalho com a determinação do termo desconhecido e com os princípios de equivalência. No entanto, optou por não explorar essas possibilidades durante a apropriação original. Essa escolha acabou limitando o potencial do recurso digital como ferramenta de

investigação e construção de estratégias por parte dos alunos, especialmente no que se refere à compreensão das Propriedades da Igualdade.

Sobre os procedimentos metodológicos adotados para a fase de apropriação original do EIB, destacamos que o fato do professor Tales ter decidido por usar esse recurso, grupo a grupo de estudantes, facilitou nosso acompanhamento das ações dele e dos estudantes ao manusear esse recurso. O que favoreceu a análise dos tipos e composições das orquestrações instrumentais.

Durante o uso do EIB com os estudantes, o fato de ter sido em grupo, também ocasionou a posição de alguns alunos somente como observadores, isto é, eles não chegaram a manusear o EIB. Sem entrar no mérito de discutir o que não foi realizado, destacamos que na escola, dessa turma do 6º ano, eles dispõem de tablets, o que poderia promover uma experiência diferente na gênese instrumental dos estudantes.

Além disso, apesar de o professor ter recorrido à metáfora da balança de dois pratos no ensino das Propriedades da Igualdade, observa-se que, ao resolver a ficha de exercícios e ao utilizar o Explorador da Igualdade Básico (EIB), sua abordagem das situações-problema foi, predominantemente, de natureza aritmética. Isso se refletiu no tratamento dado ao sinal de igualdade “=”, que foi compreendido e utilizado em seu sentido operacional, ou seja, como um mero indicador de resultado, em vez de uma relação de equivalência entre os dois membros da equação. Tal compreensão limita a exploração de aspectos mais amplos da álgebra, como o desenvolvimento do pensamento algébrico e da noção relacional da igualdade.

Na fase de apropriação original, foi possível perceber que, embora o professor tenha utilizado o recurso EIB com os estudantes, seu uso não representou uma ruptura significativa com sua abordagem anterior, sobre o ensino das Propriedades da Igualdade, mas sim uma continuidade, agora mediada pelo recurso digital. Além disso, durante o uso do EIB com os estudantes, percebemos que não foi realizado nenhum tipo de registro por escrito, algum tipo de tarefa elaborada para que respondessem algo acerca das simulações realizadas por eles. Sobre isso, a preocupação com o tempo de cada grupo em manusear o EIB foi um fator marcante, dada à restrição de não passar mais de duas aulas usando o simulador.

Registramos aqui, nossas inquietações sobre a articulação entre as formas de se utilizar a balança de dois pratos, em situações-problema adaptados de livros didáticos ou de sites e as formas de exploração desse recurso de forma digital. Fica em aberto, a reflexão sobre o

momento de se propor o recurso digital, se antes, durante ou depois da proposição de resolução de situações-problema envolvendo as Propriedades da Igualdade e equações.

Ademais, com base na análise desenvolvida ao longo desta dissertação, é possível concluir que a apropriação do simulador digital Explorador da Igualdade Básico (EIB) pelo professor Tales revelou tanto potencialidades quanto limitações no uso da balança de dois pratos como recurso didático no ensino das Propriedades da Igualdade. A pesquisa evidenciou que, embora o professor tenha incorporado o EIB em sua prática pedagógica, sua abordagem permaneceu centrada em uma perspectiva aritmética, limitando o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes. A ausência de uma exploração mais aprofundada dos princípios de equivalência e da noção relacional do sinal de igualdade indica que o recurso digital, apesar de suas possibilidades, não foi plenamente explorado em sua dimensão formativa. O modelo de apropriação de um recurso mostrou-se eficaz para compreender as etapas desse processo, destacando a importância de um acompanhamento mais contínuo e reflexivo da prática docente. Assim, esta pesquisa contribui para o campo da Didática da Matemática ao evidenciar a necessidade de uma formação docente que favoreça a integração crítica e significativa de recursos digitais no ensino, e aponta caminhos para futuras investigações que aprofundem a compreensão sobre os processos de apropriação e reapropriação de recursos no contexto escolar. Diante das limitações do que conseguimos tratar na presente pesquisa, como perspectivas de futuras investigações indicamos:

- Utilizar o modelo de apropriação de um novo recurso para analisar a apropriação de recursos diversos para o ensino de equações do 1º grau.
- Analisar a apropriação de outros recursos digitais e de outros temas de ensino por professores;
- Desenvolver pesquisas sobre a apropriação de recursos com professores dos anos iniciais e finais, levando em conta a especificidade da formação docente.
- Desenvolver a pesquisa com mais de um professor a fim de comparar seus diferentes processos de apropriação de um recurso.
- Promover investigações acerca da formação de professores em relação à apropriação de recursos e implicações no ensino de equações.
- Investigar o processo de reapropriação dos professores, depois de um certo tempo da apropriação original.

Por fim, esperamos que esse trabalho sirva de inspiração para outras pesquisas baseadas no modelo de apropriação de um novo recurso, bem como, para outros estudos sobre a utilização de recursos digitais e o ensino de equações.

REFERÊNCIAS

APPROPRIER. In: **LE NOUVEAU PETIT ROBERT de la langue française**. Paris: Dictionnaires Le Robert, 2006.

ARAÚJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático**. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/3947>. Acesso em: 16 jun. 2024.

ARAÚJO, C. A. S. **Ensino de equação polinomial do primeiro grau por meio do uso da balança de dois pratos**. 2022. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Bahia, 2022.

ARAÚJO, N. S. S. **Equação do 1º grau: a compreensão da equivalência nos anos iniciais**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Departamento de ciências exatas e tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus: 2020.

ALMEIDA, J. R. Álgebra Escolar na Contemporaneidade: uma discussão necessária. **EM TEIA**. Recife – PE, v. 8, n. 1, p. 1-15, 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/12004>. Acesso em: 16 abr. 2024.

ALMEIDA, M. S.; OLIVEIRA, M. E. N.; ESPÍNDOLA, E. B. M. Explorador Básico de Igualdade da plataforma digital PhET: uma análise acerca das potencialidades didáticas à luz da BNCC e do currículo de Pernambuco. **BOCEHM – Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 8, n. 23, p. 829–845, 2021. Acesso em: 6 maio. 2024.

ALMEIDA, M. S. **Relação de igualdade e a noção de equivalência: um estudo sobre a implementação de orquestrações instrumentais on-line em uma aula remota**. 2022. 77 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática)- Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2022.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BANDARRA, L. O sinal de igual: um estudo vertical. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Póvoa do Varzim. **Anais...** Póvoa do Varzim, 2011. p. 305-322. Disponível em: <https://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/17.Bandarra.pdf>. Acesso em: 31 mai. 2021.

BARBOSA, E. J. T. **Equação do primeiro grau em livros didáticos sob a ótica da teoria antropológica do didático**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.

BATISTA, C. L. Os conceitos de apropriação: contribuições à Ciência da Informação. **Em Questão**, v. 24, n. 2, p. 210-234, 2018. Disponível em: <https://www.redalyc.org/journal/4656/465655178012/html/>. Acesso em: 16 jun. 2024.

BIANCHINI, E. **Matemática** – 9º ano. 9. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

BRASIL. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA. **Portal da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)**. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/>. Acesso em: 20 nov. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/aceso-a-informacao/media/seb/pdf/d_c_n_educacao_basica_nova.pdf. Acesso em: 26 jan. 2025.

BRITO MENEZES, A. P. A. **Contrato didático e transposição didática: inter-relações entre fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do ensino fundamental**. 2006. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

CARVALHO, L. O. **O ensino de equações com a utilização de uma balança virtual que inclui a representação de números negativos**. 2023. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de São João del Rei, Campus Alto Paraopeba, 2023.

CAVALCANTI, J. D.; SANTOS, M. C. Significado do símbolo de igual “=” no contexto das funções e as concepções dos alunos. In: LIMA, A. P.A.B. *et al.* (Org.). **Pesquisas em fenômenos didáticos: alguns cenários**. Recife: Editora da UFRPE, 2013.

CHEVALLARD, Y. **A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática**. In: ALMOULOU, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (Orgs.). **A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos**. Curitiba, PR: CVR, 2018, p. 3150

CIANI, A. B. *et al.* O sinal de igual e sua utilização em sentenças matemáticas. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIV., 2017, Cascavel, **Anais...**, Cascavel, 2017, p. 1-6. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/212/138. Acesso em: 20 mar. 2024

DAMASCENA, J. S. **Evolução do sistema de recursos de licenciandas em Matemática no Programa de Bolsas de Iniciação à Docência**. 2024. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2024.

DE VAUJANY, F. X. Pour une théorie de l'appropriation des outils de gestion: Vers un dépassement de l'opposition conception-usage. **Management and avenir**, n.9, v.3, p.

109-126, 2006. Disponível em:
<https://www.cairn.info/revue-management-et-avenir-2006-3-page-109.htm#re10no10>.

PESO. In: **DICIO: Dicionário Online de Português**. Porto: 7Graus, 2024. Disponível em:
<https://www.dicio.com.br/peso/>. Acesso em: 5 abr. 2024.

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-object. **Recherches en didactique des mathématiques**, Grenoble, v. 7. n. 2, 1986. p. 5-31.

DRIJVERS, P.; DOORMAN, M.; BOON, P.; REEDIJK, A.; GRAVEMEIJER, K. The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 75, n. 2, p. 213–234, 2010.

FEITOSA, F. E. S.; GITIRANA, V.; RODRIGUES, R. S. Gênese Instrumental na interação com o Geoplano: uma experiência no PARFOR de Licenciatura em Matemática. **Educação Matemática em Revista**, v. 29, n. 82, p. 1–16, 2024. Disponível em:
<https://www.sbemrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/3382>. Acesso em: 20 dez. 2025.

FERREIRA, A. B. H. APROPRIAÇÃO. In: **Míni Aurélio** - O dicionário da língua portuguesa. 6 Curitiba: Editora Positivo Ltda, 2024, 895 p.

FIGUEIREDO, A. P. N. B.; BELLEMAIN, P. M. B.; TELES, R. A. M. Grandeza Volume: um estudo exploratório sobre como alunos do ensino médio lidam com situações de comparação. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1172-1192, dez. 2014. Disponível em:
<https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/7424/6491>. Acesso em: 27 jan. 2025.

FRANÇA, R. C. **Isolar o x, isolar o y... e agora? Recursos tecnológicos digitais como mediadores na resolução de equações do 1º grau**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Práticas de Educação Básica) – Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2019.

FUCK, R.S.; ALMEIDA, L.R.; PEREIRA, L.P. Avaliação de objetos de aprendizagem sobre equações do 1º grau: um estudo de caso com professores de matemática. **Revista Renote**, Porto Alegre, v. 15, n. 1, julho, 2017. Disponível em:
<https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/issue/view/3144>. Acesso em: 19 mar. 2024.

GAY, M. R. G.; SILVA, W. R. **Araribá Mais Matemática**. 6º ano. São Paulo: Editora Moderna, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A Conquista Matemática**. 6º ano. São Paulo: FTD, 2022.

GITIRANA, V.; LUCENA, R. Orquestração instrumental on-line: um modelo pensado a partir do ensino remoto. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 23, n. 3, p. 362-398, 2021. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/56700>. Acesso em: 20 fev. 2025.

GOMES, L. P. S.; NORONHA, C. A. Pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental: orientações e práticas de ensino e aprendizagem. **Educação & Infâncias**, Natal, v. 1, n. 1, p. 1-28, 2022. Disponível em:
<https://periodicos.ufrn.br/educacao infancia/article/view/21048/15489>. Acesso em: 10 de fev.

2024.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. **Éducation et didactique**, v.2, n.3, p.7-33, 2008.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Genèses communautaires, genèses documentaires: histoire en miroir. In: GUEUDET, G.; TROUCHE, L. **Ressources vives: le travail documentaire des professeurs en mathématiques**. Rennes: Presses Universitaires de Rennes, 2010, p. 129-145.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Étudier les interactions professeurs-ressources : questions de méthode. **Éducation & Didactique**, 2021, vol. 15, no 2, p. 141-158.

HENRIQUES, A. Abordagem Instrumental e aplicações. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.23, n. 3, p. 247-280, 2021.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. S.; FRANCO, F. M. M. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. CD-ROM.

HUMMES, V. B. **Aprendizagem significativa de equações de primeiro grau: um estudo sobre a noção de equivalência como conceito subsunçor**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol. **Educational studies in Mathematics**, v. 12, p. 317-326, 1981.

LIMA, F. A. **Conversando com o livro didático: o que está sendo explicado sobre equações de primeiro grau?** 2019. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

LIRA, F. A. L. **A apropriação por professores de matemática de jogos sobre equação do primeiro grau propostos em livros didáticos**. 2022. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2022.

LINS, R.C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 4.ed. Campinas/SP : Papirus, 1997.

LUCENA, R.; GITIRANA, V.; TROUCHE, L. Teoria da Orquestração Instrumental: um olhar para a formação docente. In: SIMPÓSIO LATINOAMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, I, Bonito, 2016. **Anais eletrônicos...** Bonito, 2016. Disponível em <http://grupoddm.pro.br/wp-content/uploads/2020/05/LUCENA-GITIRANA-TROUCHE.pdf> Acesso em: 08 jan. 2024.

MACHADO, V. M. S. **Atividades investigativas na resolução de equações do 1º grau por alunos do sétimo ano**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Acre, Rio Branco, 2019.

MARQUES, G. C. **Fundamentos de matemática I**. São Paulo: USP/Univesp/Edusp. 2014. Acesso em: 02 jan. 2025.

MATOS, E.S. P.; CAVALCANTI, D. **Algumas considerações sobre os significados do símbolo “=” na perspectiva dos alunos do 7º ano do ensino fundamental**. In: II Semana de Educação Matemática- II SEEMAT, 2010, Vitória da Conquista-BA. Anais da II SEEMAT, 2010. Disponível em: <http://www2.uesb.br/cursos/matematica/matematicavca/wpcontent/uploads/co4.pdf>. Acesso em : 23 mar. 2024.

OLIVEIRA, M. M. de. **O contrato didático: análise de contratos diferenciais dos professores de matemática em turmas de 7º ano do ensino fundamental**. 2010. 170 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. Disponível em: <http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/7483>. Acesso em: 30 jan. 2025.

OLIVEIRA, M. E. N. **Álgebra: Análise de Livros Didáticos do Ensino Fundamental**. Relatório final. Recife: UFRPE, 2020. Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC).

OLIVEIRA, M. E. N. **Relações e propriedades da igualdade no Ensino Fundamental à luz do uso de recursos digitais**. Relatório final. Recife: UFRPE, 2021. Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC).

OLIVEIRA, M. E. N.; ALMEIDA, M. S.; ESPÍNDOLA, E. B. M. Praxeologias Matemáticas: relações de igualdade e princípios de equivalência a partir do explorador básico de igualdade da plataforma digital PhET. Encontro Gaúcho de Educação Matemática. **Anais...** Disponível em: <https://wp.ufpel.edu.br/egem2021/files/2021/07/092.pdf>. Acesso em: 06 mai. 2024.

OLIVEIRA, K. I. M.; CORCHO, A. J. F. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção olimpíadas de matemática)

PEREIRA, M. G.; SILVA, R. M. L.; LOURENÇO, M. C. Estudando um objeto científico antigo de uma instituição pública baiana: Balança de Sartorius (balança analítica de dois pratos com gabinete). In: **Anais** eletrônicos do 15º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia. Florianópolis, Santa Catarina. 2016. Disponível em: https://www.15snhct.sbhc.org.br/resources/anais/12/1471268361_ARQUIVO_ArtigoCompleto-versaofinalatual-envio.pdf

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Currículo de Pernambuco**. Ensino Médio. Recife: Secretaria de Educação, 2019a.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Orientações metodológicas**. Ensino Fundamental. Recife: Secretaria de Educação, 2019b.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes. **Organizador curricular por bimestre**. Anos finais. Recife: SEE, 2019c. Disponível em: <https://portal.educacao.pe.gov.br/wp-content/uploads/2024/08/EF-Matematica.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2024.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes. **Organizador Curricular por Trimestre**. Formação Geral Básica. Matemática. Ensino Fundamental. Recife: SEE, 2025.

PESO. In: MICHAELIS: **Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa**. São Paulo: Melhoramentos, 2024. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/peso/>. Acesso em: 5 abr. 2024.

PhET Interactive Simulations. Universidade do Colorado Boulder. Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/.

PINHEIRO, P. V. **Uma proposta para o ensino e aprendizagem de equações e inequações do 1º grau através de recursos lúdicos e manipuláveis**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro, 2019.

PONTE, J.P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC, 2009. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/1371/1/JAS04102016.pdf>. Acesso em: 26 de fevereiro de 2025.

PROULX, S. Paradigmas para pensar os usos dos objetos comunicacionais. In: PROULX, S.; FERREIRA, J.; ROSA, A. P. (Org.) **Mediatização e redes digitais: os usos e as apropriações entre a dádiva e os mercados**. p. 41-58. Santa Maria: FACOS-UFSM, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/19691/mediatizacaoeredesdigitais.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 19 mai. 2024.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies : une approche cognitive des instruments contemporains**. Paris, Armand Colin, 1995.

RABARDEL, P.; BOURMAUD, G. Instruments et systèmes d'instruments. In: RABARDEL, P.; PASTRÉ, P. (dir.). **Modèles du sujet pour la conception: dialectiques activités développement**. Toulouse: Octarès, 2005. p. 211-229.

ROCHA, K. O aporte do conceito de Trajetória Documental para Análise do Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática. In: IGLIORI, S. (Org.). **Compreender o trabalho dos professores brasileiros do ensino básico: uma abordagem pelos Recursos**. São Paulo: Blucher, p. 41 -64, 2021.

ROUSSON, L. **Conception d'un jeu-situation numérique et son appropriation par des professeurs: le cas de l'enseignement de l'énumération à l'école maternelle**. 2017. Thèse (Doctorat en Sciences de l'Éducation) - Université de Lyon, Lyon, 2017.

SANTOS, A. D. **Equação do 1º grau em livros didáticos de matemática antes e após a BNCC**. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2021.

SANTOS, I. M. M. **Elementos e efeitos do contrato didático: uma análise das relações frente ao conteúdo resolução e elaboração de problemas envolvendo equações polinomiais do**

1º grau. 2023. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2023.

SANTOS, L. E. S. **As decisões didáticas de um professor de matemática sob o ponto de vista do desenvolvimento do pensamento algébrico.** 2022. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, 2022.

SILVA, R. M. **Residência pedagógica:** aproximações e distanciamentos entre as documentações do preceptor e do residente. 2021. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2021.

SILVA, G. V. S. **Noções iniciais de equações do 1º grau em livros didáticos de matemática para o ensino fundamental.** 2021. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2023.

SILVA, R. M. da. **A inserção da álgebra nos anos iniciais com ênfase no pensamento algébrico:** uma análise sob a ótica da teoria antropológica do didático. 2022. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2022. Disponível em: <https://attena.ufpe.br/handle/123456789/45692>. Acesso em: 20 fev. 2025.

SILVA, S. F. **Pensamento algébrico, relações de igualdade e simplificação de equações em um processo formativo com professoras dos anos iniciais à luz da teoria da objetivação.** Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) - Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2024.

SILVEIRA, E. **Desafios da Matemática.** São Paulo: Editora Moderna, 2022.

SQUALLI, H. Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire: un exemple de raisonnements à l'aide de concepts mathématiques. **Instantanés mathématiques**, v.39, p.4-13, 2002.

TEIXEIRA, L. A. **Superação!** Matemática – 7º ano. São Paulo: Moderna, 2022.

TRGALOVÁ, J. **Ressources numériques pour l'éducation mathématique.** Conception, évaluation, qualité et appropriation. Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Paris: ARDM, 2021. Disponível em: http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/actes_seminaire_national_de_didactique/Actes%20seminaire%20national%202021.pdf. Acesso em: 14 jan. 2024.

TRGALOVÁ, J. **Ressources numériques pour l'éducation mathématique:** conception, évaluation, qualité et appropriation (Habilitation à diriger des recherches). Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France, 2020. Disponível em: <http://hdl.handle.net/20.500.12162/6291>. Acesso em: 16 jun. 2025.

TRGALOVÁ, J.; ROUSSON, L. Model of appropriation of a curricular resource: a case of a digital game for the teaching of enumeration skills in kindergarten, **ZDM Mathematics Education**, n.49, p.769-784, 2017.

TROUCHE, L. *et al.* G. **A abordagem documental do didático**. DAD-Multilingual, 2020. Disponível em: <https://hal.science/hal-02664943v2>. Acesso em: 20 jan.2025.

TROUCHE, L. Manipulações simbólicas e aprendizagem da matemática: o caso das letras. In: MACHADO, S. C. F.; BORBA, M. C. (Org.). **A álgebra na educação básica**: problemas e perspectivas. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 117–142.

VERGNAUD, G. Repères pour une théorie psychologique de la connaissance. In MERCIER A.; MARGOLINAS, C. (ed). **Balises pour la didactique des mathématiques**. Actes de la XIIe école d'été de didactique des mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2005. p. 123-136.

VERGNAUD, G. Piaget visité par la didactique. **Intellectica**, Compiègne, n. 33, p. 107-123, 2002. Tradução de Camila Rassi, com revisão de Luca Rischbieter, Maria Lucia Faria Moro e Maria Tereza Carneiro Soares Disponível em: www.vergnaudbrasil.com. Acesso em: 20 mar. 2024.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. **Evolução das relações entre a Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo e a Didática da Matemática**. Editora: Instituto Piaget. Lisboa, 1996.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, I., 1993, Rio de Janeiro. **Anais [...]**. Rio de Janeiro: UFRJ, 1993, p. 1-26.

VERGNAUD, G. La théorie de champs conceptuels. **Recherches en Didactique de Mathématiques**, Grenoble, v. 10, n.2.3, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. **Psychologie Française**, Issy les Moulineaux, n. 30, p. 245-252, 1985. Tradução de Maria Lucia Faria Moro, com revisão de Luca Rischbieter e Maria Tereza Carneiro Soares. Disponível em: www.vergnaudbrasil.com; Acesso em: 15 mar. 2025.

XAVIER NETO, A.L.; SILVA, M. J. F.; TROUCHE, L.A construção de atividades para o ensino de sequencias numéricas: Uma análise pela lente da Abordagem Documental do Didático. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.21, n.5, pp. 300-314, 2019.

ZUIN, E. S. L. Balanças: as rotas de uma herança ancestral. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém, v. 45, e2023006, 2023. Disponível em: <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/545>. Acesso em: 02 de fev.

APÊNDICE A - Questionário inicial para professores de matemática do 6º ano do ensino fundamental

Seção 1 de 3

Questionário - Pesquisa de Mestrado

B *I* U ↺ ↻

Solicitamos vossa colaboração em responder este questionário sobre a apropriação de recursos digitais por professores de Matemática para o ensino de relações de igualdade.

Trata-se de uma pesquisa de mestrado do Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências (PPGEC) da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Este questionário é destinado apenas para professores de Matemática atuantes no 6º ano de escolas públicas da rede municipal de Itapissuma- PE.

Asseguramos que todas as informações fornecidas serão tratadas com absoluto sigilo e respeito à privacidade, conforme as diretrizes éticas. O tempo de resposta é de 5 a 10 minutos. Agradecemos antecipadamente pela sua valiosa contribuição.

ATENÇÃO:
Antes de prosseguir, é imprescindível que realize a leitura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, disponível no link a seguir: [Clique aqui](#).

Tendo em vista os itens apresentados no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, eu, de ^{*} forma livre e esclarecida, manifesto meu consentimento para participar da pesquisa.

☐ Aceito participar da pesquisa

☐ Não aceito participar da pesquisa

Formação docente: Graduação * ☐ Licenciatura em Matemática ☐ Bacharelado em Matemática ☐ Outros...
Em que ano você se formou como professor? * Texto de resposta curta
Formação docente: Pós-graduação * ☐ Especialização ☐ Mestrado ☐ Doutorado
Indique seus cursos de pós-graduação: * Texto de resposta longa
*** Há quanto tempo você trabalha com turmas do 6º do Ensino Fundamental? * Texto de resposta longa

Qual o seu vínculo com a rede de ensino de Itapissuma? *

☐ Efetivo

☐ Contrato CLT

...

Você possui outros vínculos empregaticios como professor?

Sugestões: Talvez

☐ Sim X

☐ Não X

☐ Adicionar opção ou adicionar "Outro"

  Obrigatória ☒ 

Há quanto tempo você atua como professor? *

Texto de resposta curta

.....

Você conhece a plataforma Physics Education Technology (PhET)? *

☐ Sim

☐ Não

Você gostaria de participar da segunda etapa desta pesquisa que será uma entrevista? *

☐ Sim

☐ Não

...

Se você deseja participar da entrevista, informe seu contato de telefone. *

Texto de resposta curta

.....

APÊNDICE B - ENTREVISTA COM O PROFESSOR DE MATEMÁTICA SOBRE A
HABILIDADE DA BNCC: EF06MA14

1. Em que bimestre você trabalha, no 6º ano do Ensino Fundamental, a habilidade da BNCC: EF06MA14: Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas ?
2. Como você costuma preparar suas aulas para o trabalho com a habilidade EF06MA14? Que recursos você costuma utilizar para suas aulas sobre este tema?
3. Quais dificuldades dos estudantes você percebe no desenvolvimento da habilidade EF06MA14?
4. Você conhece ou já utilizou algum recurso digital para o ensino dos temas da habilidade EF06MA14? Vem trabalhando a ideia com eles desde o primeiro dia de aula a partir da utilização de jogos didáticos

APÊNDICE C - ENTREVISTA COM PROFESSOR SOBRE O RECURSO EXPLORADOR
DA IGUALDADE BÁSICO: FASE DE PRÉ-APROPRIAÇÃO

1. O que você achou do simulador?
2. Você teve alguma dificuldade para entender as ferramentas do simulador?
3. Quais das ferramentas você achou mais interessante?
4. Você utilizaria esse(s) simulador(es) em sala de aula?
5. Em que momento você utilizaria esse(s) simulador(es)?
6. De que forma?

APÊNDICE D - ENTREVISTA COM PROFESSOR SOBRE O RECURSO EXPLORADOR
DA IGUALDADE BÁSICO : PÓS APROPRIAÇÃO ORIGINAL

1. Porque você desistiu de usar o projetor? E, fez grupo por grupo o uso do simulador pelo seu notebook?
2. Porque você só trabalhou com as simulações com animais do modo básico em um único grupo?
3. Você acha que o uso do recurso pelos alunos ocorreu de acordo com o que você planejou? Houve algo inesperado no uso do recurso? Como você lidou com isso?
4. Você percebeu se os alunos estavam engajados com o recurso? O que deu essa impressão?
5. O recurso ajudou os alunos a compreenderem o conteúdo? Por quê?
6. Houve dificuldades por parte dos alunos em interagir com o recurso? Se sim, quais foram?
7. Se você pudesse voltar atrás, mudaria algo no uso desse recurso?
8. Esse recurso será usado novamente em turmas do 6º ano? Por quê?

ANEXO A - Slides sobre o Princípio aditivo e multiplicativo do professor Tales

Aplicação dos princípios aditivo e multiplicativo e determinação do elemento na igualdade.

Propriedades da igualdade: na igualdade, adicionando ou subtraindo a mesma quantidade em ambos lados a igualdade permanece constante.

Observação: na igualdade seguem as mesmas regras a multiplicação e divisão.

Problema 1: Um estudante do 6º ano quer saber o valor do número que está escondido. Qual é esse número?

$$36 + \# = 51$$

Solução:

$$36 + \# = 51$$

$$36 + \# - 36 = 51 - 36$$

= 15

Problema 2: O número que falta para manter a igualdade na figura abaixo é

$$\# - 5 = 20$$

Solução:

$$\# - 5 = 20$$

$$\# - 5 + 5 = 20 + 5$$

$$\# = 25$$

Problema 3: Observe o equilíbrio da balança e encontre o valor de x:



Solução:

$$x + x + 100 = 500$$

$$x + x = 400$$

$$x = 200$$

Problema 4: Encontre o valor x, a partir da seguinte balança:



Solução:

$$x + x + x + x + 5 = x + x + x + 5 + 5 + 5$$

$$4x + 5 = 3x + 15$$

$$4x + 5 - 5 = 3x + 15 - 5$$

$$4x = 3x + 10$$

$$4x - 3x = 3x - 3x + 10$$

$$x = 10$$

ANEXO B



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO - PRPG
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS - PPGE

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
(PARA MAIORES DE 18 ANOS OU EMANCIPADOS)

Convidamos o (a) Sr. (a) para participar como participante da pesquisa A APROPRIAÇÃO DE RECURSOS DIGITAIS PARA O ENSINO DE RELAÇÕES DE IGUALDADE POR PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL, que está sob a responsabilidade do (a) pesquisador (a) Maria Eduarda Nunes de Oliveira, endereço Avenida Leopoldino Canuto de Melo, 1018, CEP 53210-250, telefone (81) 97507-5370, e-mail eduarda.noliveira@ufrpe.br e está sob a orientação de Elisângela Bastos de Melo Espíndola, Telefone: (81) 99541-1260, e-mail elisangela.melo@ufrpe.br.

Todas as suas dúvidas podem ser esclarecidas com o responsável por esta pesquisa. Apenas quando todos os esclarecimentos forem dados e você concorde com a realização do estudo, pedimos que rubriche as folhas e assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma via lhe será entregue e a outra ficará com o pesquisador responsável.

Você estará livre para decidir participar ou recusar-se. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema, desistir é um direito seu, bem como será possível retirar o consentimento em qualquer fase da pesquisa, também sem nenhuma penalidade. Esta pesquisa está sendo realizada em ambiente virtual e sua participação é voluntária. Para garantir a transparência e a preservação dos seus direitos, recomendamos que você guarde uma cópia deste documento eletrônico do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) ou do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) em seus arquivos pessoais.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

- **Descrição da pesquisa:** Esta pesquisa tem como objetivo analisar como professores de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental da Rede Municipal de Itapissuma - PE se apropriam dos simuladores "Explorador de Igualdade: Básico" e "Explorador de Igualdade" da plataforma Plataforma Physics Education Technology (PheT) no ensino de relações de igualdade. A

justificativa se baseia na necessidade de integrar tecnologias digitais no ensino de Álgebra, alinhando-se aos objetivos da BNCC. O estudo busca investigar os processos de instrumentação e instrumentalização dessas ferramentas pelos professores, além de analisar as habilidades do 3º ao 7º ano da BNCC trabalhadas com os simuladores. A coleta de dados será feita em duas etapas: a primeira envolverá um levantamento documental das simulações e sua relação com as habilidades da BNCC; a segunda utilizará a metodologia reflexiva, acompanhando as práticas pedagógicas dos professores. O acompanhamento será realizado com a análise dos recursos utilizados pelos professores em sua prática, entrevistas semiestruturadas e o plano de aula desenvolvido para o ensino da habilidade EF06MA14. Não haverá grupo controle ou placebo, mas será possível comparar as práticas com e sem o uso das ferramentas digitais para avaliar seu impacto na aprendizagem.

- **Esclarecimento do período de participação do participante na pesquisa, início, término e número de visitas para a pesquisa:** A participação do participante da pesquisa terá início em 03/04/2025 e término em 28/04/2025. Durante esse período, o participante da pesquisa participará de cinco (4) entrevistas semiestruturadas realizadas por meio do Google Meet, que ocorrerão de acordo com o cronograma estabelecido para a realização da pesquisa, com foco na análise da apropriação dos simuladores "Explorador de Igualdade: Básico" e "Explorador de Igualdade" da plataforma PhET pelos professores de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental.
- **Procedimentos para coleta de dados através de questionário:** a pesquisa será realizada por meio de um questionário on-line, constituído por 12 perguntas. Estima-se que você precisará de aproximadamente 10 minutos para responder o questionário que será enviado a você por aplicativo de mensagem (Whatsapp).
- **Procedimentos para coleta de dados através de entrevista:** A pesquisa será realizada através de entrevista on-line com aplicativo de videochamada (Google-meet). Serão 4 entrevistas ao total, com a duração de 15 a 30 minutos cada, estas entrevistas serão gravadas. Para garantir a qualidade da gravação, você deve estar em local silencioso, com boa luminosidade, posicionar a câmera permitindo a visualização da sua face.
- **RISCOS diretos para o participante da pesquisa:** Ao participar desta pesquisa, você poderá, em alguns momentos, experimentar alguns desconfortos ou preocupações. É possível que sinta algum desconforto emocional caso não consiga responder a algum questionamento ou se sentir inseguro em relação ao seu uso dos recursos digitais, especialmente durante a análise dos recursos utilizados em sua prática pedagógica. Também pode ocorrer cansaço físico devido à dedicação extra que a participação na pesquisa pode exigir, como responder a questionários, participar de entrevistas ou adaptar suas aulas ao uso das novas ferramentas tecnológicas. Além disso, você poderá sentir receio de ser gravado durante as apresentações de seus planos de aula, que ocorrerão por meio do Google Meet, o que pode gerar ansiedade sobre como sua prática será interpretada ou analisada. Para minimizar esses riscos e garantir que sua participação seja tranquila, será

realizado um momento esclarecedor antes de iniciar qualquer uma das atividades propostas. Nesse momento, explicaremos detalhadamente como cada etapa da pesquisa ocorrerá, o que será solicitado de você e como os dados coletados serão tratados de maneira confidencial. Será enfatizado que todas as informações serão usadas exclusivamente para fins acadêmicos e de pesquisa, respeitando o anonimato e a privacidade de todos os participantes. O objetivo é garantir que você se sinta confortável e seguro ao longo de todo o processo. Além disso, conforme a Carta Circular nº 1/2021 emitida pela CONEP, intitulada 'Orientações para procedimentos em pesquisas com qualquer etapa em ambiente virtual', item 1.2.1, serão considerados os riscos inerentes ao ambiente virtual e as medidas para mitigá-los. Para isso, serão adotadas práticas como o uso de antivírus atualizado, proteção de arquivos e pastas com senhas, firewall e outras ferramentas de segurança digital. Essas ações visam proteger tanto os dados coletados quanto a integridade dos dispositivos utilizados nas atividades de pesquisa. Você terá o direito de não responder a qualquer questionamento, interromper sua participação ou até mesmo desistir da pesquisa a qualquer momento, sem que isso traga qualquer prejuízo ou consequências para sua relação com a pesquisa. A participação é completamente voluntária, e você não será pressionado a continuar caso não se sinta à vontade ou se perceba que as atividades estão afetando seu bem-estar. O compromisso é com o respeito à sua liberdade e à sua privacidade, garantindo que a sua experiência na pesquisa seja positiva, transparente e livre de qualquer pressão ou desconforto.

- **BENEFÍCIOS diretos e indiretos para os participantes da pesquisa:** Ao participar desta pesquisa, haverá benefícios tanto para o desenvolvimento profissional quanto para a melhoria das práticas pedagógicas dos professores participantes. Eles poderão enriquecer seus conhecimentos sobre o uso de recursos digitais no ensino de Matemática, especificamente no que se refere ao ensino de relações de igualdade e equações do 1º grau. Além disso, poderão refletir sobre a aplicação de tecnologias no ambiente escolar e como elas podem potencializar a aprendizagem dos alunos, além de contribuir para a sua própria formação contínua enquanto educador. Dessa forma, ao utilizar os recursos da plataforma PhET, os participantes poderão aprimorar suas estratégias pedagógicas, conhecendo novas ferramentas digitais que podem ser incorporadas ao seu cotidiano escolar. Essa experiência pode ajudá-los a diversificar seu ensino, proporcionando aos alunos uma abordagem mais interativa e dinâmica, o que pode facilitar a compreensão de conceitos matemáticos, como as equações do 1º grau.

Todas as informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos participantes da pesquisa, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa como gravações, entrevistas e filmagens ficarão armazenados em um computador pessoal, sob a responsabilidade de Maria Eduarda Nunes de Oliveira, no endereço acima informado, pelo período mínimo 5 anos.

Nada lhe será pago e nem será cobrado para participar desta pesquisa, pois a aceitação é voluntária, mas fica também garantida a indenização em casos de

danos, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extra-judicial. Se houver necessidade, as despesas para a sua participação serão assumidas pelos pesquisadores (ressarcimento de transporte e alimentação), assim como será oferecida assistência integral, imediata e gratuita, pelo tempo que for necessário em caso de danos decorrentes desta pesquisa.

Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa – CEP/UFRPE no endereço: Rua Manoel de Medeiros, S/N Dois Irmãos – CEP: 52171-900 Telefone: (81) 3320.6638 / e-mail: cep@ufrpe.br (1º andar do Prédio Central da Reitoria da UFRPE, ao lado da Secretaria Geral dos Conselhos Superiores). Site: www.cep.ufrpe.br.

(assinatura do pesquisador)