



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO - UFRPE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – PPGEC

FELIPE ALEXANDRE DE LIMA LIRA

A APROPRIAÇÃO POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA DE
JOGOS SOBRE EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU PROPOSTOS EM
LIVROS DIDÁTICOS

RECIFE-PE

2022

FELIPE ALEXANDRE DE LIMA LIRA

**A APROPRIAÇÃO POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA DE
JOGOS SOBRE EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU PROPOSTOS EM
LIVROS DIDÁTICOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação no Ensino das Ciências e Matemática, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, em cumprimento à uma exigência parcial para obtenção do grau de Mestre em Ensino das Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Elisângela Bastos de Melo Espindola

RECIFE- PE

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L768a

Lira, Felipe Alexandre de Lima

A APROPRIAÇÃO POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA DE JOGOS SOBRE EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU PROPOSTOS EM LIVROS DIDÁTICOS / Felipe Alexandre de Lima Lira. - 2022.
118 f. : il.

Orientadora: Elisangela Bastos de Melo Espindola.
Inclui referências.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Recife, 2022.

1. Equação do 1º Grau. 2. Equações Equivalentes. 3. Jogos Matemáticos. 4. Livro Didático. 5. Modelo de apropriação de um novo recurso. I. Espindola, Elisangela Bastos de Melo, orient. II. Título

CDD 507

FOLHA DE APROVAÇÃO

FELIPE ALEXANDRE DE LIMA LIRA

A APROPRIAÇÃO POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA DE JOGOS SOBRE EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU PROPOSTOS EM LIVROS DIDÁTICOS

Orientadora: Prof^ª. Dra. Elisângela Bastos de Melo Espindola

Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Defendida em 31 de março de 2022.

Banca Examinadora

Prof^ª. Dra. Elisângela Bastos de Melo Espindola

Presidente / Orientadora

Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade

Examinador interno

Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

Prof^ª Dra. Jana Trgalová

Examinadora externa

Instituição: Université Claude Bernard - Lyon 1

Prof^ª. Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis

Examinadora externa

Instituição: Universidade Federal da Paraíba - UFPB

RECIFE- PE

2022

Dedico este trabalho à minha mãe, **Maria Silvânia** (*in memoriam*), uma mulher de fé e comprometimento, com um coração gigante, que procurava sempre ajudar o próximo da melhor forma e fez de tudo pela educação dos seus filhos; e ao meu pai, **José Durval**, homem honesto, que, do seu jeito humilde, torce sempre pelo meu sucesso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela constante proteção em minha vida, por ter me dado forças de concluir este trabalho em tempos tão difíceis, por todos os momentos felizes vividos e pela experiência adquirida após superar as dificuldades encontradas.

Agradeço à minha orientadora e amiga Elisângela Espíndola, pela confiança, pelo incentivo depositado em todos os momentos dessa caminhada e pela amizade que construímos desde a época da graduação, sobretudo pelos ensinamentos, a dedicação e a disponibilidade. Pela paciência nas orientações, por sempre motivar e respeitar, com muita sabedoria, meu processo de construção, e, principalmente, por não ter desistido de mim.

À professora Cibele Assis e ao professor Vladimir Andrade, por participarem da qualificação e da defesa desta dissertação. Aos Professores Luc Trouche (École Normale Supérieure de Lyon) e Jana Trgalová (Université Claude Bernard - Lyon 1), que passaram valiosas contribuições para minha formação e para a construção desse trabalho.

À UFRPE, bem como à coordenação, ao corpo docente e aos funcionários do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

À Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco - FACEPE, pelo financiamento dado a esta pesquisa.

Aos professores sujeitos desta pesquisa, bem como aos gestores de instituições escolares, que permitiram a realização da nossa investigação, abrindo as portas da escola.

Aos amigos e amigas da turma de mestrado, Jeandson Moura, Jessica Diniz, Climéria Ramalho, Samuel Ribeiro, Belchior Júnior. Agradeço por todos os momentos compartilhados, mesmo que de forma remota, foram momentos de muita aprendizagem, proporcionados pela convivência nas disciplinas. Além disso, foram cruciais para a construção de amizades que quero levar para toda a vida.

À minha irmã Lívia, por sempre incentivar a minha carreira como professor e pesquisador, e por sempre estar ao meu lado em todos os momentos da minha vida.

Por fim, agradeço a todos os meus familiares, meus amigos e minhas amigas que sempre ficam felizes com minhas conquistas; não citarei os nomes para não cometer a indelicadeza de deixar alguém de fora. Agradeço a compreensão da minha família que suportou a minha distância e por vezes meu mau humor, pois em vários momentos estive ausente não apenas fisicamente, mas também mentalmente.

A todos os aqui citados, minha eterna *GRATIDÃO*.

“E quando você menos espera a vida vai lá e te surpreende.”

(Clarice Lispector)

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de analisar a apropriação de professores de matemática sobre o uso de jogos para o ensino de Equação do 1º grau propostos em livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental. Tomamos como referência o modelo de apropriação de um novo recurso, estruturado em três fases: pré-apropriação, apropriação original e reapropriação. Esse modelo está ancorado na Abordagem Instrumental, Abordagem Documental do Didático e na Orquestração Instrumental, além de conhecimentos profissionais docentes. Desenvolvemos a pesquisa em duas etapas: na primeira etapa, realizamos uma pesquisa documental em onze livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental, de coleções aprovadas no vigente Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), com a finalidade de identificar e analisar nesses LD a organização matemática dos jogos sobre equação do 1º grau à luz da Teoria Antropológica do Didático; na segunda etapa, por meio da metodologia de investigação reflexiva, analisamos os processos de pré-apropriação e de apropriação original do Jogo das Equações Equivalentes, escolhido dentre os outros, por uma professora e por um professor de Matemática atuantes nos anos finais do Ensino Fundamental de duas escolas da Rede Municipal do Recife- PE. Nos resultados, destacamos a análise de quatro jogos sobre Equação do 1º grau presentes nos LD: na Coleção Teláris, o Jogo das Equações Equivalentes; Quebra-cabeça das Equações e Jogo das Equações; na Coleção Araribá Mais Matemática, o Jogo de Equações. Ademais, as diferenças e similaridades nos processos de apropriação dos professores, em termos de sistemas de recursos, instrumentação e instrumentalização, conhecimentos profissionais e orquestrações instrumentais previstas e efetivas para a implementação do jogo das Equações Equivalentes em sala de aula.

Palavras-chave: Equação do 1º Grau. Equações Equivalentes. Jogos matemáticos. Livro didático. Modelo de apropriação de um novo recurso.

ABSTRACT

This work aims to analyze the appropriation of mathematics teachers regarding the use of games to teach first-degree equations proposed in books for the 7th grade of Secondary School. We take as reference the appropriation model of a new resource, structured in three phases: pre-appropriation, original appropriation, and reappropriation. This model is based in the Instrumental approach, Documental approach, and in the Instrumental orchestration, besides professional teaching knowledge. We developed the research into two stages: in the first stage, we carried out a documentary research in eleven books for the 7th grade of secondary school, these were approved in the current Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) (National Textbook program which a book needs to be approved in Brazil), in order to analyze these books, the mathematical organization of the games for the first-degree equation according to anthropological theory of didactics; in the second stage, through the reflexive investigation methodology, we analyzed the pre-appropriation processes and the original appropriation from Equivalent Equation games, chosen among others, by two Mathematics teachers who teach actively in two boarding secondary schools in Recife-PE. In the results, we highlight the analysis of four games about first-degree equation present in a collection called Teláris, Equivalent Equation Game; Equation Game and Puzzle in Araribá collection, and Mais Matemática, the Equation Game. Moreover, the differences and similarities in teachers' appropriation games, in terms of resource systems, instrumentation, and instrumentalization, professional knowledge and instrumental orchestration foreseen and effective for the implementation of the Equivalent Equation game in the classroom.

Keywords: First-degree equation. Equivalent Equations. Mathematical games. Textbook. Appropriation model of a new resource.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Esquema da gênese instrumental.....	18
Figura 2 - Esquema da gênese documental.....	20
Figura 3 - Modelo de apropriação de um novo recurso pelo professor	27
Figura 4 - Domínios do conhecimento matemático para o ensino.....	29
Figura 5 - Organização do Capítulo 4 – Expressões algébricas e Equação do 1º grau.....	40
Figura 6 - Jogo das Equações Equivalentes (TAD).....	40
Figura 7 - Tecnologia associada à τ_1 no <i>Jogo das Equações Equivalentes</i> - LD da coleção Teláris.....	41
Figura 8 - Tecnologia associada à τ_2 no <i>Jogo das Equações Equivalentes</i> - LD da coleção Teláris.....	41
Figura 9 - Jogo das Equações (TAD).....	42
Figura 10 - Tecnologia associada à τ_3 em torno do <i>Jogo das Equações</i> - LD da coleção Teláris.....	43
Figura 11 - Tecnologia associada à τ_4 em torno do <i>Jogo das Equações</i> - LD da coleção Teláris.....	43
Figura 12 - Jogo Quebra-cabeça das Equações (TAD).....	44
Figura 13 - Organização do Capítulo 7 – Equações e Inequações do 1º grau.....	45
Figura 14 - Jogo das Equações (TAD).....	45
Figura 15 - Tecnologia associada à τ_3 em torno do <i>Jogo de Equações</i> - LD da coleção Araribá.....	46
Figura 16 - Trajetória documental da professora Luzia (2013-2016)	47
Figura 17 - Trajetória documental da professora Luzia (2017-2021)	48
Figura 18 - Representação Esquemática do Sistema de Recursos de Luzia	49
Figura 19 - Quebra-cabeça das Equações (Luzia)	50
Figura 20 - Jogo das Equações (Luzia).....	51
Figura 21 - Jogo de Equações (Luzia).....	52
Figura 22 - Jogo das Equações Equivalentes (Luzia).....	53
Figura 23 - Texto didático - Plano de estudo, 9º ano, 2ª semana do ensino remoto.....	54
Figura 24 - Ficha de exercício para revisão do tema - aulas presenciais (9º ano)	55
Figura 25 - OIC - Demonstração Técnica (Luzia).....	59
Figura 26 - OIC - Explicação pela professora (EP) (Luzia).....	59

Figura 27 - OIC - Discussão entre os atores (DA) - G1. Com três alunas, G2. Com uma aluna e dois alunos e G3. Com três alunas e um aluno (Luzia).....	60
Figura 28 - OII - Trabalho e Acompanhamento e OIC - Orientação e Explicação (Luzia)....	61
Figura 29 - OIC - Orientação e Explicação e OIC - Discussão entre os atores (DA)(Luzia).....	62
Figura 30 - OIC - Sherpa e OIC - Discussão entre os atores (DA)(Luzia).....	62
Figura 31 - Trajetória documental do professor José.....	66
Figura 32 - Representação Esquemática do Sistema de recursos de José	67
Figura 33 - Jogo Quebra-cabeça das Equações (José).....	69
Figura 34 - Jogo das Equações (José).....	69
Figura 35 - Jogo de Equações (José).....	70
Figura 36 - Texto didático - Plano de estudo, 7º ano, 17ª semana do ensino remoto.....	71
Figura 37 - Jogo das Equações Equivalentes (José).....	72
Figura 38 - Foto sobre a aula - Raiz de uma equação do 1º grau.....	73
Figura 39 - Ficha de exercício para revisão do tema - aulas presenciais (7º ano)	73
Figura 40 - OIC - OE com uso de pincéis (José).....	77
Figura 41 - OIC - OE com uso do livro didático (José).....	83
Figura 42 - OII - Trabalho e Acompanhamento (José).....	84
Figura 43 - OIC - Orientação e Explicação - quadro branco (José).....	85
Figura 44 - OIC - Demonstração técnica (DT) (José).....	85
Figura 45 - OIC - Discussão entre atores (DA) (José).....	86
Figura 46 - OII - Trabalho e Acompanhamento (TA) e OIC - Orientação e Explicação (OE) (José).....	87
Figura 47 - OI efetivas de Luzia e José	94

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Análise da Corrida ao 625.....	07
Quadro 2 - Comparação entre os resultados esperados e obtidos na atividade.....	09
Quadro 3 - Recursos utilizados nos artigos sobre a gênese documental.....	11
Quadro 4 - Momentos didáticos na TAD	25
Quadro 5 - Momentos didáticos e situações profissionais do professor.....	25
Quadro 6 – Bloco prático-técnico do Jogo das Equações Equivalentes (LD da Teláris)	41
Quadro 7 – Bloco prático-técnico do Jogo das Equações (LD da Teláris)	43
Quadro 8 – Síntese da análise dos jogos nos LD.....	46
Quadro 9 – Organizações matemáticas – saber ensinado – Profa Luzi	55
Quadro 10 – Momentos didáticos e OI previstas na fase de pré – apropriação do jogo (Luzia)	57
Quadro 11 - Organização matemática - saber ensinado - Prof. José	74
Quadro 12 – Momentos didáticos e OI previstas na fase de pré – apropriação do jogo (José)	75
Quadro 13 - Modificações nas regras do jogo das equações equivalentes na fase de pré apropriação por Luzia e José.....	86
Quadro 12 – Modificações nas regras do jogo das equações equivalentes na fase apropriação original por Luzia e José.....	86
Quadro 13 – Conhecimentos de Luzia e José.....	87

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	04
1.1 O tema equação do 1º grau em livros didáticos.....	05
1.2 Pesquisas acerca do uso de jogos sobre Equação do 1º grau.....	07
1.3 O uso de livros didáticos à luz da ADD.....	11
1.4 Estudos sobre jogos matemáticos à luz da ADD e da noção de orquestração instrumental.....	13
1.5 OBJETIVOS DA PESQUISA.....	14
1.6 APRESENTAÇÃO DOS CAPÍTULOS.....	15
2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	16
2.1 A ABORDAGEM INSTRUMENTAL.....	16
2.1.1 A gênese instrumental.....	17
2.2 A ABORDAGEM DOCUMENTAL DO DIDÁTICO.....	19
2.2.1 A gênese documental.....	20
2.3 A TEORIA DA ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL.....	21
2.3.1 Tipos de orquestrações instrumentais.....	23
2.3.2 As orquestrações instrumentais e as praxeologias didáticas e matemáticas.....	24
2.4 MODELO DE APROPRIAÇÃO DE UM NOVO RECURSO POR UM PROFESSOR.....	26
2.4.1 Considerações sobre o conceito de apropriação.....	26
2.4.2 Os elementos do modelo de apropriação de um novo recurso.....	27
2.4.3 O conhecimento matemático para o ensino.....	29
3 PERCURSO METODOLÓGICO.....	32
3.1 PRIMEIRA ETAPA.....	32
3.1.1 Levantamento dos jogos sobre Equação do 1º Grau em livros didáticos.....	32
3.2 SEGUNDA ETAPA.....	33
4 RESULTADOS.....	39
4.1 ANÁLISE DOS JOGOS SOBRE EQUAÇÃO DO 1º GRAU NOS LIVROS DIDÁTICOS.....	39

4.1.1 LD da Coleção Teláris	39
4.1.2 LD da Coleção Araribá Mais Matemática.....	44
4.2 ANÁLISE DA APROPRIAÇÃO DA PROFESSORA LUZIA DOS JOGOS SOBRE EQUAÇÃO DO 1º GRAU.....	47
4.2.1 A professora Luzia e sua relação com os jogos matemáticos.....	47
4.2.2 A pré-apropriação do Jogo das Equações Equivalentes pela professora Luzia.....	50
4.2.3 A apropriação original do jogo pela professora Luzia.....	58
4.2.4 A pós-aplicação do jogo em sala de aula por Luzia.....	63
4.3 ANÁLISE DA APROPRIAÇÃO DO PROFESSOR JOSÉ DOS JOGOS SOBRE EQUAÇÃO DO 1º GRAU.....	66
4.3.1 O professor José e sua relação com os jogos matemáticos.....	66
4.3.2 A pré-apropriação do Jogo das Equações Equivalentes pelo professor José.....	68
4.3.3 A apropriação original do jogo pelo professor José.....	77
4.3.4 A pós-aplicação do jogo em sala de aula por José.....	82
4.5 A APROPRIAÇÃO DO JOGO DAS EQUAÇÕES EQUIVALENTES POR LUZIA E JOSÉ: SIMILARIDADES E DIFERENÇAS.....	84
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	90
REFERÊNCIAS	93

1 INTRODUÇÃO

A motivação deste trabalho surgiu a partir de um projeto de pesquisa desenvolvido no Programa de Iniciação Científica (PIC), no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), sobre o trabalho documental docente e a análise do uso de jogos para o ensino de Matemática.

No PIC-UFRPE, realizamos um levantamento sobre os jogos matemáticos propostos em coleções de livros didáticos do Ensino Médio, aprovados no Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) (BRASIL, 2018) e suas possibilidades de uso em sala de aula. Dentre os resultados da referida pesquisa, chamou-nos a atenção às adaptações e modificações engendradas por três professores de Matemática, para que pudessem usar em sala de aula os jogos: “Tiras de Propriedades para Funções” (SMOLE; DINIZ, 2014) e “Família de Funções” (PAIVA, 2015); ou seja, cada um dos três professores, colaboradores da pesquisa, apresentou diferentes modificações na versão original desses jogos, quanto às regras, peças, formas de organização dos alunos ou o momento de inserção do jogo na sequência de ensino do tema “Funções” (ESPINDOLA; LIRA, 2018). Dadas essas circunstâncias, nos interessamos em aprofundar uma pesquisa sobre como os professores utilizam os jogos matemáticos propostos em livros didáticos (LD).

No presente trabalho, destacamos que a escolha em investigar jogos sobre o tema Equação do 1º grau surgiu, em parte, pelo enquadramento da nossa pesquisa no projeto intitulado “*Trabalho documental docente e orquestrações instrumentais em aulas sobre o campo algébrico*”, financiado pela Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE); e, de outra parte, pela compreensão que temos da escassez de estudos sobre a proposição de jogos nos LD atuais do 7º ano do Ensino Fundamental, sobre Equação do 1º grau, bem como a utilização desses jogos pelos professores de Matemática.

Vale ressaltar que os LD do recente PNLD 2020 se inscrevem no conjunto daqueles que, inicialmente, tiveram que se adequar às recentes orientações curriculares da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018), na qual se reforça a importância dos jogos matemáticos, além de malhas quadriculadas, ábacos, calculadoras, planilhas eletrônicas, softwares de geometria dinâmica e história da Matemática, como recursos didáticos e materiais propícios a “despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática” (BRASIL, 2018, p. 298). Por isso, compreendemos que o uso desses recursos nos remete ao trabalho do professor, especialmente em suas atividades de planejamento didático

dentro e fora da sala de aula. Dessa forma, almejamos estudar como os jogos sobre Equação do 1º Grau são propostos em LD do 7º ano do EF e como esses são apropriados pelos professores de Matemática, seja na fase de planejamento para sua utilização, bem como no seu uso efetivo em sala de aula.

Em busca de respostas sobre as referidas questões, apresentamos neste capítulo um breve panorama de pesquisas que deram suporte à construção da problemática do nosso trabalho, tais como aquelas desenvolvidas acerca do LD sobre o tema Equação do 1º Grau; o uso de jogos sobre Equação do 1º Grau; o uso do LD e o uso de jogos matemáticos à luz da Abordagem Documental do Didático (ADD).

1.1 O tema equação do 1º grau em livros didáticos

O tema Equação do 1º grau tem sido objeto de diversas pesquisas nos LD aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Por exemplo, Nogueira (2008), investigou a introdução formal da Álgebra nos LD da 6ª série do Ensino Fundamental, no PNLD 2008. Diante disso, utilizamos como referencial teórico-metodológico a Teoria Antropológica do Didático (TAD), para analisar as organizações matemáticas e didáticas deste tema.

Como resultado, verificou-se que, nas três coleções analisadas¹, os tipos de tarefas principais se referem à resolução de equações e à técnica principal, que são análogas à balança em equilíbrio. Considera-se que a escolha por trabalhar a resolução de equações e apresentar as Equações do 1º grau por meio da resolução de situações - problema é comum na introdução da Álgebra no Ensino Fundamental. Além disso, dentre os tipos de tarefas auxiliares, a que demanda a transcrição da linguagem natural para a linguagem algébrica possui uma representatividade notável em todos os manuais, o que indica que este procedimento é bastante valorizado na educação algébrica.

Araújo (2009) buscou caracterizar e comparar as transposições didáticas realizadas na França e no Brasil sobre o ensino de equações do 1º grau com uma incógnita. Assim, à luz da TAD, identificou e analisou as praxeologias existentes, em LD de Matemática do Ensino Fundamental em cada um dos países, em torno do tema “Resolução de Equações do 1º Grau

¹ A saber: *Novo Praticando Matemática*; *Tudo é Matemática*; *Matemática - Hoje é Feita Assim*.

com uma Incógnita”); ao analisar dois LD da França² e dois LD do Brasil³, o autor constatou que:

Nos dois países, o estudo das equações aparece implicitamente nos livros didáticos como uma ferramenta para resolver problemas. [...] No que concerne à evolução do trabalho com equações, nos livros didáticos analisados da França a resolução de equações do 1º grau é introduzida na classe de cinquième (7º ano) e prossegue nos volumes das classes de quatrième (8º ano) e troisième (9º ano). É na classe de quatrième que se concentra praticamente todo o trabalho de exploração dos diferentes subtipos de tarefas, bem como de elaboração e sistematização das técnicas. No Brasil, o estudo de resolução de equações do 1º grau é introduzido no volume do 6º ano, essencialmente desenvolvido no volume do 7º ano e retomado nos volumes de 8º e 9º anos. Logo, podemos concluir que os alunos brasileiros iniciam um ano mais cedo o estudo de resolução de equação do 1º grau (ARAÚJO, 2011, p. 5-6).

Também utilizando a TAD, Barboza (2011) analisou dois LD do 7º ano do Ensino Fundamental de duas coleções aprovadas no PNLD de 1999, 2002, 2005, 2008 e 2011 (Ideias e Desafio e Matemática - Imenes e Lellis). Os resultados indicam que as organizações existentes nessas coleções nem sempre são feitas de forma a esclarecer as diferenças entre os subtipos de tarefas trabalhadas, bem como as potencialidades das técnicas organizadas ou sistematizadas. O autor ainda verificou que as coleções não modificaram as praxeologias matemáticas ao longo das avaliações do PNLD.

Sob um viés comparativo, Barboza (2017) observou em documentos oficiais como são elaboradas as praxeologias sobre o ensino/aprendizagem de equações polinomiais do 1º grau, investigando as relações de conformidade entre eles nos livros didáticos dos estudantes e dos professores⁴. Os resultados da pesquisa indicaram que existe uma conformidade entre as praxeologias a serem ensinadas, propostas pelos autores dos livros didáticos e as atividades que são efetivamente ensinadas pelos professores em sala de aula. As relações pessoais e institucionais relativas ao objeto Equações Polinomiais do 1º grau dos professores foram constituídas por seus equipamentos praxeológicos.

Os autores Muniz e Pais (2009) averiguaram as organizações didáticas e matemáticas contidas nas atividades do LD do 7º ano da coleção “Tudo é Matemática”, referente ao estudo de Equação do 1º grau com uma incógnita. O estudo demonstra que as três primeiras etapas da introdução à temática são caracterizadas como um “momento de institucionalização, ou seja, mesmo que exista uma articulação e uma contextualização tal qual é sugerida nos PCN de

² Coleções: *Diabolo* e *DiMathème*.

³ Coleções: *Tudo é Matemática* e *Matemática para Todos*.

⁴ Coleções: *No tempo de Matemática*; *Praticando Matemática* e *Matemática - Imenes e Lellis*.

Matemática, o que prevalece é o ensino tradicional, ou conservador” (MUNIZ; PAIS, 2009, p. 35).

Diante do exposto, podemos perceber como se faz presente a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999), em pesquisas sobre a análise das praxeologias matemáticas e/ou didáticas propostas pelos autores de LD sobre o tema Equação do 1º Grau. No limite de nossa busca, não identificamos pesquisas que tratem sobre uma análise específica acerca dos recursos didáticos presentes nos LD para o estudo de Equação do 1º grau, especialmente sobre os jogos.

Por objetivarmos tomar como suporte teórico a TAD para análise dos jogos propostos nos LD sobre o tema Equação do 1º grau, nos norteamos a partir da metodologia exposta no trabalho de Farias et al. (2018) onde os autores propuseram o “*Jogo Corrida aos 625*”, cujas diretrizes estão apresentadas no quadro abaixo:

Quadro 1 - Análise da Corrida ao 625

Tipos de situação	Tipo de tarefa	Tipo de técnica	Tipo de discurso tecnológico-teórico
A didática. Pois a intenção de ensinar não está revelada ao respondente.	Chegar aos 625, ou seja, tarefa do tipo encontrar o valor procurado, 625.	Técnica por tentativa, aplicando a multiplicação de fatores iguais.	Definição de potenciação.

Fonte: Farias et al. (2015, p. 101).

No Quadro 1, a análise do “*Jogo Corrida ao 625*” realizada por Farias et al. (2018) utiliza a TAD para a identificação da organização matemática (bloco prático-técnico e bloco tecnológico-teórico) desse recurso. Compreendemos que este tipo de análise nos auxilia a melhor entender como se apresenta a proposição de jogos nos LD atuais sobre Equação do 1º grau, a partir da identificação dos tipos de tarefas e de técnicas, além do bloco tecnológico-teórico em cena, bem como tais características podem influenciar para que o professor de matemática possa fazer uma melhor apropriação desses jogos.

1.2 Pesquisas acerca do uso de jogos sobre Equação do 1º grau

Através do uso de jogos matemáticos sobre Equação do 1º Grau, constatamos que estes recursos têm sido objeto de pesquisas tanto na formação inicial de professores, como na análise de práticas docentes; tais informações foram obtidas por meio de diversos relatos de experiência dos docentes. Para obter os relatos, expomos alguns trabalhos que indicavam como os

professores de matemática tem adaptado ou elaborado jogos sobre este tema, as expectativas dos professores que são contempladas ou não quando utilizam os jogos em sala de aula, as dificuldades de aprendizagem dos alunos e os ajustes necessários nos jogos e no planejamento das aulas para usá-los.

Durante o Estágio Supervisionado do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Lima *et al.* (2016), desenvolveram uma pesquisa com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental com o intuito de minimizar a dificuldade deles nas resoluções de equações do 1º grau. Com isso, foi verificado que:

A intervenção foi feita por meio de um jogo com equações de 1º grau, das mais simples possíveis, intitulado Pescaria das Equações, o qual foi encontrado na internet e elaborado por Maria Ignez Diniz, porém foram feitas algumas alterações nas regras para que pudesse ter um maior aproveitamento com a turma. (LIMA *et al.*, 2016, p. 2)

Acerca da utilização do jogo “Pescaria das Equações”, foi possível observar que:

Ao longo do trabalho todos os alunos se envolveram na atividade, respeitaram as regras impostas, mas alguns alunos no início continuaram a apresentar dificuldades na hora de resolver a equação que estava na carta pega, pode-se perceber que o maior obstáculo para eles era a incerteza de como prosseguir na resolução, mostraram certa insegurança no que faziam e sempre perguntavam se o resultado obtido estava correto. Porém no decorrer da atividade eles foram perdendo essa insegurança e arriscaram mais (LIMA *et al.*, 2016, p. 4).

Por isso, as análises feitas por Lima *et al.* (2016), indicam como o uso de jogos matemáticos podem ser complicados para alguns alunos, especialmente em virtude de suas dificuldades diante da resolução das tarefas propostas nos jogos, fator que pode provocar, inicialmente, um certo bloqueio por parte dos alunos para participar das atividades/jogos propostos nas aulas.

Diante disso, Barreto e Gava (2019) afirmam que “a metodologia de aplicar exercícios, usando o livro da escola e de exigir a resolução de atividades propostas, deixou de ser a favorita dos docentes para suas aulas” (p. 26); para isso, aponta-se o uso de jogos como uma alternativa à referida metodologia, em que os autores criaram um jogo denominado “1º grau ou grau?”, “que pode ser utilizado em sala de aula como um modo mais dinâmico e lúdico para adquirir e treinar conceitos matemáticos tanto de trigonometria quanto ligados às equações de 1º grau” (p. 48), com o objetivo de:

Introduzir, aprimorar, fixar e trabalhar as regras e os conceitos específicos abordados no decorrer do jogo. A utilização da metodologia de resolução de problemas, por exemplo, é visível, porém deixa de ser uma proposta de atividade na qual o estudante teria de resolver sozinho os problemas apresentados e se transforma em uma prática

em grupo, lúdica, dinâmica, capaz de distraí-lo do cotidiano da sala de aula ao mesmo tempo em que o leva a dedicar-se profusamente ao aprendizado de conceitos matemáticos de extrema importância. (BARRETO; GAVA, 2019, p. 51)

Ao analisarem o uso do jogo “1º grau ou grau?”, os autores discutem expectativas que não se concretizaram e como os alunos se envolveram diferentemente com o jogo; por exemplo, na turma do 3º ano do Ensino Médio ao propor o jogo, esperava-se que os estudantes tentassem calcular mentalmente as equações de primeiro grau, porém muitos faziam a construção passo a passo. No entanto, na turma do 2º ano do Ensino Médio:

Logo no início, foi notado que havia um único grupo que estava usando a calculadora, tanto para simplificar as frações da transformação de grau em radiano, como para resolver as equações do primeiro grau. Em outro grupo, apesar do interesse dos demais, um integrante aparentava não ter vontade de estar na sala, não demonstrou interesse pelo jogo, sequer tentou jogar, nem fez perguntas às professoras sobre o conceito do jogo. Os outros dois grupos presentes destacaram-se durante a oficina de uma aula, estavam concentrados em realizar a atividade sem a utilização da calculadora (BARRETO; GAVA, 2019, p. 60).

Assim, através dos resultados obtidos por meio do estudo de Barreto & Gava (2019), é de suma importância que outros professores possam ter espaços para introduzir algumas variantes ao jogo “1º grau ou grau?”. Nesta perspectiva, Moraes *et al.* (2019) apresentam os resultados da aplicação do jogo “Memória das Equações” em uma turma de 2º ano do Ensino Médio, no contexto do Projeto Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID). Esse jogo foi adaptado de outro já existente⁵:

Após as nossas leituras, começamos a confeccionar o jogo, que inicialmente seria formado por pares de equações que possuísem a mesma solução, mas durante os testes que realizamos, observamos que devido ao grande desafio de resolver as duas equações retiradas e ainda memorizar as posições das peças a fim de formar um par, a partida se tornava cansativa, repetitiva e desinteressante, após algum tempo. Por este motivo, optamos por fazer com que o jogo fosse formado por equações e suas soluções (MORAES *et al.*, 2019, p. 5-6).

No quadro abaixo, é possível observar como Moraes *et al.* (2019) apontam uma comparação entre os resultados esperados e os obtidos por meio da utilização do jogo “Memória das Equações”:

Quadro 2 - Comparação entre os resultados esperados e obtidos na atividade

⁵ Jogo adaptado através do estudo “**Equamemória de Açõesjogos: Atividades de ensino**”. PAULINO *et al.*, 2017.

Atividades	O que era esperado das atividades	O que foi obtido
Atividade 1	Esperava-se que os alunos julgassem os itens em verdadeiro ou falso de acordo com conhecimentos prévios e do jogo.	O aluno em questão classificou de maneira correta os itens a julgar. Apresentou receio em um dos itens, pois não se recordava da definição de números reais.
Atividade 2	Era desejado que os alunos analisassem e resolvessem a situação problema proposta, e encontrassem três equações do 1º grau, diferentes, mas que tivessem a solução igual à que era dada.	O aluno apresentou três equações e, foi notado que todas possuíam a solução pedida no enunciado. As equações criadas por ele variaram no nível de dificuldade, partindo de uma bem simples e chegando em uma mais elaborada.
Atividade 3	Esperava-se que baseado no problema da atividade 3, o aluno elaborasse e resolvesse um problema envolvendo equações do 1º grau	O aluno reformulou o problema 2, adaptando os dados da questão. O problema foi completo e de enunciado compreensível, porém o aluno não o respondeu, apenas elaborou.
Atividade 4	Solicitava-se que os alunos resolvessem mentalmente as equações propostas e, depois realizassem o cálculo, para confirmar o resultado	Os resultados obtidos no cálculo mental e algébrico foram os mesmos em todas as equações
Atividade 5	Era desejado que os alunos comentassem sobre as maiores dificuldades encontradas durante a aplicação do jogo.	O aluno afirmou apenas que a maior dificuldade encontrada por ele foi a divisão, sem fazer nenhum comentário adicional.
Atividade 6	Ansiava-se que os alunos comentassem suas opiniões a respeito do jogo e das atividades.	O aluno respondeu que considerou a aplicação do jogo satisfatória, pois ajudou a compreender mais do conteúdo de equações.

Fonte: Moraes *et al.* (2019, p. 09).

Ao comentar os resultados esperados e obtidos, Moraes *et al.* (2019) destacam que os alunos possuíam “algumas dificuldades nas operações básicas, principalmente quando se tratava de operação entre números inteiros com sinais diferentes. Este foi um dos principais motivos para a demora da partida e dos impasses encontrados pelos alunos durante a realização do cálculo mental” (p. 09).

Os estudiosos Oliveira *et al.* (2018), relatam uma experiência com os jogos “*Dama da Matemática*” e “*Tetris 3d*”, que foram criados no Laboratório de Ensino da Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE) por licenciandos/bolsistas do PIBID para o estudo de equações do 1º grau com uma incógnita. Esses jogos foram adaptados do jogo de damas tradicional e do original ‘Tetris’. De acordo com os autores do referido estudo, “os alunos precisavam encontrar o valor da incógnita, e em problemas que pediam para encontrarem um número a partir da interpretação de um enunciado. A escolha das questões foi baseada no livro didático de Andrini e Vasconcellos (2012)” (Ibid, p. 151-152). Assim, esses jogos

serviram para revisar a resolução de equações do 1º grau e dar suporte para a contextualização de outros temas:

Com os jogos, tivemos a oportunidade de apesar de não ter sido um dos objetivos da pesquisa, mas aconteceu num momento de reflexão das jogadas trazer para a discussão como representar graficamente a solução de uma equação do 1º grau, visto que os alunos estavam começando a trabalhar esse assunto nas salas de aula do ensino regular (OLIVEIRA *et al.*, 2018, p. 157).

Oliveira *et al.* (2018) também apontam sobre os resultados obtidos na implementação dos jogos em sala de aula:

A ‘Dama da Matemática’ nos possibilitou entender que, apesar das dificuldades com algumas propriedades e cálculos de equações do 1º grau relacionadas ao termo independente, como a troca de sinais, o isolamento correto da incógnita, a subtração dos coeficientes, entre outros, o jogo foi importante na apropriação de muitos conhecimentos, e sentimos que colaboramos para melhorar a formação desses alunos. Com o ‘Tetris3D’, vivenciamos com os alunos momentos de reflexões e tomadas de decisão, por meio da socialização em grupo. No final dos jogos, proporcionamos um momento de sistematização das ideias trabalhadas, e isso não só propiciou a construção de conhecimentos, como também elevou a autoestima dos alunos e nos propiciou vivenciar a inclusão dos alunos com deficiência visual. (p. 159)

Em particular, dentre os trabalhos mencionados acima, Oliveira *et al.* (2018), explicitam ter utilizado um LD da coleção “*Praticando Matemática*”, aprovado no PNLD, para auxiliar na construção dos jogos Dama da Matemática e Tetris 3d. No entanto, Barreto e Gava (2019), contrapõe “a metodologia de aplicar exercícios, usando o livro da escola” (p. 26) ao uso de jogos. O que aparenta uma certa carência de conhecimento docente acerca de jogos sobre equação do 1º Grau propostos em LD do PNLD ou que estes não chamam tanto a atenção dos professores.

Nas pesquisas que expomos aqui, podemos perceber como os jogos são adaptados e modificados segundo as finalidades didáticas de cada professor. O que de certa forma fortalece nosso interesse em utilizar a Abordagem Documental do Didático (ADD) para aprofundar o estudo sobre a apropriação pelos professores de jogos matemáticos, em particular daqueles propostos em LD sobre Equação do 1º Grau. De uma parte, pela constatação do uso dessa abordagem para a compreensão de fenômenos relacionados ao uso do LD como também à concepção e a utilização de jogos em sala de aula (pelas orquestrações instrumentais).

1.3 O uso de livros didáticos à luz da ADD

Consideramos que a ADD “tem sido utilizada como ferramenta na compreensão de questões relativas à utilização, por parte dos professores, de um conjunto de recursos de diversas

naturezas tais como livros didáticos” (XAVIER NETO; SILVA, 2017, p.8), haja vista o panorama exposto sobre os artigos baseados na ADD (Quadro 3), apresentados na *II International Conference on Mathematics Textbooks Research and Development (ICMT)*⁶ e no I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática (LADIMA).

Quadro 3 - Recursos utilizados nos artigos sobre a gênese documental

Autor(es)	Recurso (s)
Mesa V., Mali, A. (2017)	E-livros e livros texto.
Assis, C., Gitirana, V. (2017)	Livros texto de matemática, livros didáticos, PCN e Guia do PNLD.
Cortina, L. J., Visnovska, J. (2017)	Interação entre pesquisador e sujeito.
Rocha, K. M., Trouche, L., Gueudet, G.	E - livro.
Bortolossi, H., Giraldo, V., Rangel, L. Rezende, W. Ripool, C., Quintaneiro, W., Simas, S. (2017)	E - livro.
Gitirana, V., Lucena,R. (2017)	Livro texto.
Pereira,J.W., Lucena,R. (2017)	Livro texto.
Assis,C. (2016)	Livro texto e software Geogebra.
Igliori, S.B.V., Almeida, M.V. (2016)	Livro texto, dois artigos científicos e discussão entre o professor e estudantes.

Fonte: Xavier Neto e Silva (2017, p.11).

No presente trabalho, consideramos os jogos contidos nos LD como recursos disponíveis ao professor e nos interessamos em estudar o trabalho documental com esses recursos. Nesse sentido, concordamos com Botelho e Assis (2021) ao afirmarem:

Baseando-se na ADD, consideramos o livro didático (de maneira genérica) como um recurso que alimenta o trabalho do professor e que permite a criação de seus documentos (planos de aulas, atividades, por exemplo). Esses aspectos nos levam a pensar no processo de gênese documental e suas duas dimensões: influência (funções) dos recursos, possibilidades e limitações na atividade do professor (instrumentação) e a apropriação e (re)criação pelo professor dos recursos, modificando-os para seu uso conforme seus contextos, necessidade e conhecimentos (instrumentalização). (p.145)

Segundo a pesquisa desenvolvida por Botelho e Assis (2021), seis professores de matemática, foram indagados sobre questões como: “O LD é um recurso suficiente para as

⁶ Conferência Internacional sobre Pesquisa e Desenvolvimento de Livros Didáticos de Matemática (*Tradução Nossa*).

aulas?” “O que os professores utilizam dos livros (para que servem) e o que é atrativo neles para o planejamento das aulas?”; de forma geral, verifica-se que eles não consideram o LD suficiente para o planejamento das aulas de matemática, independente do conteúdo matemático. Vejamos o depoimento de um desses professores:

O LD é um recurso imprescindível para o planejamento da aula, porém não podemos nos limitar. Existem diversas outras possibilidades a serem exploradas a fim de tornar a aula atualizada, dinâmica e necessária. Em resumo: é um ótimo recurso, mas não autossuficiente. Eu acredito que ele não seja autossuficiente para o planejamento da aula, até porque a gente não pode se limitar a um recurso quando se tem vários à disposição.” (prof. C) (BOTELHO; ASSIS, 2021, p. 139).

Quando questionados sobre “Que partes do livro didático você costuma utilizar?”, por exemplo, o professor “B” respondeu: “Leio todas as partes, mas priorizo as orientações para o professor, pois considero-as uma diretriz para trabalhar as atividades que são propostas em grupos e as que são voltadas para aplicações do conhecimento estudado.” (BOTELHO; ASSIS, 2021, p. 141). De maneira análoga, o professor “D” declarou que: “[...] ao trabalhar os conteúdos abordados nos livros, costumo passar para os alunos os tópicos mais importantes, em termos de conceito. [...] também costumo fazer a leitura nas orientações para o professor para o melhor desenvolvimento dos conteúdos abordados.” (Ibid, 2021, p. 141).

Consideramos que esses resultados nos oferecem pistas sobre como o uso do LD ainda é carente de estudos no cenário das pesquisas com a ADD, pois embora os professores mencionem ler as orientações didáticas contidas no manual do professor não fica explícito quais recursos apresentados nos LD eles costumam utilizar, como é o caso dos jogos matemáticos. No entanto, eles fazem bastante alusão ao uso de outros recursos disponíveis na internet para o planejamento do ensino.

1.4 Estudos sobre jogos matemáticos à luz da ADD e da noção de orquestração instrumental

Espíndola *et al.* (2021) discorrem sobre como licenciandas em Matemática - bolsistas do PIBID, elaboraram o Quebra-cabeça Triangular das Medidas Agrárias (QTMA), a partir da seleção de características de três recursos: o Triminó dos Números Decimais (LUTZ, 2016), Triminó Legal (GOMES, 2010) e o Quebra-cabeça das Quatro Operações (ARAÚJO *et al.*, 2014). Além de analisarem a inserção do jogo QTMA em sua correlação com outros recursos utilizados em uma sequência didática sobre o tema Medidas Agrárias, neste trabalho também temos uma explanação sobre diferentes orquestrações instrumentais elaboradas para o uso deste jogo em sala de aula.

Almeida *et al.* (2020) utilizam a ADD e a noção de orquestração instrumental em consonância com o modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), traduzido por “Conhecimento Especializado de Professores de Matemática” (CARRILLO, *et al.*, 2014), para analisar o desenvolvimento do jogo “*Banco Geométrico*”, adaptado do Banco Imobiliário. Os autores apresentam uma articulação entre a mobilização de recursos e o conhecimento de bolsistas do PIBID, que foram evoluindo no decorrer da construção desse jogo. Além disso, como o Banco Geométrico foi sendo modificado a partir de sucessivas utilizações desse jogo em sala de aula e das sugestões dos alunos, assim como das suas dificuldades identificadas pelos pibidianos em relação ao tema Polígonos e Relação de Euler.

O estudo de Oliveira *et al.* (2020) versa sobre os processos de instrumentação e de instrumentalização na gênese documental do gamão trigonométrico, ou seja, um jogo construído a partir do gamão. Neste trabalho, se articulam os quadros teóricos da TAD e da ADD, onde faz-se uma análise de todas as tarefas e técnicas propostas no gamão trigonométrico sobre o tema razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente), a fim de serem pensadas as situações matemáticas exploradas na aplicação desse jogo em sala de aula:

Sobre a quarta etapa (aplicação do jogo com estudantes), na qual se revelou o desempenho didático na OI, destacamos que durante as partidas com o Gamão Trigonométrico, vários estudantes buscaram representar por escrito a tabela trigonométrica com ângulos notáveis, para recordarem os valores concernentes ao seno, cosseno e tangente de 30° , 45° e 60° . O que nos suscitou a necessidade de expor a referida tabela ou não, a partir do contexto de compreensão dos estudantes. Haja vista, não termos anteriormente, levantado essa possibilidade de uso da referida tabela (OLIVEIRA *et al.*, 2020, p. 386).

Como podemos ver no trecho acima, agrega-se ao jogo a tabela trigonométrica, como efeito do desempenho didático da orquestração instrumental vivenciada em sala de aula, o que revela o caráter dinâmico e evolutivo da concepção de um jogo.

Sob um prisma tecnológico, Rousson e Trgalová (2017) estudam a concepção de um jogo digital « À la ferme » e a apropriação do maternal por professores na França, com o direcionamento ao processo de ensino/aprendizagem do tema enumeração. Com isso, essas autoras desenvolveram um modelo de apropriação de um novo recurso por professores. Na construção do modelo, as ideias sobre apropriação são provenientes da Psicologia Ambiental e das Ciências em Gestão, e são articuladas aos constructos teóricos da Abordagem Instrumental (RABARDEL, 1995), da Abordagem Documental do Didático - ADD (GUEUDET; TROUCHE, 2008), da Orquestração Instrumental (TROUCHE, 2004; DRIJVERS *et al.*, 2010) e dos conhecimentos profissionais docentes. Em particular, por meio deste modelo, buscamos

estudar como o professor de Matemática se apropria de jogos propostos em LD para o ensino de Equação do 1º grau.

Temos, por hipótese, que os professores se apropriam dos jogos propostos em LD de formas diferentes, desenvolvendo/adaptando os seus processos de instrumentação e de instrumentalização par elaborar e efetivar as orquestrações instrumentais em sala de aula, de acordo com seus conhecimentos profissionais e seus sistemas de recursos.

Pelo exposto, definimos para esta pesquisa os seguintes objetivos.

1.5 OBJETIVOS DA PESQUISA

Objetivo geral:

- Analisar a apropriação por professores de matemática de jogos sobre Equação do 1º grau propostos em livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental.

Objetivos Específicos:

- Identificar os jogos sobre Equação do 1º grau propostos em livros didáticos analisando a sua organização matemática.
- Averiguar os conhecimentos envolvidos nos processos de instrumentação e de instrumentalização dos professores de matemática envolvidos nas fases de pré-apropriação e de apropriação original de um jogo sobre Equação do 1º grau.
- Comparar as orquestrações instrumentais previstas e efetivas durante a fase de apropriação original de um jogo sobre equação do 1º grau.

1.6 APRESENTAÇÃO DOS CAPÍTULOS

No Capítulo 1 – “Introdução”, buscamos apresentar um panorama da nossa trajetória de pesquisa, desde o projeto de iniciação científica com o tema “O uso de Jogos Matemáticos propostos em Livros Didáticos”, e expomos nossas leituras sobre algumas pesquisas, versando acerca do LD sobre o tema Equação do 1º Grau; o uso de jogos sobre Equação do 1º Grau; o uso do LD e o uso de jogos matemáticos à luz da Abordagem Documental do Didático (ADD) e da noção de orquestração instrumental.

No Capítulo 2, refinamos a fundamentação teórica para a presente pesquisa, tendo como base principal o Modelo de Apropriação de um Novo Recurso (ROUSSON; TRGALOVÁ, 2017).

No Capítulo 3, apresentamos os procedimentos metodológicos para as duas etapas da pesquisa. A primeira, voltada para a análise dos jogos sobre Equação do 1º Grau propostos em LD aprovados no PNLD 2020, e, a segunda, centrada na apropriação desses jogos por dois professores de matemática, atuantes nos anos finais de escolas públicas da rede municipal do Recife- PE.

No Capítulo 4, os resultados são apresentados separadamente para cada uma das duas etapas da pesquisa, assim como a análise da apropriação de cada professor, antes de apontarmos as semelhanças e as diferenças entre os processos de apropriação de um jogo escolhido por eles: o jogo das Equações equivalentes. Por fim, apresentamos algumas considerações expondo limites da pesquisa e algumas perspectivas de investigações futuras.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, inicialmente, apresentamos alguns conceitos essenciais da Abordagem Instrumental, tais como a distinção entre artefato e instrumento e a transformação de um artefato em instrumento (gênese instrumental), bem como, a distinção entre recurso e documento e a transformação de um recurso em documento (gênese documental), propostas na Abordagem Documental do Didático (ADD).

Sobre a noção de Orquestração Instrumental (OI), além de explicitarmos seus componentes⁷, refinamos os diferentes tipos de orquestrações e sua articulação com os momentos didáticos (ROUSSON, 2017; CHEVALLARD, 1999). Por fim, apresentamos o Modelo de Apropriação de um Novo Recurso pelo Professor, desenvolvido por Rousson e Tragalová (2017), que tomamos como referência principal para a análise da apropriação por professores de jogos sobre Equação do 1º Grau, proposto em LD do EF (PNLD, 2020).

2.1 A ABORDAGEM INSTRUMENTAL

A Abordagem Instrumental (AI), desenvolvida por Rabardel (1995), leva em conta o papel dos artefatos na atividade humana. Um artefato pode ser um meio material (um martelo,

⁷ Configuração didática, modo de execução e desempenho didático. (*Grifos nossos*)

uma enxada, lápis, computador, etc.) ou um meio simbólico (uma figura, um gráfico, linguagem algébrica, símbolos vetoriais etc.) (BITTAR, 2011; ABAR; ALENCAR, 2013). Na AI, o artefato é tratado do ponto de vista do sujeito, de sua atividade e de sua ação. Rabardel (1995), aponta que:

- Os artefatos existem na atividade e são constantemente transformados pela atividade;
- Os artefatos não devem ser analisados enquanto coisas, mas pela forma na qual eles mediatizam o uso [...];
- Os artefatos não são somente meios individuais, eles são portadores de compartilhamento e divisão do trabalho;
- Eles são uma significação incorporada em uma prática social. (p. 42)

A AI considera que os instrumentos são subjetivos e são construídos pelo sujeito através dos artefatos. Paralelo a isso, Bittar (2011) apresenta três ideias centrais na definição de instrumento, que esclarecem seu caráter dinâmico:

- Cada sujeito constrói seus próprios esquemas de utilização, portanto, seu próprio instrumento, que difere do instrumento do “outro”;
- À medida que o sujeito continua a manipular o instrumento, vai construindo novos esquemas que vão transformando o instrumento. Estes esquemas são modificados pelo sujeito de acordo com suas necessidades;
- Um mesmo artefato dá origem a diferentes instrumentos construídos por diferentes sujeitos. (p.160-161)

Segundo Rabardel (1995), o desenvolvimento de uma gênese instrumental; ou seja, a passagem de um artefato a um instrumento é desencadeada por dois processos imbricados: instrumentação e instrumentalização, como explicitamos a seguir.

2.1.1 A gênese instrumental

Segundo Rabardel (1995), a gênese instrumental ocorre pelos processos de:

Instrumentalização - relacionado ao surgimento e à evolução dos componentes artefato do instrumento: seleção, agrupamento, produção e instituição de funções, desvios e catacrese, a atribuição de propriedades, transformação do artefato (estrutura, funcionamento, etc.), que prolongam as criações e realizações dos artefatos, cujos limites são, portanto, difíceis de determinar;

Instrumentação - relacionado ao surgimento e evolução dos esquemas de utilização e de ação instrumentada: constituição, funcionamento, evolução por acomodação, coordenação, combinação, inclusão e assimilação mútua, assimilação de novos artefatos aos esquemas já constituídos, etc. (RABARDEL, 1995, p. 111, tradução nossa)⁸.

⁸ • Les processus d'instrumentalisation concernent l'émergence et l'évolution des composantes artefact de l'instrument : sélection, regroupement, production et institution de fonctions, détournements et catachrèses, attribution de propriétés, transformation de l'artefact (structure, fonctionnement etc.) qui prolongent les créations et réalisations d'artefacts dont les limites sont de ce fait difficiles à déterminer.

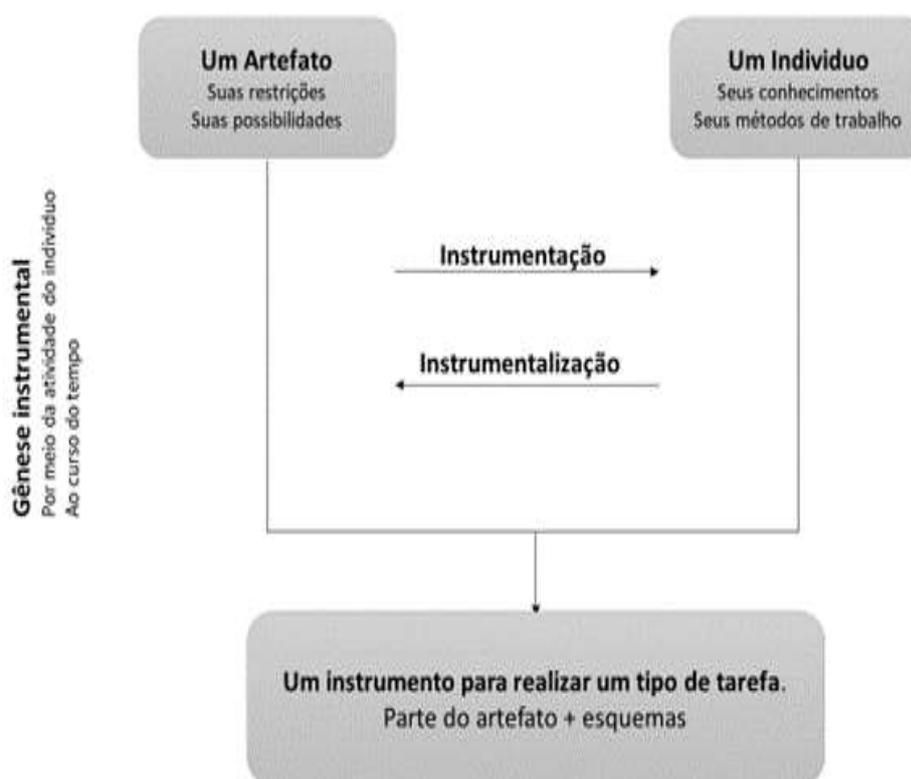
• Les processus d'instrumentation sont relatifs à l'émergence et à l'évolution des schèmes d'utilisation et d'action instrumentée : leur constitution, leur fonctionnement, leur évolution par accommodation, coordination

Acerca disso, Xavier et al. (2017) explicam que:

A gênese instrumental possui dupla dimensão, ou seja, por um lado o sujeito se direciona para a maneira como o artefato é utilizado, sendo tal processo conhecido como instrumentalização. Por outro lado, as possibilidades e restrições que um determinado artefato oferece influenciam as atividades do sujeito e esta dimensão é conhecida como instrumentação. (p. 6)

Na Figura 1, apresentada logo abaixo, podemos ver como Trouche (2005), caracteriza a gênese instrumental.

Figura 1 - Esquema da gênese instrumental



Fonte: Trouche (2005, p. 101).

De acordo com Trouche (2005), compreender a gênese instrumental requer várias articulações, tais como “a articulação entre os esquemas sociais (que são pré-construídos no artefato por seus conceptores e construídos no ambiente sociocultural do sujeito por e para

combinaison, inclusion et assimilation réciproque, l’assimilation d’artefacts nouveaux à des schèmes déjà constitués etc.

outros) e os esquemas individuais (que o sujeito constitui por e para si)” (p. 100). Ressaltamos que na perspectiva da AI, os instrumentos não são dados ao sujeito do exterior, o que é fornecido são os artefatos assim como os esquemas sociais de utilização existentes no meio sociocultural do sujeito. Isto nos remete, por exemplo, ao artefato “jogo”, que a depender do contexto sociocultural sofre adaptações, transformando-se em instrumentos para diversos fins.

Outra articulação destacada por Trouche (2005) se refere àquela entre os dois componentes: instrumentalização (relativa ao artefato, à descoberta e à seleção dos comandos, à personalização do objeto) e a instrumentação, relativa à emergência e à evolução dos esquemas para a realização de um tipo de tarefa ou de um conjunto de tipos de tarefas. Sublinhamos que na AI, a noção de esquema é baseada na concepção de Vergnaud (1985), como uma organização invariante da atividade para uma dada classe de situações, formado a partir de quatro componentes: invariantes operatórios; inferências e cálculos, regras de ação e predições ou expectativas. Dentre esses, os conceitos de regra e de invariante são, exatamente, elementos indispensáveis para caracterizar o conteúdo dos esquemas:

As regras de ação constituem um nível relativamente próximo da ação observável. Os invariantes operatórios, isto é, os objetos, propriedades, relações e processos que o pensamento recorta no real para organizar a ação, constituem o núcleo duro da representação, aquele sem o qual nem as inferências, nem as regras de ação, nem as predições, nem os significantes têm sentido [...] (VERGNAUD, 1985, p. 9).

Na AI, Trouche (2005), também chama a atenção para a articulação entre dois tipos de esquemas de utilização:

Os esquemas de uso orientados para tarefas secundárias correspondentes às ações e atividades específicas diretamente relacionadas ao artefato (Rabardel 1995) e os esquemas de ação instrumentada, cujo significação é dada pelo ato global tendo por objetivo operar transformações sobre o objeto da atividade. Esta distinção relaciona-se ao nível de granularidade da análise da atividade. Um gesto instrumentado é a parte observável de um esquema de uso e a técnica instrumentada a parte observável de um esquema de utilização [...]. (p.100)

Já tendo explicitado como os artefatos são transformados em instrumentos, pelos processos de gênese instrumental propostos pela AI, no tópico 2.2 apresentamos como os recursos são transformados em documentos, por meio dos processos de gênese documental.

2.2 A ABORDAGEM DOCUMENTAL DO DIDÁTICO

Na essência da Abordagem Documento do Didático - ADD, as noções de artefato e recurso se distinguem. Na ADD, o termo recurso é pensado de acordo com Gueudet e Trouche

(2008) “como uma variedade de artefatos tais como um livro texto, um software, uma lista de exercícios, uma reunião pedagógica ou ainda uma discussão com um colega” (p. 7). No entanto, Xavier et al. (2019) consideram que “a ADD é, portanto, uma ferramenta de análise teórica que possibilita compreender a maneira com o qual os professores se relacionam com um conjunto de recursos de diversas naturezas que se fazem presentes em sua atividade prática” (p. 304).

Segundo Trouche (2016), a ADD traz uma compreensão do trabalho do professor fundamentada na noção de recurso, bem mais ampla do que a de artefato. A palavra recurso é entendida como tudo que nutre e potencializa o trabalho do professor e seu desenvolvimento profissional (ADLER, 2010). Nesta perspectiva, enfatizamos que a ADD leva em consideração o trabalho docente em sua especificidade e sua continuidade, com o trabalho e os recursos, que são objeto de ensino (BELLEMAIN; TROUCHE, 2019)

Trouche (2016,.) ainda explica como a AI distingue o que está disponível para a atividade (os artefatos) e o que é desenvolvido pelos sujeitos (os instrumentos), pois “a abordagem documental distingue o que está disponível para a atividade dos professores, os recursos, e o que eles desenvolvem para apoiar a sua atividade de ensino: os documentos” (p. 10). Para melhor compreensão da noção de documento, apresentaremos a seguir seus pressupostos e a sua gênese.

2.2.1 A gênese documental

As gêneses documentais, ou seja, os processos de constituição dos recursos em documentos, combinam os dois processos sugeridos na gênese instrumental.

Os processos de instrumentalização: o professor se apropria dos recursos, ajusta-os, adapta-os, enriquece-os e reorganiza-os segundo seu objetivo de ensino.
Os processos de instrumentação: os recursos aparelham o professor e influenciam sua atividade, esses processos marcam as evoluções de práticas e de conhecimentos profissionais induzidos pelo trabalho sobre os recursos (BESNIER, 2016, p.95).

Na Figura 2, podemos ver a representação da gênese documental.

Figura 2 – Esquema da gênese documental



Fonte: Gueudet e Trouche (2015, p. 8).

Xavier Neto e Silva (2017) explicam que “a dimensão da instrumentalização é relativa aos processos de apropriação e/ou reutilização que o professor faz de um conjunto de recursos enquanto a instrumentação refere-se à influência que os recursos exercem na sua atividade prática” (p. 6). Na ADD, ressalta-se que, para realizar suas tarefas de ensino, o professor age com uma diversidade de recursos, esses são trabalhados (adaptados, revisados, reorganizados) no curso dos processos associados à sua concepção e a forma como vislumbra utilizá-los em sala de aula. Esse trabalho do professor é entendido dentro da ADD como estruturante do trabalho documental docente (GUEUDET; TROUCHE, 2010).

De acordo com Rocha e Trouche (2015), “o trabalho documental está no coração da atividade do professor [...], pois é nele que o professor insere novos recursos, transforma antigos e agrega conhecimentos para usá-los em sua prática” (p.17). Assim, a combinação de diferentes recursos utilizados pelo professor com a finalidade de ensinar um determinado tema matemático, denomina-se sistema de recursos.

Aqui, fazemos referência ao sistema de recursos como a “parte recursos dos documentos” (BESNIER, 2016, p. 97), sem a parte esquema, visto que o sistema documental compreende uma estruturação mais ampla: “uma parte recursos, o sistema de recursos e uma parte conhecimentos profissionais. O sistema documental é estruturado segundo classes de situações de atividades correspondentes a um mesmo objetivo da atividade” (Ibidem, 2016, p. 97). Corroborando com o exposto, Xavier Neto e Silva (2017) esclarecem que:

Os documentos são desenvolvidos pelos professores enquanto estes constroem suas gêneses documentais. Assim, para um determinado professor, esses documentos são

organizados em um sistema de documentação cuja análise e evolução permite o estudo do desenvolvimento profissional do professor. É nesse contexto que a abordagem documental está situada. (p .6)

Nossa intenção de verificar os processos de gênese documental de jogos propostos em LD, por parte dos professores investigados, coaduna-se com o estudo e orientação sobre o uso dos jogos para fins educacionais, por parte do professor e por parte do aluno, que diz respeito à ideia de orquestração instrumental, a qual passamos a refinar no tópico 2.3.

2.3 A TEORIA DA ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL (OI)

A noção de Orquestração Instrumental proposta por Trouche (2004), como o próprio nome indica, faz alusão à uma orquestra, uma vez que “nesta metáfora, o professor desempenha o papel de maestro, os alunos representam os músicos, os instrumentos musicais são os artefatos, as situações de ensino são os repertórios musicais e os objetos matemáticos a serem trabalhados é a música a ser tocada” (VILAÇA, 2018, p. 7). Diante disso, Couto (2018) explica que “nesse contexto, o maestro (o professor) conduz os músicos (seus alunos) a usarem artefatos e transformá-los em instrumentos musicais (instrumentos didáticos), os quais lhes permitirão executar as partituras musicais resolver as situações matemática” (p.46).

A noção de Orquestração Instrumental (OI), possibilita-nos o estudo e orientação sobre o uso de artefatos para fins educacionais, por parte do professor e por parte do aluno. Nesse sentido, uma orquestração instrumental é composta por três componentes: configuração didática, modo de execução e desempenho didático.

Uma configuração didática é um arranjo do artefato no ambiente, ou, em outras palavras, a configuração do ambiente de ensino e os artefatos envolvidos nele. Estes artefatos podem ser ferramentas tecnológicas, mas as tarefas dos estudantes também podem ser vistas como artefatos. O modo de execução de uma configuração didática é a forma como o professor decide atuar para beneficiar suas intenções didáticas. Isso inclui as decisões sobre a forma como uma tarefa é introduzida e como ela é trabalhada, os esquemas e técnicas para serem desenvolvidos e estabelecidos pelos alunos e sobre a possibilidade dos papéis dos artefatos utilizados. O desempenho didático revela a viabilidade da orquestração desenvolvida. Envolve as decisões *ad hoc* tomadas durante o ensino com base nas escolhas realizadas nas etapas da configuração didática e do modo de exploração (DRIJVERS *et al.*, 2010, p. 37).

De acordo com Lucena *et al.* (2016), a configuração didática diz respeito à organização da sala de aula e às escolhas didáticas feitas pelo professor, sobretudo no que concerne à:

Tarefa matemática, aos recursos a serem disponibilizados, às funções dos indivíduos envolvidos, entre outros aspectos. Já o modo de execução consiste na operacionalização da configuração didática desenvolvida previamente pelo professor com foco na gênese instrumental dos estudantes (p.3).

Por exemplo, ao analisarem as OI elaboradas para o uso do jogo Pintárea, Pontes et al. (2018), observaram o estudo voltado para a área de polígonos, considerando que:

A configuração didática consiste na forma que organizamos uma situação matemática a ser enfrentada com o uso do jogo em foco. Além desse, todos os outros artefatos que serão utilizados durante a colocação em prática da orquestração. Outros elementos precisaram ser configurados, como o tempo em que os estudantes teriam para jogar, como eles receberiam as instruções do jogo e das atividades a realizar, o papel dos professores e dos alunos, o trabalho em grupo.

Em conformidade, Iglioni e Almeida (2019) enfatizam que:

É muito importante destacar que há tantos tipos de orquestrações quantos um professor pode pensar para a sua aula, e da mesma forma os modos de execução de uma tarefa matemática com recursos digitais, ou outros. Um professor orquestra sua aula definindo configurações didáticas e modos de execução de uma situação matemática da forma que ele considerar mais adequada (p. 236-237).

Segundo Lucena *et al.* (2016), apud Drijvers *et al.* (2010) é por meio do desempenho didático, que o professor pode perceber, a partir do modo de execução, situações que não foram previstas na configuração didática, e “diante destas, o professor faz emergir as decisões *ad hoc*. Além disso, pode analisar se o desempenho da orquestração instrumental criada foi favorável ou não aos seus objetivos didáticos” (LUCENA, *et al.*, 2016, p. 80).

Diante do exposto, nos interessamos em buscar identificar que tipos de orquestrações instrumentais, ou seja, de configurações didáticas e modos de execução podem ser propostos para situações matemáticas sobre Equação do 1º grau, a partir do planejamento de aulas com o uso de um determinado jogo, por professores de Matemática, assim como o desempenho didático decorrente dessa metodologia. Para isso, levantamos alguns cenários possíveis, já identificados em outras pesquisas.

2.3.1 Tipos de orquestrações instrumentais

Iglioni e Almeida (2019) apud Drijvers *et. al* (2010) apresentam seis tipos de orquestrações instrumentais (OI), sendo eles “denominados de Technical-demo, Explain-the-screen, Link-screen-board, Discuss-the-screen, Spot-and-show, e Sherpa-atwork” (IGLIORI; ALMEIDA, 2019, p. 236). Dentre essas, os autores explicam, por exemplo, para o uso do Geogebra, que o tipo de OI pode ser usado:

Supõe uma configuração didática que conta com a participação de um estudante escolhido pelo professor, antes de começar a sessão. Esse aluno, denominado Sherpa,

é a figura central na manipulação da tecnologia. O ambiente da sala de aula deve favorecer esse trabalho de modo a que o aluno Sherpa possa ficar no controle do uso da tecnologia, e que os demais alunos estejam em condições de acompanhar o que vai ser projetado em uma tela, e as orientações do professor (p. 237).

A propósito das OI, essas podem se distinguir de acordo com a tarefa solicitada aos alunos em duas grandes categorias: 1. Coletivas (OIC) - os alunos da classe inteira têm um tempo de troca entre eles e/ou com o professor; 2. Individuais (OII) - os alunos trabalham individualmente, em dupla ou em grupos, para resolver uma dada tarefa (DRIJVERS *et al.*, 2010; ROUSSON, 2017). Como OIC, destacamos:

- OIC Demonstração Técnica (DT) - faz referência ao momento em que o professor mostra como se utiliza, por exemplo, um compasso; ou no caso de um artefato digital, a demonstração técnica de suas funcionalidades.
- OIC - Explicação pelo Professor (EP) - vai além da demonstração dos aspectos técnicos de utilização do artefato e envolve o conteúdo matemático.
- OIC - Orientação e Explicação pelo Professor (OE) - o professor explica aos alunos o conteúdo matemático. Ele chega a propor questionamentos sobre o tema. A discussão é limitada e comandada pelo professor.
- OIC - Discussão entre Atores (DA) - ocorrem discussões entre o professor e os alunos ou entre os alunos a fim de melhorar a compreensão da tarefa. A discussão é mais livre e menos regulada do que no tipo de OIC-OEP.

Sobre o tipo de OII, temos, por exemplo:

- OII Trabalho e Acompanhamento (TA) - os alunos trabalham individualmente ou em pequenos grupos com o artefato. Enquanto isso, o professor circula entre eles para auxiliá-los.

Consideramos que esses tipos de orquestrações podem subsidiar a identificação dos tipos de OI, elaboradas pelos professores de matemática no planejamento de uma aula com um dado jogo, que denominamos por OI previstas, como também daquelas implementadas em sala de aula, que denominamos OI efetivas. No entanto, destacamos que o professor orquestrará sua aula de acordo com o que ele acha mais propício para a sua turma, levando em consideração fatores como o tempo, a disposição de bancas, etc. (IGLIORI; ALMEIDA, 2019).

Neste contexto, é essencial salientar a situação matemática, ou seja, as tarefas propostas sobre o tema matemático. Por isso, expomos no item 2.5.2 nuances sobre a articulação teórica entre a Abordagem Documental do Didático (ADD) e a Teoria Antropológica do Didático (TAD), pois as consideramos necessárias para o estudo acerca da apropriação pelos professores dos jogos propostos nos LD.

2.3.2 As orquestrações instrumentais e as praxeologias matemáticas e didáticas

Na Teoria Antropológica do Didático (TAD), Chevallard (1999) defende que toda atividade humana regularmente realizada pode ser descrita por um modelo designado como uma praxeologia. Como consequência disso, aprender ou ensinar matemática enquanto ações humanas podem ser descritas segundo um modelo praxeológico matemático ou didático.

Sobre a praxeologia matemática, temos que uma praxeologia ou organização matemática é composta pelo sistema: $[T, \tau, \theta, \Theta]$, no qual se tem um tipo de tarefa T , uma técnica τ que permite realizar uma tarefa do tipo T ; uma tecnologia θ , que fornece um discurso racional (*logos*) sobre as técnicas; e, enfim, a teoria Θ pela qual se fundamenta a tecnologia, e o papel desta última em relação as técnicas. Assim, uma praxeologia matemática $[T, \tau, \theta, \Theta]$, está relacionada a um bloco prático-técnico $[T, \tau]$ – ao saber-fazer, e a um bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$ – ao saber, resultado da articulação entre a tecnologia e a teoria.

A articulação entre a TAD e ADD pode ser vista em pesquisas que se interessam, por exemplo, em demonstrar a organização matemática de um tema em um livro didático (adotado na escola) e as decisões que são tomadas pelo professor em torno do que ele elege sobre o saber a ser ensinado. Desta forma, Espíndola et al. (2018) discorrem sobre a organização matemática do saber ensinado e o tema Razões Trigonométricas, relacionado ao trabalho documental de uma professora na elaboração de uma ficha de exercícios mediante a utilização de diversos recursos (livros didáticos diferentes daqueles adotados na escola, sites, etc.).

Diante disso, no nosso caso, pensamos que para melhor entender a preferência de um professor sobre algum jogo, faz-se necessário um olhar sobre as OM da sequência de ensino sobre o tema Equação do 1º Grau, se atentando para perceber se o jogo atende as expectativas do professor na composição desta. Assim, praxeologia didática ou organização didática, segundo Araújo (2009), tem como objetivo permitir a existência de uma praxeologia matemática relativa a um determinado saber, isto é, ela permite a (re)construção ou transposição de uma determinada praxeologia matemática, articulando-se também em torno de tipos de

tarefas, de técnicas, de tecnologias e de teorias. De acordo com Carvalho (2012), a praxeologia didática é organizada em momentos de estudo ou momentos didáticos:

Os momentos didáticos são definições didáticas e não se apresentam numa ordem cronológica ou num sentido linear; representam uma realidade funcional de estudo. Segundo Chevallard (1999) ao analisar certa organização didática coloca-se em prática certa organização matemática, investigando-se o modo como são realizados os diferentes momentos de estudo. No entanto, certa organização matemática pode ter sido posta em prática por diferentes organizações didáticas o que implicará em resultados diferentes na aprendizagem, assim temos a importância de investigar a organização didática vinculada a uma organização matemática por meio do estudo dos momentos didáticos (CARVALHO, 2012, p. 49).

A praxeologia didática (Quadro 4), é proposta com base em seis momentos didáticos.

Quadro 4 – Momentos didáticos na TAD

Momento didático	Descrição
Primeiro momento didático	Primeiro encontro com a Organização Matemática (OM) estudada que está sendo posta em jogo no cenário didático
Segundo momento didático	Exploração do tipo de tarefas T e de elaboração de uma técnica t relativa a esse tipo de tarefas
Terceiro momento didático	Constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica.
Quarto momento didático	Trabalho da técnica
Quinto momento didático	Institucionalização
Sexto momento didático	Avaliação das relações pessoais e avaliação da relação institucional

Fonte: Barbosa (2017, p. 51).

Com base em Gueudet e Trouche (2010), os momentos didáticos, podem ser relacionados às atividades finalizadas. Porém, Besnier (2016), considera que as categorias dos momentos didáticos, correspondem aos objetivos e as classes de situações da atividade profissional do professor (Quadro 5):

Quadro 5 - Momentos didáticos e situações profissionais do professor

Momentos didáticos	Situações profissionais do professor
Grupo I - Atividade de estudo e de pesquisa	Conceber e pôr em prática momentos de introdução e descoberta
Grupo II – Sínteses	Conceber e pôr em prática momentos de síntese
Grupo III - Exercício e problemas	Conceber e pôr em prática momentos de aprendizagem e de exercício
Grupo IV – Controles	Conceber e pôr em prática momentos de avaliação

Fonte: Chevallard (2002); Besnier (2016).

A propósito, dos momentos didáticos introduzidos por Chevallard (1999) (Quadro 5), ressaltamos como esses são utilizados por Rousson (2017) para a análise das OI engendradas para uso do jogo “*À la ferme*”, no intuito de agrupá-las por sessões: 1. Primeiro encontro com

a tarefa; 2. Exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica de resolução; 3. Trabalho com a técnica de resolução e 4. Avaliação. Temos, assim, a análise de sucessivos episódios das aulas à luz da TAD e da TOI. Como podemos ver no seguinte trecho de orientação: “Para o momento de resolução da tarefa, observamos o tipo de orquestração “trabalho e acompanhamento” (ROUSSON, 2017, p. 313). Com isso, as sessões de momentos didáticos são analisadas conjuntamente com as orquestrações de acordo com o tipo orquestração, configuração didática, modo de execução e desempenho didático.

Os constructos teóricos que apresentamos até aqui, da Abordagem Instrumental (RABARDEL, 1995), da Abordagem Documental do Didático (GUEUDET; TROUCHE, 2008) e da Teoria da Orquestração Instrumental (TROUCHE, 2004; DRIJVERS, et. al, 2010) assim como os conceitos sobre a noção de apropriação, provenientes da Psicologia Ambiental e das Ciências em Gestão, que apresentamos a seguir, são o que podemos entender como os alicerces do modelo de apropriação de um novo recurso (TRGALOVÁ; ROUSSON, 2017), que tomamos como referência para o presente estudo.

2.4 MODELO DE APROPRIAÇÃO DE UM NOVO RECURSO POR UM PROFESSOR

2.4.1 Considerações sobre o conceito de apropriação

O conceito referente à ‘apropriação’ é polissêmico e utilizado em diversos cenários de pesquisa, tais como a Psicologia Ambiental e as Ciências em Gestão. Na língua portuguesa, o vocábulo “apropriação” tem sinônimos, como: 1. Ato ou efeito de apropriar (-se), ação de apoderar-se de algo, legal ou ilegalmente. 2. Ato de tornar algo adaptado ou adequado a um fim ou uso; adaptação, adequação (MICHAELIS, 2016).

No campo da Psicologia Ambiental, Serfaty - Garzon (2003) discute a apropriação do espaço a partir de duas ideias, sendo a primeira mediante a adaptação de alguma coisa a um uso definido e a segunda referente à ação de tornar alguma coisa própria. De forma que ocorre um processo dialético entre coisa/objeto e sujeito, isto é, o sujeito ao tornar algo seu, o adapta e o transforma em uma expressão de si; ao mesmo tempo, esta dinâmica de ação constrói o sujeito.

Por sua vez, De Vaujany (2005), no cenário das Ciências em Gestão, considera a apropriação como um processo longo que começa bem antes da fase de utilização do objeto e continua muito tempo depois do início da primeira rotina de uso. Esse processo ocorre em três fases: 1. *Pré-apropriação*, que consiste em uma primeira interpretação do objeto; 2. *Apropriação original*, posterior à fase de pré-apropriação - neste momento, se o objeto obtiver

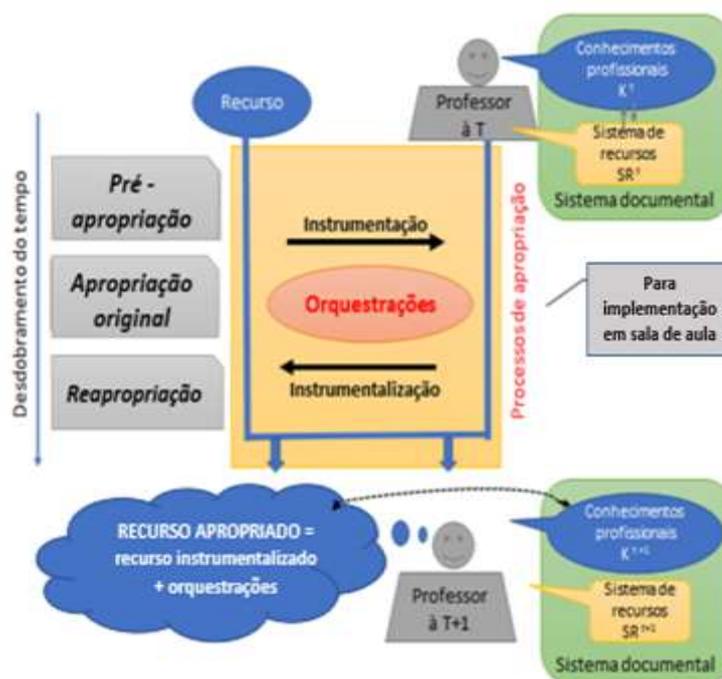
uma aceitação mínima, começa a ocorrer a instalação de rotinas; 3. *Reapropriação*, que se refere à evolução de novas rotinas de uso do objeto. Para Batista (2014), cada fase desse processo configura-se através da “Pré-apropriação: percepção, evocação e concepção; Apropriação original: uso, evocação, aprendizagem e aceitação; Rotina 1: aceitação, rotina e estabilidade; Reapropriação: uso, reinterpretação, aprendizagem e aceitação;” (p.52).

Na construção do *Modelo de Apropriação de um Novo Recurso*, Trgalová e Rousson (2017), consideram que toda apropriação é uma relação didática entre um recurso e um professor. O resultado dessa apropriação é considerado como um processo longo, contínuo e que não podemos determinar quando ele termina. Sendo assim, são tomadas como referência as três fases, denominadas como pré-apropriação, apropriação original e reapropriação (DE VAUJANY, 2005).

2.4.2 Os elementos do modelo de apropriação de um novo recurso

No modelo (Figura 3), a apropriação é vista como um processo dinâmico que se dá em longo prazo (DE VAUJANY, 2005), proposto temporalmente em três fases (T; T+1; T...): 1. *Pré-apropriação* - primeiras interações do professor com o recurso; 2. *Apropriação original* - corresponde ao tempo da primeira implementação do recurso em sala de aula e 3. *Reapropriação* - o tempo de revisão do recurso eventualmente adaptado a novos usos.

Figura 3 - Modelo de apropriação de um novo recurso pelo professor



Fonte: Trgalová e Rousson (2017, p. 68).

A equação “um recurso apropriado = recurso instrumentalizado + orquestração” (Figura 3) é explicada da seguinte forma:

Em nosso modelo, o “recurso apropriado” é o recurso modificado e instrumentalizado ao qual associamos as orquestrações pensadas pelo professor. É uma construção cognitiva do sujeito, que com os seus conhecimentos, vai pensar as orquestrações e a modificação deste recurso (ROUSSON, 2017, p. 213, tradução nossa).⁹

No modelo (Figura 3), leva-se em conta o conjunto formado pelos recursos utilizados pelo professor, denominado de sistema de recursos, que “são associados a esquemas de uso, formando documentos (um mesmo recurso pode intervir em vários documentos). Os documentos desenvolvidos por um professor também formam um sistema, denominado de sistema documental do professor” (TROUCHE *et. al*, 2020, p. 5). Dessa maneira, o professor desenvolve novos conhecimentos profissionais e muda suas metodologias de ensino a partir da apropriação de novos recursos. Em síntese:

- *Instrumento* = artefato + esquemas.
- *Documento* = recursos recombinaos + esquemas de utilização.
- *Recurso apropriado* = recurso instrumentalizado + orquestrações.

Vale ressaltar que, ao propormos que um professor analise um jogo matemático disponível em um LD e elabore uma aula para utilizá-lo com seus alunos, estamos considerando o fato que este jogo em si não é parte do sistema de recursos do professor, ou seja, estudamos a apropriação de jogos sobre Equações do 1º Grau, que em nenhuma circunstância foram objeto de análise por parte do professor. Com isso, trata-se do primeiro contato do professor com esses recursos, o que nos leva a crer que este primeiro contato com o jogo é desencadeador de uma gênese documental via os processos de instrumentação e instrumentalização, mas o resultado desses processos, no limite de tempo de nossa pesquisa, não se configura com o que poderíamos considerar comumente como “um documento do professor”, incorporado ao seu sistema documental, como pressupõe a ADD.

Além disso, destacamos que a categorização e a análise das orquestrações são relevantes ao estudo da apropriação de um recurso pelo professor. Isso viabiliza identificar as escolhas do docente para e na implementação do recurso em sala de aula (orquestrações instrumentais

⁹ Dans notre modèle, la « ressource appropriée » est la ressource modifiée, instrumentalisée à laquelle on associe les orchestrations pensées par le professeur. C’est une construction cognitive du sujet, qui avec ses connaissances, va penser les orchestrations et la modification de cette ressource.

previstas e efetivas em sala de aula) e observar sua evolução no tempo, o que nos faz distinguir a apropriação original da reapropriação de um recurso.

O aspecto temporal da reapropriação de um dado recurso é um fator importante para identificarmos a evolução dos conhecimentos profissionais do utilizador do recurso em relação ao seu primeiro uso, bem como a inter-relação desse método com o sistema de recursos do professor e a reverberação disso em novas orquestrações instrumentais previstas e efetivas em sala de aula. Assim, convém pontuar que não falamos de reapropriação durante a implementação de um recurso em sala de aula pelo professor, por exemplo, com outro grupo de alunos, se esta ocorre durante o mesmo período de experimentação da apropriação original.

Por fim, salientamos que os conhecimentos profissionais docentes são discutidos a partir de diversos modelos. Rousson (2017), a propósito da apropriação do jogo digital “À la ferme”, utilizou o Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo (TPACK), desenvolvido por Misha e Koehler (2005). No nosso caso, por se tratar de um estudo sobre jogos impressos em papel, tomamos como referência o modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) - Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL *et al.*, 2008). Consideramos assim que dependendo da natureza do recurso, podemos escolher os conhecimentos profissionais mais adequados à análise de sua apropriação.

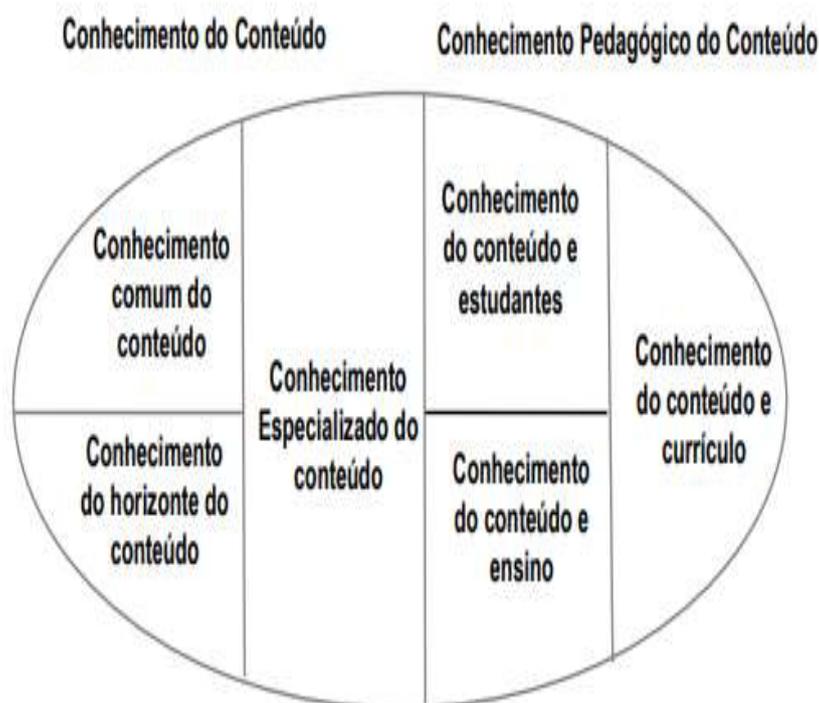
2.4.3 Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT)

No Conhecimento Matemático para o Ensino- MKT, Ball *et al.* (2008), fazem uma distinção sobre os conceitos que envolvem o Conhecimento do Conteúdo¹⁰, do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo¹¹, como é apresentado no esquema abaixo:

Figura 4 - Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino

¹⁰ Aqui estão envolvidos o Conhecimento Especializado do Conteúdo e o Conhecimento do Horizonte do Conteúdo.

¹¹ Neste eixo, estão inseridos o Conhecimento do Conteúdo e Ensino, Conhecimento do Conteúdo e Estudantes e Conhecimento do Conteúdo e Currículo.



Fonte: Ball *et al.* (2008, p. 404).

O domínio *Conhecimento Comum do Conteúdo* (CCK) diz respeito ao “conteúdo matemático esperado que uma pessoa adulta, bem-educada matematicamente saiba, como, por exemplo, calcular uma subtração do tipo $307 - 168$ ” (MORIEL JUNIOR; WIELEWSKI, 2017, p. 128). Assim, baseado em uma simples “conta” de subtração, podemos dizer, que “o conhecimento matemático para executar cálculos como esses é comumente conhecido por todos, pois tal conhecimento é utilizado em vários contextos. Entretanto, ser capaz de realizar tais cálculos é necessário, mas não suficiente, para ensiná-lo” (RIBEIRO, 2012, p. 9). Ademais, o CCK pode ser descrito como o conhecimento que é usado em muitas outras profissões ou ocupações que também usam matemática (HILL *et al.*, 2008, p. 377).

O domínio relacionado ao *Conhecimento Especializado do Conteúdo* (SCK) é “o conhecimento matemático vinculado unicamente ao ofício do ensino de matemática. É um tipo de conhecimento matemático que normalmente não é usado para outros fins além do ensino” (PAZUCH *et al.*, 2018, p. 364). O SCK é caracterizado por se referir às habilidades e conhecimentos matemáticos específicos do trabalho do professor:

Entre outras características, o professor compreende diferentes interpretações das operações, são capazes de falar explicitamente sobre como a linguagem matemática é utilizada, responder perguntas, questionamentos e, além disso, precisam saber utilizar distintas representações matemáticas que são mais adequadas em certos contextos (SILVA; SANTOS, 2014, p.5).

De acordo com Ribeiro (2012), para realizar o SCK “os professores precisam ser capazes de realizar análises eficientes e fluentes de erros matemáticos” (p. 9). Segundo Ferreira (2014), o CCK inclui o que é usualmente ensinado na sala de aula da Escola Básica, já o SCK incluiria, por exemplo, “a compreensão de diferentes interpretações das operações que os alunos não precisam saber distinguir, mas os professores sim” (p. 14).

O domínio *Conhecimento do horizonte do conteúdo* (HCK) se refere ao entendimento das inter-relações entre termos e/ou tópicos ao longo de toda extensão curricular, “um exemplo, está na competência do professor relacionar os conteúdos que ele está lecionando em um determinado ano, com os que serão abordados em algum ano posterior ou vice-versa” (SILVA; SANTOS, 2014, p. 5).

A apropriação do *Conhecimento do Conteúdo e dos estudantes* (KCS) é caracterizado por combinar o conhecimento das relações entre os alunos e a Matemática (dificuldades dos estudantes com determinados conteúdos ou erros mais comuns cometidos por eles). Nesse domínio, os professores precisam antecipar o que provavelmente os alunos pensam e em que eles podem se confundir (SILVA; SANTOS, 2014). Analogamente, os professores necessitam, por exemplo, ser capazes de antecipar sobre o que é e quando os estudantes encontrarão dificuldades acerca de um determinado conteúdo.

No *Conhecimento do Conteúdo e do Ensino* (KCT), temos questões relativas à “utilização de decisões de sequências de conteúdos, que levem os alunos a aprofundá-lo. Nele evidencia-se a relação que envolve uma ideia ou procedimento matemático particular e uma familiaridade com princípios pedagógicos para o ensino de um tópico particular” (SILVA; SANTOS, 2014, p. 5). De acordo com Ribeiro (2012), o KCT concerne a “selecionar uma abordagem de ensino que seja eficiente para superar certas dificuldades e/ou explorar certos aspectos de um conteúdo” (p. 10). Em contrapartida, o *Conhecimento do Conteúdo e do Currículo* (KCC) é caracterizado como o “conhecimento dos objetivos educacionais, dos padrões, das avaliações ou dos níveis de ensino onde determinados temas são habitualmente ensinados” (SILVA; SANTOS, 2014, p. 5).

Pelo exposto, temos a hipótese de que os conhecimentos profissionais dos professores impactam na apropriação de jogos propostos em livros didáticos. Por isso, buscaremos neste trabalho identificá-los por meio dos procedimentos metodológicos que explicitaremos ao longo do Capítulo 3.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

Neste capítulo, apresentamos o percurso metodológico da pesquisa que está organizado em duas etapas. Na primeira, apresentamos os procedimentos de análise dos livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental (EF) referente à proposta de jogos sobre Equação do 1º grau. Na segunda etapa, expomos os fundamentos da Metodologia de Investigação Reflexiva (GUEUDET; TROUCHE, 2009), desenvolvida no seio da ADD, que tomamos como referência para análise da apropriação por professores de matemática de jogos sobre Equação do 1º grau propostos nos referidos livros didáticos.

3.1 PRIMEIRA ETAPA

3.1.1 Levantamento dos jogos sobre Equação do 1º Grau em livros didáticos

Na primeira etapa da pesquisa, realizamos uma análise nos LD do 7º ano de 11 coleções aprovadas no PNLD (BRASIL, 2020). O tipo de pesquisa empreendida foi documental, que segundo Kripka *et al.* (2015) “constitui um método importante seja complementando informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema” (p. 245). Ainda, de acordo com estes autores, “o documento a ser utilizado na pesquisa dependerá do objeto de estudo, do problema a que se busca uma resposta. Neste sentido, ao pesquisador cabe a tarefa de encontrar, selecionar e analisar os documentos que servirão de base aos seus estudos” (idem, p. 243).

Inicialmente, buscamos identificar as concepções dos autores de LD sobre o uso de jogos matemáticos. Este estudo foi realizado a partir do manual do LD do professor dos onze LD do 7º ano, das coleções aprovadas no PNLD 2020, sendo elas:

1. Matemática Essencial (PATARO; BALESTRI, 2018);
2. Trilhas da Matemática (SAMPAIO, 2018);
3. Teláris (DANTE, 2018);
4. A conquista da Matemática (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI 2018);
5. Matemática, Compreensão e Prática (SILVEIRA, 2018);
6. Araribá Mais Matemática (GAY; SILVA, 2018);
7. Geração Alpha (OLIVEIRA; FUGITA, 2018);

8. A poema (LONGEN; 2018);
9. Realidade e Tecnologia (SOUZA, 2018);
10. Matemática Bianchini (BIANCHINI, 2018);
11. Convergências (CHAVANTE, 2018).

A partir da leitura do manual do professor de cada um dos LD do 7º ano do EF, constatamos que, em cinco das onze coleções analisadas, evidenciam-se discussões acerca do papel do uso de jogos para o ensino de Matemática, sendo as coleções: Matemática Essencial (PATARO; BALESTRI, 2018); Trilhas da Matemática (SAMPAIO, 2018); Teláris (DANTE, 2018); Realidade e Tecnologia (SOUZA, 2018) e Matemática Bianchini (BIANCHINI, 2018).

Das onze coleções analisadas, duas delas apresentam jogos para o estudo de Equação do 1º Grau: Teláris (DANTE, 2018) e Araribá Mais Matemática (GAY; SILVA, 2018). De forma que delimitamos a análise sobre as concepções dos autores acerca do uso de jogos matemáticos, no manual do LD do professor, apenas destas duas coleções.

Para a análise dos jogos sobre Equação do 1º grau, apresentados nas coleções Teláris e Araribá Mais Matemática, como dissemos no primeiro capítulo¹². No nosso caso, buscamos analisar a organização matemática (os tipos de tarefas, técnicas e o bloco tecnológico-teórico) dos jogos sobre equação do 1º grau nas seguintes coleções:

- I. Teláris: Jogo das Equações Equivalentes; Quebra-cabeça das Equações e Jogo das Equações. (DANTE, 2018);
- II. Coleção Araribá Mais Matemática: Jogo de Equações. (GAY, SILVA, 2018)

Os quatro jogos das duas coleções “Teláris e Araribá Mais Matemática” foram então utilizados para a segunda etapa da pesquisa, como detalharemos no tópico a seguir.

3.2 SEGUNDA ETAPA

Com base nos princípios da Metodologia de Investigação Reflexiva (GUEUDET; TROUCHE, 2009), procedemos o estudo através da observação metodológica do trabalho de

¹² Capítulo 1 – Introdução, inspiramo-nos na análise sobre o “Jogo Corrida ao 625”, proposta por Farias, Carvalho e Souza (2018), que se utilizam da Teoria Antropológica do Didático para análise da organização matemática ou praxeologia matemática (bloco prático- técnico e bloco tecnológico-teórico) presente nesse jogo. (*Grifos nossos*)

uma professora e de um professor de matemática, ambos atuantes nos anos finais do Ensino Fundamental, da Rede Municipal do Recife – PE. Durante os encontros, objetivamos compreender como os mesmos utilizavam os jogos sobre Equação do 1º Grau para mediar algumas aulas.

O critério para a escolha desses professores ocorreu pela acessibilidade de acompanhamento de suas aulas, em virtude de serem supervisores do PIBID vinculados à universidade na qual desenvolvemos esta pesquisa. Além disso, pelos profissionais serem professores de escolas públicas, tendo assim acesso aos LD do PNLD.

A partir dos princípios da Metodologia de Investigação Reflexiva GUEUDET; TROUCHE, 2009), levantamos o perfil profissional docente da professora (adiante identificada pelo codinome Luzia) e do professor (adiante identificado pelo codinome José).

Os princípios da investigação reflexiva são:

- I. Acompanhamento do trabalho do professor por um período significativo;
- II. Esse acompanhamento ocorre dentro e fora da sala de aula;
- III. A ampla coleta dos recursos utilizados e produzidos no trabalho de documentação, ao longo do acompanhamento;
- IV. O acompanhamento reflexivo do trabalho de documentação, pelo próprio professor.

Corroborando com o exposto, Ignácio (2018), afirma que a metodologia de investigação reflexiva é um princípio que “nasce do entendimento de que uma pesquisa sobre o trabalho docente com seus recursos, sob uma visão sistêmica, deve incluir a análise de um período significativo de tempo de produção de recursos. Produção essa, observada onde quer que ela ocorra (tanto nos diversos ambientes de trabalho como fora dele)” (p.64).

Para isso, seguimos o princípio do acompanhamento das atividades do professor por um período significativo, que foi dividido em duas escalas, sendo a tempo curto e a de tempo longo:

Tempo curto (entre uma e três semanas), onde o professor prepara e executa uma aula. O pesquisador pode concentrar a coleta de dados (apoiado, por exemplo, em vídeos) e sua análise sobre momentos-chave, por exemplo: a preparação da aula; sua implementação, eventualmente em diferentes contextos; a análise crítica dos efeitos de aula - por exemplo, refletindo sobre um teste dos alunos, ou ainda sobre a aula em questão [...].

Tempo longo da carreira de um professor, que permite localizar as principais alterações do seu sistema de recursos e de seus esquemas. Este é um aspecto das pesquisas que ainda é pouco explorado. Duas perspectivas essenciais foram identificadas: fazer cortes temporais no sistema de recursos (qual era o sistema de recursos do professor no início de sua carreira? 10 anos após? 20 anos após?). Onde seguir as evoluções contínuas ao longo do tempo de um recurso (identificar um recurso crítico do professor hoje, e estudar sua genealogia: de onde ela vem?) ou as

evoluções do trabalho documental do professor durante um longo período (sua trajetória documental, ver Rocha (2016). Conduzir essas investigações supõe se apoiar na memória didática do professor, pelos métodos em construção (BELLEMAIN; TROUCHE, 2019, p. 261).

No nosso caso, desenvolvemos a construção de dados de julho a outubro do ano letivo de 2021. Em virtude desses fatos, ressaltamos que na fase de levantamento do perfil profissional dos professores, eles se encontravam no período de ensino remoto. Com isso, após o retorno das aulas, no formato híbrido (ainda no mês de julho), metade dos alunos compareciam às aulas presenciais alternadamente a cada semana. Então, desenvolvemos de agosto a outubro, a investigação sobre a pré-apropriação e a apropriação original pelos professores dos jogos.

Quanto ao acompanhamento do trabalho documental do professor dentro e fora da sala de aula, esse acontece em uma variedade de lugares (na casa do professor, escola, em sala de aula, em cursos de formação continuada dentre outros) (BELLEMAIN; TROUCHE, 2019). No nosso caso, realizamos entrevistas com Luzia e José por meio da plataforma digital *Google Meet*, quando estavam em suas casas, e comparecemos à escola para observar e recolher registros audiovisuais da implementação do jogo escolhido por eles.

No que tange à ampla coleta dos recursos materiais utilizados e produzidos no trabalho de documentação, consideramos que para o trabalho documental, o professor utiliza uma variedade de recursos e se faz necessário ter acesso a esses métodos da melhor maneira possível, o que implica em uma busca aprofundada pelas fontes de cada recurso. Assim, buscamos verificar cada recurso indicado por Luzia e José, constituintes da sequência de ensino sobre o tema Equação do 1º Grau desenvolvida nas turmas escolhidas para a implementação do jogo. No caso de Luzia, uma turma do 9º ano e de José, uma turma do 7º ano.

Sobre o princípio de acompanhamento reflexivo do trabalho de documentação, buscamos envolver Luzia e José ativamente na coleta de dados, de forma que o envolvimento ativo deles ocasionasse uma postura reflexiva, sobre seu próprio trabalho documental.

Destacamos que um estudo sobre a apropriação de um novo recurso, com base no modelo desenvolvido por Trgalová e Rousson (2017) é realizado em três fases: pré-apropriação, apropriação original e reapropriação. Cada uma dessas fases porta diferentes procedimentos de coleta e análise de dados, pois “a instrumentação e a instrumentalização são “inferidas a partir das escolhas de uso, adaptação, modificações do recurso. As orquestrações instrumentais previstas são evidenciadas nas entrevistas ou documentos transmitidos pelo professor, enquanto

as orquestrações efetivas são observáveis na implementação do recurso¹³” (ROUSSON (2017, p. 22, tradução nossa). No nosso caso, estudamos a fase de pré-apropriação e a fase de apropriação original, antecedidas por um estudo preliminar sobre o perfil profissional dos colaboradores da pesquisa.

3.2.1 Levantamento do perfil profissional docente

Antes do estudo sobre a fase de pré-apropriação, buscamos conhecer a professora Luzia e o professor José a partir de suas trajetórias documentais, a Representação Esquemática do Sistema de Recursos (RESR) e as entrevistas. Sobre a trajetória documental, sublinhamos que “ao longo dos anos, diversos eventos desencadeiam transformações do trabalho documental do professor que gera o que nomeamos de “trajetória documental”. A palavra evento é empregada num sentido amplo, como tudo que pode levar um professor a inserir um recurso em seu trabalho” (ROCHA; TROUCHE, 2018, p. 326). Por isso, compreendemos que, ao analisarmos a trajetória documental de um professor, investigamos os eventos que são os motores do seu trabalho documental.

Esses eventos que os professores vivenciam ao longo do tempo fazem seu trabalho documental evoluir e desenvolver, gerando, então, o que definimos como trajetória documental. Esses eventos podem ser gerados pela inserção de um novo recurso na prática do professor, por sua participação em um novo coletivo, por uma parceria com um colega de trabalho, pelo trabalho com os alunos, entre outros. De modo geral, são momentos que os fazem reorganizar e transformar seus sistemas de recursos (ROCHA; TROUCHE, 2015 p. 17).

Para identificação da trajetória documental de Luzia e José, solicitamos previamente, antes de uma entrevista, que construíssem uma linha do tempo na qual deviam interrelacionar eventos e recursos de ensino. Essa linha poderia ser construída em papel e lápis ou no computador, à livre escolha deles. Sobre a RESR, essa se trata de uma representação em duplo sentido:

Uma representação externa, uma esquematização, que poderá ser explorada pelo pesquisador, que busca desta inferir os elementos da estrutura do sistema documental do professor. Uma representação interna, no sentido que ela demonstra o modo pelo qual o professor se representa e deseja apresentar àquele que o interroga, os elementos

¹³ L'instrumentalisation et l'instrumentation sont inférées des choix d'utilisation, d'adaptation, de modifications de la ressource. Les orchestrations instrumentales envisagées sont mises en évidence dans les entretiens ou documents transmis par le professeur tandis que les orchestrations effectives sont observables dans la mise en œuvre de la ressource.

da organização de seu trabalho (GUEUDET; TROUCHE, 2008, p.2, tradução nossa)¹⁴.

Desta forma, solicitamos que Luzia e José construíssem uma RESR, antes de uma entrevista, como uma espécie de organograma dos recursos que costumavam utilizar no ensino de Matemática, a fim de possibilitar ao pesquisador identificar traços do sistema de recursos e do trabalho documental desses professores.

De acordo com Assis (2018), observa-se que a RESR e a trajetória documental “não encerram em si uma identificação completa dos sistemas de recursos de um professor, cabendo ao pesquisador trazer para a análise elementos que apareçam integrados com outras estratégias de coleta de dados como, por exemplo, uma entrevista sobre o registro feito” (p. 25).

Dessa forma, propomos a realização de entrevistas com Luzia e José a fim de ampliarmos nossa compreensão sobre o lugar dos jogos matemáticos em suas atividades docentes. Para isso, realizamos entrevistas de maneira individual via *Google Meet*, e o momento foi registrado através de gravações com os recursos da referida plataforma. Assim, mediante as questões norteadoras da entrevista, propomos que os docentes explicassem a relação entre os eventos e as técnicas mencionados na trajetória documental e os recursos presentes na RESR, com uma atenção maior aos jogos porventura mencionados pelos professores.

3.2.2 Fase de pré-apropriação

Para o estudo sobre a fase de pré-apropriação, propusemos uma entrevista (via *Google Meet*) centrada na apresentação dos quatro jogos sobre Equação do 1º grau, identificados previamente nos LD da coleção Teláris (DANTE, 2018), sendo o Jogo das Equações; o Jogo das Equações Equivalentes e o Quebra-cabeça das Equações. Na coleção Araribá Mais Matemática (GAY; SILVA, 2018), o Jogo de Equações.

No recente PNLD (2020), voltado para os anos finais do Ensino Fundamental (EF), percebemos que as editoras ampliaram a oferta dos LD, em formato digital, no processo de divulgação para a escolha de suas obras, o que favoreceu o compartilhamento de seus arquivos com professores (atores da nossa pesquisa). Na entrevista com os professores, à medida que íamos apresentando cada um dos jogos, propúnhamos questões como: O que você achou do

¹⁴ une représentation externe, un schéma, qui pourra être exploité par le chercheur, qui essaiera d'en inférer des éléments de structure du système documentaire du professeur ; une représentation interne, au sens où elle donne à voir la façon dont le professeur se représente, et souhaite présenter à celui qui l'interroge, des éléments d'organisation de son travail.

jogo? Você utilizaria esse jogo em sala de aula? Para usá-lo em sala de aula, você faria alguma adaptação nesse jogo? Qual dos jogos você achou melhor? Por quê?

Uma vez que a professora Luzia e o professor José já haviam escolhido o Jogo das Equações Equivalentes, realizamos outra entrevista, na semana seguinte, a fim de esclarecer o uso dos recursos apresentados por eles sobre o ensino de Equação do 1º Grau, tais como: o plano de estudo do projeto Escola do Futuro em Casa (proposto pela Secretaria de Educação do Recife), a sequência de ensino, as fichas de atividade precedentes à aplicação do jogo, o livro didático e o plano de aula para a implementação do jogo em sala de aula.

Em particular, para a análise das OI previstas, realizamos uma entrevista específica sobre o planejamento da aula para implementação do jogo nas turmas do 9º e do 7º ano, indicadas respectivamente por Luzia e José.

Além da identificação das configurações didáticas e dos modos de execução, recorremos à adaptação de Rousson (2017) sobre a proposição das OI relacionadas aos diferentes momentos didáticos (CHEVALLARD, 1999): 1 Primeiro encontro com a tarefa; 2. Exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica de resolução; 3. Trabalho com a técnica de resolução e 4. Avaliação.

3.2.3 Fase de apropriação original

Para a fase de apropriação original, ou seja, à implementação do jogo em sala de aula, fizemos a observação de classe complementada por capturas de áudio, fotos, vídeos e anotações. Ressaltamos que nos dispusemos a confeccionar as peças do jogo escolhido pelos professores, da forma como eles solicitaram.

Por fim, fizemos uma entrevista de autoconfrontação simples, com cada participante da pesquisa. Para tanto, selecionamos algumas cenas significativas da aula, assistimos a elas juntamente com Luzia e José, suscitando neles a descrição do que viam no vídeo, “propiciando uma relação dialógica com o objeto filmado, com os sujeitos envolvidos na atividade e com o próprio pesquisador” (BRASILEIRO, 2011, p. 211). Em complemento, formulamos questões, tais como: O que você achou da experimentação do jogo em sala de aula? Quais as dificuldades dos alunos e as suas para usar o jogo? Você pretende usar esse jogo novamente? De que forma?

Por fim, sublinhamos que como procedimentos de análise dos dados, além dos já descritos, para os processos de pré-apropriação e apropriação original, buscamos identificar o Conhecimento Matemático para o Ensino em seus dois polos, que envolvem o *Conhecimento*

do Conteúdo (Conhecimento Comum do Conteúdo; Conhecimento Especializado do Conteúdo e Conhecimento do Horizonte do Conteúdo) e o *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo* (Conhecimento do Conteúdo e Ensino; o Conhecimento do Conteúdo e Estudantes e o Conhecimento do Conteúdo e Currículo).

4 RESULTADOS

4.1 ANÁLISE DOS JOGOS SOBRE EQUAÇÃO DO 1º GRAU NOS LIVROS DIDÁTICOS

4.1.1 LD da Coleção Teláris

Sobre o LD da Coleção Teláris, pudemos verificar no manual do professor que nas orientações metodológicas para um trabalho significativo com os alunos, Dante (2018, VIII), destaca a importância de incentivar cada aluno a pensar, raciocinar, criar, relacionar ideias, descobrir e ter autonomia de pensamento. Nesta direção, o autor adverte que é preciso criar oportunidades e condições na sala de aula para os alunos possam descobrir e apresentar as próprias experiências, por meio de jogos e outros recursos.

No tópico específico sobre jogo, Dante (2018) afirma-se que: “Por meio de atividades lúdicas e desafiadoras, incentiva-se o importante trabalho cooperativo em duplas ou em pequenos grupos” (p. XIX¹⁵). Além disso, chama a atenção para o fato de que os alunos da faixa etária que estudam nos anos finais do EF, “ainda aprendem muito brincando, interagindo com os colegas e se desenvolvendo integralmente” (p. XX). Com isso, é sugerido que o professor:

Organize-os em grupos e incentive-os a jogar de acordo com os conceitos e os procedimentos matemáticos envolvidos no jogo. Durante as partidas, a interação entre os participantes produz aprendizagem - muitas vezes, o que não aprendeu em uma aula ou em uma lição do livro é assimilado no momento lúdico. Ao acompanhar os grupos ou as duplas nos momentos das partidas, analise as dificuldades que cada um tem e, posteriormente, busque saná-las (DANTE, 2018, p. XX).

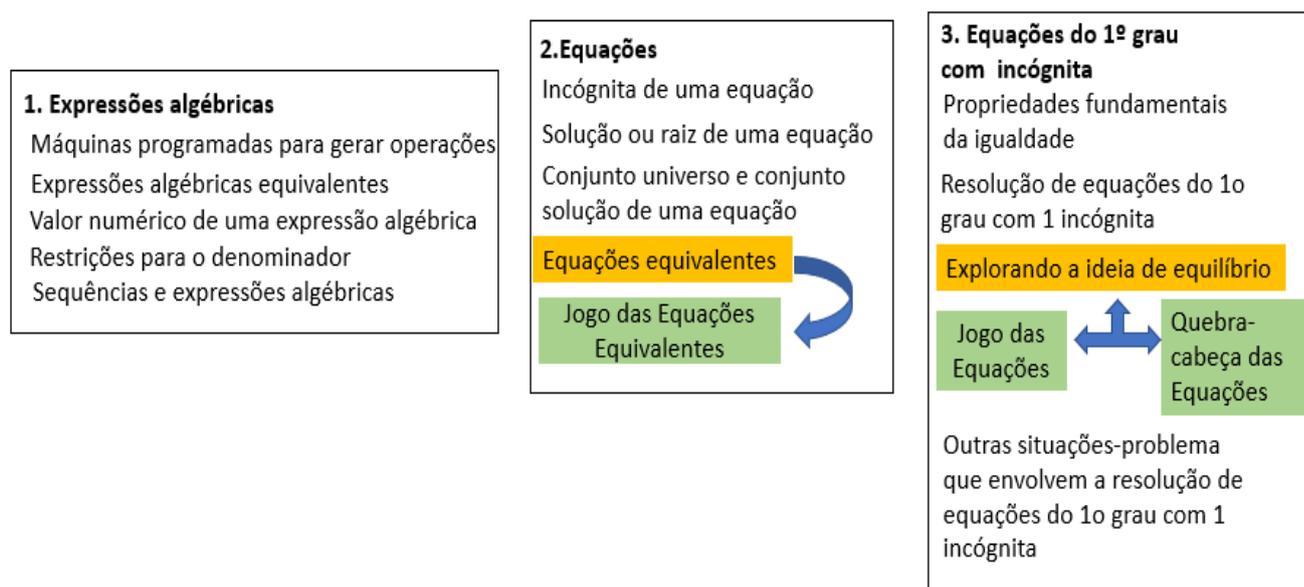
Nesta coleção ocorre a indicação de jogos, divertimentos e quebra-cabeças como recursos didáticos auxiliares ao estudo de temas matemáticos. É dito que: “Por meio desses

¹⁵ Boa parte das análises são pautadas mediante o Manual do Professor. Por isso, a numeração de algumas páginas da Coleção Teláris será referenciada em algarismos romanos, conforme a apresentação exposta no manual. (*Grifos nossos*)

recursos, os alunos aprendem Matemática brincando. Em um jogo, cada aluno desempenha papel ativo na construção do conhecimento, desenvolvendo raciocínio e autonomia, além de interagir com os colegas” (DANTE, 2018, p. XXXII). Além disso, sugere-se que o professor organize um espaço do tipo laboratório de Matemática, sala ambiente de Matemática, ou até mesmo um cantinho da Matemática para o uso de jogos, tais como: damas, xadrez, matrix, dominó, bingo e outros jogos - que permitam explorar conceitos matemáticos, incluindo aqueles inventados pelos alunos, pois o autor destaca que “o uso de jogos no ensino pode favorecer o desenvolvimento de inúmeras habilidades e competências, inclusive as socioemocionais” (DANTE, 2018, p. 112).

Em particular, na coleção Teláris, os jogos sobre Equação do 1º grau foram propostos no Capítulo 4 - Expressões algébricas e Equação do 1º grau (Figura 5), especificamente no tópico 2, sobre Equações Equivalentes (Jogo das Equações Equivalentes) e no tópico 3, “Explorando a ideia de equilíbrio” (Jogo das Equações e Quebra-cabeça das Equações).

Figura 5 - Organização do Capítulo 4 – Expressões algébricas e Equação do 1º grau



Fonte: Autoria própria (apud DANTE, 2018).

Ressaltamos que o *Jogo das Equações Equivalentes* está disponível no LD do aluno, enquanto o *Jogo das Equações e Quebra-cabeça das Equações* se encontram apenas no LD do professor. Apresentamos a seguir cada um desses jogos:

Figura 6 - Jogo das Equações Equivalentes

JOGOS

Atividade para o Ensino Fundamental II

Jogo das equações equivalentes

Com este jogo você vai aprimorar seus conhecimentos sobre equações equivalentes.

Orientações

Número de participantes: 3 ou 4 jogadores.

Material necessário: 2 folhas de papel de cores diferentes.

Preparação do jogo

Providenciem as 2 folhas de papel de cores diferentes, para exemplificar, usaremos as cores vermelho e azul.

Dividam cada folha em 12 partes iguais, escrevam as equações e recortem as 24 peças do jogo.

$3x = 6$ Solução: $x = 2$	$4x = 2$ Solução: $x = \frac{1}{2}$	$x + 5 = 3$ Solução: $x = -2$	$3x = 15$ Solução: $x = 5$	$3x + 5 = 11$	$10x = 5$	$x = -2$	$3x + 3 = 18$
$x - 9 = 3$ Solução: $x = 4$	$1 - x = 2$ Solução: $x = -1$	$x + \frac{1}{3} = 1$ Solução: $x = \frac{2}{3}$	$\frac{x}{5} = 1$ Solução: $x = 5$	$4x = 16$	$2 - 2x = 4$	$3x + 1 = 3$	$2x = 10$
$2x - 1 = -7$ Solução: $x = -3$	$3x = 1$ Solução: $x = \frac{1}{3}$	$x + 4 = 4$ Solução: $x = 0$	$6 + x = 2$ Solução: $x = -4$	$6x - 3 = -21$	$2x = \frac{2}{3}$	$2x + 5 = 5$	$2x = -8$

Como jogar

Antes de começarem a partida, misturem as peças vermelhas e distribuam igualmente entre os jogadores. As peças azuis devem ser empilhadas no centro da mesa, com as equações viradas para baixo.

A cada rodada, o jogador pega uma peça azul e verifica se nela há uma equação equivalente a alguma das equações das peças vermelhas que estão com ele. Se houver, então o jogador separa esse par de peças. Por exemplo:

$6 + x = 2$	$2x = -8$
-------------	-----------

Caso contrário, o jogador descarta a peça azul em uma pilha separada, também sobre a mesa. O próximo jogador pode escolher se quer pegar a peça azul descartada pelo jogador anterior ou uma peça azul nova.

Quando terminarem as peças azuis sobre a mesa, ganha a partida quem tiver formado mais pares de peças com equações equivalentes.

Fonte: Dante (2018, p. 112).

Podemos perceber dois tipos de tarefas no *Jogo das Equações Equivalentes* (Figura 6 – Quadro 6): T₁ - Resolver equações do 1º grau e T₂ - Identificar equações do 1º grau equivalentes entre si. Sobre T₁ - identificamos, 24 subtipos de tarefas: T_{1.1} - Resolver equação do 1º grau na forma $ax + b = c$. E, 12 para T₂, considerando os pares de equações.

Quadro 6 - Bloco prático-técnico do *Jogo das Equações Equivalentes* (LD da Teláris)

Tarefas	Técnica
T ₁ - Resolver equações do 1º grau T _{1.1} - Resolver equação do 1º grau na forma $ax + b = c$.	τ_1 - Testar a igualdade por tentativa e erro.
T ₂ - Identificar equações do 1º grau equivalentes entre si.	τ_2 - Aplicar t1. Relacionar as equações do 1º grau que apresentam a mesma solução ou raiz.

Fonte: Autoria própria (2021).

A técnica esperada para a resolução de T_{1.1} no jogo *das Equações Equivalentes*, τ_1 - Testar a igualdade por tentativa e erro, como explana Barbosa (2017) “consiste em resolver a equação, verificando-se a igualdade por meio de tentativas e aproximações, substituindo-se a incógnita por valores numéricos, isto é, transformam-se expressões algébricas em expressões aritméticas” (p. 85). A tecnologia (Figura 7) que justifica τ_1 , segundo Barbosa (2017) são as “Propriedades gerais da igualdade (θ PGI) ou lei do cancelamento” (p.92):

$$\text{Se } a + b = a + c \Leftrightarrow b = c.$$

$$\text{Se } a \cdot b = a \cdot c \Leftrightarrow b = c, \text{ com } a \neq 0.$$

Figura 7 – Tecnologia associada à τ_1 no *Jogo das Equações Equivalentes* - LD da Teláris.

- Se $U = \{1, 2, 3, 4\}$ e $x + 2 = 5$, então podemos resolver essa equação testando os elementos do conjunto universo.

$$1 + 2 = 3 \quad 2 + 2 = 4 \quad 3 + 2 = 5 \quad 4 + 2 = 6$$

Essa equação é verdadeira para $x = 3$. Então, o conjunto solução dessa equação é $S = \{3\}$.

- As soluções da equação $x^2 - 3 = 6$ são $x = 3$ e $x = -3$.

Se $U = \mathbb{N}$, então $S = \{3\}$, pois $3 \in \mathbb{N}$ e $-3 \notin \mathbb{Z}$.

Se $U = \mathbb{Z}$, então $S = \{-3, 3\}$, pois $-3 \in \mathbb{Z}$ e $3 \in \mathbb{Z}$.

Fonte: Dante (2018, p. 111).

A tecnologia (θ PGI) que justifica τ_2 , pode ser melhor observada na Figura 8, como o autor a apresenta.

Figura 8 - Tecnologia associada à τ_2 no *Jogo das Equações Equivalentes* - LD da Teláris.

Equações equivalentes

Equações equivalentes são aquelas que têm o mesmo conjunto solução em um mesmo conjunto universo.

Veja os exemplos.

- Se $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, então as equações $x + 1 = 5$ e $x - 3 = 1$ são equivalentes, pois têm o mesmo conjunto solução $S = \{4\}$.
- Se $U = \mathbb{N}$, então as equações $2x + x = 9$ e $x + 1 = 4$ são equivalentes, pois têm o mesmo conjunto solução $S = \{3\}$.
- Se $U = \mathbb{N}$, então as equações $x + 7 = 8$ e $x - 4 = 1$ não são equivalentes, pois $x + 7 = 8$ tem conjunto solução $S = \{1\}$ e $x - 4 = 1$ tem conjunto solução $S = \{5\}$. Ou seja, os conjuntos solução delas são diferentes para um mesmo conjunto universo.

Fonte: Dante (2018, p. 111).

Do ponto de vista da praxeologia didática, o *Jogo das Equações equivalentes* se apresenta no LD, em torno do quarto momento didático - Trabalho com a técnica, como podemos identificar nas orientações do autor especificada para este jogo: “Revise o conteúdo e exponha as regras do jogo e os objetivos desta aula. É importante que os alunos percebam que o jogo pode favorecer a formação deles, pois utilizam os próprios conhecimentos para argumentar, propor soluções e auxiliar os colegas” (DANTE, 2018, p. 112). Além disso, este autor orienta que: “Pode-se até combinar a data em que essa abordagem acontecerá, explicando aos alunos que precisam se preparar, treinando os cálculos e os procedimentos para que possam contribuir no momento da interação” (*Ibidem*).

Figura 9 – Jogo das equações

Sugestão de jogo: Jogo das equações

Número de participantes: 2 ou mais jogadores.

Modo de jogar

Em cada rodada, todos os participantes giram um clipe com auxílio de um lápis, nas 2 roletas. Quando algum participante obtiver uma equação na roleta da esquerda e a solução dela na roleta da direita, ele marca 1 ponto.

Vence a partida quem marcar 5 pontos primeiro.

Os pontos devem ser anotados em uma folha de papel à parte.

Banco de imagens/
Arquivo da editora

Fonte: Dante (2018, p. 117).

No *Jogo das Equações* (Figura 9), para T_1 - identificamos 8 subtipos de tarefas: $T_{1.1}$ - Resolver equação do 1º grau na forma $ax + b = c$.

Quadro 7 - Bloco prático-técnico do Jogo das Equações (LD da Teláris)

Tarefas	Técnica
T1 - Resolver equações do 1º grau T1.1 - Resolver equação do 1º grau na forma $ax + b = c$.	τ_3 – Neutralização de termos ou coeficientes. τ_4 – Transposição de termos ou coeficientes.

Fonte: Autoria própria (2021).

A propósito do *Jogo das Equações* (Quadro 7), identificamos a técnica τ_3 - Neutralização de termos ou coeficientes “que se caracteriza por isolar a incógnita, efetuando a mesma operação nos dois membros da equação” (ARAÚJO, 2011, p. 3). Na Figura 10, podemos perceber como o autor do LD, apresenta a tecnologia associada à τ_3 : Princípios de equivalência entre equações, isto é, entre equações com as mesmas soluções ou raízes (ØPPE), que são caracterizadas através do:

Princípio aditivo: quando aos dois membros de uma equação adiciona-se (ou deles subtrai-se) a mesma quantidade, obtém-se uma nova equação equivalente à primeira.
Princípio multiplicativo: quando se multiplicam (ou se dividem) os membros de uma equação pela mesma quantidade (diferente de zero), obtém-se uma equação equivalente à primeira (ARAÚJO, 2011, p. 92).

Figura 10 - Tecnologia associada à τ_3 em torno do *Jogo das Equações* - LD da Teláris

3 Equações do 1º grau com 1 incógnita

Propriedades fundamentais da igualdade

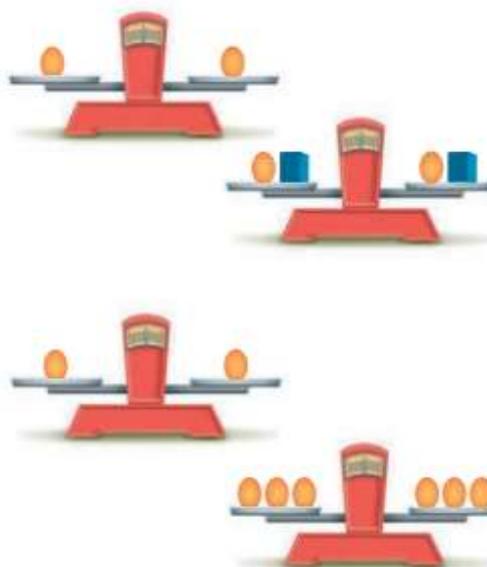
Antes de aprendermos a resolver equações do 1º grau com 1 incógnita, vamos retomar as propriedades de uma igualdade.

- 1) Se somarmos ou subtrairmos o mesmo número racional em ambos os membros de uma igualdade, obtemos uma nova igualdade. Por exemplo, se $x = 4$, então $x + 3 = 4 + 3$ e $x - \frac{1}{2} = 4 - \frac{1}{2}$.

Observe também as balanças ao lado.

- 2) Se multiplicarmos ou dividirmos ambos os membros de uma igualdade por um mesmo número racional diferente de zero (0), obtemos uma nova igualdade. Por exemplo, se $y = -2$, então $y \times 3 = (-2) \times 3$ e $y \div (-5) = (-2) \div (-5)$.

Observe também as balanças ao lado.



Ilustrações: Paulo Morais/Arquivo da editora

Fonte: Dante (2018, p. 113).

Ainda sobre o *Jogo das Equações*, entendemos ser possível a aplicação da técnica τ_4 - Transpor termos ou coeficientes “que se caracteriza por isolar a incógnita, transpondo termos constantes ou coeficientes para o outro membro da igualdade, invertendo as operações” (ARAÚJO, 2011, p.3). A técnica τ_4 se alicerça na seguinte tecnologia “Propriedades das operações inversas em \mathbb{R} (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos (θ POI)” (ARAÚJO, 2011, p. 3):

Se a, b e c são números reais tais que $a + b = c$, então $a = c - b$.

Se a, b e c são números reais tais que $a \cdot b = c$, então $a = c \div b$, $b \neq 0$.

Haja vista pela seguinte orientação ao professor (Figura 11): “Apresente também os exemplos do livro e peça que resolvam as equações das 2 maneiras” (DANTE, 2018, p.114).

Figura 11: Tecnologia associada à τ_4 em torno do *Jogo das Equações* - LD da coleção Teláris

Analise os exemplos.

- Pensei em um número natural, somei 45 a ele e obtive 121. Em qual número pensei?
Representando o número por x , temos a equação $x + 45 = 121$, que queremos resolver.

Resolução

1ª maneira

Subtraindo 45 em ambos os membros da igualdade, ela não se altera e obtemos:

$$x + 45 - 45 = 121 - 45$$

$$x + 0 = 121 - 45$$

$$x = 76$$

Verificação

$$x + 45 = 121$$

$$76 + 45 = 121$$

$$121 = 121 \text{ (verdadeiro)}$$

Resposta: O número pensado é 76.

2ª maneira

Vamos usar a operação inversa. A operação inversa de somar 45 é subtrair 45.

$$x = 121 - 45 \text{ (É uma equação equivalente a } x + 45 = 121.)$$

$$x = 76$$

Fonte: Dante (2018, p. 113).

Do ponto de vista da praxeologia didática em torno do uso do *Jogo das Equações*, indica-se nas orientações ao professor que: “Se possível, apresente o jogo sugerido *ao lado* para que os alunos possam resolver mais algumas equações enquanto se divertem” (DANTE, 2018, p. 117); o que nos remete ao quarto momento didático, que envolve o Trabalho com a técnica.

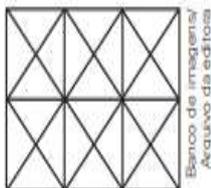
Figura 12 - Jogo Quebra-cabeça das Equações

Sugestão de jogo: Quebra-cabeça das equações

Número de participantes: 2, 3 ou 4 jogadores.

Preparando o jogo

Construam, em papel-cartão ou sulfite, 2 quadros como o representado ao lado, com as dimensões descritas a seguir. 1º quadro, que servirá de tabuleiro: retangular de medidas de comprimento de 16,5 cm por 11 cm, dividido em 6 quadrados com lados de medidas de comprimento de 5,5 cm. Cada quadrado é dividido em 4 triângulos iguais.



Banco de Imagens/
Arquivo da editora

2º quadro: retangular de medidas de comprimento de 15 cm por 10 cm, dividido em 6 quadrados com lados de medidas de comprimento de 5 cm. Cada quadrado é dividido em 4 triângulos iguais. Nesse, os 24 triângulos devem ser recortados e neles escritas as 12 equações e as 12 soluções indicadas abaixo:

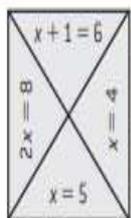
Equações				Soluções			
$x + 2 = 3$	$2x + 1 = 5$	$3x = -6$	$3x = 2$	$x = 3$	$x = 0$	$x = \frac{1}{3}$	$x = -2$
$6x = 3$	$2x + 5 = 5$	$2 - x = 3$	$x - 2 = 1$	$x = 5$	$x = 1$	$x = -1$	$x = 2$
$3x = 1$	$5x = 20$	$x - 1 = 4$	$x + 3 = 0$	$x = -3$	$x = \frac{2}{3}$	$x = 4$	$x = \frac{1}{2}$

Durante o jogo, as peças deverão ser colocadas no tabuleiro de modo que cada equação tenha a solução de frente para ela, como nos exemplos ao lado.

Como jogar

Misturem todas as peças viradas para baixo, distribuam-nas igualmente entre os participantes e decidam a ordem em que os participantes vão jogar.

O primeiro jogador coloca uma peça com equação em uma das posições indicadas nos exemplos dados.



Banco de Imagens/
Arquivo da editora

Daí em diante, cada participante faz uma destas 3 ações, pela ordem: coloca uma peça com solução de frente para uma equação que já está no tabuleiro ou coloca uma peça com equação que não fique de frente para outra equação ou passa a vez.

Atenção: uma peça com solução não poderá ser colocada se a equação correspondente não estiver no tabuleiro.

Ganha o jogo quem colocar primeiro todas as próprias peças no tabuleiro.

Fonte: Dante (2018, p.119-120).

Especificamente, sobre o jogo *Quebra-cabeça das Equações* (Figura 12), identificamos sobre T_1 , doze subtipos de tarefas: $T_{1.1}$ - Resolver equação do 1º grau na forma $ax + b = c$. De modo semelhante ao que foi apresentado no Quadro x, as técnicas associadas a T_1 , são τ_3 - Neutralização de termos ou coeficientes e τ_4 - Transposição de termos ou coeficientes, baseadas respectivamente nas tecnologias θ_{PPE} e θ_{POI} .

O jogo *Quebra-cabeça das Equações* também se remete ao quarto momento didático - Trabalho com a técnica. Vale ressaltar que esse jogo foi proposto nas orientações ao professor, semelhante ao que ocorreu no jogo *das Equações* - “para que os alunos possam resolver mais algumas equações enquanto se divertem” (DANTE, 2018, p. 117).

4.1.2 LD da Coleção Araribá Mais Matemática

Gay e Silva (2018), indicam no manual do professor que as atividades com “jogos complementam o processo de ensino-aprendizagem” (p. XI). Além disso, é dito que a coleção apresenta “diversas atividades diferenciadas, algumas para serem desenvolvidas em grupo, como por exemplo, jogos, materiais concretos, instrumentos de medição e necessitam um planejamento antecipado, para melhor explorá-las com os estudantes” (2020, p. 107).

Na coleção Araribá Mais Matemática, identificamos o Jogo de Equações, apresentado no manual do LD, em “Sugestão de Atividades e Jogos”. Nesta coleção, o uso desse jogo é indicado para o uso no Capítulo 7 (Figura 13), sem haver o direcionamento a um tópico específico.

Figura 13 - Organização do Capítulo 7 – Equações e Inequações do 1º grau

- 1. Igualdade**
- 2. Equação**
Raiz de uma equação .
Conjunto universo e conjunto solução de uma equação.
- 3. Equações equivalentes**
- 4. Equação do 1º grau com uma incógnita**
Equações e resolução de Problemas
- 5. Desigualdade**
Princípios de equivalência das Desigualdades
- 6. Inequação do 1º grau com uma Incógnita.**

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 79).

A proposta acerca do *Jogo de Equações* (Figura 14) de levar cada aluno a confeccionar as suas cartas aparece em aberto para o professor decidir se ele utiliza o jogo desta forma ou se ele segue as sugestões do modelo para confecção de cartas.

Figura 14 - Jogo de Equações – Coleção Araribá

Jogo de equações

Material necessário

- Duas folhas de cartolina, uma branca e outra amarela, por equipe.
- Canetas hidrográficas.

Participantes

- Equipes com quatro alunos.

Objetivo

- Agrupar o maior número de pares de cartas.

Regras

- Cada grupo deverá confeccionar 20 cartas brancas e 20 cartas amarelas com as cartolinas. O grupo deverá inventar equações do 1º grau e escrever uma equação em cada carta branca. A solução correspondente a cada equação deverá ser escrita em uma carta amarela. Para que sejam resolvidas por meio de cálculo mental, as equações criadas não podem ser complexas.
- Depois de confeccionadas, as cartas deverão ser trocadas com outro grupo.
- Para iniciar o jogo, cada grupo deverá embaralhar as cartas, separando as amarelas em um monte. Esse monte terá as faces com as soluções viradas para baixo e ficará no centro da mesa.
- As cartas brancas deverão ser distribuídas igualmente entre os componentes do grupo. Cada aluno observará as equações descritas nas cartas brancas, mas não deixará os demais componentes do grupo observarem suas cartas.
- Uma a uma, as cartas amarelas serão viradas no centro da mesa. Os jogadores vão observar suas cartas e verificar se há alguma equação cuja solução seja a indicada pela carta amarela exposta. Caso isso ocorra, o jogador deverá pegar a carta amarela e formar o par equação-solução, separando-o em um monte.
- Se houver dois jogadores com equações que tenham a mesma solução indicada na carta virada, ficará com a carta amarela quem a pegar primeiro.
- Ganhará a rodada o jogador que formar primeiro os cinco pares equação-solução.

Observação

- Caso haja tempo, pode-se montar um torneio em que os vencedores de cada partida se enfrentem até que se defina o grande campeão da turma.

Modelo para confecção das cartas

Branca (equação)	Amarela (solução)	Branca (equação)	Amarela (solução)
$x + 3 = 7$	A solução é o número 4.	$3k + 7 = 16$	A solução é o número 3.
$2x + 5 = 13$	A solução é o número 4.	$e + 10 = 13$	A solução é o número 3.
$5x + 20 = 30$	A solução é o número 2.	$8t - 2 = 54$	A solução é o número 7.
$y + 3 = 5$	A solução é o número 2.	$5w + 6 = 41$	A solução é o número 7.
$2z + 6 = 28$	A solução é o número 11.	$3x + 6 = 6$	A solução é o número 0.
$2w + 4 = 26$	A solução é o número 11.	$\frac{3}{4w} = 0$	A solução é o número 0.
$2s - 23 = -21$	A solução é o número 1.	$\frac{1}{2f} - 5 = 13$	A solução é o número 36.
$3k + 7 = 10$	A solução é o número 1.	$\frac{1}{3}j - 6 = 6$	A solução é o número 36.
$2y - 9 = 1$	A solução é o número 5.	$5t + 4 = -6$	A solução é o número -2.
$6q - 23 = 7$	A solução é o número 5.	$4j + 12 = 4$	A solução é o número -2.

Fonte: Gay e Silva (2018, LI).

Com base no modelo proposto para confecção de cartas, especificamente, sobre o *Jogo de Equações* identificamos 20 subtipos de tarefas T_{1.1} - Resolver equação do 1º grau na forma $ax + b = c$ (Figura 15). A técnica esperada para sua resolução é τ_3 – Neutralização de termos ou coeficientes, justificada pela tecnologia θ PPE.

Figura 15: Tecnologia associada à τ_3 em torno do *Jogo de Equações*- LD da coleção Araribá

Para pensar

Qual é a massa desconhecida, em grama, do objeto laranja na balança ao lado? **1.100 gramas**

- Na balança abaixo, há um objeto de massa a desconhecida, em grama.



$$300 + a + 300 = 1.000 + 700$$

Já vimos, no ano anterior, que uma igualdade continuará sendo válida se:

- adicionarmos ou subtrairmos o mesmo número aos seus membros;
- multiplicarmos seus membros por um mesmo número ou dividirmos seus membros por um mesmo número diferente de zero;

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 170).

Destacamos que os autores da coleção Araribá propõem sugestões de questionamentos aos alunos e variantes para o *Jogo de Equações*. Este fato foi observado apenas nesta coleção.

A saber:

Para pensar

- Se houver um conjunto de cartas com equações que tenham a mesma solução, a rodada terá um vencedor? Justifique.
- Há alguma estratégia que ajudaria um componente do grupo a ganhar o jogo? Explique.

Variantes do jogo

- Linguagem textual e linguagem algébrica

Pode-se pedir aos alunos que escrevam afirmações contendo variáveis nas cartas brancas e expressões algébricas correspondentes às afirmações nas cartas amarelas. Dessa forma, será explorada a habilidade de tradução da linguagem textual para a linguagem algébrica.

- Jogo da memória

É possível, também, embaralhar todas as cartas e dispô-las viradas para baixo, em uma mesa. Em duplas, cada aluno virará duas cartas e, se forem cartas correspondentes, guardará o par (GAY; SILVA, 2018, p. LII).

Diante dos itens mencionados acima “Para Pensar”, “Variantes” e o fato de o *Jogo de Equações* não ser situado em um tópico específico do Capítulo 7 – Equações e Inequações do 1º grau no LD do aluno, podemos inferir que seria o caso de considerar seu uso para o segundo momento didático - Exploração do tipo de tarefas T e de elaboração de uma técnica t relativa a esse tipo de tarefas e quarto momento didático - Trabalho da técnica.

4.1.3 Síntese dos resultados

No Quadro 8, apresentamos uma síntese das organizações matemáticas identificadas com os jogos sobre Equação do 1º grau nos LD das coleções Teláris e Araribá.

Quadro 8 – Síntese da análise dos jogos nos LD

LD	Jogo	Tarefas		Técnicas	Tecnologias
		T	Fq		
Teláris	Jogo das Equações Equivalentes	T _{1.1}	24	τ_1	θ PGI
		T ₂	12	τ_2	θ PGI
	Jogo das equações	T _{1.1}	8	τ_3	θ PPPE
				τ_4	θ POI
Quebra Cabeça das Equações	T _{1.1}	12	τ_3	θ PPPE	
			τ_4	θ POI	
Araribá Mais Matemática	Jogo das Equações	T _{1.1}	20	τ_3	θ PPPE

Fonte: Autoria própria (2021).

Pelo exposto sobre a organização matemática dos jogos propostos nos LD (Quadro 8), constatamos que a T_{1.1} - Resolver equação do 1º grau na forma $ax + b = c$, foi aquela mais evidente. Sendo, o Jogo das Equações Equivalentes, o único a apresentar T₂ - Identificar

equações do 1º grau equivalentes entre si. Além disso, esse jogo é aquele com o maior número de equações propostas para resolução por parte dos alunos.

4.2 ANÁLISE DA APROPRIAÇÃO DA PROFESSORA LUZIA DOS JOGOS SOBRE EQUAÇÃO DO 1º GRAU

4.2.1 A professora Luzia e sua relação com os jogos matemáticos

A partir da trajetória documental da professora Luzia, levantamos dois períodos marcantes em seu desenvolvimento profissional e relevantes ao uso de jogos matemáticos em sua prática docente: 1. O início de sua carreira (2013-2016), com seu ingresso no quadro docente da Rede Municipal do Recife; 2. Os últimos cinco anos (2017-2021), iniciando pelo seu ingresso, como professora, na Rede Estadual de Ensino de Pernambuco.

Figura 16 - Trajetória documental da professora Luzia (2013-2016)



Fonte: Protocolo da pesquisa (2021).

Sobre a trajetória documental de Luzia (Figura 16), ela afirmou ter, desde o início de sua carreira docente, o desejo de trabalhar com jogos matemáticos, pois; *“Desde o primeiro contato com a sala de aula, foi um pensamento meu, muito forte, ter os conteúdos atrelados ao uso de jogos, pela dinâmica que possibilitam. Também, pela dificuldade de concentração e compreensão dos conteúdos pelos alunos”*.

Consideramos que o seu trabalho no projeto “Mente Inovadora”, iniciado em 2016, foi o que lhe possibilitou, sobretudo, o uso de jogos no ensino de Matemática. Como ela destaca na entrevista:

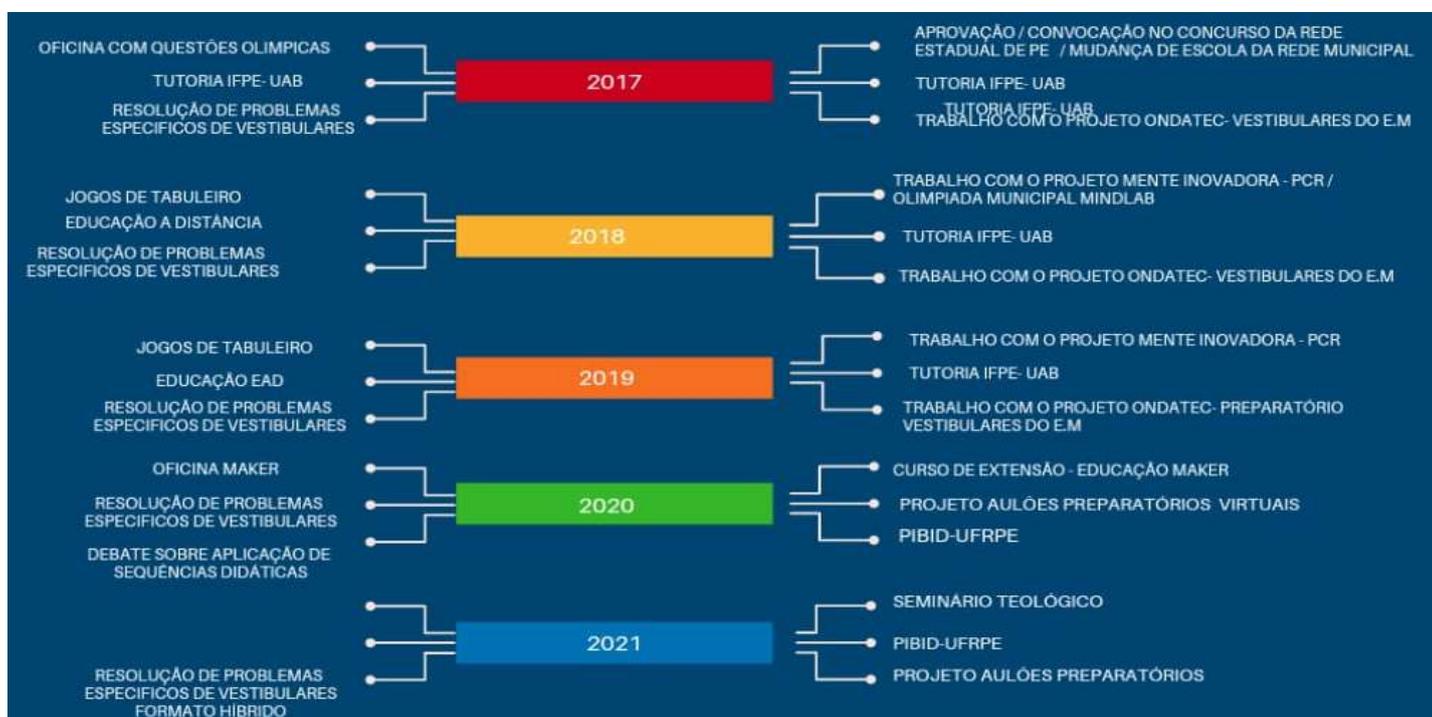
Luzia: *A prefeitura lançou o projeto “Mente Inovadora” que visava trabalhar com jogos e outras habilidades. O “Mente Inovadora” explorava vários jogos de tabuleiro tradicionais, como “jogo de dama” e outros. Passei em média uns dois anos na atual escola a frente desse projeto. E aí, foi quando a prefeitura o encerrou, mas não encerrou o meu trabalho nessa perspectiva de ensinar Matemática com jogos.*

Com isso, a estrutura do projeto “Mente Inovadora” proporcionou à professora uma rotina semanal de utilização de jogos em diversas turmas do Ensino Fundamental.

Luzia: *Tínhamos a dinâmica de trabalhar em sala de aula, porque era por módulo. Havia jogos direcionados ao 6º, 7º, 8º e 9º ano, com apostilas, com sequências de atividades específicas relacionadas à Matemática. Os jogos estavam presentes nessas apostilas e cadernos de exercícios que cada estudante recebia.*

Segundo Luzia, havia uma rotina do uso de jogos de tabuleiro no projeto “Mente Inovadora”, mas sempre que ocorria uma oportunidade, ela trabalhava algum jogo voltado para um conteúdo específico de Matemática. Em particular, sobre o tema da presente pesquisa, ela mencionou ter utilizado o “Dominó de Equações”, encontrado em um LD (que não recordava o nome).

Figura 17 - Trajetória documental da professora Luzia (2017-2021)



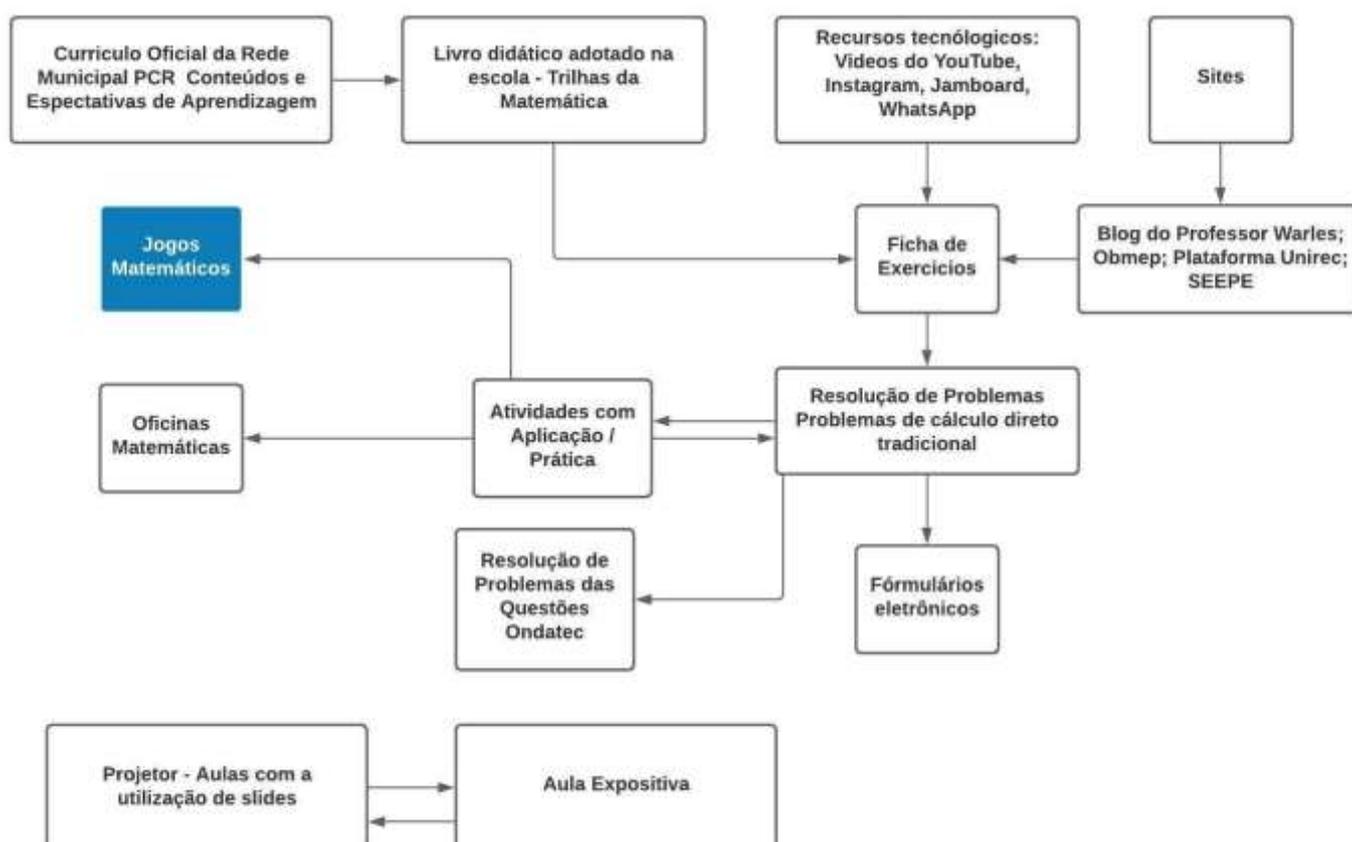
Fonte: Protocolo da pesquisa (2021).

Luzia afirmou que só a partir dos últimos três anos é que ela começou a utilizar “jogos digitais” (ex. Kahoot, Wordwall). Isso ocorreu, principalmente, devido ao contexto do ensino remoto e de sua participação nos projetos: “Aulões Preparatórios Virtuais” e Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) (Figura 17). Declarou a professora: “Vendo os recursos que a internet disponibiliza para aplicações em sala de aula. Posso dizer que, inicialmente, trabalhei a partir dos jogos de tabuleiro, os jogos mais tradicionais, mais comuns e aí depois fui avançando nesses jogos digitais.”

Por fim, sobre a utilização de jogos, a professora comentou: “Não podemos fazer uma utilização aleatória, não é simplesmente aplicar o jogo como uma espécie de uso do tempo da aula. Temos que ter uma utilização responsável dos jogos, de maneira que esse seja um recurso para ensinar o conteúdo e facilitar o processo de aprendizado”. Além disso, foi ressaltado que a rede municipal incentiva bastante o uso de atividades lúdicas e diversificadas como os jogos pelos professores.

A RESR apresentada por Luzia possibilitou-nos aprofundar a análise sobre o papel dos jogos matemáticos em seu sistema de recursos. Na Figura 18, podemos observar que a professora estabelece uma conexão entre os jogos e as atividades com aplicação/prática - oficinas - resolução de cálculo direto - tradicional.

Figura 18 - Representação Esquemática do Sistema de Recursos de Luzia



Fonte: Protocolo da pesquisa (2021).

Sobre a conexão entre os jogos e as atividades com aplicação/prática, a professora referiu que antes realizava uma vez a cada mês, e isso foi intensificado no ensino remoto.

Luzia: *Eu procuro fazer oficinas, utilizar jogos, filmes. Quando teve a abertura das aulas online, essa dinâmica dos jogos e das oficinas foi melhorada com os recursos tecnológicos. Vídeos do YouTube, Instagram, Jamboard, WhatsApp, esses recursos eu sempre utilizei. Mas, jogos como Kahoot e Wordwall, comecei no ensino remoto.*

Em particular, sobre o uso do LD¹⁶, Luzia afirmou: “*Eu não uso só o LD, mas ele é um recurso importantíssimo e acessível a todos. Em uma escala de 0 a 10, eu elenco a utilização do LD como 6, porque eu venho utilizando outros recursos também*”. Ela reportou não ter o hábito de utilizar jogos propostos em LD. De certa forma, isso reforçou a ideia de pesquisar as fases de apropriação de um dado jogo proposto em dos LD, como expomos a seguir.

4.2.2 A pré-apropriação do Jogo das Equações Equivalentes pela professora Luzia

A partir da entrevista baseada na apresentação dos quatro jogos propostos nos LD, esclarecemos o que levou Luzia a escolher o *Jogo das Equações Equivalentes* e refutar os demais: *Quebra-cabeça das Equações* (DANTE, 2018); *Jogo das Equações* (DANTE, 2018) e *Jogo de Equações* (GAY; SILVA, 2018).

I. A refutação dos jogos analisados pela professora Luzia

A propósito do *Quebra-cabeça das Equações* (Figura 19), a professora comentou:

Luzia: *Para estruturarmos as peças nesse formato retangular, teríamos que construir um molde para os alunos irem sobrepondo as peças. Acho que estou entendendo o jogo, nós temos que cortar os 24 triângulos. Se for os triângulos dá para fazer, mas se for o quadrado? Eu já vi um jogo parecido com esse, mas ele já vinha montado para o professor, aqui temos que montar nesse retângulo. A relação entre equação e resposta tem que corresponder em ambos os lados do quadrado formado pelo encaixe? Está confuso isso. Temos que ter tempo para testá-lo antes.*

Figura 19 - Quebra-cabeça das Equações

¹⁶ LD adotado na escola: Trilhas da Matemática - autoria de Fausto Arnaud Sampaio. Editora Saraiva.

Durante o jogo, as peças deverão ser colocadas no tabuleiro de modo que cada equação tenha a solução de frente para ela, como nos exemplos ao lado.

Como jogar

Misturem todas as peças viradas para baixo, distribuam-nas igualmente entre os participantes e decidam a ordem em que os participantes vão jogar.

O primeiro jogador coloca uma peça com equação em uma das posições indicadas nos exemplos dados.



Daí em diante, cada participante faz uma destas 3 ações, pela ordem: coloca uma peça com solução de frente para uma equação que já está no tabuleiro ou coloca uma peça com equação que não fique de frente para outra equação ou passa a vez.

Atenção: uma peça com solução não poderá ser colocada se a equação correspondente não estiver no tabuleiro.

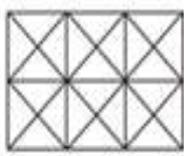
Ganha o jogo quem colocar primeiro todas as próprias peças no tabuleiro.

Sugestão de jogo: Quebra-cabeça das equações

Número de participantes: 2, 3 ou 4 jogadores.

Preparando o jogo

Construam, em papel-cartão ou sulfite, 2 quadros como o representado ao lado, com as dimensões descritas a seguir. 1º quadro, que servirá de tabuleiro: retangular de medidas de comprimento de 16,5 cm por 11 cm, dividido em 6 quadrados com lados de medidas de comprimento de 5,5 cm. Cada quadrado é dividido em 4 triângulos iguais.



2º quadro: retangular de medidas de comprimento de 15 cm por 10 cm, dividido em 6 quadrados com lados de medidas de comprimento de 5 cm. Cada quadrado é dividido em 4 triângulos iguais. Nesse, os 24 triângulos devem ser recortados e neles escritas as 12 equações e as 12 soluções indicadas abaixo:

Equações				Soluções			
$x+2=3$	$2x+1=5$	$3x=-6$	$3x=2$	$x=3$	$x=0$	$x=\frac{1}{3}$	$x=-2$
$6x=3$	$2x+5=5$	$2-x=3$	$x-2=1$	$x=5$	$x=1$	$x=-1$	$x=2$
$3x=1$	$5x=20$	$x-1=4$	$x+3=0$	$x=-3$	$x=\frac{2}{3}$	$x=4$	$x=\frac{1}{2}$

Fonte: Dante (2018, p. 119-120).

Podemos compreender que o processo de instrumentação do *Quebra-cabeça das Equações* (Figura 19), por Luzia, sofreu limitações em virtude das regras confusas sobre a disposição das peças no tabuleiro, ou seja, da articulação entre as peças “equações” e “soluções”. Isso levou a professora a descartar esse jogo para possível uso em sala de aula.

Sobre o *Jogo das Equações* (Figura 20), Luzia não o escolheu, mas manifestou ter gostado dele. Como indício do processo de instrumentação, destacamos a seguinte narrativa vinda da professora: *Eu entendi que uma roleta das respostas é girada e na outra roleta o aluno precisa resolver a equação e a resposta tem que ser correspondente com o que ele girou antes. Gostei.*

Figura 20 - Jogo das Equações

Sugestão de jogo: Jogo das equações

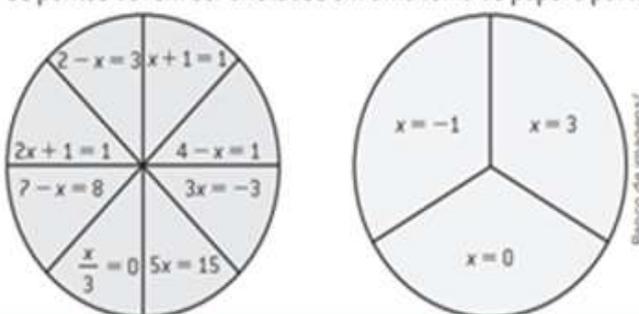
Número de participantes: 2 ou mais jogadores.

Modo de jogar

Em cada rodada, todos os participantes giram um clipe com auxílio de um lápis, nas 2 roletas. Quando algum participante obtiver uma equação na roleta da esquerda e a solução dela na roleta da direita, ele marca 1 ponto.

Vence a partida quem marcar 5 pontos primeiro.

Os pontos devem ser anotados em uma folha de papel à parte.



Fonte: Dante (2018, p. 117).

Quanto ao processo de instrumentalização do *Jogo das Equações* (Figura 20), temos indícios da influência do Conhecimento do Horizonte do Conteúdo Equação do 1º grau. Pois,

para Luzia, o nível de resolução das equações propostas no jogo estava “muito básico”. Haja vista sua intenção de usar o jogo em uma turma do 9º ou do 7º ano do Ensino Fundamental.

Luzia: *Esse é um jogo bem sugestivo para que a gente possa fazer variações. Poderia envolver Equação do 2º grau, pensando no 9º ano. Para o 7º ano, eu colocaria outras equações, aumentaria a quantidade de equações. Eu não deixaria as respostas imediatas, daria um trabalhinho aos alunos para resolvê-las. Eu colocaria algumas com potência, daria um nível maior de dificuldade ao jogo.*

A professora apontou uma possível OI para uso do *Jogo das Equações* (DANTE, 2018): *Eu usaria o jogo confeccionado em duas roletas gigantes expostas no quadro branco e assim poderia interagir, ao mesmo tempo, com todos os alunos da turma.*

No que concerne ao *Jogo de Equações* (GAY; SILVA, 2018), destacamos, no processo de instrumentalização, o Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos de Luzia. A professora demonstrou sua preocupação em propor a resolução de equações por cálculo mental e elaboração de equações pelos alunos: *“Meu cuidado seria com as etapas do jogo, porque se a gente utilizar equações mais simples, dá para usar o cálculo mental, porém se for equações mais difíceis, não dá”*.

Ela comentou sobre os alunos “inventarem equações do 1º grau” e concluiu que *“para resolver eu ficaria mais tranquila, mas, para eles elaborarem as equações? Poderiam até conseguir as mais básicas. Então, acho que para eles montarem o jogo, seria mais complexo.* Em virtude do exposto, a professora afirmou que optaria pelo modelo para confecção das cartas (Figura 21), proposto no LD.

Figura 21 - Jogo de Equações

Jogo de equações

Material necessário

- Duas folhas de cartolina, uma branca e outra amarela, por equipe.
- Canetas hidrográficas.

Participantes

- Equipes com quatro alunos.

Objetivo

- Agrupar o maior número de pares de cartas.

Regras

- Cada grupo deverá confeccionar 20 cartas brancas e 20 cartas amarelas com as cartolinas. O grupo deverá inventar equações do 1º grau e escrever uma equação em cada carta branca. A solução correspondente a cada equação deverá ser escrita em uma carta amarela. Para que sejam resolvidas por meio de cálculo mental, as equações criadas não podem ser complexas.
- Depois de confeccionadas, as cartas deverão ser trocadas com outro grupo.
- Para iniciar o jogo, cada grupo deverá embaralhar as cartas, separando as amarelas em um monte. Esse monte terá as faces com as soluções viradas para baixo e ficará no centro da mesa.
- As cartas brancas deverão ser distribuídas igualmente entre os componentes do grupo. Cada aluno observará as equações descritas nas cartas brancas, mas não deixará os demais componentes do grupo observarem suas cartas.
- Uma a uma, as cartas amarelas serão viradas no centro da mesa. Os jogadores vão observar suas cartas e verificar se há alguma equação cuja solução seja a indicada pela carta amarela exposta. Caso isso ocorra, o jogador deverá pegar a carta amarela e formar o par equação-solução, separando-o em um monte.
- Se houver dois jogadores com equações que tenham a mesma solução indicada na carta virada, ficará com a carta amarela quem a pegar primeiro.
- Ganhará a rodada o jogador que formar primeiro os cinco pares equação-solução.

Modelo para confecção das cartas

Branca (equação)	Amarela (solução)	Branca (equação)	Amarela (solução)
$x + 3 = 7$	A solução é o número 4.	$3k + 7 = 16$	A solução é o número 3.
$2x + 5 = 13$	A solução é o número 4.	$e + 10 = 13$	A solução é o número 3.
$5x + 20 = 30$	A solução é o número 2.	$8t - 2 = 54$	A solução é o número 7.
$y + 3 = 5$	A solução é o número 2.	$5w + 6 = 41$	A solução é o número 7.
$2z + 6 = 28$	A solução é o número 11.	$3x + 6 = 6$	A solução é o número 0.
$2w + 4 = 26$	A solução é o número 11.	$\frac{3}{4w} = 0$	A solução é o número 0.
$2s - 23 = -21$	A solução é o número 1.	$\frac{1}{2f} - 5 = 13$	A solução é o número 36.
$3k + 7 = 10$	A solução é o número 1.	$\frac{1}{3}j - 6 = 6$	A solução é o número 36.
$2y - 9 = 1$	A solução é o número 5.	$5t + 4 = -6$	A solução é o número -2.
$6q - 23 = 7$	A solução é o número 5.	$4j + 12 = 4$	A solução é o número -2.

Fonte: Gay e Silva (2018, LI).

Ainda sobre o *Jogo de Equações* (Figura 21), Luzia ressaltou que “*as equações com frações, propostas no modelo, têm maior nível de dificuldade, mas são necessárias. Mas, sem resolução por cálculo mental.*”. Pelos indícios da gênese instrumental desse jogo pela professora, identificamos a exclusão dessa técnica de resolução, bem como a elaboração de equações pelos alunos. Isso nos remete ao Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, visível no posicionamento dela em trabalhar as técnicas de resolução de equações: “neutralização de termos” e/ou “transposição de termos” (ARAÚJO, 2009, p. 97).

Pelo exposto, podemos identificar sobre a refutação dos jogos analisados pela professora, aspectos da instrumentação, como: falta de praticidade para a confecção das peças e de precisão sobre as regras do jogo; quanto à instrumentalização, identificamos a influência de diversos conhecimentos docentes, como: Conhecimento do Conteúdo e do Aluno - dificuldades dos alunos em resolver equações com cálculo mental e em elaborar equações do 1º grau; Conhecimento do Horizonte do Conteúdo - conteúdo abaixo do nível do 9º ano. Conhecimento do Conteúdo e do Ensino - preferência pessoal de técnicas para resolução de equações (instrumentalização).

- ❖ **A escolha do *Jogo das Equações Equivalentes* e as expectativas de sua inserção na sequência de ensino sobre Equações do 1º grau**

A escolha do *Jogo das Equações Equivalentes* por Luzia revelou indícios de sua instrumentação, pela plausibilidade das regras e do material proposto:

Luzia: *A partir do momento que compreendo a ideia do jogo, gosto de aplicá-lo como o original. Tenho esse perfil, normalmente não faço alterações antes da aplicação. Se vejo que dá para fazer uso em sala de aula, primeiro eu faço e a partir do retorno dos alunos, de como eles interagem, então, vou vendo as adaptações que dá para fazer.*

A única alteração que ela propôs foi retirar as respostas na apresentação nas cartas vermelhas (Figura 22), um efeito de sua instrumentalização, em virtude da intenção de levar todos os alunos a exercitarem a resolução de equações do 1º grau.

Figura 22 - Jogo das Equações Equivalentes

Jogo das equações equivalentes

Com este jogo você vai aprimorar seus conhecimentos sobre equações equivalentes.

Orientações

Número de participantes: 3 ou 4 jogadores.

Material necessário: 2 folhas de papel de cores diferentes.

Preparação do jogo

Providenciem as 2 folhas de papel de cores diferentes; para exemplificar, usaremos as cores vermelho e azul.

Dividam cada folha em 12 partes iguais, escrevam as equações e recortem as 24 peças do jogo.

$3x = 6$ Solução: $x = 2.$	$4x = 2$ Solução: $x = \frac{1}{2}$	$x + 5 = 3$ Solução: $x = -2.$	$3x = 15$ Solução: $x = 5.$	$3x + 5 = 11$	$10x = 5$	$x = -2$	$3x + 3 = 18$
$x - 1 = 3$ Solução: $x = 4.$	$1 - x = 2$ Solução: $x = -1.$	$x + \frac{1}{3} = 1$ Solução: $x = \frac{2}{3}$	$\frac{x}{5} = 1$ Solução: $x = 5.$	$4x = 16$	$2 - 2x = 4$	$3x + 1 = 3$	$2x = 10$
$2x - 1 = -7$ Solução: $x = -3.$	$3x = 1$ Solução: $x = \frac{1}{3}$	$x + 4 = 4$ Solução: $x = 0.$	$6 + x = 2$ Solução: $x = -4.$	$6x - 3 = -21$	$2x = \frac{2}{3}$	$2x + 5 = 5$	$2x = -8$

Como jogar

Antes de começarem a partida, misturem as peças vermelhas e distribuam igualmente entre os jogadores. As peças azuis devem ser empilhadas no centro da mesa, com as equações viradas para baixo.

A cada rodada, o jogador pega uma peça azul e verifica se nela há uma equação equivalente a alguma das equações das peças vermelhas que estão com ele. Se houver, então o jogador separa esse par de peças. Por exemplo:

$6 + x = 2$	$2x = -8$
-------------	-----------

Caso contrário, o jogador descarta a peça azul em uma pilha separada, também sobre a mesa. O próximo jogador pode escolher se quer pegar a peça azul descartada pelo jogador anterior ou uma peça azul nova.

Quando terminarem as peças azuis sobre a mesa, ganha a partida quem tiver formado mais pares de peças com equações equivalentes.

Na escolha do *Jogo das Equações Equivalentes*, identificamos efeitos do Conhecimento do Conteúdo e do Currículo de Luzia ao vislumbrar a integração desse jogo à sequência de ensino sobre Equação do 1º Grau para o 9º ano, em consonância com os objetivos educacionais e as orientações da Secretaria de Educação do Recife. Na Figura 23, podemos perceber que no texto didático do plano de estudo disponível na plataforma digital “Escola do Futuro em Casa”¹⁷ (Recife, 2021), apresenta-se a noção de equação equivalente.

Figura 23 - Texto didático - Plano de estudo, 9º ano, 2ª semana do ensino remoto

Texto Didático

Olá tudo bem?

Esta semana iremos estudar como resolver problemas por meio de equações do 1º grau. Como já estudamos equação do 1º grau, faremos uma breve revisão de como resolver uma equação do 1º grau e em seguida iremos apresentar alguns problemas que podem ser resolvidos utilizando essas equações.

Propriedades da igualdade

As *propriedades da igualdade* se referem ao relacionamento entre dois objetos matemáticos, sejam eles números ou variáveis.

Dizemos que há uma igualdade entre duas expressões numéricas quando os resultados dessas expressões são iguais.

Observe as implicações indicadas em cada sequência de equação abaixo.

- $n + 4 = 12 \rightarrow n + 4 - 4 = 12 - 4 \rightarrow n = 8$
- $n - 4 = 12 \rightarrow n - 4 + 4 = 12 + 4 \rightarrow n = 16$
- $n \cdot 4 = 12 \rightarrow n \cdot 4 \div 4 = 12 \div 4 \rightarrow n = 3$
- $n \div 4 = 12 \rightarrow n \div 4 \cdot 4 = 12 \cdot 4 \rightarrow n = 48$

Resumo: A raiz de uma equação não se altera se somarmos, subtrairmos, multiplicarmos ou dividirmos seus dois membros por um mesmo número.

- $a + b = c - a + b - b = c - b - a = c - b$
- $a - b = c - a - b + b = c + b - a = c + b$
- $a \cdot b = c - a \cdot b \div b = c + b - a = c + b$
- $a + b = c - a + b \cdot b = c \cdot b - a = c \cdot b$

As equações que têm raízes iguais denominam-se *equações equivalentes*. Sendo assim, resolver uma equação consiste em aplicar as propriedades adequadas de modo a encontrar equações equivalentes reduzidas até que a incógnita seja igual a um número, que é a raiz da equação.

Note que no processo de redução da equação dada a outras equivalentes, são utilizadas operações inversas procurando isolar a incógnita em um termo e os valores numéricos no outro termo.

Fonte: Recife (2021).

Conforme o depoimento da professora, no período de aulas remotas ela acompanhou o plano de estudo semanal proposto pela Secretaria de Educação. O tema Equação do 1º Grau foi proposto na 2ª semana do ensino remoto (março de 2021). Assim, ela chegou a implementar

¹⁷ No plano de estudo também constam: videoaulas no Youtube e ficha de exercícios a serem retornadas pelos alunos via plataforma *moodle* da Secretaria de Educação.

atividades por formulário eletrônico sobre Equações do 1º Grau e apenas “pincelou” a noção de equações equivalentes. Ressaltamos que as aulas no formato híbrido (uma parte presencial e outra remota) iniciaram-se no mês de julho; entrevistamos Luzia em agosto, quando ela já tinha revisado o tema Equação do 1º grau por meio das aulas presenciais.

Luzia: *Eu só tinha feito uma revisão sobre Equação do 1º Grau, como é uma turma de 9º ano, trabalhamos mais nessa perspectiva. Fiz isso, já há algumas semanas. Devido às diversas dificuldades dos alunos, comecei revisando números inteiros, polinômios, expressões algébricas. Pois nem todos acompanharam as aulas no ensino remoto.*

A professora afirmou ter disponibilizado aos alunos uma ficha de exercícios para resolução de equações e outras com situações-problema (para serem respondidas em casa e corrigidas nas aulas presenciais). Na Figura 24, temos a ficha de exercícios, fornecida pela professora, mais relacionada à proposta do jogo. Essa ficha foi elaborada havia cerca de três anos por sites da internet (não recordados pela professora) e já havia sido utilizada em outras turmas. Podemos constatar, na referida ficha, a apresentação das técnicas de resolução de equações: “transposição de termos” e “neutralização de termos” (ARAÚJO, 2009). A apresentação dessas duas técnicas foi justificada pela importância de os alunos conhecerem ambas as técnicas.

Figura 24 - Ficha de exercício para revisão do tema - aulas presenciais (9º ano)

EXERCÍCIO DE MATEMÁTICA - TREINANDO A TÉCNICA

Podemos passar (transpor) um termo de um membro para o outro desde que troquemos seu sinal ou sua operação (operação inversa).

→ Na equação: $2x = 30 - 2x$, podemos transpor o termo $-2x$ para o primeiro membro trocando o seu sinal. Assim: $2x = 30 - 2x \rightarrow 2x + 2x = 30 \rightarrow 4x = 30 \rightarrow x = 7,5$

→ Na equação: $11x = 77$, podemos transpor o fator 11, que multiplica o x para que ele divida o segundo membro 77.

ATIVIDADE 1

a) $x + 5 = 8$	b) $x - 8 = 3$	c) $x + 6 = 5$	d) $x - 7 = -7$
e) $x + 9 = -1$	f) $x - 29 = -79$	g) $10 = x + 8$	h) $15 = x + 20$
i) $x = y - 10$	j) $7 = x + 8$	k) $x - 1 = 5$	l) $x + 4 = 15$
m) $3x = 15$	n) $2x = 10$	o) $3x = -9$	p) $2x - 2 = 17 - 5x$
q) $3x - 39 = 6$	r) $4x - 9 = 23$	s) $2x - 38 = -10$	t) $3x + x = 5 + 3x$
u) $2x = 14$	v) $x = -20$	w) $4x = -12$	x) $35x = -105$

ATIVIDADE 2

a) $3x - 4 = 8x + 18$	b) $2x - 5 = 3x + 10 = 100$	c) $x - 10 = -x + 20$	d) $4x - 9 = 6x - 7$
e) $4x - 18 = 2x + 10$	f) $2x + 5 = x + 7 = 18$	g) $4x - 9 = 6x - 7$	h) $4x - 9 = 6x - 7$
i) $2x + 1 = 5x + 2$	j) $4x + 5 = x + 70$	k) $2(x + 1) + 2(x - 1) = 3$	l) $2(x + 1) + 2(x - 1) = 3$
m) $3(x + 2) + 2(x - 1) = 10$	n) $4(x + 2) + 2(x + 1) = 10$	o) $2(x + 1) + 2(x - 1) = 3$	p) $2(x + 1) + 2(x - 1) = 3$
q) $3(x + 1) - 1 = 2$	r) $2(x + 2) - 1 = 2(x + 2) - 7$	s) $3(x + 1) + 2(x - 1) = 3$	t) $3(x + 1) + 2(x - 1) = 3$
u) $2(x - 3) + x = 5$	v) $1 + 5 + 7x + 8 = 27$	w) $2(x - 1) + 2(x + 1) = 3$	x) $2(x - 1) + 2(x + 1) = 3$
y) $11x + 1 - 5x = x - 7$	z) $5(2x - 1) = 3(1x + 10)$	aa) $2(x - 3) + x = 5$	ab) $2(x - 3) + x = 5$

ATIVIDADE 3

a) $\frac{x}{2} = 18$	b) $\frac{x}{5} = 5$	c) $\frac{x}{8} = 20$	d) $\frac{x}{5} = 8$
e) $\frac{x}{6} = 11$	f) $\frac{x}{7} = 9$	g) $\frac{x}{8} = 8$	h) $\frac{x}{9} = 12$
i) $\frac{x}{7} = 3$	j) $\frac{x}{6} = 7$	k) $\frac{x}{7} = 8$	l) $\frac{x}{7} = 18$
m) $\frac{2x + 5}{3} = 2$	n) $\frac{2x + 6}{5} = 2$	o) $\frac{3x + 8}{4} = 4$	p) $\frac{4x - 5}{3} = 5$
q) $\frac{2x - 4}{6} = 0$	r) $\frac{x + 18}{5} = 5$	s) $\frac{x + 8}{4} = 4$	t) $\frac{x - 3}{7} = 1$
u) $\frac{2x + 18}{10} = 3$	v) $\frac{2x - 2}{8} = 3$	w) $\frac{4x + 8}{11} = 4$	x) $\frac{3x + 10}{9} = 5$

Handwritten work at the bottom shows: $9x = 2 = 4x + 18 \rightarrow 9x - 4x = 18 + 2$

Fonte: Protocolo da pesquisa (2021).

A ficha de exercício (Figura 24) nos deu pistas acerca das organizações matemáticas sobre Equação do 1º Grau trabalhadas na turma do 9º ano (Quadro 9), ou seja, o saber ensinado. Assim, constatamos a prevalência do subtipo de tarefa $T_{1.1}$.

Quadro 9 - Organizações matemáticas - saber ensinado – Profª Luzia

Tarefas	Qt.	Técnica	Tecnologia
$T_{1.1}$ - Resolver equação do 1º grau na forma $ax + b = c$.	46	τ_3 – Neutralização de termos ou coeficientes. τ_4 – Transposição de termos ou coeficientes.	(θ PPE): Princípios de equivalência entre equações. (θ POI): Propriedades das operações inversas em \mathbb{R} (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos.
$T_{1.2}$ - Resolver equação do 1º grau na forma $A(x) = c$	6	τ_3 – Neutralização de termos ou coeficientes. τ_4 – Transposição de termos ou coeficientes.	(θ PPE): Princípios de equivalência entre equações. (θ POI): Propriedades das operações inversas em \mathbb{R} (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos.
$T_{1.3}$: Resolver uma equação do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$	20	τ_3 – Neutralização de termos ou coeficientes. τ_4 – Transposição de termos ou coeficientes.	(θ PPE): Princípios de equivalência entre equações. (θ POI): Propriedades das operações inversas em \mathbb{R} (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos.
$T_{1.4}$: Resolver uma equação do tipo $A_1 x = A_2 x$	9	τ_3 – Neutralização de termos ou coeficientes. τ_4 – Transposição de termos ou coeficientes.	(θ PPE): Princípios de equivalência entre equações. (θ POI): Propriedades das operações inversas em \mathbb{R} (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos.

Fonte: Autoria Própria (2021).

Ao relacionarmos a ficha de exercício (Figura 24) com o jogo das Equações Equivalentes, vemos que esta apresenta um número maior de $T_{1.1}$ e este é um aspecto observado neste jogo, no qual identificamos 24 subtipos de tarefas $T_{1.1}$ e 12 subtipos T_2 , como vimos no item 4.1.1 deste trabalho. Este último, que trata da identificação das equações equivalentes, até então, não trabalhado pela professora. A ficha de exercício (Figura 24) nos chamou a atenção pela quantidade de equações a serem resolvidas. Sobre isto, Luzia explicou que várias delas são semelhantes. A esse respeito, ela declarou:

Luzia: *Então, o que é que ocorre, geralmente eu trabalho com fichas de exercícios muito extensas, não só essa, mas outras também. Se a gente observar na atividade 1, atividade 2 e atividade 3, elas são de um só tipo. Eu faço a correção por amostragem, por exemplo, de 30 questões eu faço com eles umas 15 questões, peço para eles escolherem as mais difíceis, aquelas que eles têm dúvidas, eu vou explicando.*

Diante do exposto, salientamos a influência do *Jogo das Equações Equivalentes*, com suas possibilidades e limitações, na atividade da professora (instrumentação) e a adaptação pela professora desse recurso, conforme seu contexto escolar, suas necessidades e os seus conhecimentos (instrumentalização). Destacamos sobre a instrumentação, o objetivo

apresentado pelo autor do jogo, que versa sobre “aprimorar conhecimentos sobre equações equivalentes” (DANTE, 2018), e revela o efeito do recurso sobre a professora e a sua intenção de revisar a resolução de equações, até antes pensada por ela, sem a exploração desses tipos de equações.

Luzia: *O trato com equações equivalentes, em específico, né, de forma detalhada está no jogo, mas é um tópico que trabalhamos. Eu confesso que eu trabalho e exploraria mais com alunos do 7º ano. No 9º ano, eu não faço uma ênfase tão grande ao tópico de equações equivalentes. Eu vejo uma oportunidade de fazer uma abordagem desse conteúdo por meio desse jogo, tendo em vista que é bem pertinente. Mas, para ser franca, no 9º ano não seria algo que eu iria me debruçar tanto tempo, e fazer de forma tão, como é que eu posso dizer, senão com a aplicação do jogo.*

No próximo tópico, refinamos o planejamento de Luzia para a utilização do jogo em sala de aula. Sendo assim, enfatizamos as orquestrações instrumentais previstas e os momentos didáticos (ROUSSON, 2017; CHEVALLARD, 1999).

❖ O plano de aula para a utilização do Jogo das Equações Equivalentes

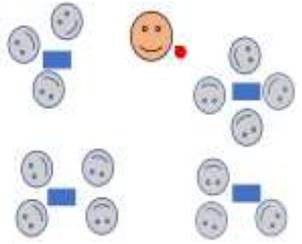
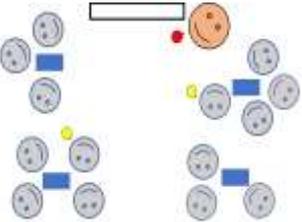
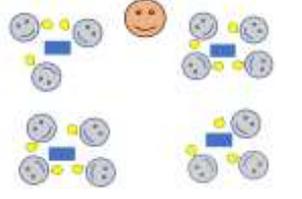
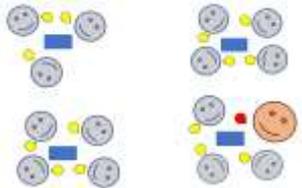
Luzia planejou a aplicação do jogo em uma turma do 9º ano com 27 alunos, cuja frequência nas aulas presenciais estava ocorrendo em rodízio, ou seja, a cada semana compareciam alternadamente 50% dos alunos. Assim, foi estimada a participação de 14 alunos. *À priori*, os artefatos elencados pela professora foram: quatro jogos, caderno para registro da resolução das equações, quadro branco e carteiras adequadas para os alunos manusearem o jogo. A previsão do tempo foi de 60 minutos¹⁸.

No Quadro 10, apresentamos os tipos de OI (DRIJVERS *et al.*, 2010; ROUSSON, 2017) selecionados pela professora, antes da aplicação do jogo em sala de aula, relacionados à sua previsão de momentos didáticos em torno da tarefa: resolver equações do 1º grau e comparar àquelas que são equivalentes.

Quadro 10 - Momentos didáticos e OI previstas na fase de pré-apropriação do jogo

Momento do primeiro encontro com a tarefa
--

¹⁸ As aulas presenciais no sistema de ensino híbrido estavam ocorrendo com a duração de 30 minutos.

	<p><i>OIC - Demonstração Técnica (DT)</i> A professora apresenta o jogo e explica suas regras, enquanto os alunos permanecem em silêncio e atentos à explicação.</p> <p><i>OIC - Explicação pela professora (EP)</i> A professora explica que os alunos devem resolver e comparar as equações do jogo a fim de verificar aquelas que apresentam o mesmo resultado, enquanto eles permanecem em silêncio e atentos à explicação.</p>
Momento de exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica de resolução	
	<p><i>OIC - Orientação e Explicação pela professora (OEP)</i> A professora revisa a noção de equações equivalentes, propondo exemplos no quadro branco para que os alunos possam comparar as equações do jogo. Algumas questões podem ser propostas aos alunos.</p>
Momento de trabalho com a técnica de resolução	
	<p><i>OIC - Discussão entre os atores (DA)</i> Em cada grupo, os alunos discutem entre si o jogo e realizam a tarefa, enquanto a professora os observa.</p>
	<p><i>OII - Trabalho e acompanhamento (TA)</i> Os grupos de alunos resolvem a tarefa no caderno e a professora circula pela sala, verificando e/ou auxiliando as respostas e acompanhando a evolução do jogo.</p>

Fonte: Autoria própria (2021).

Durante a entrevista, Luzia comentou que não avisaria aos alunos, com antecedência, sobre a aplicação do jogo. Em particular, percebemos a inquietação da professora sobre alguns alunos não recordarem a noção de equação equivalente, o que a fez optar por explicar esse tema antes do início do jogo. Ela mencionou que organizaria os alunos pela afinidade entre eles, considerando importante eles se sentirem à vontade, sem se inquietarem sobre alguém “*saber menos ou mais*”. Com expectativas acerca da implementação do jogo em sala de aula, Luzia expôs: “*Isso servirá para avaliar não somente os alunos, mas também para o que preciso trabalhar mais. Digamos que esse jogo sirva 50% para avaliar e 50% para o trabalho com exercícios.*”

Em particular, identificamos, no tocante ao Conhecimento do Conteúdo e dos alunos, a forte intenção da professora em revisar a resolução de equações, sobretudo com frações, assim

como as operações com números inteiros, sem perder de vista a comparação entre as equações para a identificação daquelas equivalentes.

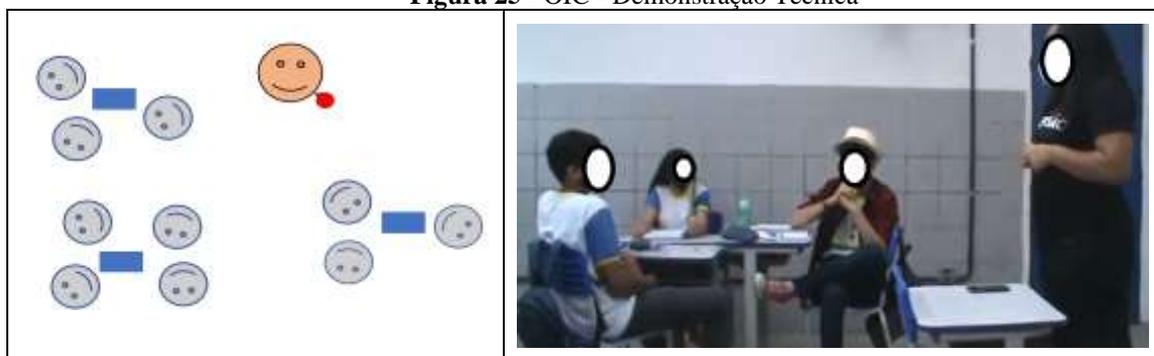
4.2.3 A apropriação original do jogo pela professora Luzia

No dia da implementação do jogo em sala de aula, compareceram 11 alunos do 9º ano e não 14, como havia estimado a professora. Sendo assim, inicialmente, ela organizou os alunos em três grupos: G1. Com três alunas, G2. Com uma aluna e dois alunos e G3. Com três alunas e um aluno. Cada grupo recebeu um jogo e tivemos início aos seguintes momentos didáticos.

❖ Momento do primeiro encontro com a tarefa

A OIC - DT (Figura 25) transcorreu como tinha sido prevista pela professora. Ela se manteve em face dos grupos, leu as regras do jogo (propostas no LD) e foi detalhando cada procedimento, enquanto os alunos a escutavam atentamente: *“Vocês receberam peças azuis e vermelhas, as azuis vocês deixarão viradas para baixo, as vermelhas vocês dividem entre vocês. Cada equipe decide quem vai começar, se quiserem podem fazer um sorteio, fiquem à vontade.”*

Figura 25 - OIC - Demonstração Técnica



Fonte: Protocolo da Pesquisa (2021).

Em seguida, a OIC-EP ocorreu com a mesma configuração didática da OIC-DT. A seguir, temos uma síntese da explicação da professora:

Luzia: *Esse jogo trata de equações equivalentes. Vocês já viram dois tipos de equação, a do 1º grau e a do 2º grau, nesse jogo vamos trabalhar com equação do 1º grau. Esse termo equivalente na língua portuguesa já nos remete a uma igualdade, mas, que igualdade é essa? Quando eu falo que uma equação é equivalente a outra, eu estou dizendo que mesmo tendo termos diferentes, o resultado que eu vou obter no final é o mesmo, Ok? Então a proposta do jogo é essa: descobrir equações que sejam equivalentes.*

Sublinhamos que, embora Luzia tenha formulado algumas questões durante a explicação supracitada, ela mesma as respondia, o que não favoreceu a participação dos alunos. Após esse momento, ela passou a explicar a resolução das equações do 1º grau e as equações equivalentes, utilizando o quadro branco.

❖ Momento de exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica

Pela OIC- EP, Luzia propôs, no quadro branco, duas equações $x + 6 = 2$ e $2x = -8$.

Figura 26 - OIC - Explicação pela professora (EP)



Fonte: protocolo da pesquisa (2021).

Ela iniciou a explicação sobre a resolução das equações a partir da técnica de transposição de termos, enquanto os alunos permaneciam em silêncio e atentos à explicação.

Luzia: *O “x” tá aqui e o 6 a gente troca para o outro lado e muda o sinal, então aqui, de 2 eu tiro 6, vai ficar negativo, logo $x = -4$. Tudo bem, achei esse resultado aqui, agora vamos pra cá, $2x = -8$ se aqui está multiplicando, para passar para o outro lado como é que a gente faz, esse 2, passa dividindo, então o que é que a gente começa a observar aqui, que independente das equações não serem as mesmas, o resultado final foi o mesmo. É isso que vai determinar se as equações são equivalentes.*

Apesar da apresentação da técnica de transposição de termos para a resolução das equações (Figura 26), a professora também fez menção à técnica de neutralização de termos: *“Podemos usar a estratégia de resolução que isolamos o “x”, mas já entendemos também que trabalhar com equação é colocar ou retirar algo dos dois lados.”*

Pelo que observamos da sequência da aula, as OIC-EP foram guiadas pelo Conhecimento do Conteúdo e do Ensino de Luzia, no que concerne ao protótipo: definição, exemplo e exercício. Após a explicação, utilizando o quadro branco, ela se voltou aos alunos, e retomou a leitura das regras do jogo, anunciando: *“Podemos começar o jogo, se vocês tiverem alguma dificuldade ou qualquer dúvida podem falar, tenham cuidado com os ‘sinais’ (referindo-se às operações com números inteiros).”*

❖ Momento de trabalho com a técnica de resolução

Esse momento se iniciou com a OIC - Discussão entre os atores (DA), G1. Com três alunas, G2. Com uma aluna e dois alunos e G3. Com três alunas e um aluno pela qual Luzia se colocou na posição de observadora das discussões dos alunos sobre o jogo.

Figura 27 - OIC - Discussão entre os atores (DA)



Fonte: protocolo da pesquisa (2021).

A partir da observação da professora sobre o desempenho didático dos alunos (Figura 13), ela percebeu que o G2 estava resolvendo todas as equações das cartas vermelhas para depois iniciar o jogo, o que a surpreendeu e fez com que ela decidisse socializar essa estratégia aos demais alunos. Nesse episódio, podemos perceber indícios da gênese instrumental do jogo por parte dos alunos e o impacto disso sobre a gênese da professora, levando-a a reorientar os demais alunos (OIC - EP): *“O que eles estão fazendo para facilitar? Já estão resolvendo as equações das cartinhas vermelhas que cada um recebeu. Façam isso! Aí quando você pegar uma carta azul, já facilita, é só resolver a equação e comparar.”*

A partir desse direcionamento aos três grupos, os alunos começaram a resolver todas as equações e iniciou-se a OII - Trabalho e Acompanhamento (TA); ou seja, Luzia começou a circular pela sala para acompanhar a atividade de cada grupo. Nesse instante da aula, ela começou a perceber que dois grupos (G1 e G3) não conseguiam avançar no jogo por dificuldades em resolver as equações.

Figura 28 - OII - Trabalho e Acompanhamento e OIC - Orientação e Explicação

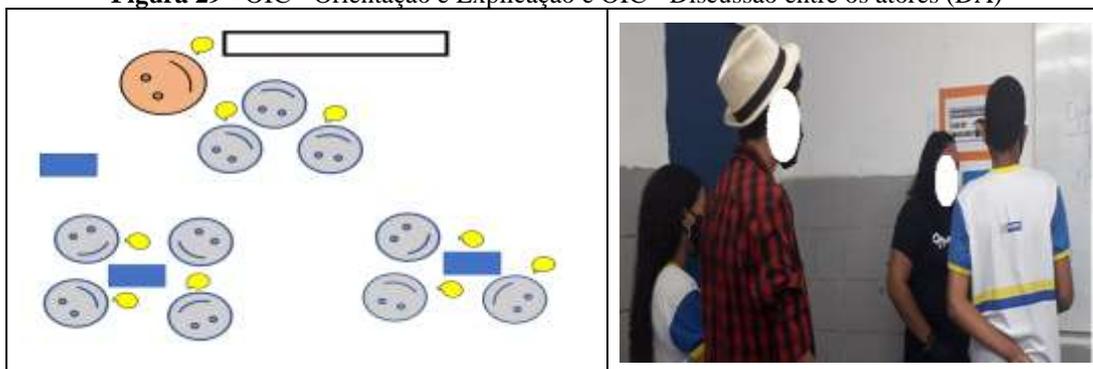


Fonte: protocolo da pesquisa (2021).

A propósito da configuração didática (Figura 28), podemos identificar dois modos de execução. Em dado episódio, Luzia auxiliou apenas oralmente os alunos do G3 (OII- TA). No caso do G1, percebemos, além da OII - TA, a OIC - Orientação e explicação (OE), tendo em vista a professora ter usado o caderno de uma das alunas para propor o exemplo de uma equação com fração, semelhante àquela proposta no jogo ($2x = \frac{2}{3}$), ocorrendo uma interação maior entre elas; isto é, à medida que a professora questionava as alunas, estas respondiam a suas perguntas.

Constatamos assim, durante a aula, indícios da instrumentalização do jogo, como suporte e modelo à proposição de mais exemplos de equações. Também percebemos esse procedimento em outro episódio, em que Luzia convidou o G2 para acompanhar sua explicação sobre a equação $4y = \frac{4}{3}$, escrita no quadro branco.

Figura 29 - OIC - Orientação e Explicação e OIC - Discussão entre os atores (DA)



Fonte: protocolo da pesquisa (2021).

Como demonstrado na Figura 29, enquanto os outros dois grupos de alunos seguiam a atividade sem o auxílio da professora (OIC - DA), em paralelo, ela orientava a resolução da equação $4y = \frac{4}{3}$ ao G2 (OIC- OE):

Luzia: O 4 está multiplicando aqui, ele vai para o outro lado como?

Aluno: Dividindo. Fica $\frac{4}{3}$ dividido por 4.

Luzia: Então $y = \frac{4}{3}$, como colocar esse 4? Como é que se resolve uma divisão de fração? Só multiplica? Inverte o de baixo vai para cima e o de cima vai para baixo, e agora?

Aluna: Mantém a primeira e inverte a segunda.

Luzia: E depois o que fazemos?

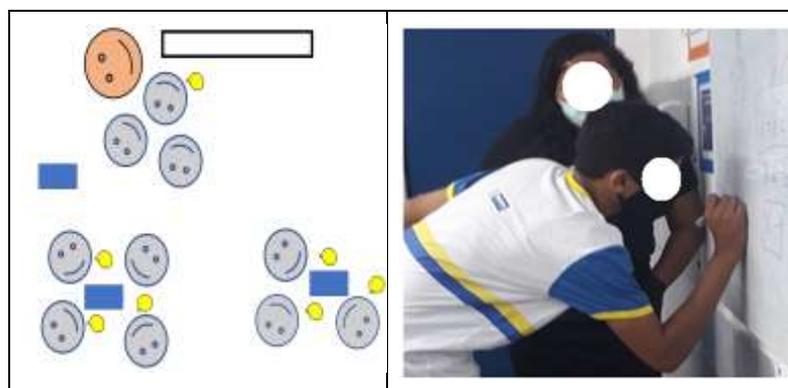
Aluno: MMC.

Luzia: Na multiplicação não se faz o MMC.

Aluno: Temos que multiplicar numerador por numerador, denominador por denominador.

Diante do exposto, a professora convidou um dos alunos a concluir a resolução da equação $4y = \frac{4}{3}$, iniciando-se a OIC – Sherpa (Figura 30). Ela e os dois alunos ficaram a observar o aluno do G2 a concluir a resposta da equação.

Figura 30 - OIC - Sherpa e OIC - Discussão entre os atores (DA)



Fonte: Protocolo da pesquisa (2021).

Após o aluno (*Sherpa*) ter concluído a resposta, a professora retomou a explicação sobre a simplificação de $y = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{12}$ no quadro branco (OIC- OE), vejamos o seguinte extrato:

Luzia: Pode ser que a fração equivalente não esteja com essa resposta $\frac{4}{12}$.

Aluno: simplifica por 4 e fica $\frac{1}{3}$.

Luzia: Também podemos simplificar esse 4 com esse 4 em $y = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}$. (ela elimina o 4 em ambas as frações). Vejam que fica $\frac{1}{3}$?

Aluno: Oxe, por que a senhora não disse isso antes?

Como última parte da aula, Luzia voltou à OII - TA. Logo que encerrou a aula, constatamos que apenas o G2 tinha chegado a ter um vencedor no jogo. O G3 chegou bem próximo da conclusão do jogo e o G1 ficou bem atrasado. Antes de ela se despedir dos alunos, informou que ainda faria outra revisão sobre o tema.

4.2.4 Pós-aplicação do jogo em sala de aula por Luzia

Pela entrevista de autoconfrontação simples, podemos melhor compreender a reação de Luzia acerca de sua apropriação original do jogo.

❖ **Momento do primeiro encontro com a tarefa**

A propósito da OIC - DT e OIC - EP, destacamos o episódio de mudança na regra do jogo, a partir da gênese instrumental do G2. Os alunos desse grupo começaram a solucionar as equações das cartas vermelhas antes de começar o jogo. Explicou Luzia: “*Eu achei uma estratégia bem pertinente, que poderia facilitar bastante o jogo, pois a partir do momento que se têm as soluções das equações, pode-se ir à comparação. Ganha-se tempo.*” De modo que essa regra foi incorporada ao jogo para outra possível utilização em sala de aula.

❖ **Momento de exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica**

Ao apresentarmos o vídeo com a explicação dos exemplos de equações equivalentes no quadro branco (OIC- EP), Luzia fez os seguintes comentários:

Luzia: *O meu pensamento em começar explicando o conteúdo foi tornar acessível o jogo a todos. Oportunizar para aqueles que esqueceram o conteúdo, resgatarem a lembrança e levá-los a se divertirem à medida que fossem respondendo as questões. Para aqueles que estavam distantes das aulas poderem aprender e desenvolver as respostas à medida que o jogo fosse acontecendo. Pensei em não deixar para explicar depois para não criar um bloqueio do brincar. A ideia foi essa: jogar e aprender.*

A professora acrescentou que no trabalho com jogos, temos a ideia de competição. Quer queira ou não, tem o desafio sobre quem vai conseguir terminar primeiro, independentemente de qualquer jogo. Por sua experiência, os alunos não conseguem se divertir em um jogo, quando se sentem “bloqueados” por não conseguirem responder às questões de Matemática.

No decorrer da explicação sobre a resolução das equações, baseada na técnica de transposição de termos (OIC-EP), Luzia comentou: “*Eu peguei essa turma esse ano. Eu não os conhecia. O nosso contato foi iniciado nas aulas remotas, mas, não com todos.*” Cabe ressaltar que a autoconfrontação baseia-se na organização de uma atividade dialógica plena de dissonâncias, em que ocorre um diálogo interior do sujeito consigo mesmo. A oportunidade desse diálogo interior decorre do fato de que o sujeito, quando da apresentação do vídeo, é confrontado com o que é exibido e sua atividade realizada (ROGER, 2013).

Dessa forma, percebemos como Luzia buscou justificar sua opção por explorar essa técnica (como macete, bizu): “*Eu identifiquei que a maioria dos alunos responde assim. Eu confesso que eu trabalho das duas formas. Como facilitador, eu trabalho com a transposição de termos, mas primeiro eu explico a balança.*”. Diante do exposto, realçamos a influência do Conhecimento do Conteúdo e do Ensino sobre a instrumentalização do jogo a partir das escolhas acerca da orientação aos alunos quanto a que tipo de técnica utilizar para a resolução das equações.

❖ **Momento de trabalho com a técnica de resolução**

No decorrer da apresentação do vídeo da aula, por meio dos episódios das OII - TA, fomos tendo acesso às reflexões da professora sobre cada grupo de alunos.

Em particular, sobre o G1, Luzia considerou: “*A equipe que só tem meninas, nenhuma delas assistiu às aulas remotas. Só as conheci no retorno das aulas presenciais.*”. Segundo a professora, esse foi o grupo mais retraído e que menos conseguiu se divertir com o jogo, em virtude das dificuldades em resolver as equações: “*Percebi muita dificuldade na mecânica do cálculo, na troca de sinais. Uma dificuldade imensa delas em compreenderem as operações inversas, quando estavam a resolver as equações.*”.

No que concerne ao G3, as considerações da professora nos remeteram ao fato de que, por meio da autoconfrontação, é comum emergirem surpresas, por vezes muito significativas diante do que foi feito efetivamente com relação ao que se acredita já ter sido feito, o que incita a reflexão por parte de quem se vê no vídeo (ROGER, 2013). Deste modo, a professora afirmou que esperava um desempenho melhor dos alunos e mensurou suas dificuldades em: 50% nas operações com frações e 50% nas operações com números inteiros.

Sobre o G2, o grupo que conseguiu chegar até ao final do jogo, ela comentou: “*Vou ser bem sincera com você, esse grupo é mais dinâmico, ágil, que assistiam às aulas remotas. Então, foi o grupo que mais conseguiu participar do jogo e se divertir.*”

A título de síntese, a partir do diálogo com Luzia, podemos identificar a integração do *Jogo das Equações Equivalentes* ao seu sistema de recursos.

Pesquisador: *Você gostou da experiência de utilizar o jogo em sala de aula?*

Luzia: *Como eu disse, eu gosto muito de trabalhar com jogos, de trabalhar com desafios. Confesso que tenho um certo receio de trabalhar com jogos dos livros didáticos, pois acho chato para os alunos. Em um jogo, o aluno não pode pensar que está apenas fazendo um exercício de Matemática. Temos que unir o exercício à*

brincadeira. Esse jogo se destaca por isso. Tem jogos nos livros que eu não gosto. Mas desse eu gostei.

Pesquisador: *Você utilizaria esse jogo novamente?*

Luzia: *Com toda certeza, ele está na minha lista.*

Sobre a instrumentalização, consideramos evidente o uso do jogo associado à intenção didática de avaliar e revisar: a resolução de equações do 1º Grau, equações equivalentes e temas como operações com números inteiros e fracionários, baseada no Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos.

Pesquisador: *Você faria alguma mudança para utilizá-lo outra vez?*

Luzia: *Olhe, eu não faria. Eu penso muito que precisamos lançar os desafios para ver o nível de dificuldade da turma. Não posso propor somente aquilo que eu sei que a turma vai dar um bom retorno, porque aí eu não vou conseguir entender as dificuldades dos alunos, nem aquilo que eu vou precisar trabalhar para poder melhorar essas dificuldades. Eu não faria alteração nas equações, deixaria da mesma forma. Quanto às regras, só começar por resolver as equações das cartas vermelhas.*

Pesquisador: *A aplicação do jogo ocorreu como você esperava?*

Luzia: *Foi dentro do esperado. Embora a gente não imagine que os alunos vão apresentar dificuldades tão gritantes. O jogo serviu para identificar e ajudá-los quanto aos diferentes níveis de dificuldades.*

Além da percepção de Luzia sobre a defasagem de aprendizagem dos alunos, consideramos que, diante da preocupação da professora, o Conhecimento do Horizonte do Conteúdo manifestou-se na instrumentalização do jogo, onde a mesma afirmou que: “*Nesta volta às aulas, estou identificando a situação das turmas, revisando os conteúdos do 6º, 7º e 8º anos para não aprovar esses alunos com muito déficit ao Ensino Médio.*”

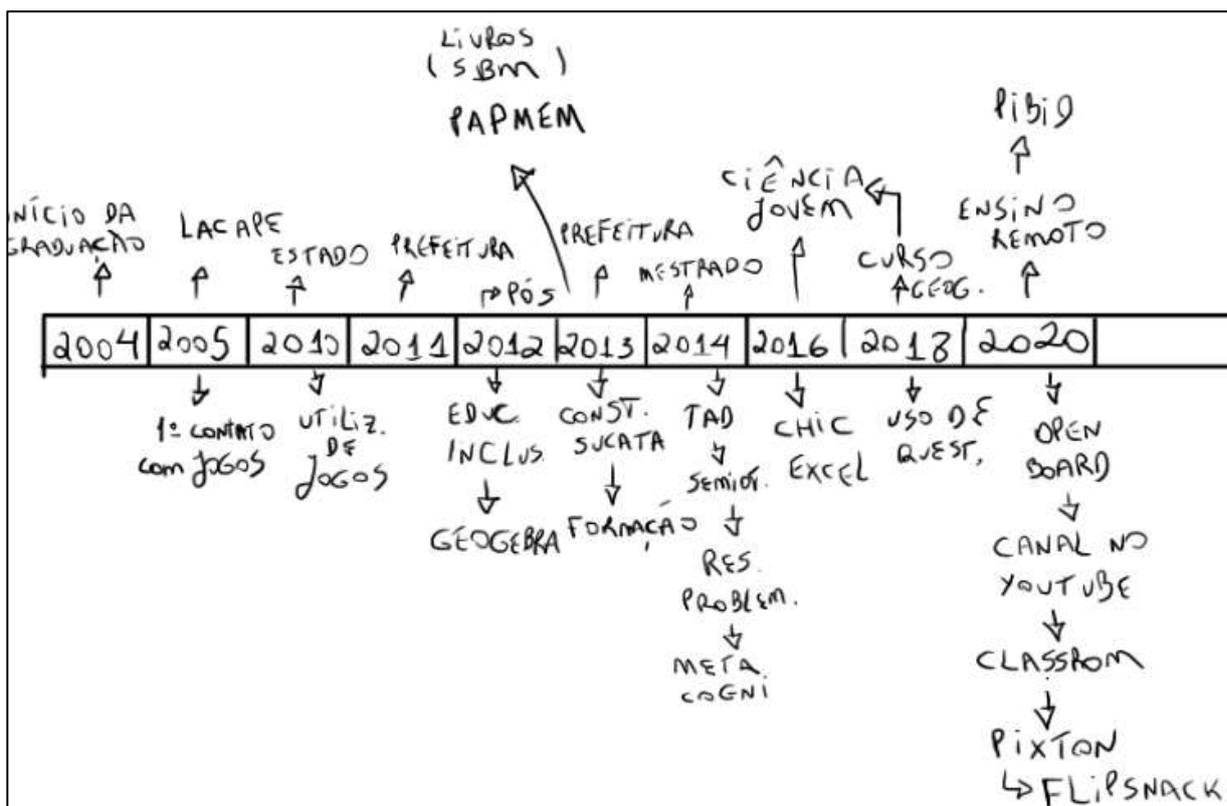
Quanto à previsão de orquestrações instrumentais para outra possível utilização do jogo, Luzia ponderou que seria de acordo com a sequência de ensino. Ela poderia não iniciar a aula explicando o tema, uma vez que já tivesse feito isso em outra aula. Talvez, chamasse mais os alunos a responderem às questões no quadro branco. Dessa forma, compreendemos que o estudo sobre a reapropriação, isto é, a retomada do jogo eventualmente adaptado a novos usos pela professora, necessitaria de outros procedimentos e um período maior de acompanhamento de seu trabalho, pois a reapropriação implicaria, por exemplo, em analisar a implementação da sequência de ensino sobre o tema, mais uma vez, com condições variadas (de contexto, de público, de recursos, etc).

4.3 ANÁLISE DA APROPRIAÇÃO PELO PROFESSOR JOSÉ DOS JOGOS SOBRE EQUAÇÃO DO 1º GRAU

4.3.1 O professor José e sua relação com os jogos matemáticos

A partir da trajetória documental de José (Figura 31), podemos identificar dois eventos marcantes em seu desenvolvimento profissional e relevantes ao uso de jogos matemáticos em sua prática docente: 1. No curso de Licenciatura em Matemática, sua experiência como bolsista do Laboratório Científico de Aprendizagem Pesquisa e Ensino (LACAPE) da UFRPE; 2. Participação no projeto “Jogos com Sucata”, na Rede Municipal de Ensino do Recife.

Figura 31 - Trajetória documental do professor José



Fonte: Protocolo da pesquisa (2021).

A propósito do primeiro contato de José com jogos matemáticos (Figura 31), ele afirmou: “No LACAPE, eu era responsável por duas coisas: catalogar os jogos (nome, material, regras) e procurar estratégias diferentes para confeccioná-los e manuseá-los”. Podemos considerar que a experiência do professor no LACAPE influenciou sua prática docente quando ingressou na rede estadual de ensino de Pernambuco.

José: No LACAPE, eu aprendi bastante coisa, foi lá que eu atinei para a ideia que todo conteúdo que vamos trabalhar com os alunos, podemos desenvolver uma “parte prática”. É por isso, que hoje eu tento desenvolver um produto no final de cada unidade. Eu entrei na rede estadual em 2010. Então, eu construí muitos dos jogos que já estavam prontos no LACAPE. Tem uns que eu faço até hoje, como a Torre de Hanói, o Mankala. Fazemos coisas desse tipo: Estávamos estudando múltiplos e

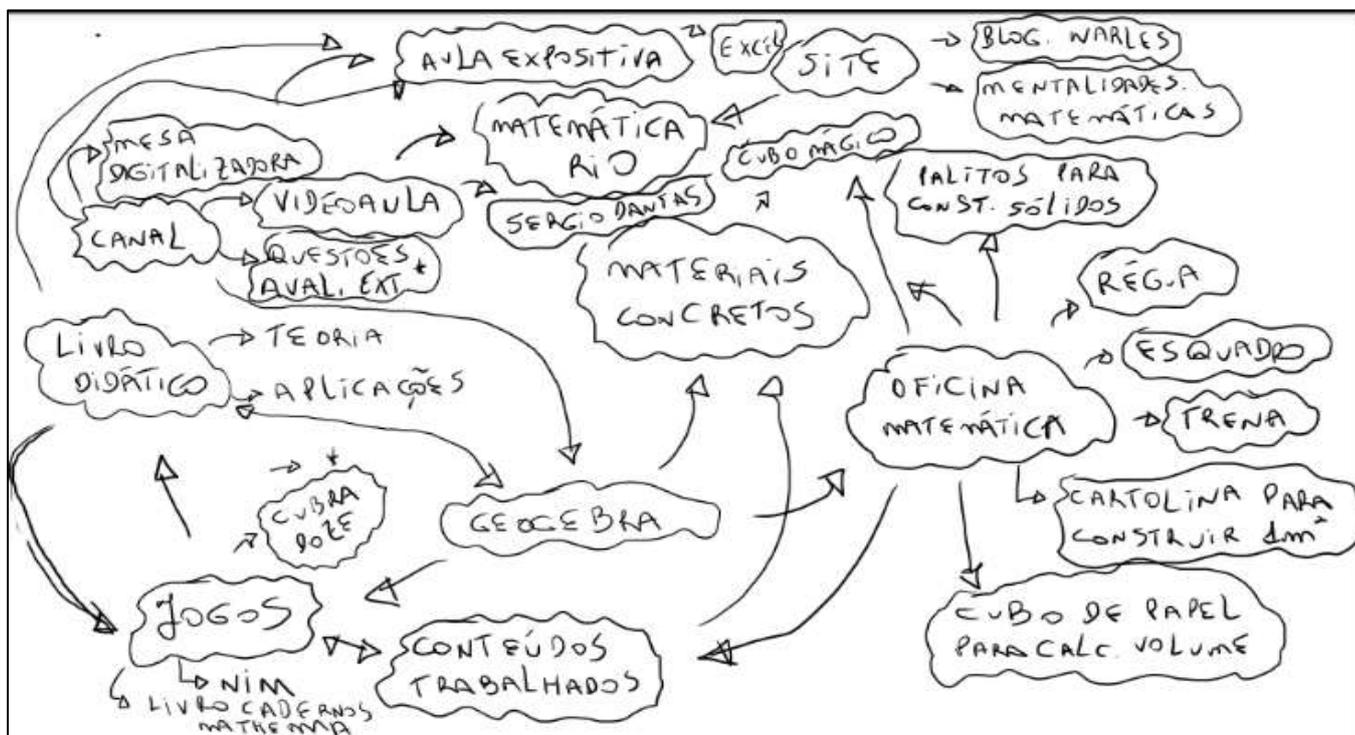
divisores no 6º ano, aí eu dividi os alunos em 4 grupos e cada um tentou desenvolver um jogo. Já elaboramos também um jogo sobre números primos.

Depois de ingressar na rede municipal, em 2013, a participação do professor no projeto de formação continuada voltado para a produção de jogos com sucata, reforçou sua vontade em utilizar jogos e materiais manipulativos em suas aulas.

José: No projeto de jogos com uso de sucata, vimos muitas coisas que podíamos utilizar, tipo: pilotos de quadro branco - quando secam ficam ruins e são descartados. Eles ficam no lixo uns 500 anos para se decompor se não os levamos para reciclagem. Eu sempre faço essas atividades com os alunos, usando também outros materiais. Foi uma formação bem proveitosa.

Ao comentar a sua RESR (Figura 32), José explicou que desenvolveu um canal no Youtube, durante a pandemia de COVID 19, no qual coloca bastante videoaulas e questões avaliativas. Sobre o uso do LD, ele afirmou: “Eu busco teoria e aplicação”. Quanto aos demais recursos, ele disse: “O blog do professor Warles eu utilizo para fazer questões de avaliações externas. O GeoGebra, linco com coisas do LD e do meu canal. Os jogos são tipo um produto da aula e estão muito relacionados aos conteúdos trabalhados no LD”.

Figura 32 - Representação Esquemática do Sistema de recursos de José



Fonte: Protocolo da pesquisa (2021).

Em particular, podemos observar que o professor estabelece uma relação entre os jogos com os conteúdos trabalhados e o livro didático adotado na escola, da coleção “A Conquista da Matemática” (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018).

José: *Os jogos estão muito relacionados aos conteúdos trabalhados e de acordo com o conteúdo, eu uso outros recursos, tipo “construções” (GeoGebra, construir um m2 na sala de aula, usando cartolina). Gosto de materiais concretos, manipulativos. Sempre faço oficinas matemáticas com esses materiais: régua, trenas (para medir a quadra); palitos de churrasco, dobradura para construção de cubo e outros. Tem também a sessão “Na prática - atividades” do site Mentalidades Matemáticas que gosto muito.*

Na RESR de José (Figura 32) temos a menção de jogos da coleção “Cadernos do Mathema” (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2006). Ele também destacou que costumava utilizar os jogos “Nim” e o “Cubra Doze” para trabalhar com os alunos as operações aritméticas. José mencionou que já tinha usado jogos de livros didáticos do PNL D (sem especificá-los), mas ainda não tinha parado para analisar aqueles propostos sobre Equação do 1º Grau.

José: *Então, eu nunca utilizei até hoje nenhum jogo que envolve Álgebra. Utilizei muito com a parte aritmética, a parte de grandezas e medidas, porque acho que é mais palpável para eles. Se eu fosse usar um jogo sobre Álgebra ia requerer muito tempo para pesquisar isso e infelizmente agora eu não tenho. Na realidade nas minhas turmas de 6º ano no final de cada bimestre, produzimos um jogo com algum assunto que a gente estudou, mas no 7º, eu não fiz. No 6º como eu tenho essa facilidade com aritmética, já ajuda bastante.*

A afirmação de José sobre nunca ter aplicado em sala de aula um jogo envolvendo Álgebra por motivos como “falta de tempo para pesquisar”, de certa forma, confluiu com a possibilidade de ele utilizar algum jogo já então pré-selecionado nos LD, presentes em nossa pesquisa. Como apresentamos a seguir nos resultados da entrevista que realizamos com José sobre os jogos que identificamos nos LD sobre Equação do 1º Grau.

4.3.2 A pré-apropriação do Jogo das Equações Equivalentes pelo professor José

A partir da entrevista baseada na apresentação dos quatro jogos propostos nos LD, esclarecemos o que levou José a escolher o Jogo das Equações Equivalentes e refutar o Quebra-cabeça das Equações (DANTE, 2018); o Jogo das Equações (DANTE, 2018) e o Jogo de Equações (GAY; SILVA, 2018). O que consideramos fazer parte do seu processo de pré-apropriação dos jogos.

❖ A refutação dos jogos analisados pelo professor José

Sobre a gênese instrumental de José do Quebra-cabeça das Equações (DANTE, 2018) percebemos que ele o associou a um “dominó”: “*Eu achei bacana. É tipo um dominó. Precisamos encontrar a raiz da equação e juntar a peça da equação com a peça da sua respectiva raiz*”. Ele afirmou que poderia utilizá-lo em sala de aula para trabalhar a resolução de equações, mas, indicou ser trabalhosa a confecção desse jogo.

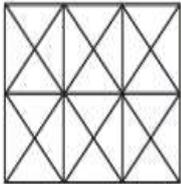
Figura 33: Jogo Quebra-cabeça das Equações

Sugestão de jogo: Quebra-cabeça das equações

Número de participantes: 2, 3 ou 4 jogadores.

Preparando o jogo

Construam, em papel-cartão ou sulfite, 2 quadros como o representado ao lado, com as dimensões descritas a seguir. 1º quadro, que servirá de tabuleiro: retangular de medidas de comprimento de 16,5 cm por 11 cm, dividido em 6 quadrados com lados de medidas de comprimento de 5,5 cm. Cada quadrado é dividido em 4 triângulos iguais.



Banco de imagens/
Arquivo da editora

2º quadro: retangular de medidas de comprimento de 15 cm por 10 cm, dividido em 6 quadrados com lados de medidas de comprimento de 5 cm. Cada quadrado é dividido em 4 triângulos iguais. Nesse, os 24 triângulos devem ser recortados e neles escritas as 12 equações e as 12 soluções indicadas abaixo:

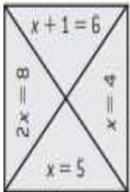
Equações				Soluções			
$x + 2 = 3$	$2x + 1 = 5$	$3x = -6$	$3x = 2$	$x = 3$	$x = 0$	$x = \frac{1}{3}$	$x = -2$
$6x = 3$	$2x + 5 = 5$	$2 - x = 3$	$x - 2 = 1$	$x = 5$	$x = 1$	$x = -1$	$x = 2$
$3x = 1$	$5x = 20$	$x - 1 = 4$	$x + 3 = 0$	$x = -3$	$x = \frac{2}{3}$	$x = 4$	$x = \frac{1}{2}$

Durante o jogo, as peças deverão ser colocadas no tabuleiro de modo que cada equação tenha a solução de frente para ela, como nos exemplos ao lado.

Como jogar

Misturem todas as peças viradas para baixo, distribuam-nas igualmente entre os participantes e decidam a ordem em que os participantes vão jogar.

O primeiro jogador coloca uma peça com equação em uma das posições indicadas nos exemplos dados.



Banco de imagens/
Arquivo da editora

Daí em diante, cada participante faz uma destas 3 ações, pela ordem: coloca uma peça com solução de frente para uma equação que já está no tabuleiro ou coloca uma peça com equação que não fique de frente para outra equação ou passa a vez.

Atenção: uma peça com solução não poderá ser colocada se a equação correspondente não estiver no tabuleiro.

Ganha o jogo quem colocar primeiro todas as próprias peças no tabuleiro.

Fonte: Dante (2018, p. 119-120).

Quanto ao Jogo das Equações (DANTE, 2018), percebemos que José não entendeu bem a confecção da roleta (Figura 33). Ele comentou: “*Como é que fazemos para construir essa roleta e como é que os alunos vão girar a roleta na prática? Eu acho interessante, mas seria bom que essa roleta da direita tivesse mais valores, não só 3. Se tivesse uma quantidade maior de valores, seria melhor*”. Entendemos também a ocorrência de indícios da instrumentalização por parte do professor, ao apresentar uma possível modificação que seria acrescentar mais soluções na segunda roleta, que implicaria também na alteração da primeira roleta, com outras equações. Tal afirmação revela o seu Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos, haja vista, que as equações a serem propostas seriam “*a depender do nível da turma*”.

Figura 34 - Jogo das Equações

Sugestão de jogo: Jogo das equações

Número de participantes: 2 ou mais jogadores.

Modo de jogar

Em cada rodada, todos os participantes giram um clipe com auxílio de um lápis, nas 2 roletas. Quando algum participante obtiver uma equação na roleta da esquerda e a solução dela na roleta da direita, ele marca 1 ponto.

Vence a partida quem marcar 5 pontos primeiro.

Os pontos devem ser anotados em uma folha de papel à parte.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte: Dante (2018, p. 117).

Sobre o Jogo de Equações (GAY; SILVA, 2018) (Figura 34), ocorreu a adesão do professor à proposta para a confecção das cartas pelos próprios alunos. Ele declarou:

José: Entendi que cada grupo tem que confeccionar 20 cartas brancas e 20 amarelas e depois troca com outro grupo. Eu acho que daria certo. Daria para fazer dessa forma. Agora é necessário um tempo para explicarmos as regras e deixá-las bem claras para os alunos, fazer tipo uma aplicação “piloto”. Depende também do tipo de equação que vamos propor para eles confeccionarem as cartas. Eu ainda não trabalhei em equações com frações.

Figura 35 - Jogo de Equações

Modelo para confecção das cartas

Branca (equação)	Amarela (solução)	Branca (equação)	Amarela (solução)
$x + 3 = 7$	A solução é o número 4.	$3k + 7 = 16$	A solução é o número 3.
$2x + 5 = 13$	A solução é o número 4.	$e + 10 = 13$	A solução é o número 3.
$5x + 20 = 30$	A solução é o número 2.	$8t - 2 = 54$	A solução é o número 7.
$y + 3 = 5$	A solução é o número 2.	$5w + 6 = 41$	A solução é o número 7.
$2z + 6 = 28$	A solução é o número 11.	$3x + 6 = 6$	A solução é o número 0.
$2w + 4 = 26$	A solução é o número 11.	$\frac{3}{4w} = 0$	A solução é o número 0.
$2s - 23 = -21$	A solução é o número 1.	$\frac{1}{2f} - 5 = 13$	A solução é o número 36.
$3k + 7 = 10$	A solução é o número 1.	$\frac{1}{3}j - 6 = 6$	A solução é o número 36.
$2y - 9 = 1$	A solução é o número 5.	$5t + 4 = -6$	A solução é o número -2.
$6q - 23 = 7$	A solução é o número 5.	$4j + 12 = 4$	A solução é o número -2.

Jogo de equações

Material necessário

- Duas folhas de cartolina, uma branca e outra amarela, por equipe.
- Canetas hidrográficas.

Participantes

- Equipes com quatro alunos.

Objetivo

- Agrupar o maior número de pares de cartas.

Regras

- Cada grupo deverá confeccionar 20 cartas brancas e 20 cartas amarelas com as cartolinas. O grupo deverá inventar equações do 1º grau e escrever uma equação em cada carta branca. A solução correspondente a cada equação deverá ser escrita em uma carta amarela. Para que sejam resolvidas por meio de cálculo mental, as equações criadas não podem ser complexas.
- Depois de confeccionadas, as cartas deverão ser trocadas com outro grupo.
- Para iniciar o jogo, cada grupo deverá embaralhar as cartas, separando as amarelas em um monte. Esse monte terá as faces com as soluções viradas para baixo e ficará no centro da mesa.
- As cartas brancas deverão ser distribuídas igualmente entre os componentes do grupo. Cada aluno observará as equações descritas nas cartas brancas, mas não deixará os demais componentes do grupo observarem suas cartas.
- Uma a uma, as cartas amarelas serão viradas no centro da mesa. Os jogadores vão observar suas cartas e verificar se há alguma equação cuja solução seja a indicada pela carta amarela exposta. Caso isso ocorra, o jogador deverá pegar a carta amarela e formar o par equação-solução, separando-o em um monte.
- Se houver dois jogadores com equações que tenham a mesma solução indicada na carta virada, ficará com a carta amarela quem a pegar primeiro.
- Ganhará a rodada o jogador que formar primeiro os cinco pares equação-solução.

Fonte: Gay e Silva (2018, LI).

Compreendemos a influência do Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos de José sobre a instrumentalização do Jogo de Equações (Figura 35), em virtude das equações já estudadas pelos alunos, no caso de detrimento de confecção das cartas com equações envolvendo frações e sem o “auxílio do caderno”. O professor acrescentou:

José: *Agora uma coisa que eu faria já é levar os cartões todos prontos (já recortados) para eles só criarem as equações, porque se formos pedir para eles confeccionarem o material, passarão a aula inteira só confeccionando isso. E, outra coisa que eu faria é não deixar essa confecção ser realizada com o auxílio do caderno para eles não copiarem equações.*

De certa forma, a adesão do professor à elaboração de equações pelos alunos nos reportou ao seu Conhecimento do Conteúdo e do Currículo. Pois, no 7º ano é previsto na BNCC (EF07MA18) - Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade (BRASIL, 2018, p.307). José se posicionou favorável à elaboração de problemas pelos alunos, mesmo em relação a outros conteúdos.

Podemos assim identificar sobre a refutação dos jogos analisados pelo professor, aspectos como: instrumentação - Falta de praticidade para a confecção das peças e de precisão sobre as regras do jogo (ex: roleta do Jogo das Equações e Quebra-cabeça das Equações);

instrumentalização - Conhecimento do Conteúdo e do Aluno - Dificuldades dos alunos em elaborar equações envolvendo frações, destoando do modelo proposto pelo autor do jogo (Jogo de Equações); bem como, modificação das equações (roleta do Jogo das Equações).

❖ **A escolha do Jogo das Equações Equivalentes e as expectativas de sua inserção na sequência de ensino sobre Equações do 1º grau**

No momento da entrevista para a escolha dos jogos (em julho), José ainda não tinha trabalhado o tema Equação do 1º Grau e equações equivalentes nas turmas do 7º ano, pois, este estava previsto para o mês de agosto.

Figura 36 - Texto didático - Plano de estudo, 7º ano, 17ª semana do ensino remoto

Propriedade da igualdade

Dizemos que há uma igualdade entre duas expressões numéricas quando os resultados dessas expressões são iguais.

Exemplo: $3 + 5 = 2 \times 4$

Observe as implicações indicadas em cada sequência de equação abaixo.

I. Se $n + 4 = 12 \rightarrow n + 4 - 4 = 12 - 4 \rightarrow n = 12 - 4 \rightarrow n = 8$.

II. Se $m - 4 = 12 \rightarrow m - 4 + 4 = 12 + 4 \rightarrow m = 12 + 4 \rightarrow m = 16$.

III. Se $4 \cdot n = 12 \rightarrow \frac{4n}{4} = \frac{12}{4} \rightarrow n = \frac{12}{4} \rightarrow n = 3$.

IV. Se $\frac{n}{4} = 12 \rightarrow \frac{n}{4} \cdot 4 = 12 \cdot 4 \rightarrow n = 12 \cdot 4 \rightarrow n = 48$.

Resumo: A raiz de uma equação não se altera se somarmos, subtrairmos, multiplicarmos ou dividirmos seus dois termos por um mesmo número.

i) $a + b = c \rightarrow a = c - b$
 ii) $a - b = c \rightarrow a = c + b$
 iii) $a \cdot b = c \rightarrow a = \frac{c}{b}$
 iv) $\frac{a}{b} = c \rightarrow a = c \cdot b$

As equações que têm raízes iguais denominam-se **equações equivalentes**. Sendo assim, resolver uma equação consiste em aplicar as propriedades adequadas de modo a encontrar equações equivalentes reduzidas até que a incógnita seja igual a um número, que é a raiz da equação.

Note que no processo de redução da equação dada a outras equivalentes, são utilizadas operações inversas procurando isolar a incógnita em um termo e os valores numéricos no outro termo.

Exemplo 1: Resolver a equação $5x - 12 = 2x + 15$

José explicou sobre a utilização do plano de estudo da Secretaria de Educação do Recife (Figura 36): “*Eu abro, vejo o assunto que devo trabalhar, mas eu não utilizo do jeito que está lá. Eu só pego o nome do assunto e a metodologia eu faço da forma que eu acho que vai atender melhor aos alunos. Às vezes eu utilizo a plataforma apenas para colocar alguma atividade.*”

Diante do exposto, o professor afirmou que o *Jogo das Equações Equivalentes* poderia ser uma oportunidade de explorar a equivalência de equações, previsto no referido plano de estudo, o que nos revelou o seu Conhecimento do Conteúdo e do Currículo. José comentou sobre o jogo (Figura 37): “*Dá pra fazer tranquilo, eu gostei muito do jogo, é fácil e bem direto*”. No entanto, apontou modificações nas suas regras, para poder utilizá-lo em sala de aula.

Regras propostas por José:

- Cada grupo de alunos recebe as 12 cartas vermelhas e as 12 cartas azuis.
- Os alunos devem separar as cartas azuis de um lado e as vermelhas de outro.
- Todas as cartas devem estar viradas para cima.
- Cada aluno, na sua vez, deve resolver uma equação da carta azul e encontrar uma equação das cartas vermelhas que seja equivalente.
- Ganha o jogo o grupo que formar mais pares de equações equivalentes.

Figura 37 - Jogo das Equações Equivalentes

JOGOS  Muito mais em Português

Jogo das equações equivalentes

Com este jogo você vai aprimorar seus conhecimentos sobre equações equivalentes.

Orientações
 Número de participantes: 3 ou 4 jogadores.
 Material necessário: 2 folhas de papel de cores diferentes.

Preparação do jogo
 Providenciam as 2 folhas de papel de cores diferentes, para exemplificar, usaremos as cores vermelho e azul. Dividam cada folha em 12 partes iguais, escrevam as equações e recortem as 24 peças do jogo.

$3x - 6$ Solução: $x = 2$	$4x - 2$ Solução: $x = \frac{1}{2}$	$x + 5 = 3$ Solução: $x = -2$	$3x - 15$ Solução: $x = 5$	$3x + 5 = 11$	$10x = 5$	$x = -2$	$3x + 3 = 18$
$x - 1 = 2$ Solução: $x = 3$	$1 - x = 2$ Solução: $x = -1$	$x + \frac{1}{3} = 1$ Solução: $x = \frac{2}{3}$	$\frac{x}{5} = 1$ Solução: $x = 5$	$4x = 16$	$7 - 2x = 4$	$3x + 1 = 2$	$2x = 10$
$2x - 1 = -7$ Solução: $x = -3$	$3x = 1$ Solução: $x = \frac{1}{3}$	$x + 4 = 4$ Solução: $x = 0$	$6 + x = 2$ Solução: $x = -4$	$6x - 3 = -21$	$2x = \frac{2}{3}$	$2x + 5 = 5$	$2x = -8$

Como jogar
 Antes de começarem a partida, misturem as peças vermelhas e distribuam igualmente entre os jogadores. As peças azuis devem ser empilhadas no centro da mesa, com as equações viradas para baixo.
 A cada rodada, o jogador pega uma peça azul e verifica se nela há uma equação equivalente a alguma das equações das peças vermelhas que estão com ele. Se houver, então o jogador separa esse par de peças. Por exemplo:

$6 + x = 2$	$2x = -8$
-------------	-----------

Caso contrário, o jogador descarta a peça azul em uma pilha separada, também sobre a mesa. O próximo jogador pode escolher se quer pegar a peça azul descartada pelo jogador anterior ou uma peça azul nova.
 Quando terminarem as peças azuis sobre a mesa, ganha a partida quem tiver formado mais pares de peças com equações equivalentes.

Fonte: Dante (2018, p. 112).

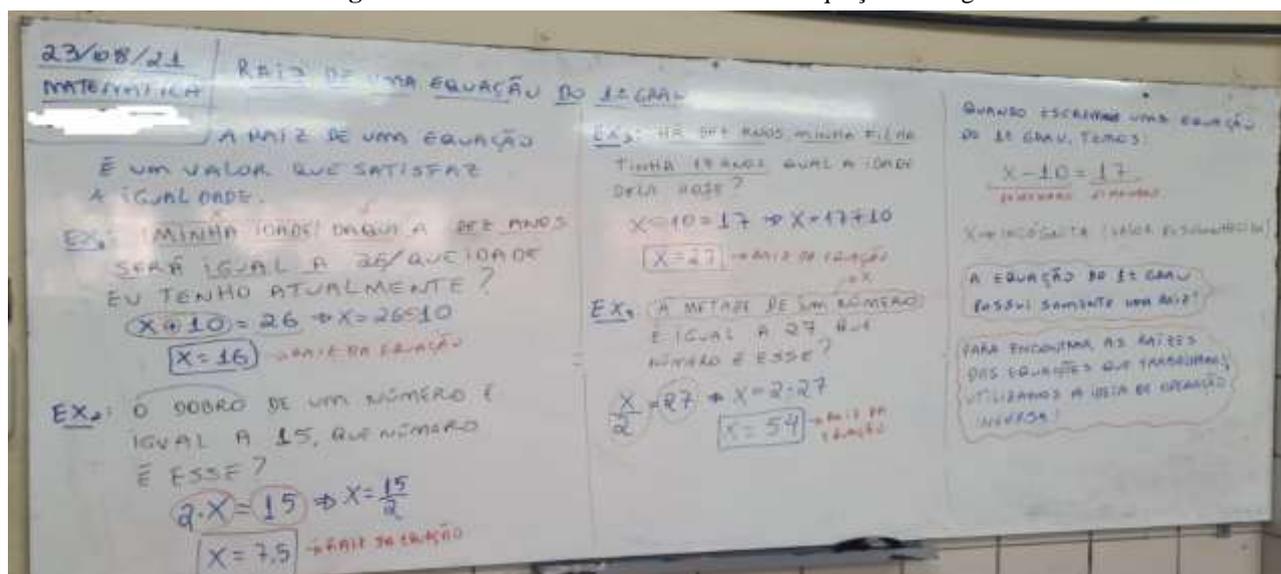
Segundo o professor, a proposta de manter todas as cartas (azuis e vermelhas) viradas para cima foi para “poder deixar livre” a formação dos pares de equações equivalentes pelos alunos. Contrariamente, à proposta do autor do jogo no LD (Figura 37), que orienta as cartas de equações viradas para baixo. Esta forma de instrumentalização, ancorada no Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos, por consequência, leva à escolha dos alunos em resolver as equações, inicialmente, consideradas por eles como mais fáceis.

Sobre as equações do jogo, ele expressou:

José: *Quando estou trabalhando equações, eu tenho o cuidado de separar em tipos. Eu não trabalhei com eles ainda nenhuma equação com fração, por exemplo, essa equação da carta vermelha ($x + \frac{1}{3} = 1$) seria difícil, mas poderíamos mantê-la, porque do outro lado pode ter uma equação equivalente a essa com uma escrita mais "fácil" e eles poderiam associar. Entende? Eu acho também que propor só equações que eles já viram, que eles já sabem resolver, é fazer perder um pouco a graça do jogo. Nesse jogo está misturado, tem equações de vários níveis. Então, eu acho bem bacana as equações da forma que estão propostas.*

No mês de agosto, quando o professor iniciou o ensino de Equação do 1º Grau, no sistema híbrido (metade da turma assistia aula presencial, alternando as semanas com a outra metade), não realizamos a observação das aulas, devido ao controle sanitário em virtude da pandemia da COVID 19. No entanto, ele compartilhou conosco a ficha de exercícios utilizada na turma do 7º ano e uma foto do quadro branco (Figura 38), no qual explanou uma aula sobre a resolução de problemas e o cálculo da raiz de uma equação do 1º grau.

Figura 38 - Foto sobre a aula - Raiz de uma equação do 1º grau



Fonte: Protocolo da Pesquisa (2021).

Sobre o que mostra a Figura 38, José explicou que começou a trabalhar Equação do 1º grau com a conversão de registros, da linguagem materna para a linguagem algébrica: “Então

eu trabalhei primeiro a ideia de montar a equação, depois a gente foi resolver. Quando começamos a resolver equações, eu tive o cuidado de separar por casos, tipo equação que precisa aplicar a propriedade distributiva, equação fracionária, equação do tipo $ax+b = k$ ".

Na Figura 39 temos acesso às tarefas propostas em uma ficha de exercícios, que foi copiada da internet pelo professor e utilizada na turma do 7º ano.

Figura 39 - Ficha de exercício para revisão do tema - aulas presenciais (7º ano)

EXERCÍCIOS DE INTRODUÇÃO	
<p>1 - Resolva:</p> <p>a) $5x - 4 = 10$ b) $2x + 1 = 7$ c) $\frac{x}{4} - 1 = \frac{x}{3}$</p> <p>2 - Entre as equações do exercício 1, diga quais são do 1º grau.</p> <p>3 - Dada a equação $7x - 3 + x = 5 - 2x$, responda:</p> <p>a) Qual é o 1º membro? b) Qual é o 2º membro? c) Quais são os termos do 1º membro? d) Quais são os termos do 2º membro?</p> <p>4 - Qual é o número que colocado no lugar de x, torna verdadeira as sentenças?</p> <p>a) $x + 9 = 13$ b) $x - 7 = 10$ c) $5x - 1 = 8$ d) $x - 3 = 8$</p> <p>5 - Verifique se 1 é raiz da equação $4x + \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$.</p> <p>6 - Resolva as equações:</p> <p>a) $x + 5 = 8$ b) $x - 4 = 3$ c) $x + 6 = 5$ d) $x - 7 = -7$ e) $x + 9 = -1$ f) $x + 28 = 11$ g) $x - 109 = 5$</p> <p>7 - Resolva as seguintes equações:</p> <p>a) $3x = 15$ b) $2x = 14$ c) $4x = -12$ d) $7x = -21$ e) $13x = 13$ f) $9x = -9$</p> <p>d) $x - 1 + 0 = 6x$ e) $5x^2 - x - 4 = 0$ f) $\frac{1}{2}x - 4 + x = 9$</p> <p>h) $x - 39 = -79$ i) $10 = x + 0$ j) $15 = x + 20$ k) $4 = x - 10$ l) $7 = x + 8$ m) $0 = x + 12$ n) $-3 = x + 10$</p> <p>g) $25x = 0$ h) $35x = -105$ i) $4x = 1$ j) $36x = 12$ k) $21 = 3x$ l) $84 = 6x$</p>	<p>8 - Resolva as equações:</p> <p>a) $\frac{x}{2} = 7$ b) $\frac{x}{4} = -3$ c) $\frac{11}{x} = 4$</p> <p>9 - Resolva:</p> <p>a) $-x = 9$ b) $-x = -2$ c) $-7x = 14$ d) $-3x = 18$ e) $-5x = -12$ f) $-4x = 8$</p> <p>10 - Determine x:</p> <p>a) $6x = 2x + 16$ b) $2x - 5 = x + 1$ c) $2x + 3 = 4x + 4$ d) $5x + 7 = 4x + 10$ e) $4x - 10 = 2x + 2$ f) $4x - 7 = 0x - 2$ g) $2x + 1 = 4x - 7$ h) $9x + 9 + 3x = 15$</p> <p>11 - Resolva as equações:</p> <p>a) $4x - 1 = 3(x - 1)$ b) $3(x - 2) = 2x - 4$ c) $2(x - 1) = 3x + 4$ d) $3(x - 1) - 7 = 15$ e) $7(x - 4) = 2x - 3$ f) $3(x - 2) = 4(3 - x)$ g) $3(3x - 1) = 2(3x + 2)$ h) $7(x - 2) = 5(x + 3)$ i) $8(2x - 1) = -2(x + 3)$ j) $5x - 3(x + 2) = 15$ k) $2x + 3x + 9 = 0(6 - x)$</p> <p>d) $\frac{2x}{7} = -10$ e) $\frac{3x}{4} = 30$ f) $\frac{2x}{5} = -10$</p> <p>g) $-2x = -9$ h) $-5x = 15$ i) $-2x = -10$ j) $15 = -3x$ k) $-40 = -5x$</p> <p>i) $30x - 1 = 12x + 3$ j) $3x - 2 = 4x + 9$ k) $5x - 3 + x = 2x + 9$ l) $17x - 7x = x + 10$ m) $x + x - 4 = 17 - 2x + 1$ n) $x + 2x + 3 - 5x = 4x - 9$ o) $3x + 6x - 16 = 3x + 2x - 4$ p) $3x + 4 = 3x - 2x + 4$</p> <p>l) $4(x + 10) - 2(x - 5) = 0$ m) $3(2x + 3) - 4(x - 1) = 3$ n) $7(x - 1) - 3(x - 5) = x - 5$ o) $2(3 - x) = 3(x - 4) + 15$ p) $3(5 - x) - 3(1 - 2x) = 42$ q) $(4x + 6) - 2x = (x - 6) + 10 + 14$ r) $(x - 3) - (x + 2) + 2(x - 1) = 5 + 0$ s) $3x - 2(4x - 3) = 2 - 3(x - 1)$ t) $3(x - 1) - (x - 3) + 5(x - 2) = 10$ u) $3(x - 3) - 4(x + 2) = 2 + 3(1 - 2x)$</p>

Fonte: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco (s/d).

A ficha de exercício (Figura 39) nos deu pistas acerca do saber ensinado, sobre Equação do 1º Grau na turma do 7º ano, ou seja, mais próximo da proposta do jogo das Equações Equivalentes, a resolução de equações apenas no contexto matemático.

José: Sempre que eu começo equação, e essa turma não é diferente, eu falo da ideia da balança, mas como eu não tenho um material concreto (balança) pra mostrar a eles, fica um pouco complicado. Assim, quando eu começo a trabalhar com equações eu escrevo $x+2=7$, eu pergunto para eles qual é aquele valor desconhecido que está sendo representado pelo x , aí eles dizem 5. Depois eu pergunto: o que é que a gente pode fazer com esse 7 e com esse 2 para chegar no 5? Aí eles dizem: tem que fazer menos. Eles não dizem subtração e sim menos. Então, tenho cuidado, por exemplo, quando eu digo $2x=20$ para eles não escreverem $x = 20-2$. Terem o cuidado de usar a operação inversa, então basicamente é isso que eu faço.

Diante do exposto, consideramos essencial conhecer aspectos da sequência de ensino sobre o tema em tela, para melhor compreendermos o processo de pré - apropriação do jogo das Equações Equivalentes no planejamento da aula para uso desse jogo com os alunos do 7º ano.

Assim no Quadro 11, expomos a análise da ficha de exercícios, levando em conta que o professor até o momento que a compartilhou conosco, tinha trabalhado os itens de 1 à 7.

Quadro 11- Organização matemática - saber ensinado - Prof. José

Tarefas	Qt.	Técnica	Tecnologia
T _{1.1} - Resolver equação do 1º grau na forma $ax + b = c$.	42	τ_3 – Neutralização de termos ou coeficientes. τ_4 – Transposição de termos ou coeficientes.	(θ PPÉ): Princípios de equivalência entre equações. (θ POI): Propriedades das operações inversas em \mathbb{R} (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos.
T3 - Distinguir equações de inequações	6	τ_5 - Identificação das expressões que apresentam o sinal de igual como equações e aquelas que apresentam o sinal de < ou > como inequação.	θ PGI: “Propriedades gerais da igualdade ou lei do cancelamento.
T4 - Identificar os dois membros de uma equação do 1º grau.	1	τ_6 - Transcrição da expressão que se encontra do lado esquerdo do sinal de igual e daquela que se encontra do lado direito.	θ PGI: “Propriedades gerais da igualdade ou lei do cancelamento.
T5 - Verificar se um número é raiz de uma equação do 1º grau	1	τ_7 - Testar a igualdade por tentativa e erro.	θ PGI: “Propriedades gerais da igualdade ou lei do cancelamento.
T6 - Identificar qual número colocado no lugar de x torna verdadeira a sentença	4	τ_7 - Testar a igualdade por tentativa e erro.	θ PGI: “Propriedades gerais da igualdade ou lei do cancelamento.

Fonte: Autoria Própria (2021).

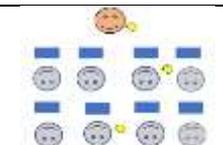
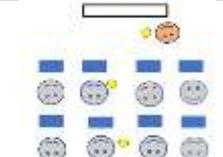
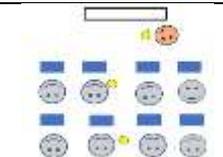
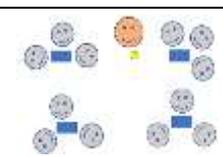
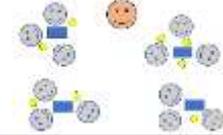
Ao compararmos a ficha de exercício (Figura 39) com o jogo das Equações Equivalentes, no Quadro 10, podemos perceber um número maior da T_{1.1} e este é um aspecto observado no Jogo das Equações Equivalentes, no qual identificamos 24 subtipos de tarefas T1.1 e 12 subtipos T2, como vimos no item 4.1.1 deste trabalho. Isto é, T2 que trata das equações equivalentes, até então, não tinha sido trabalhada pelo professor José. Consideramos que este fato foi impulsionado pelo processo de pré-apropriação do jogo das Equações Equivalentes que apresentamos até o momento e que se prosseguiu no planejamento prévio da aula para uso desse jogo com os alunos do 7º ano.

❖ O plano de aula para a utilização do Jogo das Equações Equivalentes

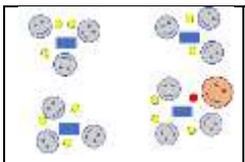
José planejou a aplicação do jogo em uma turma do 7º ano, cuja frequência nas aulas presenciais estava ocorrendo em rodízio, ou seja, a cada semana compareciam alternadamente 50% dos alunos. Assim, foi estimada a participação de 12 alunos. Inicialmente, os artefatos elencados pelo professor foram: quatro jogos, livro didático, caderno para registro da resolução das equações, quadro branco e carteiras adequadas para os alunos manusearem o jogo. A previsão do tempo foi de 60 minutos¹⁹.

No Quadro 11, apresentamos os tipos de OI (DRIJVERS et al., 2010; ROUSSON, 2017) que identificamos no plano da aula elaborado pelo professor, antes da aplicação do jogo, relacionados à sua previsão de momentos didáticos em torno da tarefa: resolver equações do 1º grau e comparar aquelas que são equivalentes.

Quadro 12 - Momentos didáticos e OI previstas na fase de pré-apropriação do jogo

Momento do primeiro encontro com a tarefa	
	<i>OIC - Orientação e Explicação pelo professor (OEP)</i> O professor introduz de forma oral a noção de equação equivalente e propõe algumas questões aos alunos.
	<i>OIC - Orientação e Explicação pelo professor (OEP)</i> O professor apresenta no quadro branco a noção de equação equivalente e propõe algumas questões aos alunos.
Momento de exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica de resolução	
	<i>OIC - Orientação e Explicação pelo professor (OEP)</i> O professor propõe exemplos de equações equivalentes utilizando o livro didático e ele propõe algumas questões aos alunos.
	<i>OIC - Orientação e Explicação pelo professor (OEP)</i> O professor propõe exemplos no quadro branco para que os alunos possam comparar as equações equivalentes e ele propõe algumas questões aos alunos.
Momento de trabalho com a técnica de resolução	
	<i>OIC - Demonstração Técnica (DT)</i> - O professor apresenta o jogo e explica suas regras, enquanto os alunos permanecem em silêncio e atentos à explicação. <i>OIC - Explicação pelo professor (EP)</i> - O professor explica que os alunos devem resolver e comparar as equações do jogo a fim de verificar aquelas que apresentam o mesmo resultado, enquanto eles permanecem em silêncio e atentos à explicação.
	<i>OIC - Discussão entre os atores (DA)</i> Em cada grupo, os alunos discutem entre si o jogo e realizam a tarefa, enquanto o professor os observa.

¹⁹ As aulas presenciais no sistema de ensino híbrido estavam ocorrendo com a duração de 30 minutos.

	<p><i>OII - Trabalho e acompanhamento (TA)</i> Os grupos de alunos resolvem a tarefa no caderno e o professor circula pela sala, verificando e/ou auxiliando as respostas e acompanhando a evolução do jogo.</p>
---	--

Fonte: Autoria própria (2021).

Durante a entrevista em que tratamos do planejamento da aula para implementação do jogo das equações equivalentes em sala de aula, percebemos o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino do professor na sequência prevista, ao afirmar que: *“Antes de utilizar esse jogo eu tenho que falar sobre equações equivalentes ou poderia dizer assim: no jogo precisamos encontrar equações com a mesma raiz, que possuem a mesma solução.”* Remetendo-nos ao modelo: definição, exemplos e exercícios. Como expectativas acerca da implementação do jogo em sala de aula, o professor expôs: *“Para mim, esse jogo serve para várias coisas. Primeiro, para introduzir a parte de equações equivalentes, que eu não trabalhei ainda. Também, para trabalhar de maneira colaborativa. Assim, os alunos que têm mais dificuldade podem aprender com aqueles que têm menos.”*.

Sobre a turma de alunos do 7º ano que o professor selecionou para aplicar o *Jogo das Equações Equivalentes*, ele explicou: *“Eles são meus alunos desde o 6º ano. Desde o começo do ano passado, em que a prefeitura parou as aulas presenciais em 17 de março; então, de fevereiro até essa data, que voltamos à escola, eu tenho contato com eles”*. Desta forma, o professor expressou ter Conhecimento do Conteúdo e dos alunos, no tocante às suas dificuldades de aprendizagem sobre o tema Equação do 1º grau.

José: *Eles não sabem passar da linguagem materna para a linguagem algébrica, muitos não sabem ler um texto e tirar a equação que está naquele texto. Além das dificuldades com regras de sinais, divisão, incógnita, quando a gente coloca uma letra para representar um número eles sempre ficam ansiosos para saber esse valor de x, então isso me dá muito trabalho.*

O professor também comentou sobre o uso do LD, adotado na escola, na aula prevista: *“O que busco nele é teoria e aplicação. Assim farei uma breve explicação sobre o tema usando o LD que os alunos costumam levar para as aulas de Matemática”*.

4.3.3 A apropriação original do jogo pelo professor José

No dia da implementação do jogo em sala de aula, compareceram 12 alunos do 7º ano. José iniciou a aula explicando as noções de igualdade e equivalência, dando início ao primeiro

momento de encontro com a tarefa de resolver equações do 1º grau e comparar aquelas que são equivalentes, como expomos a seguir.

❖ Momento do primeiro encontro com a tarefa

Este momento foi vivenciado a partir da OIC - OE (Figura 39), ou seja, o professor José se manteve em face dos alunos que estavam organizados em fileiras e atentos a sua explicação. José iniciou a aula com a discussão sobre as noções de igualdade e equivalência, utilizando o exemplo de dois pincéis para quadro branco. Ressaltamos que na fase de pré-apropriação, José não havia mencionado que utilizaria os pincéis no modo de execução da OIC - OE.

Figura 40 - OIC - OE com uso de pincéis



Fonte: Protocolo da pesquisa (2021).

No modo de execução da OIC - OE, podemos constatar o seguinte diálogo:

José: *Equivalente e igual é a mesma coisa? Quem poderia me dar um exemplo para diferenciarmos isto? O que é ser igual e o que é ser equivalente? Aqui, estes dois pincéis, da mesma marca, do mesmo tamanho e mesmo formato, são iguais?*

Aluno: *Não.*

José: *Não, não são iguais, mas eles são equivalentes?*

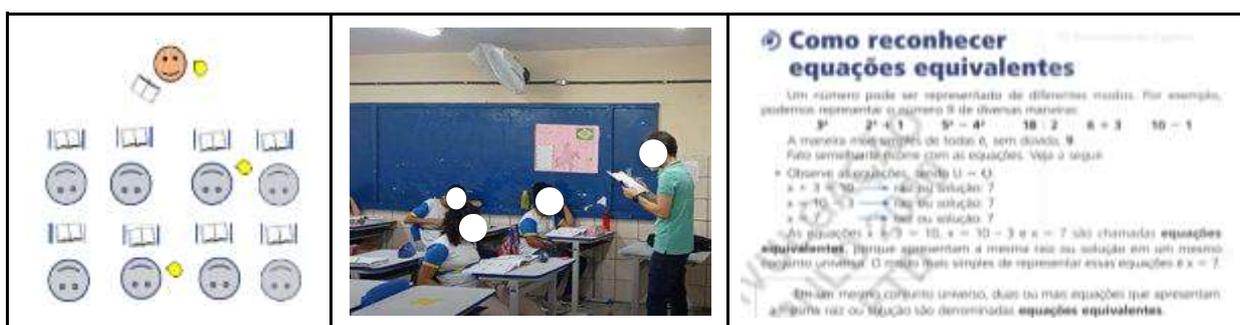
Aluno: *Sim.*

José: *Então, aqui comparamos uma coisa que não é necessariamente igual a outra, mas possuem características em comum.*

Na sequência, José discute a diferença entre expressão e equação (OIC- OE): “*Já sabemos o que é uma equação. Para termos uma equação é necessário que exista o quê? É necessário que exista um valor desconhecido que é representado por uma letra. Essa letra é chamada de quê? Quem lembra do nome?*” Ao escrever no quadro branco “ $3n+1$ ”, o professor indagou: “*Isso daqui é chamado de quê? É uma equação? Isso aqui é uma expressão. E, o que está faltando para se tornar uma equação?*”. José então confirma a resposta dos alunos que

para ser uma equação falta o sinal de igual e escreve no quadro branco “ $3n+1 = 0$ ”, explicando que poderia ser outro número, além do zero. Depois, ele solicitou que os alunos abrissem o capítulo 6 do LD (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018, p.146) para uma leitura coletiva do tópico “Como reconhecer equações equivalentes”.

Figura 41 - OIC - OE com uso do livro didático



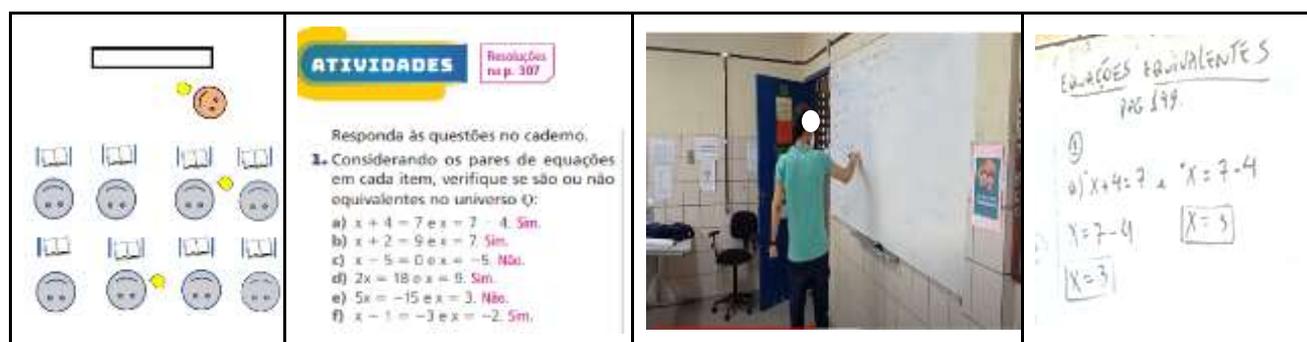
Fonte: Protocolo da pesquisa (2021).

O professor chamou a atenção, de forma oral, para os exemplos do LD “ $x+3=10$; $x = 10 - 3$ e $x = 7$ ” e como esses apresentam a mesma raiz, a mesma solução por serem equivalentes (Figura 40). A seguir, ele deu início ao momento de exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica de resolução, utilizando as atividades propostas no LD.

❖ Momento de exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica de resolução

José continuou a OIC - OE, desta vez, intercalando a leitura do LD com o quadro branco (Figura 41). Ele selecionou o item “a” das atividades sobre equações equivalentes (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2018, p.146) para resolvê-lo e servir de exemplo para que os alunos respondessem, posteriormente, aos demais itens.

Figura 41: OIC - Orientação e Explicação - LD e quadro branco



Fonte: Autoria própria (2021).

O professor indicou para resolução da tarefa, as técnicas “cálculo mental” e transposição de termos, enfatizando as operações inversas.

José: *Letra a) $x+4=7$ e $x=7-4$. isso daqui são duas equações. Eu quero saber se essas equações são equivalentes ou não, ou seja, elas apresentam a mesma raiz? Para resolver essa equação como é que encontramos a raiz dela?*

Aluno: $x = 7 - 4$; $x = 3$.

José: *Essa daqui já está quase resolvida $x = 7 - 4$, $x = 3$. Observe que essas equações têm a mesma raiz, então elas são equivalentes.*

Em seguida, José propôs que os alunos respondessem outro exemplo (elaborado por ele), dando início ao momento de trabalho com a técnica de resolução.

❖ Momento de trabalho com a técnica de resolução

José escreveu no quadro branco as equações $2x=10$ e $4x+10=30$ e solicitou que os alunos as escrevessem no caderno a fim de resolvê-las e comparar a equivalência delas (OIC-EP). Inicia-se então a OII - TA (Figura 42), pela qual o professor começa a observar os alunos a responderem a tarefa e auxilia aqueles que possuem dúvidas.

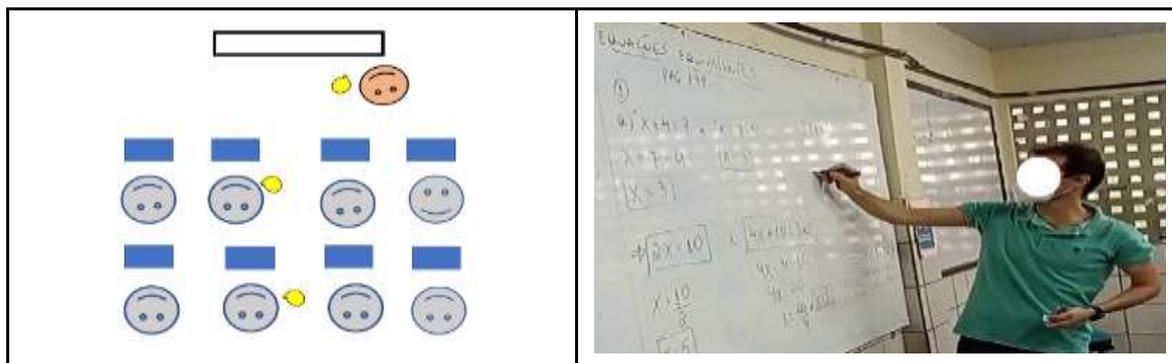
Figura 42 - OII - Trabalho e Acompanhamento



Fonte: Protocolo da pesquisa (2021).

Ele começou a interrogar os alunos: “*Essas duas equações são equivalentes? Porquê? Alguém poderia me dizer outra equação que a raiz é igual a 5?*”. Depois de certo tempo, percebendo que os alunos não conseguiam elaborar as equações com a raiz 5, José propôs no quadro (Figura 14) os exemplos “ $3x - 8 = 7$ ” e “ $10x + 12 = 62$ ”.

Figura 43- OIC - Orientação e Explicação - quadro branco



Fonte: Protocolo da pesquisa (2021).

José explicou que os alunos podiam elaborar equações com a raiz 5, desde que a substituíssem por uma incógnita, predeterminando a igualdade entre os dois termos da equação.

José: *Vejam: 3×5 é igual a 15, ok? $15 - 8$ é igual a quanto?*

Alunos: *Sete.*

José: *Se no lugar do 3×5 , escrevermos $3x$. Sabemos que o 3 está multiplicando o "x". Então, temos a equação $3x - 8 = 7$. Podemos entender que esse "x" é igual a "5"?*

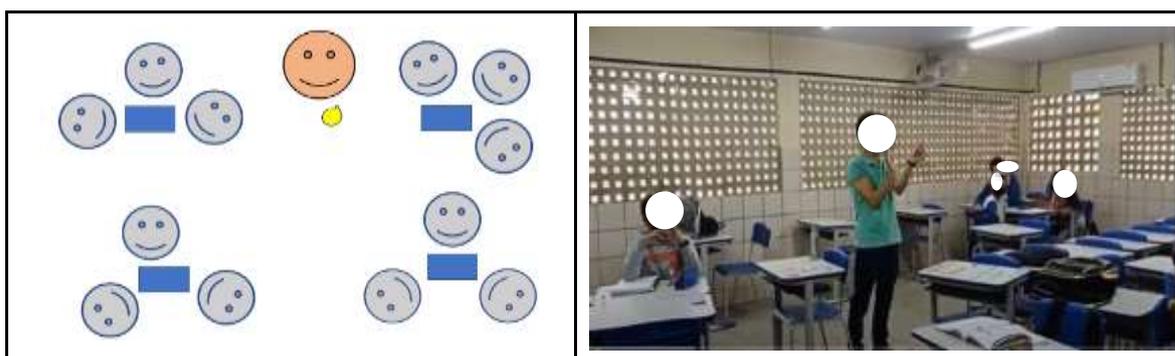
Alunos: *Sim.*

José: *Vou dar outro exemplo: 10×5 é igual a 50. Se somarmos mais 12 será igual a 62. Vamos substituir o 5 por "x". Então, nossa equação ficará $10x + 12 = 62$. Isso quer dizer que se eu resolver esta equação, a raiz será 5. Vocês conseguem pensar em outra equação em que "x", seja igual a 5? Pode ser utilizado x, y, z, qualquer letra. Também, podem usar a multiplicação e divisão.*

Neste momento, José solicita, como tarefa de casa, que os alunos elaborem mais três equações equivalentes, com resultado igual a 5, para a próxima aula (dia seguinte).

Em seguida, o professor anuncia o jogo das Equações Equivalentes e sugere que os alunos se organizem em quatro grupos: G1. Com três alunas, G2. Com uma aluna e dois alunos, G3. Com três alunas e G4. Com duas alunas e um aluno. José iniciou a OIC-DT (Figura 44), explicando as regras do jogo, enquanto os alunos o escutavam atentamente. As regras do jogo foram propostas de forma diferente daquelas do LD, como ele já tinha indicado na fase de pré-apropriação: separar as cartas azuis e vermelhas viradas para cima.

Figura 44 - OIC - Demonstração técnica (DT)



Fonte: Protocolo da pesquisa (2021).

O professor apresentou o jogo aos alunos (OIC-OE), solicitando que eles registrassem no caderno todas as equações resolvidas. E, propôs o seguinte exemplo:

José: *Cada pessoa do trio, um por vez, vai escolher uma equação azul e resolvê-la no caderno. Vamos dizer que a equação que você pegou foi essa: $3x+5=11$; você encontrou " $x = a$ tanto". Aí você vai procurar encontrar uma equação equivalente da cor vermelha. Por exemplo, essas duas equações aqui são equivalentes? Não sei, quando resolver aqui é que a gente vai ver.*

Percebemos que o professor enfatizou, na OIC-EP, que os alunos de cada grupo colaborassem com aquele que estivesse respondendo.

José: *Cada um, na sua vez de jogar, certo? Um aí pegar uma equação dessa cor (azul) e vai tentar identificar uma equação equivalente da outra cor (vermelha). Se forem equivalentes, formam o par. Depois, passa a vez para outro colega. Detalhe: se o colega tiver com dúvida sobre como é que resolve a equação, o outro colega pode ajudar. No final vamos ver qual grupo vai formar mais pares de equações equivalentes. Então, começando agora, vamos lá! Lembrem-se de anotar no caderno, quando o colega tiver resolvido você já pode ir observando para adiantar o trabalho dos outros! vamos lá pessoal!*

Os alunos começaram a jogar e o professor a observá-los (OIC- DA).

Figura 45 - OIC - Discussão entre atores (DA)



Fonte: Autoria própria (2021).

Percebemos que os alunos ao começarem a jogar, modificavam a regra do jogo que o professor tinha apresentado, no que diz respeito a esperar que cada aluno, na sua vez, buscasse formar o par de equações, para depois passar a vez a outro colega. Isto é, os alunos não esperaram que um colega terminasse para que o outro começasse a responder. O que reflete, por parte dos alunos, indícios da gênese instrumental do jogo. Sobre este episódio, o professor não interferiu, deixando que os alunos continuassem a resolver as equações livremente. Com o passar do tempo, em que constatamos que os alunos começaram a resolver as equações com frações, eles começaram a solicitar a ajuda do professor.

Figura 46- OII - Trabalho e Acompanhamento (TA) e OIC - Orientação e Explicação (OE)

Fonte: Protocolo da pesquisa (2021).

A respeito da OII – TA e OIC - OE (Figura 46), destacamos como o professor se dirigiu ao G2 (com dois alunos e uma aluna), para explicar a equação $2x = 2/3$, presente no jogo, utilizando um caderno, para representar a fração em forma de figura.

José: *Se isso aqui é um terço, essa parte aqui vai ser o que?*

Aluna: *Não sei.*

José: *Tem quantas partes aqui?*

Aluna: *2.*

José: *Então aqui tem $\frac{2}{3}$ a gente pegou a figura inteira e dividiu em 3 partes e pegou duas, logo isso aqui é $\frac{2}{3}$.*

Aluna: *Ah, entendi...*

José: *Então o resultado aqui dá $3 \cdot \frac{1}{3}$ dá $\frac{2}{3}$.*

Ao terminar a explicação com o G2, José se dirigiu aos demais grupos: "*Eu vou colocar uma aula no canal sobre equação do 1º grau e vocês precisam assistir às aulas do canal sobre frações.*" No decorrer da aula, ele continuou a auxiliar os grupos. Antes de terminar a aula, José pediu para que os alunos colassem no caderno os cartões com os pares de equações equivalentes formados, durante o jogo, por cada aluno. Ao final da aula, podemos perceber que alguns alunos de um mesmo grupo conseguiram formar mais pares de equação, o que fez se estabelecesse uma certa competição dentro do próprio grupo. O Grupo 3 foi aquele que venceu o jogo.

4.3.4 A Pós-aplicação do jogo em sala de aula por José

Pela autoconfrontação podemos compreender melhor a reação de José acerca de sua apropriação original do jogo e dos momentos didáticos da aula que assistimos juntos.

❖ Momento do primeiro encontro com a tarefa

Sobre a parte inicial da aula, em que o professor explicou a noção de equação equivalente, percebemos indícios do processo de instrumentação ocorrido, a partir da influência do jogo na sequência de ensino sobre este tema.

José: É, na verdade quando eu fosse trabalhar com a parte de equações equivalentes eu não tinha em mente ainda o que eu iria fazer, mas como chegou aí à ideia desse jogo, que eu não tinha nem observado que alguns livros trazem jogos. Nesse sentido, achei bacana a gente utilizar esse jogo.

Quanto ao uso do LD, o professor reportou sobre as cenas da aula: “*Na maioria das vezes eu uso o LD quando eu acho que está de acordo com o objetivo que eu tenho naquela aula. Tem umas partes sobre equação que não condiz com a realidade dos meus alunos. Então, usei só isso aí para introduzir o tema.*”.

❖ **Momento de exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica**

Ao assistir ao vídeo da aula, o professor manifestou sobre o episódio em que iniciou os exemplos sobre as equações equivalentes: “*O esquema que eu faço comumente é nós temos uma breve explicação que pode ser do livro ou de outro material e depois aplicamos nos exercícios e eu corrijo no quadro. Fazemos isso, sempre de maneira muito colaborativa.*”.

❖ **Momento de trabalho com a técnica de resolução**

Como o jogo só apresentava três cartas com equações envolvendo operações com frações, na visão do professor, a atividade não foi tão difícil para os alunos. O professor explicou que os alunos que participaram da aula durante a semana em que foi aplicado o jogo, nomeado por ele como Grupo 1, apresentava diferenças em relação a Grupo 2, que iriam assistir aulas na próxima semana (devido ao ensino híbrido adotado na pandemia de COVID19).

José: Veja, no geral, esse Grupo 1, ele é melhor do que o Grupo 2. O grupo 2, ele é mais retraído, às vezes por conta das dificuldades, medo de errar e tal. O Grupo é muito bom, desde o 6º ano que eles são bem participativos, eles não ligam muito se vão falar errado, não. Esse grupo participa muito. Se você tivesse ido para o 2, você ia ver a diferença, esse grupo é bem melhor.

Para o professor José “*o uso de jogos possibilita bastante a interação dos alunos e o trabalho colaborativo entre eles. Além de dinamizar as aulas de Matemática*”. Desta forma, ao propor mudanças nas regras do jogo, ele tinha a expectativa que os alunos auxiliassem uns aos outros. No entanto, ocorreu que alguns começaram a competir entre si, dentro do próprio grupo,

para responderem mais rápido as equações. Ou seja, alguns que tinham dificuldade em resolver as equações formaram menos pares por não terem a devida ajuda dos colegas. Isto ficou evidente ao final da aula, quando o professor pediu para que os alunos colassem no caderno, as cartas com os pares de equações formados, durante a partida do jogo. Sobre isso, ele comentou: *“Eu pedi para eles colarem no caderno, para perceberem o que conseguiram fazer. Também, para eles terem mais contato com as equações, assim ao abrirem aquelas páginas ali, eles verem aquelas equações do 1º grau equivalentes”*. Ele indicou que ainda retomaria o tema em outra aula.

A título de síntese, a partir do diálogo com José, podemos identificar a integração do *Jogo das Equações Equivalentes* ao seu sistema de recursos e em particular, um maior interesse por os jogos propostos em livros didáticos aprovados pelo PNLD.

Pesquisador: *Você gostou da experiência de utilizar o jogo em sala de aula?*

José: *Sim, com certeza.*

Pesquisador: *Você utilizaria esse jogo novamente?*

José: *Sim, com certeza. Eu estava até dizendo para outra professora do 7º ano, que tinha um jogo para trabalhar equação equivalente. Aí eu mostrei para a professora e ela gostou. Eu usaria de novo, é uma ideia bacana, inclusive eu vou até olhar mais os jogos nos livros didáticos.*

Sobre a instrumentalização do jogo, José apresentou indícios do seu Conhecimento do Conteúdo e do Ensino e do Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos, ao afirmar que:

José: *Eu não penso nesse jogo para avaliar, não. O que eu queria era trabalhar de maneira colaborativa, por isso que desde o começo eu quis propô-lo em grupo. Então, o jogo serviu basicamente para introduzir o conteúdo e um meio dos alunos que têm mais dificuldade aprenderem com aqueles que têm menos, entendeu?*

Também perguntamos se a aplicação do jogo ocorreu como ele esperava? O professor respondeu: *“Sim. Já esperava as dificuldades apresentadas sobre o conteúdo. Mas, os alunos desse grupo são bem participativos.”* Quanto à previsão de orquestrações instrumentais para outra possível utilização do jogo das Equações Equivalentes, ele apontou: *“Eu faria da mesma forma, eu só faria de forma diferente se eu tivesse os estudantes do mesmo bom nível da aluna Mayara. Mas, tendo alunos com as mesmas dificuldades desses, eu faria do mesmo jeito”*.

Comprendemos assim, que para um estudo sobre a reapropriação do jogo em tela, necessitaríamos analisá-la a partir de outro contexto, com um espaço temporal para identificarmos a evolução dos conhecimentos profissionais do utilizador do recurso; da inter-relação desse jogo com o seu sistema de recursos e a reverberação disso nas orquestrações instrumentais previstas e efetivas em sala de aula.

4.5 A APROPRIAÇÃO DO JOGO DAS EQUAÇÕES EQUIVALENTES POR LUZIA E JOSÉ: SIMILARIDADES E DIFERENÇAS

Sobre a relação da professora Luzia e do professor José com o uso de jogos matemáticos, destacamos algumas características individuais. Percebemos que a professora estabelece uma conexão entre os jogos e atividades com a aplicação/prática - oficinas - resolução de cálculo direto - tradicional. Além disso, ela costuma utilizar em suas aulas jogos digitais. Sublinhamos que para Luzia o uso de jogos não pode ser aleatório, para passar o tempo da aula e sim um recurso para ensinar o conteúdo e facilitar o processo de aprendizado.

Em contrapartida, José estabelece uma relação entre os jogos com os conteúdos trabalhados - o livro didático adotado na escola e outros recursos. Já desenvolveu jogos com seus alunos, e ressalta a importância da interação propiciada pelos jogos e também o aspecto colaborativo para aqueles estudantes que sabem mais/tem mais facilidade com a matéria possam ensinar àqueles que sabem menos. Ademais, percebemos o aspecto lúdico mais presente nas considerações de Luzia sobre os jogos do que naquelas do professor José.

Na presente pesquisa, buscamos analisar os processos de instrumentação e instrumentalização e as orquestrações instrumentais em torno da apropriação do jogo das Equações Equivalentes. Relembramos que levamos em conta que: “RECURSO APROPRIADO = um recurso instrumentalizado + orquestrações instrumentais.

Podemos perceber que os dois processos de instrumentação e de instrumentalização foram mais ou menos desenvolvidos dependendo dos professores. Nesse sentido, destacamos sobre a instrumentação um aspecto em comum, pois ambos professores sofreram a influência do jogo sobre a sequência de ensino dos temas Equações do 1º Grau e Equações Equivalentes. Também, como os demais jogos de LD analisados pelos professores foram refutados em virtude da falta de clareza de suas regras. Nesse sentido, compreendemos como se faz fundamental apoiar os professores na apropriação de um novo recurso. Os conceptores de jogos devem, portanto, pensar nos elementos a serem transmitidos aos usuários.

Ressaltamos como José efetuou uma forte instrumentalização do jogo, diferentemente de Luzia. Por exemplo, em relação às modificações realizadas nas regras do jogo, na fase de pré-apropriação, como podemos ver no Quadro 11.

Quadro 11 - Modificações nas regras do jogo das equações equivalentes na fase de pré-apropriação por Luzia e José

Regra original do jogo	Fase de Pré-apropriação
------------------------	-------------------------

<p>Antes de começarem a partida, misturem as peças vermelhas e distribuam igualmente entre os jogadores. As peças azuis devem ser empilhadas no centro da mesa com as cartas voltadas para baixo.</p> <p>A cada rodada o jogador pega uma peça azul e verifica se nele há uma equação equivalente a alguma das equações das peças vermelhas que estão com ele. Se houver, então o jogador separa esse par de peças. Por exemplo:</p> <p style="text-align: center;">6+x=2 2x=-8</p> <p>Caso contrário, o jogador descarta a peça azul em uma pilha separada, também sobre a mesa. O próximo jogador pode escolher se quer pegar a peça azul descartada pelo jogador anterior ou uma peça azul nova.</p> <p>Quando terminarem as peças azuis sobre a mesa, ganha a partida quem tiver formado mais pares de peças com equações equivalentes.</p>	<p>Professora Luzia</p> <p>Não modificou as regras do jogo.</p>	<p>Professor José</p> <ul style="list-style-type: none"> - Cada grupo de alunos recebe as 12 cartas vermelhas e as 12 cartas azuis. - Os alunos devem separar as cartas azuis de um lado e as vermelhas de outro. - Todas as cartas devem estar viradas para cima. - Cada aluno, na sua vez, deve resolver uma equação da carta azul e encontrar uma equação das cartas vermelhas que seja equivalente. - Ganha o jogo o grupo que formar mais pares de equações equivalentes.
---	--	--

Fonte: Autoria própria (2021).

No que diz respeito às modificações do jogo na fase de apropriação original (Quadro 12), ou seja, quando ocorreu a implementação do jogo em sala de aula, constatamos que em virtude da gênese instrumental dos alunos, Luzia e José instrumentalizaram o jogo de forma diferente. Isto é, o desempenho didático verificado por esses professores acerca do que eles haviam proposto, fizeram com que eles modificassem as regras do jogo em consonância com aquelas executadas pelos alunos.

No caso de Luzia, os alunos deveriam responder às equações das cartas vermelhas apenas à medida que pegassem uma carta azul. Os alunos decidiram por responder todas as equações das cartas vermelhas para depois iniciar a comparação e formação de pares com frações equivalentes. Esta modificação que partiu de um grupo de alunos foi acatada pela professora e integrada a uma futura utilização do jogo. O professor José, relatou que o fato de “*deixar livre a escolha das equações pelos alunos*”, poderia ser modificada a depender do nível de aprendizagem dos mesmos.

Quadro 13 - Modificações nas regras do jogo das equações equivalentes na fase de apropriação original de Luzia e José

Regras propostas por Luzia	Regras executadas pelos alunos de Luzia	Regras propostas por José	Regras executadas pelos alunos de José
----------------------------	---	---------------------------	--

<p>Antes de começarem a partida, misturem as peças vermelhas e distribuam igualmente entre os jogadores. As peças azuis devem ser empilhadas no centro da mesa com as cartas voltadas para baixo.</p> <p>A cada rodada o jogador pega uma peça azul e verifica se nele há uma equação equivalente a alguma das equações das peças vermelhas que estão com ele. Se houver, então o jogador separa esse par de peças. Por exemplo:</p> <p style="text-align: center;">6+x=2 2x=-8</p> <p>Caso contrário, o jogador descarta a peça azul em uma pilha separada, também sobre a mesa. O próximo jogador pode escolher se quer pegar a peça azul descartada pelo jogador anterior ou uma peça azul nova.</p> <p>Quando terminarem as peças azuis sobre a mesa, ganha a partida quem tiver formado mais pares de peças com equações equivalentes.</p>	<p>Cada aluno resolve todas as equações das cartas vermelhas antes de iniciar o jogo.</p>	<p>Cada grupo de alunos recebe as 12 cartas vermelhas e as 12 cartas azuis.</p> <p>Os alunos devem separar as cartas azuis de um lado e as vermelhas de outro.</p> <p>Todas as cartas devem estar viradas para cima.</p> <p>Cada aluno, na sua vez, deve resolver uma equação da carta azul e encontrar uma equação das cartas vermelhas que seja equivalente.</p> <p>Ganha o jogo o grupo que formar mais pares de equações equivalentes.</p>	<p>Cada aluno pega uma carta vermelha e responde a equação, depois repete o processo com uma carta azul a fim de formar um par de equações equivalentes. à medida que formar um par já pode buscar formar outro par sem esperar que um colega termine para que outro comece a responder.</p>
--	---	---	--

Fonte: Autoria própria (2021).

No que tange as diferenças entre os conhecimentos de Luzia e de José que influenciaram a instrumentalização e as orquestrações instrumentais do jogo (Quadro 13), destacamos, por exemplo, que o Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos de José já vinha sendo desenvolvido desde o 6º ano, por ele estar ensinando aos alunos que se encontravam no 7º ano; enquanto Luzia tinha conhecimento de alguns, por não terem sido seus alunos e também serem ausentes das aulas no ensino remoto.

Sublinhamos sobre o Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos, a finalidade da aula com o uso do jogo, de forma diferente. Luzia, inseriu o jogo na sequência de ensino para revisar equações equivalentes; José, para introduzir este tema. Ambos buscaram revisar a resolução de equações do 1º grau e demonstraram Conhecimento do Conteúdo e do Currículo. Vejamos:

Quadro 13 - Conhecimentos de Luzia e José

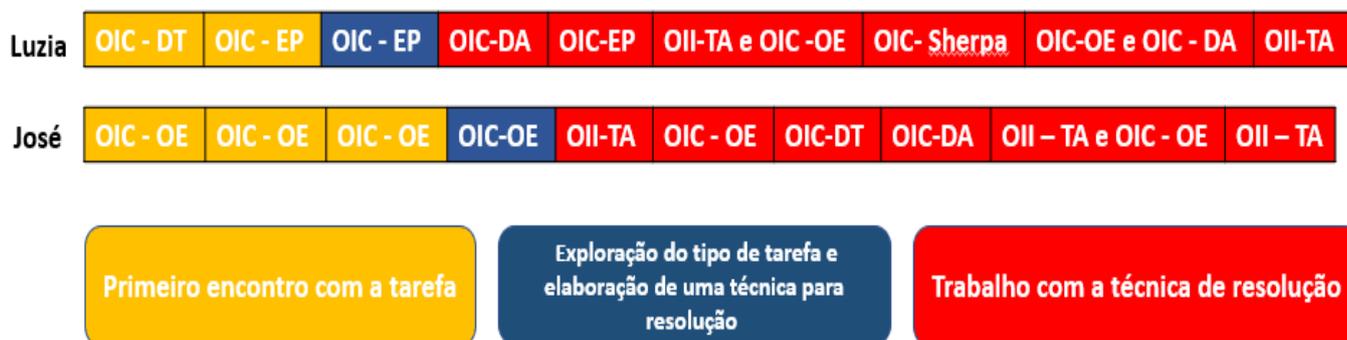
Conhecimentos de Luzia	Conhecimentos de José
------------------------	-----------------------

<p><i>Conhecimento do Conteúdo e do Currículo</i> - integração do jogo à sequência de ensino sobre Equação do 1º Grau para o 9º ano, em consonância com os objetivos educacionais e as orientações da Secretaria de Educação do Recife.</p> <p><i>Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos</i> - Intenção de revisar a resolução de equações com frações, operações com números inteiros e a noção de equações equivalentes. - Alunos ausentes no ensino remoto e desconhecidos pela professora.</p> <p><i>Conhecimento do Conteúdo e do Ensino</i> - Preferência pessoal de técnicas para resolução de equações ("transposição de termos" e "neutralização de termos"). Protótipo: definição, exemplo e exercício.</p> <p><i>Conhecimento do Horizonte do Conteúdo</i> – Revisão dos conteúdos do 6º, 7º e 8º anos para não aprovar os alunos com muito déficit ao Ensino Médio.</p>	<p>Conhecimento do Conteúdo e do Currículo – integração do jogo à sequência de ensino sobre Equação do 1º Grau para o 7º ano, em consonância com os objetivos educacionais e as orientações da Secretaria de Educação do Recife.</p> <p><i>Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos</i> - Intenção de introduzir a noção de equações equivalentes e revisar a resolução de equações com frações, operações com números inteiros. - Alunos do 7º ano conhecidos pelo professor, desde o 6º ano.</p> <p><i>Conhecimento do Conteúdo e do Ensino</i> - Preferência pessoal de técnicas para resolução de equações ("transposição de termos", "neutralização de termos" e "cálculo mental"). Protótipo: definição, exemplo e exercício.</p>
--	--

Fonte: Autoria própria (2021).

Dentre as diferenças da apropriação original, sobre as orquestrações efetivas observadas na aula em que foi utilizado o jogo das Equações Equivalentes, podemos ver na Figura 47, como Luzia já introduziu o jogo no momento do primeiro encontro com a tarefa (OI-DT), enquanto José apenas no momento do trabalho com a técnica de resolução.

Figura 47 - OI efetivas de Luzia e José



Fonte: Autoria própria (2021).

No momento do primeiro encontro com a tarefa, destacamos que José explicou a noção de equações equivalentes por meio da OI-OE, utilizando gestos com pincéis para simular uma balança, livro didático e quadro branco; em contraponto, Luzia por meio da OI - EP, utilizou apenas o quadro branco.

No que se refere ao momento de exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica, podemos elencar que a principal diferença entre Luzia e José foi a interação dos alunos com o professor, o que justifica as OI utilizadas, Luzia com a OIC- EP e José com OIC- OE.

Na aula de Luzia, percebemos que o momento de trabalho com a técnica de resolução, ocorreu em torno do jogo, enquanto José, além do jogo, realizou nesse momento, atividades com o livro didático e a elaboração de equações. Enfatizamos que Luzia utilizou durante a aula a OIC - Sherpa, ao contrário de José que não utilizou esse tipo de orquestração.

As orquestrações instrumentais que figuraram simultaneamente, apareceram tanto na aula de Luzia quanto na aula de José, sendo que na aula de Luzia a OIC - OE e OIC – DA, e, na aula de ambos, OII - TA e OIC - OE.

Tanto Luzia quanto José afirmaram ter em mente utilizar novamente o jogo das Equações Equivalentes; com isso, supomos que esse jogo foi integrado ao sistema documental. Porém, compreendemos que o estudo sobre a reapropriação, isto é, a retomada do jogo eventualmente adaptado a novos usos por Luzia e José, necessitaria de outros procedimentos e um período maior de acompanhamento de seu trabalho, pois a reapropriação implicaria, por exemplo, em analisar a implementação da sequência de ensino sobre o tema, mais uma vez, com condições variadas (de contexto, de público, de recursos, etc.).

O aspecto temporal da reapropriação de um dado recurso faz-se importante para identificarmos a evolução dos conhecimentos profissionais do utilizador do recurso; da inter-relação desse jogo com o seu sistema de recursos e a reverberação disso nas orquestrações instrumentais previstas e efetivas em sala de aula. Assim, não falamos de reapropriação durante a implementação de um recurso em sala de aula pelo professor, por exemplo, com outro grupo de alunos, se esta ocorre durante o mesmo período de experimentação da apropriação original.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo analisar a apropriação por professores de Matemática de jogos sobre Equação do 1º grau propostos em livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental. Para isso, em uma primeira, etapa buscamos identificar os jogos sobre Equação do 1º grau propostos em livros didáticos. Das onze coleções, identificamos esses jogos apenas em duas, sendo três jogos identificados na coleção Teláris e apenas um na coleção Araribá. Este resultado nos indica que ocorre pouco investimento dos autores de LD acerca de jogos sobre Equação do 1º grau, o que provavelmente impacta o uso deles por parte dos professores.

Em uma segunda etapa, buscamos aplicar o Modelo de Apropriação de um Novo Recurso através o uso e da aplicação de jogos matemático pelos professores/sujeitos da pesquisa²⁰. Nas entrevistas com os professores, percebemos que a dificuldade deles em entender certas regras e o trabalho em confeccionar o material dos jogos dos LD, revela que o fator ergonômico influencia a escolha de um jogo para utilizá-lo em sala de aula. Pensamos que os autores de LD poderiam melhor dispor as peças dos jogos aos professores de forma mais acessível à confecção deles.

Ao fazermos a verificação da organização matemática $[T, \tau, \theta, \Theta]$ dos jogos identificados nos LD, tentamos fazer alguma correlação desses recursos com o ensino de Equação do 1º grau pelos professores. Constatamos que os professores se demonstraram atentos aos tipos de tarefas propostas nos jogos. Isto é, se elas estavam de acordo com o que eles já tinham trabalhado com os alunos.

Como limitação da nossa pesquisa, esclarecemos que não conseguimos acompanhar toda a sequência de ensino sobre Equação do 1º Grau por cada professor, sobretudo em virtude da pandemia de COVID 19, pois não tivemos acesso às aulas no ensino remoto ministradas pelos professores e nem às aulas presenciais, como gostaríamos.

Pelo material que foi trabalhado pelos professores sobre o tema (fichas de exercício, LD, plano do ensino remoto – edurec, foto de quadro branco...), tivemos a ideia de que as equações propostas nos jogos não estavam distantes do que eles já tinham ensinado aos alunos. Pelo que conseguimos ter acesso sobre a sequência de ensino de Equação do 1º Grau, consideramos importante esse acompanhamento em outras investigações para podermos melhor

²⁰ Embora esses jogos sejam de fácil acesso em LD, como é o caso daqueles apresentados na coleção Teláris, que são bem conhecidos pelos professores, por ser uma coleção aprovada em diversas edições do PNL. (*Grifos nossos*)

entender a apropriação dos jogos pelos professores. Isso nos ajudou a compreender as preferências dos professores sobre um jogo, em particular, o jogo das Equações Equivalentes, e também a melhor forma vista por eles de utilizá-lo em sala de aula.

Os professores que participaram de nossa pesquisa trabalhavam na mesma rede de ensino. Não conseguimos professores que estivessem atuando simultaneamente no 7º ano do Ensino Fundamental. Assim, constatamos como Luzia teve a intenção de usar o jogo das Equações Equivalentes para revisar equações equivalentes no 9º ano, enquanto José o utilizou para introduzir o estudo deste conteúdo no 7º ano.

Dessa maneira, eles revelaram pistas de como os processos de instrumentação e de instrumentalização podem ocorrer de formas diferentes, segundo os conhecimentos profissionais de cada um e como esses processos podem ser relativamente desenvolvidos. Essa experiência foi marcante, uma vez que já na fase de pré-apropriação ocorreu a mudança nas regras do jogo das Equações Equivalentes pelo professor José (7º ano), enquanto a professora Luzia (9º ano) não fez isto. Também foi possível perceber a importância de identificar as orquestrações instrumentais previstas na preparação da aula para utilização do jogo.

Não poderíamos ter compreendido o que se passou nas orquestrações reais, o que de fato aconteceu na aula em que ocorreu a aplicação do jogo, sem ter tido esse momento de análise das orquestrações previstas. De fato, podemos observar por esse procedimento o que aconteceu dentro do esperado pelos professores ou não. Para nós, o episódio em que os alunos mudam as regras do jogo apresentadas pela professora Luzia demonstra a gênese instrumental deles nesse recurso. Para além disso, trouxe à tona uma situação que fez a professora repensar a eficácia do que ela tinha proposto para os estudantes, fazendo evoluir e desenvolver outras maneiras de usar o jogo.

A princípio, o modelo de apropriação de um novo recurso (TRGALOVÁ; ROUSSON, 2017) foi desenvolvido sobre um jogo digital “*À la ferme*”, à luz do Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo (TPACK). No nosso caso, por se tratar de um jogo impresso em papel, tomamos como referência o Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL *et al.*, 2008), pois consideramos que dependendo da natureza do recurso, podemos escolher os conhecimentos profissionais mais adequados à análise de sua apropriação.

No caso de ter realizado essa pesquisa sobre o Jogo das Equações Equivalentes, presumimos que encontraríamos diferenças e/ou certas semelhanças nos processos de instrumentação e instrumentalização, bem como nas orquestrações elaboradas por outros professores. Diante disso, consideramos que vários fatores influenciam na apropriação de um

jogo pelos professores, sendo essencial a identificação dos conhecimentos dos docentes e o mapeamento do sistema de recursos de cada professor.

Ademais, esperamos que este trabalho possa suscitar outras investigações sobre a apropriação de recursos por professores de Matemática, em particular a de jogos voltados para o ensino de temas específicos.

Como perspectivas de futuras pesquisas indicamos:

- Identificar a apropriação de outros jogos pelos professores;
- Identificar a apropriação de outros recursos pelos professores que sejam diferentes de jogos matemáticos;
- Utilizar o modelo de apropriação de um novo recurso para analisar a apropriação de jogos de outra áreas de conhecimento (biologia, química, física, etc);
- Trabalhar com outros modelos de conhecimento para o estudo do processo de apropriação de um novo recurso;
- Investigar o processo de reapropriação dos professores, depois de um certo tempo da apropriação original.

Por fim, esperamos que esse trabalho sirva de inspiração para outras pesquisas baseadas no modelo de apropriação de um novo recurso, bem como para outras investigações sobre a utilização de jogos matemáticos.

REFERÊNCIAS

- ABAR, C.A.A.P; ALENCAR, S.V. **A Gênese Instrumental na Interação com o GeoGebra: uma proposta para a formação Continuada de professores de Matemática.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 349-365, ago. 2013.
- ADLER, J. **La conceptualisation des ressources apports pour la formation des professeurs de mathématiques.** In : GUEUDET, L ; TROUCHE, L. (Org.). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques.* Rennes: INRP et Presses Universitaires de Rennes, 2010, p. 23-39.
- ALMEIDA, M. et al. **Banco geométrico: gênese documental e orquestração instrumental.** Revista Eletrônica de Educação Matemática -REVEMAT, Florianópolis, v. 15, n. 1, p. 01-22, 2020.
- ALMOULOUD, S.; FARIAS, L.M.S.; HENRIQUES, A. **A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos.** Curitiba: CRV, 2018. p. 181- 201.
- ARAÚJO, A. J. **Estudo sobre o ensino de equações do 1º grau, na França e no Brasil, à luz da Teoria Antropológica do Didático.** In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIII. Recife: UFPE, 2011, p. 1-12.
- ARAÚJO, A.J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático.** 2009. 290 f. Tese (Programa de Pós- Graduação em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.
- ARAÚJO, C. D.; ISIDORO, G. F. R.; MOTTA, M. S. **Relato de experiência da aplicação do jogo “quebra-cabeça triangular” sobre as quatro operações em turmas do ensino médio.** In: SEMANA ACADÊMICA DA MATEMÁTICA, III, 2014, Cornélio Procópio. Cornélio Procópio, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014. p. 1-7.
- ASSIS, C. **Os Recursos do Professor de Matemática e a perspectiva documental do seu trabalho docente.** Educação Matemática em Foco, Campina Grande, v.07, n.3, pp.10-32, 2018.
- BALL, D.L.; THAMES, M.H.; PHELPS, G. Content Knowledge for teaching: what makes it special? *Teacher Educ.*, v.59, n.5, p.389-407, 2008.
- BARBOSA, E. J. T. **Praxeologia do Professor: análise comparativa com os documentos oficiais e do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau.** 2017. 252 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2017.
- BARBOSA, E. J. T. **Equação do primeiro grau em livros didáticos sob a ótica da teoria antropológica do didático.** 2011. 143 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.
- BARRETO, F.L.; GAVA, A **Os jogos matemáticos e o jogo “1º grau ou grau?”.** Rev. Ensino de Matemática em Debate, São Paulo, v.6, n.3, p. 46-64, 2019.

BATISTA, C. L. **Os conceitos de apropriação:** contribuições à Ciência da Informação. Em *Questão*, 24(2), p. 210-234, 2018.

BELLEMAIN, F.; TROUCHE, L. **Compreender o Trabalho do Professor com os Recursos de seu Ensino, um Questionamento Didático e Informático.** *Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online*, Aracajú, v. 9, n. 1, p. 105-144, 2019.

BESNIER, S. **Le travail documentaire des professeurs à l'épreuve des ressources technologiques : le cas de l'enseignement du nombre à l'école maternelle.** (Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation). Université de Bretagne Occidentale, 2016.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini.** 9. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

BITTAR, M. **A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática.** *Educar em Revista*, Curitiba: Brasil, n. Especial 1/2011, p. 157-171, 2011. Editora UFPR 157.

BOTELHO, J. A.; ASSIS, C. **O livro didático na perspectiva de recurso do professor de matemática.** In: IGLIORI, S. *compreender o trabalho dos professores brasileiros do ensino básico: uma Abordagem pelos Recursos*; São Paulo: Blucher, 2021. p. 127-147.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: Ministério da Educação, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de Livros Didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2018).** Brasília: Ministério da Educação, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia digital PNLD 2020.** Brasília: Ministério da Educação, 2020. Disponível de em: <https://pnld.nees.ufal.br/assets-pnld/guias/Guia_pnld_2020_pnld2020-matematica.pdf> Acesso em: 20 jan. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 5ª a 8ª séries.** Brasília: Ministério da Educação, 1998.

BRASILEIRO, A. M. M. **A autoconfrontação simples aplicada à formação de docentes em situação de trabalho.** *Scripta*, 15 (28), 205-224, 2011. Brest, 2016.

CARRILLO, J. et al. **Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.** Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones, 2014.

CARVALHO, D. G. **Uma análise da abordagem da área de figuras planas no guia de estudo do projuvem urbano sob a ótica da teoria antropológica do didático.** 2012, 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.

CHAVANTE, E. R. **Convergências Matemática.** 1. ed. São Paulo: SM, 2018.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

COUTO, R. M. L. S. **Metaorquestração instrumental**: um modelo para repensar a formação de professores de matemática 2018. 382f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica), Universidade Federal de Pernambuco, 2018.

DANTE, L. R. **Teláris Matemática**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

DE VAUJANY, F.X. Pour une théorie de l'appropriation des outils de gestion: Vers un dépassement de l'opposition conception-usage. **Management and Avenir**, 9, p. 109-126, 2006.

DRIJVERS, P. et al. **Instrumental Orchestration: Theory and Practice**. Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, Utrecht University. France, 2010.

DRIJVERS, Paul; DOORMAN, Michiel; BOON, Peter; REED, Helen; RAVMEIJER, Koeno. **The Teacher and the Tool**: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, Springer, Holanda, v. 75, n. 2, p. 213-234, 2010.

ESPINDOLA, E.B.M.; LIRA, F A. L. **Jogos para o Ensino de Funções e Trabalho Documental Docente**. *Ensino de Matemática em Debate*, São Paulo, v.5, n.3 p. 414 – 437, 2018.

FERREIRA, L. F. D. **Um estudo sobre a transição do 5º ano para o 6º ano do ensino fundamental**: o caso da aprendizagem e do ensino de área e perímetro. 386 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife. 2018.

GAY, M. R.G.; SILVA, W.R. **Araribá Mais Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCHI, B. **A Conquista da Matemática**. 7º ano. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

GUEUDET, G., et TROUCHE, L. **Vers de nouveaux systèmes de documentation pour les professeurs de mathématiques ?**. *Éducatif Études en mathématiques*, 71(3),p. 199-218, p. 2009.

GUEUDET, G., TROUCHE, L. **Du travail documentaire des enseignants** : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique*, 2 (3), p.7-33, 2008.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. **Do trabalho documental dos professores: gêneses, coletivos, comunidades: o caso da Matemática**. EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – vol. 6 - número 3 – 2015.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. **Investigation réflexive des genèses documentaires des enseignants** : vers une méthodologie pour l'analyse des genèses et des systèmes documentaires des enseignants. Disponível em: <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/approche_documentaire/methodo_approchedoc_dec08.pdf> Acesso em: 09 set. 2020.

HILL, H.C.; BALL, D.L.; SCHILLING, S.G. **Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring** Rev. Ens. Educ. Cienc. Human., v. 18, n.2, p. 126-133, 2017 teachers' topic-specific knowledge of students. J. Res. Mathematics Educ., p. 372-400, 2008.

IGLIORI, S. B.C; ALMEIDA, MV. **A orquestração instrumental de uma situação matemática para o EFII**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.21, n.5, p. 230-245, 2019. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/45545>> Acesso em: 09 set. 2020.

IGNÁCIO, R. S. **Criação de capítulo de livro didático digital no estágio curricular supervisionado: uma análise da documentação na formação inicial do professor de matemática**. 2018. 171f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Anhanguera de São Paulo, 2018.

KLAUS, V.; OLIVEIRA, R. B.; LÜBECK, M. **Dama da Matemática e Tetris 3D: Um Estudo de Equações do 1º grau por meio de jogos**. Revista Temas em Educação, João Pessoa, v. 27, n. 1, p. 146–163, 2018.

KRIPTA, R.; SCHELER, M; BENOTTO, D. **Pesquisa Documental: considerações sobre conceitos e características na Pesquisa Qualitativa**. Atas, v.2, p. 1-5. 2015.

LIMA, A. P.F; SANTOS, J. S; ALVES, V. S. **Jogando com equações do 1º grau**. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, III., 2016, Campina Grande - PB. **Anais [...]**. Campina Grande: Realize Eventos Científicos & Editora, 2016, p. 1-6.

LONGEN, A. **Apoema Matemática**. 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2018.

LUCENA, R.; GITIRANA, V.; TROUCHE, L. **Teoria da orquestração instrumental: um olhar para a formação docente**. In: SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, I. Bonito: UFMS/SBEM, 2016.

LUTZ, M. R. **Triminó dos números decimais**. Pibid. Passo Fundo, RS: Instituto Federal Farroupilha, Campus Alegrete, 2016.

MICHAELIS. **Dicionário Escolar da Língua Portuguesa**. Apropriação.4 ed. Barueri, SP: Melhoramentos, 2016.

MORAES, A. R. L et al.. **O “jogo memória das equações” como aliado na revisão do conteúdo de equações do 1º grau**. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, VI. Campina Grande: Realize Eventos Científicos & Editora, 2019. p. 1-12.

MORIEL JUNIOR, J. G.; WIELEWSKI, G. D. **Base de Conhecimento de Professores de Matemática: do Genérico ao Especializado**. Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas. Cuiabá, v. 18, n. 2, p. 126-133, 2017.

MUNIZ, A.S; PAIS, L.C. **Uma análise da introdução de equações do primeiro grau com uma incógnita em um livro didático de matemática**. In: SEMINÁRIO SUL-MATO-GROSSENSE DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, III., Campo Grande. **Anais [...]**, Campo Grande: UFMS, 2009, p. 27-37.

NOGUEIRA, R.C.S. **A Álgebra nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental: uma Análise Praxeológica**. 2008. 125 f. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Educação) - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2008.

OLIVEIRA, A. et al. **Do gamão ao gamão trigonométrico**. REVASF, Petrolina, v. 10, n.23, p. 374-389, 2020.

OLIVEIRA, C.N.C; FUGITA, F. **Geração Alpha Matemática**. 6. ed. São Paulo: SM, 2019.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**. Ensino Médio. 1º ano. São Paulo: Moderna, 2015.

PATARO, P. M.; BALESTRI, R. **Matemática Essencial**. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

PAULINO, Cristiane Luiz; GUILHERME, Edilaine Cristina Guedes; NETO, João Coelho. **Equamemória de Açõesjogos: Atividades de ensino**. 2017 Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/326337022_JOGO_MEMORIA_DAS_EQUACOES_ATIVIDADES_DE_ENSINO> Acesso em: 10 jan. 2022.

PAZUCH, Vinícius; LIMA, Caroline Miranda Pereira; ALBRECHT, Evonir. **Conhecimentos mobilizados por professores que ensinam matemática e o conceito de função na educação básica**. Revista Eletrônica de Educação, v. 12, n. 2, p. 361-379, maio/ago. 2018.

PONTES, E. et al. **A abordagem do conceito de área como grandeza geométrica a partir do jogo pintárea**. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, V. Recife: Realize Eventos Científicos & Editora, 2018.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies : une approche cognitive des instruments contemporains**. Paris, Armand Colin, 1995.

RECIFE. Secretaria Municipal de Educação. (2021). **Plano de estudo**. 7º ano. Disponível em: <http://www.portaldaeducacao.recife.pe.gov.br/sites/default/files/arquivos_informativos_home/EnsinoFundamental.pdf> Acesso em: 20 ago. 2021.

RECIFE. Secretaria Municipal de Educação. (2021). **Plano de estudo**. 9º ano. Disponível em: <http://educ.rec.br/escoladofuturoemcasa/wp-content/uploads/2021/03/0003421_Plano-de-Estudo-9o-ano_2a-semana-R01-MS-10-03.pdf> Acesso em: 20 ago. 2021.

RIBEIRO, A. J. **Conhecimento matemático para o ensino de equação: algumas implicações para a formação do professor de matemática**. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, V. Petrópolis: SBEM, 2012, p. 1-21.

ROCHA, K. M; TROUCHE, L. **A trajetória documental: uma análise da história da integração de recursos na prática do professor de matemática.** Ensino de Matemática em Debate, São Paulo, v.5, n.3, p.321-341, 2018.

ROCHA, K.M; TOUCHE, L. **Da produção coletiva de livros didáticos digitais aos usos feitos por professores de matemática: o caso do grupo francês sésamath.** Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, Recife, v.6, n.3, p.1-22, 2015.

ROGER, J-L. **Metodologia e métodos de análise em clínica da atividade.** Cadernos de Psicologia Social do Trabalho, 16, 111-120, 2013.

ROUSSON, L. **Conception d'un jeu-situation numérique et son appropriation par des professeurs : le cas de l'enseignement de l'énumération à l'école maternelle.** 2017. Thèse (Doctorat en Sciences de l'Éducation), Université de Lyon, Lyon, 2017.

SAMPAIO, F. A. **Trilhas da Matemática.** 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

SERFATY-GARZON, P. **L'Appropriation. Dictionnaire critique de l'habitation et du logement.** Paris: Armand Colin, 27-30, 2003.

SILVA, D. W. da; SANTOS, J. V. R. dos (2014). **Conhecimentos específicos do professor de matemática: um 'novo' olhar sobre uma teorização.** In: SEMINÁRIO SUL-MATOGROSSENSE DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VIII. Campo Grande, 2014.

SILVEIRA, E. **Matemática Compreensão e Prática.** 5. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

SMOLE, K.S.; DINIZ, M.; MILANI, E. **Caderno do Mathema.** Jogos de matemática. 6º ano ao 9º ano. Porto Alegre: Artmed, 2007.

SMOLE, K.S.; DINIZ, M.I. **Matemática: Ensino Médio.** 1º ano. São Paulo: Saraiva, 2014

SOUZA, J. **Matemática Realidade & Tecnologia.** 1. ed. São Paulo: FTD, 2018.

TRGALOVÁ, Jana; ROUSSON, Laetitia. **Model of appropriation of a curricular resource: a case of a digital game for the teaching of enumeration skills in kindergarten,** ZDM Mathematics Education, n.49, p.769-784, 2017.

TROUCHE, L. (Eds.). **Ressources vives: le travail documentaire des professeurs en mathématiques.** Rennes: Presses Universitaires de Rennes et INRP, 2010. p.223-269.

TROUCHE, L. **Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations,** Recherches en didactique des mathématiques, 25, p. 91-138, 2005.

TROUCHE, L. **Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations.** International Journal of Computers for Mathematics Learning, 9, p. 281-307, 2004.

TROUCHE, L., GUEUDET G., PEPIN B. ; ALDON, G. **L'approche documentaire du didactique**, p. 1-13, 2020. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02512596/document>> Acesso em: 20 jan.2022.

VERGNAUD, G. **Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation**. Psychologie Française, 30, p. 245-252, 1985. Traduzido por Maria Lucia Faria Moro, com revisão de Luca Rischbieter e Maria Tereza Carneiro Soares. Disponível em: <<https://vergnaudbrasil.com/>> Acesso em: 20 jan. 2021.

VILAÇA, M. M. **Investigando o processo de gênese instrumental de licenciandos em matemática ao utilizarem o geoplano durante a realização de atividades sobre quadriláteros**. 2018, 140f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica), Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

XAVIER NETO, A.L.; SILVA, M. J. F. **Panorama atual das pesquisas realizadas sobre abordagem documental**. Rev. Prod. Disc. Educ.Matem., São Paulo, v.6, n.2, p. 5-17, 2017.

XAVIER NETO, A.L.; SILVA, M. J. F.; TROUCHE, L. **A construção de atividades para o ensino de sequências numéricas: Uma análise pela lente da Abordagem Documental do Didático**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.21, n.5, pp. 300-314, 2019.