UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS – PPGEC
MESTRADO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

MARIA FERNANDA MARINHO MENDONÇA

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS: ANÁLISE DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA O 8° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Recife – PE
2021

MARIA FERNANDA MARINHO MENDONÇA

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS: ANÁLISE DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA O 8° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Ensino das Ciências.

Área de concentração: Didática da Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Anna Paula de Avelar Brito Lima.

Recife – PE

2021

Aos meus queridos pais, **Hélio e Vanda**, meus primeiros educadores, que sempre destacaram o papel da educação como o único caminho para eu me tornar uma pessoa melhor. Que me incentivaram e me apoiaram para jamais desistir dessa etapa da minha vida, independente das difíceis circunstâncias.

Ao meu filho, **Miguel Fernando**, pelo amor que demonstra ter por mim e pela força que tem me dado para seguir com perseverança.

As minhas queridas irmãs, **Thaís** e **Hélia**, por serem minhas melhores amigas.

Ao meu esposo, **Erisson**, pelo companheirismo e força para continuar lutando pelos meus ideais.

A vocês, DEDICO esta obra!

AGRADECIMENTOS

A Deus, Pai Celestial,

Pelo dom da vida, pelas bênçãos alcançadas, e por me possibilitar chegar até aqui.

A minha família,

Pelo amor incondicional, pela luz nos momentos mais difíceis, por serem peças fundamentais capazes de me impulsionar a continuar essa jornada acadêmica que iniciei. Pelas pessoas humanas que são, exemplos de fé e amor ao próximo, condutores para que eu possa buscar melhorias na minha vida.

A professora Doutora Anna Paula de Avelar Brito Lima,

Pela grande sabedoria, paciência e dedicação em suas carinhosas orientações. Por tudo que me ensinou sobre Didática da Matemática nesse longo e árduo período de itinerário à Teoria das Situações Didáticas. Por compartilhar comigo todas as etapas da pesquisa dessa dissertação. Por acreditar que seria possível concluir o mestrado, mesmo com as circunstâncias difíceis que me encontrava.

A banca examinadora,

Professor Doutor Fernando Emílio Leite de Almeida e Professor Doutor Jadilson Ramos de Almeida, que participaram com significativas contribuições desde a qualificação para o aperfeiçoamento dessa obra.

Ao Professor Doutor Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade,

Pelo apoio durante o processo que antecede a seleção de mestrado, consentindo participar como ouvinte da disciplina de Fenômenos Didáticos.

Ao IFPE Campus Pesqueira,

Pela minha formação acadêmica em nível de graduação, que sem dúvidas foi fundamental para o desenvolvimento dessa obra. Pela oportunidade de ser bolsista do PIBID, trazendo contribuições para a pesquisa e fortalecimento aos conhecimentos e experiências sobre prática pedagógica.

Aos docentes do programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências,
Profa. Dra. Anna Paula Lima, Profa. Dra. Carmen Farias, Profa. Dra. Helaine Ferreira, Profa. Dra. Lúcia Araújo, Profa. Dra. Mônica Araújo, Profa. Dra. Ruth Firme, Prof. Dr. Vladimir Andrade e Profa. Dra. Zélia Jofili por compartilharem diversos conhecimentos sobre ensino das ciências contribuindo para a minha formação acadêmica a nível de mestrado.

As meus amigos e colegas da turma,
Alessandra Souza, Andressa Santos, Ana Clara, Anne Caline, Camila Silva, Cláudia Alves, Charles Turuda, Dayane Silva, Fernando Silva, Girlane Correia, Jéssika Lapa, Jéssica Nova, João Barbosa, Luiz Neto, Maria Daiane, Maria José, Mariana Pontes, Marta Ferreira, Mayara Almeida, Micaelle Silva, Patrícia Góz, Thiago Vicente, Tiago José, pelo afeto, pelo carinho e pelo respeito. Por compartilharem comigo suas angústias, suas histórias, seus medos, suas alegrias, suas ideias, seus conhecimentos e suas amizades ao longo itinerário do PPGEC.

Aos Grupos de pesquisas:

Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática,
Jadilson Almeida, Vladimir Andrade, Lúcia Araújo, Marcos Melo, e tantos outros professores que contribuíram com diversos comentários importantes para a construção dessa pesquisa.

Grupo de Estudos Avançados em Didática da Matemática PPGEC/UFRPE,
Dirigido pela querida orientadora professora Doutora Anna Paula Lima, discutido por Francisco Gama, Bruno Souza, Ademir Costa, Elyza Santos, Italândia Azevedo, Alexsandra Cavalcanti, Jeandson Santos, Francinete Lopes, Stephany Chiappetta e Roberta Marques, pelos questionamentos fundamentais para o meu crescimento intelectual.

Ao Colégio Privado de Ensino,
Professor de Matemática e alunos do 8º ano do ensino fundamental, participantes da minha pesquisa, pela disponibilidade e pela confiança em mim depositados.

Por fim,
A todos que, direta ou indiretamente, trouxeram contribuições para a realização desse estudo. A todos vocês, o meu **MUITO OBRIGADA!**

A matemática quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza. (Bertrand Russel)

RESUMO

Essa dissertação teve por objetivo analisar os efeitos de uma sequência didática utilizando o software GeoGebra no ensino do saber geométrico Congruência de Triângulos no 8º ano do ensino fundamental. Nesse estudo, investigamos os efeitos do desenvolvimento da sequência didática, baseado nos princípios da Teoria das Situações Didáticas (TSD) proposta por Brousseau (2008), contemplando as etapas da tipologia das situações adidáticas: ação, formulação, validação e institucionalização. A sequência foi aplicada na disciplina de Matemática, numa turma de 18 alunos do 8º ano do ensino fundamental, numa instituição da rede privada de ensino localizada em Jaboatão dos Guararapes – PE. De acordo com o objetivo do estudo, analisamos a realização da sequência didática, considerando as orientações do professor, as interações dos alunos entre si, com as atividades propostas e com o software. Foram realizadas gravações no GeoGebra, registros escritos na ficha de atividades e gravações em áudio, além de um diário de bordo, durante as duas aulas em que a sequência fora realizada. Observou-se que a partir do recurso *arrastar* e da possibilidade de *rotacionar* figuras presentes no GeoGebra, a maioria dos alunos conseguiu perceber as condições necessárias para a congruência de triângulos, sabendo diferenciar os casos que sustentam a congruência. Assim, o software GeoGebra mostrou-se como um recurso didático que traz contribuições relevantes para o ensino da Geometria, sobretudo, para a construção do saber Congruência de Triângulos por parte dos estudantes do 8º ano do ensino fundamental, tendo as fases da TSD como sustentação teórica da referida sequência.

Palavras-chave: Ensino da Geometria. Sequência Didática. Teoria das Situações Didáticas. GeoGebra. Congruência de Triângulos.

ABSTRACT

This study aimed to analyze the effects of a didactic sequence using the GeoGebra software in the teaching of Congruence of Triangles in the 8th grade of elementary school. In this study, we investigate the effects of the development of the didactic sequence, based on the principles of the Theory of Didactic Situations (TSD) proposed by Brousseau (2008), contemplating the steps of action, formulation, validation and institutionalization. The sequence was applied in the subject of Mathematics to a class of 18 students from the 8th grade of elementary school, in a private educational institution located in Jaboatão dos Guararapes – PE. According to the objective of the study, we analyzed the accomplishment of the didactic sequence, considering the teacher's orientations, the interactions of the students with each other, with the proposed activities and with the software. Recordings were made in GeoGebra, written records in the activity sheet and audio recordings, in addition to a logbook, during the two classes in which the sequence was performed. It was observed that from the drag feature and the possibility of rotating figures present in GeoGebra, most students were able to perceive the necessary conditions for the congruence of triangles, knowing how to differentiate the cases that support the congruence. Thus, the GeoGebra software proved to be a didactic resource that brings relevant contributions to the teaching of Geometry, especially for the construction of knowledge Congruence of Triangles by students of the 8th year of elementary school, with the TSD phases as support theoretical sequence.

Keywords: Teaching of Geometry. Following teaching. Theory of Didactic Situations. GeoGebra. Congruence of Triangles.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CBC	Base Curricular Comum
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
TSD	Teoria das Situações Didáticas
LLL	Lado, Lado, Lado
LAL	Lado, Ângulo, Lado
ALA	Ângulo, Lado, Ângulo
LAAo	Lado, Ângulo, Ângulo Oposto

SUMÁRIO

CAPÍTULO I
1 INTRODUÇÃO

1.1 Iniciando a discussão

A geometria é um dos campos propostos no ensino da Matemática que, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC – de Matemática do Ensino Fundamental – Anos Finais (BRASIL, 2017), “envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (p. 268). Para isso, ainda em consonância com o documento oficial da Base no Ensino Fundamental – Anos Finais, essa unidade temática precisa ser estudada de forma a consolidar e ampliar as aprendizagens realizadas na Educação Básica.

Além disso, em relação às pesquisas sobre o ensino da geometria, alguns pesquisadores apontam que o estudo desse campo da matemática é de suma importância por proporcionar ao aluno o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, além de despertar nele a criatividade para resolver situações-problema que se encontram no cotidiano (BEZERRA; BARBOSA, 2013; ALMOULOUD *et al.*, 2004; LORENZATO, 2009; MANOEL; LORENZATO, 2015; RODRIGUES; SABIÃO, 2019).

Cabe ainda destacar que, de acordo com a BNCC de Matemática do Ensino Fundamental – Anos Finais, os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental. É por meio deles que o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vive (BRASIL, 2017).

Por outro lado, já há algumas décadas tem-se discutido que a geometria por muito tempo não ocupou seu devido lugar no ensino da matemática e que muitas vezes, esse campo foi colocado em segundo plano. A sua abordagem nos livros didáticos, nos guias de orientação curricular e até mesmo nos cursos de formação de professores de Matemática retratam a exclusão de conceitos geométricos, omitindo assim, o desenvolvimento dos atos de experimentar, observar e construir, propiciados pelo estudo da geometria, em geral, não ocorrendo de modo adequado no ensino básico brasileiro (BEZERRA; BARBOSA, 2013; CALDATTO; PAVANELLO, 2015; SANTOS; LEAL, 2021).

Vale ressaltar que na estrutura curricular de ensino das instituições brasileiras, a Geometria passou por mudanças influenciadas pelo formalismo oriundo da tendência lógica e dedutiva do ato de raciocinar, especificamente na década de 1960, pela ênfase do “algebrizar” geométrico, uma consequência do Movimento da Matemática Moderna (ITACARAMBI; BERTON, 2008). Destaca-se, também, a forte ilustração de operações algébricas, fatores esses que, de acordo com Lorenzato (2010) favoreceram a *omissão geométrica*. Entretanto, tal fato vem sendo superado, pincipalmente a partir das recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) e, mais recentemente, da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017), que passaram a enfatizar, desde a primeira unidade escolar, o trabalho com a Geometria, agregando-se às pesquisas da área de Educação Matemática, como as que se relacionam à utilização das tecnologias no ensino e aprendizagem de conhecimentos geométricos.

Com base nesse cenário, é possível, necessário e desejável que este ensino seja enfatizado, pois sem experiência geométrica não se consegue raciocinar geometricamente, afetando, assim, a compreensão de outros conceitos matemáticos pela falta do pensamento geométrico (LORENZATO, 2009; CALDATTO; PAVANELLO, 2015; SANTOS; LEAL, 2021). No entanto, o ensino nessa área ainda enfrenta desafios didáticos por muitas vezes não criar situações desafiadoras que proporcionem uma aprendizagem efetiva, mesmo já tendo vários trabalhos acadêmicos que versam sobre a importância desse campo do saber matemático.

Faz-se necessário, então, continuar investindo em pesquisas que evidenciem a contribuição e aplicabilidade de novos recursos didáticos para o ensino e aprendizagem da geometria (CALDATTO; PAVANELLO, 2015; SANTOS; LEAL, 2021), afinal, apesar das orientações da Base Nacional Comum Curricular – BNCC de Matemática (BRASIL, 2017), da importância do conhecimento geométrico e, das pesquisas na área educacional, a Geometria não é utilizada como uma das orientadoras da construção do conhecimento matemático (SANTOS; NACARATO, 2021). Tal fenômeno pode ser justificado pela falta de conexão entre as pesquisas educacionais no campo geométrico e as aulas diárias das turmas ao estudarem Matemática.

A exemplo disso, temos avaliações em larga escala, como o Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE[1]), o qual tem evidenciado, na mesma direção das pesquisas, que a maioria dos estudantes estão completando os últimos anos do ensino fundamental com um saldo negativo de proficiência em determinadas expectativas de aprendizagem da Matemática.

Dados do SAEPE 2019 revelam que no tocante à competência Congruência de Triângulos, os estudantes apresentaram baixo índice de proficiência em nível Básico. Assim, numa escala de 0 a 500 pontos, a maior média ficou no intervalo de 245 a 280, quando o desejável seria acima de 280 pontos. Esse sistema de avaliação tem evidenciado que alunos do ensino básico apresentam dificuldades na compreensão de conceitos geométricos, sobretudo quando são abordados em situações-problema.

De acordo com esse cenário, uma das dificuldades relacionadas ao ensino da geometria diz respeito ao trabalho didático do professor, que, em geral, prioriza mais o estudo algébrico e aritmético em detrimento do geométrico. Em consequência disso, os alunos ficam com a impressão de que esses saberes matemáticos não se inter-relacionam, mas representam assuntos distintos (MELO; FEITAS, 2010). Para mudar esse quadro, seria importante o educador ensinar integrando esses três grandes campos da Matemática: a aritmética, a álgebra e a geometria, cujo ensino possa ser vivenciado de forma significativa para o aluno na sala de aula.

Considerando esses pressupostos e em articulação com as competências gerais da BNCC (BRASIL, 2017), evidenciamos que embora muito já tenha avançado na produção de softwares, de recursos didáticos e de pesquisas voltadas para o ensino da geometria, ainda há um caminho a ser percorrido para que os alunos se sintam motivados a aprender os conteúdos dessa área do conhecimento.

Uma das formas de tornar isso possível é através do uso de softwares de geometria dinâmica, dentre eles, o GeoGebra[2], que poderá ser explorado, por exemplo, em um Laboratório de Ensino de Matemática. Além do mais, os softwares auxiliam na construção de representações matemáticas, sobretudo no que diz respeito

---

[1]Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco, responsável por realizar monitoramento do padrão de qualidade do ensino verificando o grau de domínio dos estudantes nas habilidades e competências consideradas essenciais e, por apoiar iniciativas de igualdade de oportunidades educacionais (Fonte: https://saepe.caedufjf.net).

[2]O software Geogebra foi criado em 2002 por Markus Hohenwarter (docente do Departamento de Matemática Aplicada da Universidade de Salzburgo, Áustria), escrito em Java e disponível em múltiplas plataformas. Falaremos mais sobre o assunto no capítulo três.

à geometria, cuja dimensão representacional é fundamental para a compreensão dos conceitos e objetos relacionados a esse campo.

Além de softwares, a proposição de sequências didáticas para o ensino, sejam elas com o uso de recursos específicos ou não também tem aparecido nas últimas décadas como um dos elementos para o ensino de uma matemática mais organizada e estruturada (GIORDAN; GUIMARÃES; MASSI, 2012; LOPES, 2013). A ideia de sequência didática perpassa por vários estudiosos franceses e brasileiros, mas nesse estudo, especificamente, a ideia de sequência didática está voltada para a perspectiva da Didática da Matemática, particularmente, na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008), a qual apresenta-se como sustentação do referencial teórico da nossa pesquisa.

A escolha pela Teoria das Situações Didáticas se deu pelo fato de que alguns softwares de geometria dinâmica foram desenvolvidos justamente na mesma época em que a TSD estava emergindo na França, inclusive os próprios pesquisadores dos IREMs também desenvolveram um software dinâmico. Além disso, tal teoria e a proposição de softwares dinâmicos apontam para a importância de o aluno interagir com o saber a ser construído. Quando Brousseau (2008) fala das situações de ação, por exemplo, está claro que é no sentido de o estudante interagir com os objetos de saber.

Um exemplo de software desenvolvido na França foi o Cabri-Géomètre[3], mas escolhemos o GeoGebra, que apesar de não ser um software francês, também é um de Geometria Dinâmica. Esse software se destaca entre os demais programas por ter acesso On-line gratuito, proporcionar atualização constante, performance estável, estética agradável e diferentes possibilidades de uso (geométrico, numérico, algébrico e funcional), e assim, tem tido predominância de utilização na pesquisa e no ensino no Brasil.

Com base nessas discussões, essa pesquisa tem como objeto de estudo o ensino de Geometria, a partir da proposição de uma sequência didática para o ensino de Congruência de triângulos no 8º ano do Ensino Fundamental, mediante atividades experimentais elaboradas no GeoGebra.

---

[3]O software CABRI-GÈOMÈTRE I foi criado por Yves Baulac, Franck Bellemain e Jean Marie Laborde no Laboratório de Estruturas Discretas e de Didática do IMAG (Instituto de Informática e Matemática Aplicada de Grenoble) na Universidade Joseph Fourier de Grenoble em 1989, chegando ao Brasil em 1992.

A escolha desse software se deu pelo fato de ser um recurso didático manipulável e favorável à aprendizagem, uma vez que permite tanto ao professor quanto ao aluno acompanhar a construção das figuras geométricas deixando, inclusive, evidentes os erros dessa construção, de forma que o discente se torne um ser ativo na sua aprendizagem. Para isso, faz-se necessário que o docente conduza o processo de ensino mediando e modelando a sequência didática, afinal é a utilização que o professor faz desse material que vai fazer sentido ou não para o aluno, não o material em si (LORENZATO, 2009).

Outro aspecto que também contribuiu para a escolha desse software, é o fato de ser de livre acesso e ter uma ampla divulgação no Brasil, como recurso para o ensino de Geometria, bem como, por haver um grande número de estudos no âmbito da Educação Matemática, com a sua utilização (DINIZ, 2016; SILVA, 2016).

Segundo a BNCC (BRASIL, 2017), o conceito matemático de Congruência de Triângulos deve ser abordado na educação básica dos anos finais do ensino fundamental, porém, no oitavo ano, deve ser realizada a sistematização desse conceito pelos estudantes. Em consonância com a BNCC, os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012b) também orientam que a Congruência de Triângulos (dentro do conteúdo Triângulos) deve ser trabalhada nos anos finais do ensino fundamental, de modo que leve o discente a identificar propriedades comuns e distintas entre figuras geométricas. No oitavo ano, o aluno deverá reconhecer a congruência de triângulos aplicando os seus casos, além de conhecer outras características e propriedades dos triângulos e utilizá-las para classificá-los. Assim, é evidenciado pelos documentos oficiais, que os estudantes do oitavo ano devem consolidar esse objeto matemático.

Santos e Leal (2021) destacam a carência no ensino da Geometria e refletem sobre a importância desse campo no desenvolvimento intelectual do aluno e nas situações do cotidiano que exigem o seu conhecimento para a solução de problemas da humanidade. Assim, faz-se necessário propor pesquisas que investiguem tais carências.

Um caminho possível é a amplificação de pesquisas sobre a utilização de *softwares* no ensino da Geometria. Considerando essa lógica, Costa e Lacerda (2012), Cardoso (2013) e Bongiovanni (2016) chegaram à conclusão de que a utilização de softwares educativos pode ser um mecanismo significativo para a melhoria do ensino da Matemática, sobretudo na construção do saber pelo estudante, levando-o à reflexão sobre a importância das tecnologias atuais.

Muitos softwares de Geometria Dinâmica foram desenvolvidos nos processos de ensino da Matemática, dentre eles destacamos, conforme já mencionado, o Cabri-Géomètre, entre outros, tais como: Geometry Suposers, Geometer Skecthpad, Cinderella, Régua e Compasso-CaR, GeoGebra. Os resultados de pesquisas com esses softwares podem ser observados na Revista do Instituto do GeoGebra da PUC – SP (2009).

Assim, no ensino da Geometria, por exemplo, existe uma quantidade considerável de *softwares* que podem ser usados no processo de ensino, dentre eles temos o GeoGebra que foi desenvolvido por Markus Hohenwarter e uma equipe de programadores na *University of Salzburg* (Áustria) e na *University of Florida Atlantic* (Estados Unidos). O software GeoGebra trata a Geometria de forma dinâmica (e tem o diferencial de também reunir a Álgebra e o Cálculo) e possibilita o desenvolvimento de diversas atividades educativas tornando um ambiente favorável à aprendizagem dos alunos (LOPES, 2011).

Outro aspecto que aqui queremos destacar diz respeito a pesquisas acerca do ensino e aprendizagem de conceitos geométricos em sala de aula com a proposição de sequências didáticas - considerando a Teoria das Situações Didáticas (TSD) - para o desenvolvimento do pensamento geométrico. De acordo com essa teoria, o aluno pode construir um determinado saber passando pelas fases de ação, formulação, validação e institucionalização, por meio de atividades organizadas, em que o professor planeja o desenho das aulas, sendo mediador da aprendizagem. Aqui, destacamos a noção de *milieu*, instituída por Brousseau (2008). Para esse autor, o *milieu* diz respeito ao meio onde ocorre a interação do aprendiz com os objetos de conhecimento, e a organização desse meio é fundamental para que ocorra a aprendizagem.

Em seus estudos, Felício (2013), Ramiro (2014) e Nunes; Viana Nunes (2015) propõem que por meio do desenvolvimento de sequências didáticas, em sala de aula do ensino básico, sustentadas pela TSD, os alunos demonstram avanços consideráveis no que tange à compreensão do conceito de figuras planas, especialmente no caso de congruência de triângulos.

Dentro dessa abordagem, procuramos destacar o uso do software GeoGebra como um recurso didático que se pretende, através de uma sequência didática, favorecer o processo de ensino por permitir o estudo de vários conceitos geométricos. Por conseguinte, observamos que esta pesquisa trará subsídios para a construção de novos conhecimentos no campo da geometria, a partir da utilização de novas tecnologias de ensino. Cabe destacar que, em nosso estudo, a sequência didática assume um papel determinante para que haja contribuições do software na construção do saber geométrico.

Dessa forma, propomos um estudo sobre os efeitos de uma sequência didática utilizando o software GeoGebra no processo de ensino do saber geométrico Congruência de Triângulos no 8º ano do ensino fundamental, baseada na Teoria das Situações Didáticas (TSD).

Vale ressaltar que a sequência foi elaborada pela pesquisadora e desenvolvida por um professor de matemática. A partir do proposto, a questão geradora da pesquisa se configura da seguinte forma: *Como uma sequência didática utilizando o software GeoGebra contribui para o ensino de Congruência de Triângulos no 8º ano do ensino fundamental?*

Buscando responder a nossa questão geradora elencamos os seguintes objetivos:

Objetivo geral

Analisar os efeitos de uma sequência didática utilizando o software GeoGebra no ensino do saber geométrico envolvendo o estudo de Congruência de Triângulos no 8º ano do ensino fundamental.

Objetivos específicos

- Identificar as atividades relacionadas à Congruência de Triângulos no currículo em livros didáticos para o 8º. Ano do Ensino Fundamental;
- Relacionar as noções fundamentais para a construção do conceito de Congruência de Triângulos e as principais dificuldades enfrentadas pelos alunos nessa construção;
- Identificar a aplicabilidade do GeoGebra no estudo de Congruência de Triângulos e quatro casos: LLL, LAL, ALA e LAAo[4].

[4] LLL (lado, lado, lado), LAL (lado, ângulo, lado), ALA (ângulo, lado, ângulo) e LAAo (lado, ângulo, ângulo oposto).

1.2 Estrutura da dissertação

A presente dissertação é constituída por seis capítulos. No primeiro capítulo apresentamos a fundamentação teórica da Didática da Matemática, tendo como referência principal a Teoria das Situações Didáticas, proposta por Brousseau (1996b).

No segundo capítulo focalizamos o ensino da Geometria e os estudos acerca da natureza desse ensino, bem como as dificuldades enfrentadas pelos alunos na aprendizagem do saber geométrico.

No terceiro capítulo abordamos o uso do software dinâmico GeoGebra como Ferramenta de Ensino da Geometria e os estudos envolvendo a utilização desse software.

No quarto capítulo apontamos a abordagem metodológica dessa dissertação. Nele caracterizamos a pesquisa, apresentamos os sujeitos participantes do estudo.

No quinto capítulo apresentamos uma modelagem[5] e análise detalhada da sequência didática.

O sexto capítulo, por fim, destinamos à discussão dos resultados desse estudo a partir da análise e interpretação dos dados. Em seguida, apresentamos as considerações finais da dissertação.

[5] Ressaltamos que a utilização da palavra Modelagem, nesse estudo, não está estritamente relacionada à ideia de modelagem matemática, mas, à concepção, estruturação e organização da sequência didática proposta.

CAPÍTULO II

2 A DIDÁTICA DA MATEMÁTICA NO ÂMBITO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Na introdução ressaltamos que o objetivo de nossa pesquisa é analisar os efeitos de uma sequência didática utilizando o software GeoGebra no ensino do saber geométrico Congruência de Triângulos no 8º ano do ensino fundamental.

Designamos, conforme apresentado, como referencial teórico para o desenvolvimento dessa pesquisa, a Didática da Matemática no âmbito da Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 2008), por ter o construtivismo como um dos pilares desse campo, bem como, por investigar as relações estabelecidas entre o professor, o aluno e o saber, contemplando os fenômenos que emergem nessa relação triangular.

Em relação à escolha da Teoria das Situações Didáticas (TSD), especificamente, as etapas da Situação Didática de Brousseau, tal opção se deu por trazer subsídios no auxílio da discussão/reflexão e compreensão de como preparar uma sequência didática do estudo de Congruência de Triângulos utilizando o software GeoGebra, que possa contribuir no ensino desse saber que será construído pelo discente a partir da proposição de uma sequência didática.

Diante do exposto, no âmbito da Didática da Matemática, contextuaremos o surgimento da Teoria das Situações Didáticas e suas especificidades.

2.1 O SISTEMA DIDÁTICO BASEADO NA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

A Didática da Matemática, de acordo com Brito Menezes (2006) em consonância com os pressupostos de Yves Chevallard (1996), pode ser vista como uma ciência que se propõe a investigar os fenômenos que permeiam e constituem o sistema didático (e, de forma mais ampla, sistema de ensino).

Nesse campo, os fenômenos estudados referem-se à relação didática estabelecida entre o professor, o aluno e o saber, mediante um conjunto de conceitos estruturados de maneira complexa, a fim de compreender a dinamicidade designada nessas relações, que envolvem o discente, como sujeito cognitivo, as situações de ensino elaboradas pelo professor e os processos que se revelam durante a comunicação dos saberes e construção do conhecimento.

No âmbito da contextualização da Didática da Matemática diversas pesquisas têm sido desenvolvidas em todo o mundo, inclusive no Brasil (PAIS, 2015). O ponto de partida para o desenvolvimento dos estudos nesse campo foi a criação dos IREMs[6] (Institutos de Pesquisa no Ensino da Matemática), na França, no final da década de 1960, período em que acontecia o Movimento da Matemática Moderna. O objetivo desses Institutos era o de elaborar pesquisas e desenvolver recursos didáticos (inclusive softwares), para o ensino de matemática.

A partir das pesquisas e intensa produção dos IREMs nasce a Didática da Matemática, como um campo interessado pelas investigações e análises dos fenômenos didáticos que aparecem na relação didática visando a construção histórica do saber matemático no contexto escolar, visto como *“objeto de ensino”* (BRITO MENEZES, 2006, p. 20).

Guy Brousseau (2008) acredita que a Didática da Matemática é a ciência que estuda as condições de comunicação e apropriação dos conhecimentos matemáticos úteis ao sistema de ensino e aprendizagem através da modelagem de uma situação didática. Corroborando com o autor, D’Amore (2007), relata que a Didática da Matemática é a arte capaz de criar condições determinantes à aprendizagem de um saber matemático por parte de um estudante.

A respeito do ensino e aprendizagem escolar podemos destacar que, nas últimas décadas, surgiram grandes contribuições, em especial a Teoria das Situações Didáticas (TSD), que aparece como ponto crucial, procurando modificar a realidade da sala de aula de matemática; suas contribuições estão direcionadas à modelização de atividades para o ensino (FREITAS, 2008).

A teoria proposta por Brousseau (2008), surge a partir de um referencial da Didática da Matemática que valoriza os conhecimentos mobilizados pelos alunos e seu envolvimento na construção do saber matemático. No que diz respeito ao professor, o autor defende que o seu papel é o de criar condições de ensino favoráveis

[6]De acordo com Gálvez (1996) o IREM apresentava-se como um suporte na formação continuada de professores em exercício e na preparação de novos professores, a fim de estimular a produção de ferramentas de apoio didático para a sala de aula, como por exemplo, experimentos de ensino, jogos, situações-problema e estudos educacionais na área da matemática, as quais favoreceram no progresso das pesquisas no ensino e aprendizagem da Matemática.

para que os alunos se apropriem de saberes matemáticos designados como saberes a serem ensinados, a partir de um dado currículo.

Para que essas condições se tornem efetivas, esse referencial propõe que o professor organize o milieu/meio (ocorrendo interações com o sujeito), através de atividades didáticas, sequências didáticas, jogos matemáticos, materiais manipulativos, entre outras estratégias. Essas condições, na visão de Freitas (2008), favorecem o surgimento de conflitos cognitivos, contradições e possibilidades de ensino de novos conhecimentos, elementos essenciais para a aprendizagem matemática.

Este contexto, apresentado acima, enseja uma situação didática que se caracteriza pela intencionalidade do professor em possibilitar ao aluno a construção de um determinado conceito. Uma situação didática bem planejada e conduzida, permite ao aluno entrar em uma situação de *devolução,* situação essa que consiste no conjunto de condições que permitam que o aluno se aproprie da situação e assume a responsabilidade de realizar a tarefa - e aprender – como sua. Quando os alunos se apropriam da situação, o professor pode deixá-los com a responsabilidade da pesquisa (BROUSSEAU, 2008).

Segundo Chevallard (1996), o sistema de ensino não se limita a um sistema fechado, sem relações mais amplas, pelo contrário, faz parte de um sistema capaz de envolver a comunidade escolar e social, tais como a participação dos pesquisadores, das instituições, das famílias (responsáveis) dos discentes na busca de inter-relações que influenciam e são influenciados pelo sistema de ensino em geral.

Dialogando com o autor (ibid.,1991), Brito Menezes (2006) traz discussões pertinentes versando sobre o sistema de ensino, tais como:

> “O sistema de ensino comporta, segundo este autor, *instituições de ensino*, que têm por objetivo transmitir os conhecimentos construídos e organizados historicamente, após um processo de adaptação que os torne *ensináveis*. O ‘coração’ dessas instituições, segundo este teórico, seria então a sala de aula, com todas as relações que nela se estabelecem, e onde se configura uma relação triangular que envolve o professor, o (s) aluno (s) e o saber que se pretende que seja ensinado (e aprendido)” (BRITO MENEZES, 2006).

Essa relação triangular professor-aluno-saber, Brousseau (1986) nomeou de triângulo das situações didáticas, cujas especificidades serão discutidas no tópico a seguir.

2.2 A Teoria das Situações Didáticas

A partir do contexto da Didática da Matemática, o educador matemático francês Brousseau, em 1986, desenvolveu a Teoria das Situações Didáticas com a finalidade de "[...] criar um modelo da interação entre o aprendiz, o saber e o *milieu* (ou meio)[7] ", ou seja, "[...] modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos" (ALMOULOUD, 2007, p. 31).

Para estruturar a Teoria das Situações Didáticas, uma das noções usadas por Brousseau (1996a) é a da aprendizagem por adaptação, na qual ele enfatiza a proximidade com os esquemas de assimilação e acomodação descritos por Piaget, e o aluno é impulsionado a adaptar seus conhecimentos às exigências da solução de um problema.

Com base nos estudos de Freitas (2008) sobre a aprendizagem de Matemática em sala de aula, a Teoria das Situações Didáticas (TSD) é uma referência por envolver professor, aluno e saber matemático de forma a desenvolver grandes contribuições nessa área de conhecimento.

Almouloud (2007, p.42) indica que o objetivo da Teoria das Situações Didáticas é "estudar os fenômenos que interferem nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática e propor um modelo teórico para a construção, a análise e a experimentação de situações didáticas", ou seja, buscar características que expliquem o processo de aprendizagem através de um conjunto de situações reprodutíveis, com o intuito de conduzir à modificação de comportamentos dos discentes, decorrentes de uma aprendizagem significativa. Assim, vale salientar que o objeto central dessa teoria é a situação didática por conseguir identificar as interações entre o professor, o aluno e o conhecimento.

Dessa forma, o estudante aprende se adaptando ao *milieu* e ao saber, tendo como consequência dessa adaptação o resultado de novas respostas. Ainda no que diz respeito ao *milieu* (meio), um *milieu* sem intenção didática acarreta uma insuficiência em promover a aprendizagem matemática com eficiência, afinal é necessário que o docente

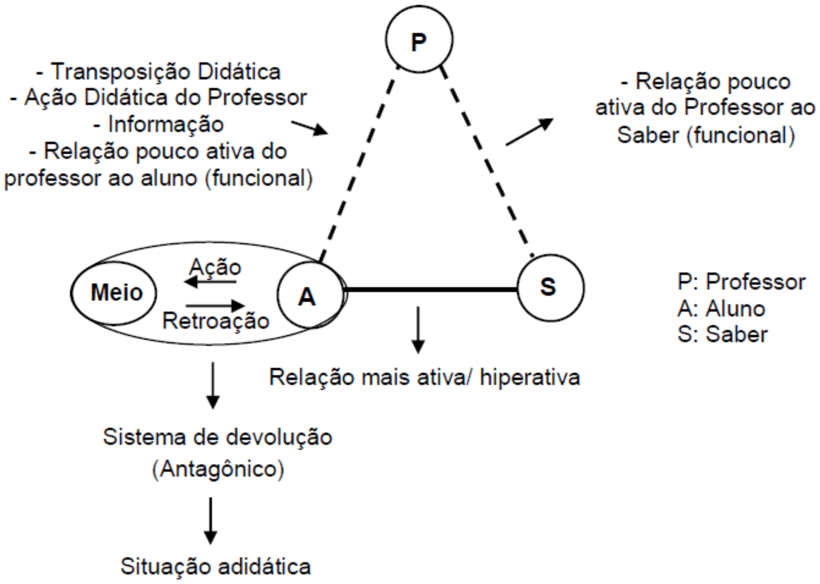
[7]Segundo Almouloud (2007, p.42), a noção de *milieu* foi introduzida por Brousseau a fim de "analisar, de um lado, as relações entre os alunos, os conhecimentos, ou saberes e as situações e, por outro lado, as relações entre os próprios conhecimentos e entre as situações". Apesar da tradução literal de *milieu* para o português ser meio, utilizaremos a palavra *milieu*, pelo fato da nossa maior referência sobre a TSD traduzida em português, Almouloud (2007), sempre se referir o meio como *milieu*, uma vez que, de acordo com o autor a tradução em português não condiz com a real mensagem trazida por Brousseau.

elabore e organize o *milieu* de desenvolvimento das situações para que o espaço educacional e as situações de ensino comprometam-se com os saberes matemáticos envolvendo o processo ensino e aprendizagem.

Assim, as pesquisas endossam que ao escolher uma situação didática é preciso levar em consideração os possíveis comportamentos e/ou posições dos estudantes na relação didática, sendo imprescindível pensar nessas posições frente a outras, bem como suas articulações. Isto é, no planejamento de uma situação didática deve-se pensar quais as intenções didáticas do professor, pois ele é o responsável em escolher a melhor forma como o aluno irá interagir no processo de aprendizagem (ALMOULOUD, 2007; FREITAS, 2008; BATISTA, 2014).

Para representar essas interações entre professor e aluno, oriundas das situações de ensino, Brousseau (2008) fundamenta estruturando a Teoria das Situações Didáticas como um triângulo didático, conforme a ilustração da figura abaixo:

Figura 1 – O triângulo das situações e o *milieu* (meio)



Fonte: Almeida (2016), adaptado de Brousseau (2008)

Através dessa figura, podemos analisar que no triângulo didático são estabelecidas relações entre os vértices professor e aluno (relação pedagógica), professor e saber (epistemologia do professor), aluno e saber (a relação do aluno com o saber). Esses, por sua vez, se inter-relacionam no processo de ensino e aprendizagem de um dado conhecimento escolar, no caso da nossa pesquisa, o saber geométrico. O *milieu* exerce um papel fundamental, uma vez que o aluno interage com o saber em questão a partir do *milieu*, num processo dinâmico de retroação (ALMEIDA, 2016). Esse *milieu*, por sua vez, é estruturado e organizado pelo professor.

De acordo com Brito Menezes (2006), existem elementos específicos em cada um dos polos do triângulo didático, os quais devem ser levados em consideração e investigação, visto que:

> [...] tal processo, em seu contexto sócio-institucional – a *sala de aula* – se constitui em um objeto complexo de intervenção e pesquisa, na medida em que abarca, indissociavelmente, um tripé de aspectos constituídos por um *conteúdo específico*, a ser ensinado por um *professor* a um *aluno/grupo de alunos*. Esse tripé pode ser analisado de forma triangular, dual ou, ainda, individual (BRITO MENEZES, 2006, p.24).

Segundo Brousseau (1986, p.49, apud Almouloud, 2007, p.32), a teoria das situações fundamenta-se em três hipóteses: 1) "O aluno aprende adaptando-se a um *milieu* que é fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio", assim o saber acontece como fruto da adaptação do discente por meio das situações de aprendizagem. Esta hipótese faz-se referência as ideias construtivistas de Piaget, em que a aprendizagem é decorrente, no sentido biológico, de processos de adaptação à novas situações desafiadoras. 2) "O *milieu* não munido de intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz", dessa forma o professor precisa organizar o meio elaborando situações favoráveis às aprendizagens. 3) O *milieu* e as situações devem se relacionar intrinsicamente com os saberes estudados no processo de ensino e de aprendizagem.

Brousseau (2008) menciona, ainda, a existência de diferentes tipos de situações, que promovem diferentes formas do aluno se relacionar com os objetos de conhecimento. A **situação didática**, objeto central da TSD, segundo Brousseau (2008), pode ser definida como um conjunto de relações que se configuram explicitamente e/ou implicitamente entre alunos, o contexto escolar e sistema educativo estabelecido pelo professor, com a intenção de dar subsídios para que os estudantes possam se apropriar do saber matemático.

Como parte essencial da didática, temos a **situação adidática** que, por sua vez, caracteriza-se como aquela em que o docente não revela ao discente a intenção de ensinar, pelo contrário, o professor planeja e constrói a situação criando condições para que o aluno tenha autonomia para construir o conceito do novo saber. Nesse tipo de situação, um *milieu* bem estruturado é particularmente importante, uma vez que o professor “se afasta” e é a própria situação que baliza a construção do conhecimento pelo aluno. É a situação que mais se aproxima da essência do construtivismo piagetiano.

Dessa maneira, uma situação adidática, à luz das concepções de Brousseau, tem as seguintes características:

> - O problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria;
> - O problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos sem apelo às razões didáticas;
> - O professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos a partir da(s) atividade(s) proposta(s). (BROUSSEAU, 1986, apud ALMOULOUD, 2007, p. 33).

.

A modelagem das situações adidáticas, ainda de acordo com Brousseau (2008), busca analisar o processo de aprendizagem através de quatro fases dominantes: situação de ação, de formulação, de validação e de institucionalização. Generalizando os conceitos dessas fases, iremos traçar algumas considerações pertinentes no quadro a seguir, uma vez que essas situações são fundamentais para a elaboração da sequência didática que esse estudo contempla.

Quadro 1: Modelagem das situações adidáticas.

MODELAGEM DAS SITUAÇÕES ADIDÁTICAS	
Situação de ação	Consiste em colocar o aluno numa relação de interação entre sua ação e o *milieu* para solucionar a situação. Nesse processo, ele toma a iniciativa de organizar a construção do saber.
Situação de formulação	Tem por objetivo a troca de informações. Assim, a dialética de formulação proporciona ao aluno a construção de uma linguagem compreensível considerando todos os fatores envolvidos na situação adidática.
Situação de validação	É aquela na qual o aluno deve mostrar a validade da estratégia/modelo feito por ele para responder a situação justificando matematicamente as certezas das asserções.

Situação de institucionalização	É o momento em que o professor estabelece convencionalmente a passagem das asserções construídas pelos alunos para o conhecimento científico/formal.

Fonte: Autoria própria.

A partir do momento em que a TSD propõe as quatro fases citadas anteriormente podemos perceber as contribuições para a construção do saber em questão por parte do discente, visto que na fase de **ação**, o professor pode elaborar um problema com a intenção de o aluno solucionar o conhecimento que se deseja ensinar. Assim, na situação de ação os alunos podem manipular, concreta ou simbolicamente, os objetos de conhecimento, porém não é apenas uma manipulação livre ou seguindo uma sequência de listagem de instruções para desenvolvimento de algo, e sim, o momento em que o aluno julgue e ajuste o resultado de sua ação de forma autônoma provocando uma aprendizagem por adaptação.

Em seguida, na fase de **formulação**, as interações entre o sujeito e as situações de ensino apontam para a tomada de decisões permitindo ao aluno (ou grupo de alunos) levantar hipóteses julgando o resultado de suas ações e adequando-as sem a necessidade de intervenção do professor.

Quando chega o momento da **validação**, os estudantes passam pela fase de apresentar a validade de suas hipóteses, convencendo a todos a sua volta.

Já na fase de **institucionalização**, última etapa, cabe ao professor de forma objetiva estabelecer convenções matemáticas mostrando as assertivas e contestações acerca do objeto de estudo que estava sendo construído no decorrer do processo para chegar ao conhecimento formal.

Assim, na TSD, Almouloud (2007) ao se debruçar sobre a teoria relata que Brousseau encara o aluno, o *milieu* e o professor como atores dos processos de ensino e aprendizagem dispostos num jogo didático, o qual é composto de duas partes:

> [...] o sistema educativo na pessoa do professor, que propõe o jogo didático na fase adidática ao transmitir (emitir) informações, e o aluno, que recebe e recodifica as informações com base em seus conhecimentos prévios e do *milieu*, criando novos elementos. O professor, ator do processo de ensino, deve preparar situações didáticas e saber atuar dentro da fase adidática da situação de modo a deixar o aluno atuar, intervindo apenas quando necessário. Na fase didática, o professor deverá fazer a institucionalização (ALMOULOUD, 2007, p.191).

Diante do contexto, percebemos que é necessário deixar o estudante agir no processo da situação adidática, mas para isso o professor precisa elaborar uma situação didática capaz de estabelecer mecanismos em que levem o aluno à construção do saber e que o *milieu* seja propício para esse fim, sendo o professor aquele que intervém quando necessário. Afinal, corroborando com o autor, Almeida (2016) destaca que o *milieu* é um sistema antagônico em que o sujeito age, então existem ações e retroações nesse ambiente.

Almouloud (2007, p.192) ainda destaca que na fase adidática, outra vertente do jogo didático acontece, visto como o relacionamento do aluno no *milieu*, uma vez que:

> O milieu é a fonte de dificuldades na busca de soluções e é desprovido de intenções didáticas. Assim sendo, o aluno é convidado a buscar informações necessárias no próprio milieu, ou seja, no próprio problema, nos seus conhecimentos anteriores já estabilizados, nos conhecimentos disponibilizados pelos colegas e na intervenção mediadora do professor, a fim de elaborar estratégias vencedoras. Vale ressaltar que, neste jogo com o milieu, o aluno na fase adidática interage principalmente com os colegas e com o problema, numa espécie de conversa, sendo mínima a intervenção do professor.

Em consonância, outros pesquisadores complementam dizendo que na fase adidática, o estudante precisa passar por situações de retomada a conhecimentos anteriores como ferramentas para iniciar a resolução do novo objeto a ser construído, isto é, do novo saber em questão, portanto, na Teoria das Situações Didáticas os papéis do professor e dos alunos são bem definidos e marcados por uma relação com o saber frente a uma sistema didático (TEIXEIRA; PASSOS (2014); BATISTA, 2014; FREITAS, 2015; NUNES SILVA: NUNES, 2019).

Com base na Teoria das Situações Didáticas e suas grandes contribuições para o processo de ensino e aprendizagem, ao elaborarmos a sequência didática do nosso estudo sobre Congruência de Triângulos, buscamos organizar o meio/*milieu* e promover atividades que contemplem situações de ação, formulação, validação e institucionalização, ou seja, pautadas na modelagem das situações adidáticas estabelecidas por Brousseau, para que os estudantes possam construir o saber seguindo essas fases e a postura do docente seja de mediador, o condutor da sequência didática.

A seguir trazemos brevemente alguns aspectos sobre o conceito e objetivos de uma sequência didática mediante pesquisas acadêmicas.

2.3 Sequências Didáticas

A sequência didática de acordo com Zabala (2007, p. 18) é “(...) um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos”. Dessa forma, para haver sequência didática é preciso apresentar ao estudante atividades práticas desafiadoras com materiais interativos e diferenciados que permitam desafios durante a construção do conhecimento.

O autor (IBIDEM, 2007) ainda defende que para melhorar a prática educativa é necessário pensar na configuração das sequências didáticas, uma vez que, os saberes trabalhados precisam contribuir para a formação intelectual de cidadãos conscientes e agentes de transformação social. Corroborando com o autor, Araújo (2013, p. 322-323) diz que “de modo simples e numa resposta direta, sequência didática (doravante SD) é o modo de o professor organizar as atividades de ensino em função de núcleos temáticos e procedimentais”.

No que diz respeito à proposição de uma sequência didática visando o processo de ensino e aprendizagem da matemática, Miguel (2004, p.423) destaca que é preciso haver espaço para o diálogo, a troca de informações dos estudantes entre si e com o professor, sendo então um processo de construção do saber apoiado na ação e reflexão e não apenas na reprodução de informações.

Pensando nesse contexto, Mascarin (2017) acredita que para ser possível uma aprendizagem significativa, a proposição de uma sequência didática destaca-se como o melhor caminho. Isso porque atividades práticas envolvendo conceitos geométricos, por exemplo, propiciam aos discentes a motivação e o desenvolvimento do raciocínio lógico, formal e dedutivo.

Diversos trabalhos vêm sendo desenvolvidos no Brasil com base em sequências didáticas, alguns pesquisadores aplicam a sequência que eles elaboram e determinam, assim, existem regras de funcionamento para o momento da sala de aula a fim de proporem situações favoráveis à aprendizagem seguindo um planejamento estruturado.

Dornelas (2007), Archilia (2008) e Ferreira (2009) se inserem nesse grupo de pesquisadores. Já outros pesquisadores, como por exemplo, Lins Lessa (2005), elabora a sequência didática e não age como professor/pesquisador-colaborador, posto que um professor colaborador é quem aplica a referida sequência; já sendo apenas pesquisador, ele observa em que medida uma sequência didática negociada inicialmente entre o pesquisador e um professor de matemática, vigente da turma participante, possibilita a aprendizagem de conceitos matemáticos, “bem como os eventuais impactos da participação dos alunos na sequência de atividades proposta” (IBID, 2005, p. 9).

Percebemos que no exemplo de Lins Lessa (2005), toda a esquematização da pesquisa foi desenvolvida com o propósito de investigar se a sequência planejada e executada teria resultados satisfatórios para um determinado objeto de estudo, assim o autor buscou em sua pesquisa trabalhar com uma sequência didática de forma a refletir na análise dos dados se os objetivos foram alcançados ou não, caracterizando um dos requisitos de ser pesquisador.

A partir desse contexto, podemos pensar em Sequência Didática sob a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas, para isso concordamos com Estevam (2010) quando o autor entende a Sequência Didática como sendo a articulação entre situações didáticas e adidáticas, fazendo-se necessário:

> [...] criar um *milieu*, a partir da análise descendente da situação pelo professor e ascendente pelo aluno, favorável ao desenvolvimento das ideias relacionadas com determinado conceito, de modo a possibilitar a compreensão dos registros (*semiósis*) e a apropriação de seus significados (*noésis*). Cabe salientar que, ainda que não seja de forma explícita, toda situação, seja ela didática ou adidática, apresenta uma intencionalidade para a aprendizagem, que deve estar clara para o professor desde a concepção da atividade e, no caso das situações adidáticas, ser construída/compreendida pelo aluno no decorrer de suas ações (ESTEVAM, 2010, p.58).

Dessa forma, em consonância com a Teoria das Situações Didáticas, suas relações entre professor, aluno e saber (vistos no tópico 1.2), bem como as influências e características do *milieu*, percebemos que a interface da Sequência Didática não se trata apenas de uma estrutura conceitual, mas envolve todos os fatores determinantes para o possível sucesso da sequência, sejam eles, o professor, as necessidade da sala de aula levando em consideração a sua realidade e, por fim os relacionamentos que se estabelecem nesse ambiente de aprendizagem. Pensando nisso, Estevam (2010, p. 58) defende que essa construção é “uma tarefa complexa”, a qual exige da sala de aula a aplicação de “atividades em condições reais como uma obrigação inevitável”.

Diante do exposto, percebemos que as sequências didáticas não são “engessadas”, pelo contrário, o autor acredita que elas podem e devem passar, quando necessário, por modificações com o propósito de adequá-las aos conceitos particulares e às situações oriundas de situações reais.

Destacamos, também, como visto nos parágrafos acima, que existem diversas formas de conceber sequências didáticas, cada vez mais utilizadas em pesquisas que buscam aproximar o universo científico da sala de aula. Todavia, reiteramos que no caso de nosso estudo, a concepção de sequência didática a ele subjacente, é aquela contemplada na maior parte das pesquisas em Didática da Matemática, que tem por base a Teoria das Situações Didáticas.

CAPÍTULO III

3 O ENSINO DA GEOMETRIA

Neste capítulo discorremos acerca do Ensino da Geometria partindo da sua História e Epistemologia. Também vislumbramos a Geometria no âmbito Curricular e no Livro Didático no Brasil, em Pesquisas sobre o Ensino de Triângulos com softwares de geometria dinâmica, destacando Congruência de Triângulos, o qual representa no triângulo das situações didáticas o polo do saber. Apresentamos tais considerações no intuito de elucidar o objeto de pesquisa por avaliarmos como importantes aspectos que norteiam o objetivo inicial do nosso trabalho visto na introdução.

Vale ressaltar ainda que, o presente capítulo, apresentará alguns aspectos das propostas curriculares que fizeram e fazem parte das reformas para o ensino de Matemática no Ensino Fundamental, porém não tivemos a pretensão de estabelecer análises aprofundadas dessas propostas, e sim, de tecer algumas considerações acerca das mudanças analisadas nas orientações dos órgãos oficiais da Educação no Brasil destacando a Geometria.

3.1. Breve História da Geometria e do seu Ensino

Historicamente a representatividade da linha de pesquisa destinada a Geometria ou pensamento Geométrico têm sua aparição em cerca de 3000 mil anos a.C., por meio do conhecimento dos Egípcios, os quais já observavam a importância desse campo da matemática no tocante à percepção e construção da noção de espaço. Esses estudos foram concretizados na construção das pirâmides e a divisão do Rio Nilo, além da demarcação de terras, por isso os professores ao explicarem a história da Geometria em suas aulas falam sobre essas contribuições. (EVES, 2004).

Segundo Lima e Carvalho (2010, p. 135), historicamente, a Geometria “sempre ocupou um lugar inegável, desde as primeiras fases do desenvolvimento do saber matemático”. Consequentemente, pesquisas acadêmicas buscam relatar sobre o surgimento de estudos geométricos e observam que as origens desse ramo da Matemática recuam a épocas bem antigas:

> [...] as grandes civilizações antigas – chinesa, hindu, mesopotâmica, egípcia – possuíam muitas informações de natureza geométrica. E as aplicavam! Sabiam construir figuras planas e espaciais, conheciam relações entre as grandezas geométricas, calculavam comprimentos, áreas e volumes. Esses conhecimentos atendiam a necessidades socioeconômicas e culturais, tais como medição de propriedades rurais, construção de edificações, desenho de ornamentos, etc. Não há registros históricos, no entanto, de que esses conhecimentos fossem sistematizados. Assim, eles permaneceram como um repertório de fatos e procedimentos pouco articulados. A civilização grega dos séculos 7 a.C. a 3 a.C. é tida, hoje, como a responsável pela organização da geometria como ciência dedutiva (LIMA; CARVALHO, 2010, p. 135).

Como não há registros históricos, observamos que nesse período, os conceitos geométricos não eram sistematizados, ou seja, ainda não existia um sistema estabelecido por regras ou uma organização de conceitos bem estruturados sobre os conhecimentos aplicados na época e socializados mundialmente no mesmo formato. Esse período, de acordo com pesquisas na área da educação matemática, foi caracterizado pelo início do emprego do método axiomático[8], que por sua vez, posteriormente se tornou o modo científico de sistematização da Matemática.

Alguns séculos mais tarde, em meados do ano 500 a.C., na Grécia, ocorreu um imenso interesse de vários sábios pela Geometria. Um dos destaques foi a Geometria demonstrativa, a qual tem seu referencial de estudos iniciais através de Tales de Mileto, que utilizou para determinar distâncias sobre a superfície terrestre propriedades de figuras geométricas, no entanto a construção dos símbolos numéricos só teve origem depois da morte de Alexandre, o Grande, na cidade de Alexandria onde posteriormente surgiu a Universidade de Alexandria homenageando-o. A partir daí, os estudos da matemática evoluíram muito desde Euclides de Alexandria, o qual foi escolhido por Ptolomeu para administrar o departamento de matemática, com pesquisas sobre a matemática dedutiva e a importância destinada, a teoria dos números e a geometria se preocupando com a didática prioritariamente. (EVES; ANDERY, 2004).

Ainda na Grécia antiga, Euclides tornou-se um grande geômetra publicando a obra os “Elementos”, a qual traz o destaque para a Geometria e a Aritmética, como meio de representar a cadeia de argumentos convincentes, destacando a

[8]Uma forma bem simplificada, este método axiomático consiste em adotar conceitos primitivos, isto é, aqueles que não são definidos, como ponto, reta e plano; além dos axiomas, que são proposições sem demonstração, tais como um postulado de Euclides: “Por dois pontos passa uma única reta”. De acordo com esses elementos, por análise exclusivamente lógica, são definidos os conceitos derivados, por exemplo: ângulo, triângulo, quadrado, entre outros, e são deduzidas proposições chamados de teoremas, um exemplo é o Teorema de Pitágoras.

representatividade da matemática dedutiva e axiomática, na prática a geometria ligada à observação, para a construção de experimentos em que praticamente foram se excluindo no ensino básico ao longo dos anos. (TOMEI, 2003).

Vale ressaltar que a obra os Elementos é constituída de 13 livros que englobam uma coleção de definições, postulados (axiomas), proposições (teoremas e construções) e provas matemáticas dessas proposições, os quais dividem-se da seguinte forma: os primeiros seis livros são destinados à relatarem a geometria plana elementar (sendo apresentadas, por exemplo, propriedades elementares à retas e ângulos que vão conduzindo à congruência de triângulos, à problemas com semelhança de figuras planas, ao Teorema de Pitágoras, à igualdade de áreas), os próximos três sobre a teoria dos números, o décimo, tido como Livro X, trata dos incomensuráveis e os três livros finais versam a geometria no espaço.

Atualmente, os estudos e os documentos oficiais para o ensino da Matemática, em especial da Geometria, enfocam como e de que forma o aluno pode contextualizar e solucionar problemas propostos na sua vida cotidiana. Nesta vertente o desenvolvimento da humanidade está ligado à construção do pensamento da geometria e da matemática, que com sua forma dedutiva e evolutiva vem a ser um instrumento para a melhoria da capacidade de pensamento da sociedade. (ANDERY, 2004).

Na década de 70, a Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º graus, lei 5.692/71 (BRASIL, 1971), concedeu autonomia aos estabelecimentos de ensino do nosso país a elaborarem os programas dos diversos componentes curriculares, permitindo a muitos professores a possibilidade de excluir a Geometria de suas abordagens de conteúdo em sala de aula, que não se sentiam preparados para abordar conteúdos geométricos em seus programas. Além disso, entre os professores que a consideravam em seus planejamentos pedagógicos, colocavam a abordagem desse campo no fim do ano letivo, num ensaio inconsciente para não a ensinar, isto é, os conteúdos e conceitos geométricos acabavam sendo abandonados, considerando como justificativa a grande extensão dos tópicos e quantidade insuficiente de aulas (PAVANELLO, 1993).

Corroborando com a autora, Lorenzato (1995) destaca que devido ao movimento da Matemática Moderna no Brasil, muitas vezes as unidades de ensino acabavam não abordando todos os ramos da Matemática, como a falta do estudo da Geometria nas aulas dessa área de conhecimento, afinal a Matemática Moderna tinha a proposta de algebrizar a Geometria (o que não prevaleceu em nosso país) causando prejuízo nas práticas pedagógicas no ensino de conceitos geométricos.

Contudo, não é concebido como forma de pensamento comum, entre os professores, que o ensino dos conceitos da Geometria deve ser ensinado mediante tempo determinado na escola e sim deve ser um aprendizado continuado, para que esse aluno tenha um desenvolvimento intelectual mais completo mediante a concepção da Geometria, sendo considerado toda a sua vida educacional. (USISKIN, 1994, p. 25).

Diversos teóricos realizam a reflexão sobre a aprendizagem da geometria, a relação do desenvolvimento da criança com o processo cognitivo e para com o desenvolvimento da visualização do espaço, da verbalização e da intuição necessária à resolução de problemas (FAINGUELERNT, 1995).

Cabe ainda destacar que a diversidade de formulação e de construção do conhecimento por meio da aprendizagem da geometria, determinando essa uma maneira diferenciada de resolver problemas por proporcionar uma visão por meio de um prisma diferenciado, apresentando assim uma opção a mais a ser explorada na formação cognitiva de outros conceitos matemáticos. (CÂMARA DOS SANTOS, 2002).

Desde os anos de 1990, surge um pensamento concreto para a evolução e representatividade da geometria perante o desenvolvimento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), em 1998. Esse conhecimento foi destinado para a evolução da construção do pensamento por meio do ensino da geometria, no contexto cultural e social. (SANTANA, 2010)

Com base nesses avanços, as atividades relacionadas à Matemática têm com a evolução humana representado um sistema de adaptações em conjunto com a evolução dos saberes didáticos do ensino da geometria concomitantemente aos saberes escolares, um crescimento intelectual de conceitos referentes a uma prática social, apresentada por meio de um presente interpretativo e um futuro promissor para a evolução da humanidade. (MOTTA, 2008).

Neste aspecto evolutivo no ensino da Geometria, se encontram ainda a expectativa do crescimento intelectual cada vez mais rápido e eficientes de conceitos relevantes a didática desse ramo, proporcionando em sala de aula cada vez mais aprendizagem sobre esses conceitos matemáticos, por intermédio da utilização das novas tecnologias de comunicação. (MOTTA, 2008).

Para isso, os aspectos oferecidos pelos estudos voltados para o ensino da Geometria têm relevância sobre a evolução da capacidade singular de aumento de conhecimento perante o processo heurístico à matemática. Entretanto, o livro didático não enfatiza a história heurística como realmente aconteceu trazendo obstáculos epistemológicos à Geometria. (TOMEI, 2003).

Os obstáculos epistemológicos encontrados na história da Geometria vêm a ter destaque devido a sua capacidade de alterar as formas de como transformar as situações-problema para a construção do conhecimento. (IBIDEM, 2003).

Ainda segundo o autor, o contexto atual a matemática é vista como uma disciplina completa, subsidiando um conhecimento dinâmico, aberto, por meio de dicotomias relativas, que coexistem com as razões da evolução da razão sobre as razões.

Para LIMA e CARVALHO (2010) a presença constante da Geometria no cotidiano é uma das razões importantes para o estudo desse campo da Matemática, como podemos ver na citação:

> Já nos primeiros meses de vida, as crianças iniciam-se no aprendizado dos movimentos e no reconhecimento dos objetos do espaço em seu redor. O desenvolvimento motor e cognitivo posterior das pessoas vai permitir que elas exercitem competências geométricas cada vez mais elaboradas de localização, de reconhecimento de deslocamentos, de representação de objetos do mundo físico, de classificação das figuras geométricas e de sistematização do conhecimento nesse campo da Matemática. Além disso, a formação dos nossos profissionais no campo da geometria é um imperativo ditado pelo desenvolvimento tecnológico e científico atual (LIMA; CARVALHO, 2010, p. 135).

Estudos mostram, num contexto sócio-histórico, que desde os primórdios, a Geometria vem sendo aplicada na sociedade por meio das ações dos seres humanos quando buscam melhorias de vida e compreender o espaço a sua volta (FAINGUELERNT, 1995; LIMA; CARVALHO, 2010).

Além disso, a geometria tem parâmetros aplicáveis a diversas áreas do conhecimento, na sociedade contemporânea, como na topografia, na arquitetura, no meio ambiente, no desenvolvimento da história humana, na ciência, na indústria, na produção de diversos produtos utilizados na vida cotidiana, por isso a importância de ensinar os conceitos geométricos durante toda a vida escolar dos estudantes. (LIMA; CARVALHO, 2010).

3.2. A Geometria no Âmbito Curricular e no Livro Didático no Brasil

A Geometria é uma parte da Matemática que possibilita o entendimento e ampliação do raciocínio espacial, através dele é possível perceber, compreender e representar o ambiente mediante atividades aplicáveis em diversas áreas de conhecimento, por isso a importância dos conteúdos geométricos no currículo escolar, bem como a sua distribuição nos livros didáticos.

Entretanto, na década dos anos 1960, por meio do Movimento da Matemática Moderna[9] (MMM), se acarretou uma espécie de renovação do ensino da matemática. No Brasil, esse acontecimento reportou o ensino de geometria em segundo plano na educação básica, ou seja, esse campo matemático foi de certa forma abandonado nas propostas curriculares, nos livros didáticos e, especialmente, na sala de aula da escola básica (ANDRADE, 2005; LIMA; SANTOS, 2012).

Essas mudanças oriundas do Movimento Modernista tiveram influências do grupo de matemáticos franceses que, segundo Pires (2000), era conhecido pelo pseudônimo Nicolas Bourbaki. Por meio deste, a Matemática foi organizada com estruturas abstratas, excluindo a preocupação em aplicações práticas para essa área de conhecimento, trazendo mudanças na forma de explorar os conteúdos matemáticos, afetando, assim, a Geometria por ser um ramo dessa ciência que estuda a aplicabilidade de conceitos no ambiente.

Por conseguinte, essa forma de excluir o ensino da Geometria, ocasionou inúmeras dificuldades conceituais de aprendizagem relacionadas aos conceitos geométricos. Muitas dessas dificuldades ainda resistem atualmente, apesar de importantes mudanças ocorridas no ensino da Geometria e do avanço das pesquisas no âmbito educacional. (ANDRADE, 2005; ALENCAR, 2010; BEZERRA; BARBOSA, 2013).

Esses estudos em Educação Matemática, ao refletirem o papel da Geometria na formação plena da cidadania, e consequentemente, acerca da importância do seu estudo no contexto escolar, favoreceram a elaboração de orientações curriculares,

[9] O movimento internacional de reformulação no ensino da matemática escolar é conhecido como Movimento da Matemática Moderna (MMM). Pesquisas indicam que desde “a década de 1950, matemáticos, pedagogos, professores de matemática, psicólogos, lógicos estão a debater mudanças para o ensino da matemática escolar”. Além disso, reuniões de avaliação, comissões e discussões de propostas aconteceram na Europa e na América. No Movimento surgiram mudanças que defenderam “a unificação dos diferentes campos da matemática, aproximando o ensino realizado na educação básica àquele desenvolvido na Universidade, o que corresponde à linguagem e à estrutura empregada pelos matemáticos da época” (MATOS; SILVA, 2011).

produção de intervenções pedagógicas e de material didático, voltados para esse saber, contribuindo assim com a prática pedagógica do professor de Matemática que atua efetivamente no ensino básico.

Pesquisadores da área apontam que, ao longo da trajetória da educação no Brasil, o quase abandono da Geometria nos currículos interferiu nos processos de ensino e aprendizagem desse campo da Matemática. Apresentando como reflexo, docentes e discentes com conhecimentos insatisfatórios e grandes dificuldades em explorar situações envolvendo conceitos geométricos e correlacioná-los com outros conteúdos matemáticos (PAVANELLO, 1993; LORENZATO, 1995; NACARATO, 2007).

Fainguelernt (2011) defende que historicamente a Geometria tem sido excluída por diversos fatores, entre eles a forma como o livro didático aborda esse campo matemático deixando, na maioria das vezes, para o final do livro, como também a falta de preparo de alguns professores. No decorrer dos anos tal realidade aparece com pequenas modificações nos livros didáticos e na postura de ensino de professores que priorizam mais conceitos aritméticos e algébricos, por exemplo. Assim, para atingir um marco maior de melhorias na distribuição dos conceitos geométricos por parte dos materiais escolares e dos docentes, sabe-se que sendo a educação um processo, demandará certo tempo para mudança nesse cenário, visto que atualmente pesquisas apontam desinteresse e apatia por grande parte dos alunos (SILVA, 2015).

Corroborando com os autores, Matos e Leme da Silva (2001, p. 192) afirmam que no Brasil a proposta da geometria sofreu muitas alterações e reformulações, consequentemente a geometria foi “omitida pelos professores e gradualmente afastada para o final do ano letivo, deixando antever a maior falta de preparo dos profissionais”.

Mediante esses questionamentos, Silva (2015) acrescenta argumentando que estudos atuais revelam que estudantes dos ensinos médio e superior apresentam deficiências no tocante à geometria espacial, em defluência de programas que não valorizam a Geometria no Ensino Fundamental e de práticas pedagógicas tradicionais.

Essas dificuldades dos discentes ao estudarem assuntos da Geometria aparecem desde a educação básica até o ensino superior, por isso há importância de fazer análises reflexivas sobre a maneira de ensinar trazendo atividades diversificadas e inovadoras com o objetivo de melhorar a qualidade de ensino desse campo do saber (BEZERRA; BARBOSA, 2013; BARBOSA, 2017).

Para superar as dificuldades encontradas e promover o avanço cognitivo dos alunos, concordamos com Oliveira e Morelatti (2006, p. 13), que referem o fato de que "o professor ao abordar o conteúdo de Geometria, precisa contemplar diferentes atividades que envolvam a visualização, a construção e o raciocínio geométrico". Isso dará condições ao aluno de se relacionar com o saber de forma diferenciada, favorecendo a superação das dificuldades de aprendizagem. É necessário, também, utilizar situações-problema em que o aluno investigue, conjecture, estabeleça relações, experimente e comunique; essas ações são importantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico (MARINHO; SIQUEIRA, 2013).

Além disso, para o ensino de Geometria tornar-se mais efetivo, o docente precisa incentivar a manipulação de figuras geométricas, conceituando-as, com a perspectiva de "sistematizar as propriedades que definem os conceitos". É necessário, também, ensinar com "exemplos e contra-exemplos", pois facilita, no discente, a visualização, a comparação, o questionamento (OLIVEIRA; MORELATTI, 2006, p. 5).

Na seção 2.2.1 apresentamos algumas discussões acerca do Currículo no Brasil partindo de pesquisas e documentos oficiais desde o Movimento da Matemática Moderna até a BNCC (2017).

3.2.1. Currículo

As pesquisas indicam um progresso nos estudos e investigações referentes ao currículo de Matemática enfatizando a Geometria, revelando a continuidade de buscas mais interessantes para trabalhar esse campo em sala de aula, através de um processo de organização e desenvolvimento curricular auxiliando o trabalho pedagógico do professor, a fim criar situações didáticas que favoreçam a aprendizagem dos alunos.

Entretanto, apesar de todos esses avanços, tudo indica que a Geometria continua sendo trabalhada de forma equivocada no ensino fundamental e médio, o que tem gerado uma grande inquietação em pesquisadores e professores na área da Educação Matemática, favorecendo em diversas regiões do país vários debates acerca do assunto (QUARTIERI; REHFELDT, 2007; ALENCAR, 2010; BEZERRA; BARBOSA, 2013). Para tais discussões faz-se necessário compreendermos como ocorreram as propostas curriculares em nosso país e suas influências para a construção do pensamento geométrico.

No Brasil, as principais propostas curriculares que foram divulgadas nas reformas e documentos desde 1931 até a atual proposta apresentada pelo Ministério de Educação e Cultura – MEC – para todo o país, em 2017, na Base Nacional Comum Curricular, foram marcadas por modificações no ensino da Matemática, em especial da Geometria.

As reformas curriculares tiveram uma trajetória evidenciada em dois momentos cruciais durante a primeira metade do século XX, depois três períodos marcantes na segunda metade deste século. Segundo estudiosos sobre a história da Educação Matemática no país, a primeira reforma foi chamada de Francisco Campos, em 1931 e a segunda de Gustavo Capanema, em 1942; tempos depois a influência do Movimento da Matemática Moderna de 1965 a 1980, o segundo período marcante foi caracterizado pelas reformas que contrapunham o MMM de 1980 a 1994, já o terceiro foi denominado Parâmetros Curriculares Nacionais a partir de 1995 (SOARES, DASSIE; ROCHA, 2004; PIRES, 2000).

No quadro a seguir poderemos verificar alguns aspectos importantes nesse século.

Quadro 2: Reformas Curriculares no século XX

REFORMAS CURRICULARES DO SÉCULO XX				
1ª METADE DO SÉCULO XX		2ª METADE DO SÉCULO XX		
Reforma 1 (Em 1931)	Reforma 2 (Em 1942)	Período 1 (1965 a 1980)	Período 2 (1980 a 1994)	Período 3 (A partir de 1995)
Francisco Campos	**Gustavo Capanema**	**Influência do MMM**	**Contraposição do MMM**	**PCN**
Proposição da unificação dos campos matemáticos: Aritmética, Álgebra e Geometria na mesma disciplina, proposta por Euclides Roxo.	Mudanças nas decisões curriculares retirando as inovações da reforma 1.	Movimento da Matemática Moderna provocando alterações curriculares em diversos países.	Busca por reformas que contrapunham as ideias sugeridas pelo Movimento da Matemática Moderna.	Documento elaborado a nível nacional para ser empregado nas escolas brasileiras, chamado de Parâmetros Curriculares Nacionais.

Fonte: Autoria própria

A reforma de 1931 teve a finalidade de abordar os campos matemáticos (Aritmética, Álgebra e Geometria) numa única disciplina através da articulação dos conteúdos abordados inter-relacionando-os. Contudo, Euclides Roxo[10] ao propor essa

[10] Foi professor de Matemática, diretor do Colégio Pedro II, autor de livros didáticos (nasceu em 10 de dezembro de1890, em Aracaju e faleceu em 21 de setembro de 1950, no Rio de Janeiro), destacando-

unificação salientou a importância de que ao ensinar a geometria dedutiva seria viável antecedê-la com uma abordagem prática da geometria. Percebemos que com essa reforma a concepção de currículo apresentou uma ampliação no ensino da Matemática, em especial da Geometria, visto que os conteúdos ensinados passariam por uma discussão de orientações didáticas saindo da listagem de assuntos para uma forma de pensar como articular os conteúdos matemáticos estabelecendo relações entre eles.

Historicamente, as decisões curriculares no Brasil foram influenciadas por questões políticas ou até mesmo pelas influências de pessoas ou grupos de pessoas apresentando ideias questionáveis. A exemplo disso temos posteriormente, em 1942, a Reforma de Gustavo Capanema, a qual surge não mantendo as inovações propostas na Reforma Francisco Campos.

Na segunda metade do século XX surgiu o primeiro período de mudanças curriculares conhecido como Movimento da Matemática Moderna, como vimos anteriormente, provocando alterações curriculares em países com sistemas de ensino diversos. No Brasil, esse movimento trouxe diretamente a alteração nos livros didáticos, sem formações condizentes que preparassem os professores (tiveram apenas cursos pontuais), nem tampouco discussões mais profundas sobre suas finalidades ou princípios junto ao corpo docente acerca do MMM, nem sobre os "prejuízos acarretados pelo excesso de algebrismo, abandono da Geometria, falta de vínculos com o cotidiano, críticas essas que foram importantes na elaboração das propostas que orientam os currículos nas décadas de 80 e 90" (PIRES, 2000).

Por outro lado, no período do Movimento um ponto positivo para a disciplina da Matemática foi levado em consideração: o início de discussões para a existência de problemas matemáticos a fim de uma melhor compreensão dos conceitos de números e do espaço, analisando como se procede a construção pelas crianças a partir dos trabalhos de Piaget, assim o objetivo era buscar estratégias com o auxílio de recursos didáticos capazes de contribuir na aprendizagem da Matemática pelos discentes.

Em 1980, os currículos de Matemática passaram por mudanças devido às críticas durante o período da Matemática Moderna impulsionando as Secretarias Estaduais e as Secretarias Municipais de Educação do Brasil na elaboração de novas

---

se na primeira metade do século XX ao propor a "fusão da Aritmética, com a Álgebra e com a Geometria" (VALENTE, 2008b, p. 38).

propostas para o ensino dessa área de conhecimento substituindo a proposta anterior. Na época, a rede pública de São Paulo iniciou, em 1988, uma proposta curricular, intitulada Proposta Curricular para o ensino de 1º grau, trazendo argumentos que versavam sobre os principais problemas diagnosticados. Essa proposta foi elaborada pela “Equipe Técnica de Matemática da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP” (EWBANK, 2002, p. 72), a qual estruturou um documento relatando de forma estruturada os problemas relativos ao ensino de Matemática, sejam eles:

> ✓ A preocupação excessiva com o treino de habilidades, com a mecanização de algoritmos, com a memorização de regras e esquemas de resolução de problemas, com a repetição e a imitação e não com uma aprendizagem que se dê, inicialmente, pela compreensão de conceitos e propriedades, pela exploração de situações-problema nas quais o aluno é levado a exercitar sua criatividade, sua intuição;
> ✓ A priorização dos temas algébricos e a redução ou, muitas vezes, a eliminação de um trabalho envolvendo tópicos de Geometria;
> ✓ A tentativa de se exigir do aluno uma formalização precoce e um nível de abstração em desacordo com seu amadurecimento (SE/CENP/SP, 1988, p.3 apud EWBANK, 2002, p. 72).

Ainda segundo o autor (IBID, 2002), os conteúdos apresentados no documento foram organizados seriadamente conforme solicitado por professores da época. As concepções que nortearam o desenvolvimento da proposta curricular apresentavam algumas considerações gerais sobre o espaço da matemática no currículo, conteúdos e suas abordagens, a matemática e a linguagem, a estruturação da proposta e a extensão dos programas, de forma a relacionar a matemática com atividades práticas e com a capacidade de desenvolver o raciocínio lógico. Esses aspectos foram tratados no ensino da matemática na escola básica através dos assuntos: Números, Geometria e a noção de Medida, os quais apresentavam objetivos gerais e específicos para cada série.

Entretanto, a maneira como o documento foi apresentado, extremamente direcionado, fazia do:

> [...] professor um mero executor de atividades com explicações sobre os procedimentos e sugestões para variações das atividades, muito embora ressalte que seria um desafio para o professor conseguir uma “situação de equilíbrio entre a pressão das necessidades práticas e a ultrapassagem da experiência concreta, tanto no nível das ferramentas conceituais como no das concepções” (SE/CENP/SP, 1988, p. 4), e que, o desempenho satisfatório desta tarefa permitiria a construção da autonomia intelectual (EWBANK, 2002, p. 74).

Contudo, apesar de todas as recomendações e sugestões presentes na Proposta Matemática de 1988 houve um distanciamento em relação aos processos de ensino, além de que se limitou a indicar os conteúdos abordados seguidos de comentários técnicos com poucas sugestões de natureza metodológicas, consequentemente o conhecimento por parte dos alunos, sujeitos que aprendem, apresentaram defasagem e taxas de repetência durante o Ensino Fundamental devido a "baixa qualidade do ensino e a incapacidade dos sistemas educacionais e das escolas de garantir a permanência do aluno" (BRASIL, 1998, p.25).

Tempos depois, buscando a operacionalização efetiva das diretrizes curriculares discutidas nas décadas de 80 e 90 e da inclusão de novos componentes à pauta de discussões, o Ministério da Educação e do Desporto (MEC) elabora, em 1998, a versão final do documento: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – o qual se manteve de 1998 a 2016 – passando a considerar a Matemática uma disciplina que permite compreender diversos problemas do cotidiano, além de se destacar como essencial para a construção do conhecimento estudado em outras áreas curriculares. De acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p.5):

> Os documentos apresentados são o resultado de um longo trabalho que contou com a participação de muitos educadores brasileiros e têm a marca de suas experiências e de seus estudos, permitindo assim que fossem produzidos no contexto das discussões pedagógicas atuais. Inicialmente foram elaborados documentos, em versões preliminares, para serem analisados e debatidos por professores que atuam em diferentes graus de ensino, por especialistas da educação e de outras áreas, além de instituições governamentais e não governamentais. As críticas e sugestões apresentadas contribuíram para a elaboração da atual versão, que deverá ser revista periodicamente, com base no acompanhamento e na avaliação de sua implementação.

No que se refere ao conhecimento matemático, os Parâmetros propõem a importância de se trabalhar com recursos tecnológicos, tais como computadores, calculadoras, softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções, entre outros; como também a utilização de jogos e a resolução de problemas.

Os PCN (BRASIL, 1998) trazem orientações curriculares para o ensino de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, eles foram elaborados com o intuito de orientar o trabalho docente e, para isso dividiu o documento em quatro blocos de conteúdos denominados: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Tratamento da Informação. Em nossa pesquisa, analisamos o bloco de conteúdos Espaço e Forma por fazer parte da Geometria. Vale destacar que, os conteúdos de cada bloco foram organizados em ciclos, na nossa análise focaremos o 4º ciclo – 7ª e 8ª série (atual 8º e 9º ano) do Ensino Fundamental.

Os conceitos geométricos constituem um campo importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, pois, é por meio deles que, o estudante "desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive" (BRASIL, 1998, p.51). Além disso, segundo o documento, o estudo da Geometria estimula o aluno a observar, identificar irregularidades, perceber semelhanças e diferenças, estabelecer relações aplicando propriedades, por exemplo, entre outras habilidades.

Com base nessas informações, os Parâmetros (1998) defendem a importância de ao se trabalhar com o bloco Espaço e Forma sejam exploradas situações com o cotidiano de modo que permitam ao discente estabelecer conexões entre a disciplina de Matemática e outras áreas do conhecimento.

Para tanto, o documento propõe os objetivos necessários para o desenvolvimento do pensamento geométrico utilizando situações de aprendizagem que estimulem, no 4º ciclo, o aluno a:

> - Interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano;
>
> - Produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança;
>
> - Ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais (BRASIL, 1998, p. 81-82).

Analisando os PCN (BRASIL, 1998), o estudo dos conteúdos referentes ao bloco Espaço e Forma precisa partir da análise das figuras planas e/ou espaciais pelas observações, manuseios e construções capazes de permitir fazer conjecturas, como também, identificar propriedades. Sendo imprescindível que os estudantes ao desenvolverem as atividades possam perceber que pela composição dos movimentos pode-se transformar uma figura em outra. Consequentemente, a construção de figuras mediante a reflexão, translação e rotação possibilita, ao aluno, perceber que as medidas dos lados e ângulos de uma figura dada ou demonstrada são as mesmas.

Percebemos que nesse 4º ciclo, ao abordar os conceitos geométricos, o estudante tem o contato com o raciocínio dedutivo, não significando dizer que será feito um estudo absolutamente formal e axiomático da Geometria. Por outro lado, embora "se inicie um trabalho com algumas demonstrações, com o objetivo de mostrar sua força e significado, é desejável que não se abandonem as verificações empíricas", afinal elas permitem produzir conjecturas e também ampliar o grau de compreensão dos conceitos abordados (BRASIL, 1998, p.87).

Por fim, o os PCN (BRASIL, 1998, p.92 – 93) também trouxeram critérios de avaliação para cada ciclo, no que se refere ao 4º ciclo, bloco Espaço e Forma, seguem:

> - Decidir sobre os procedimentos matemáticos adequados para construir soluções num contexto de resolução de problemas numéricos, geométricos ou métricos.
> - Estabelecer relações de congruência e de semelhança entre figuras planas e identificar propriedades dessas relações.

Por meio desses critérios, o documento acredita que o professor consegue identificar se o aluno é capaz de interpretar situações-problema; identificar os algoritmos; selecionar informações necessárias, planejar a resolução e estimar soluções; investigar, conjecturar, argumentar e comprovar a validade de resultados mediante apresentação organizada e clara. Além de verificar nas distintas transformações de uma figura no plano (reflexões, rotações e translações) que é possível obter figuras congruentes e, por intermédio de reduções e ampliações, as figuras semelhantes, e de aplicar propriedades da congruência e semelhança em problemas propostos.

A partir das orientações propostas pelos PCN (BRASIL, 1998) para o ensino da Geometria é esperado que elas sirvam de subsídios para a elaboração de propostas curriculares de governos estaduais e municipais, norteando o trabalho docente na efetivação da adaptação dos saberes estudados em sala de aula, ou seja, é preciso estabelecer os conteúdos a serem ensinados, adequando-os ao ano escolar para uma aprendizagem significativa.

Como vimos nessa seção, diversas reformas curriculares aconteceram no Brasil ao longo dos anos em busca de atender às necessidades do sistema educativo em cada época, após os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), os quais serviram de orientação para a Educação Básica brasileira, em 2017 foi instituída a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, elaborada a partir dos pressupostos presentes nos Parâmetros e na Lei de Diretrizes e Base da Educação – LDB nº

9394/96, eles serviram de suporte para a constituição das noções estruturantes e fundantes das orientações curriculares que entraram em vigor em 2017.

O objetivo da BNCC (BRASIL, 2017) é estabelecer os conteúdos essenciais a serem estudados na Educação Básica brasileira. Este documento tem caráter normativo, estruturado mediante um conjunto harmônico e progressivo de aprendizagens vistas como essenciais a serem desenvolvidas ao decorrer da Educação Básica, assegurando os direitos de aprendizagem dos estudantes conforme preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Além disso,

> Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN) (BRASIL, 2017, p.7).

Segundo este documento, a BNCC é referência nacional na formulação dos currículos tanto dos sistemas quanto das redes escolares do Distrito Federal, dos Estados e dos Municípios brasileiros. A orientação para a definição e construção de uma Base Nacional Comum Curricular, de acordo com Brasil (2017, p.10) já constava na Constituição Federal da nação, em seu artigo 210, o qual orientava o seguinte: “serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar a formação básica comum a respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais”. Por conseguinte, é esperado que a base contribua para superar a:

> [...] fragmentação das políticas educacionais, enseje o fortalecimento do regime de colaboração entre as três esferas de governo e seja balizadora da qualidade da educação. Assim, para além da garantia de acesso e permanência na escola, é necessário que sistemas, redes e escolas garantam um patamar comum de aprendizagens a todos os estudantes, tarefa para a qual a BNCC é instrumento fundamental. (BRASIL, p. 8, 2017).

Conforme o documento mencionado, dentre as diversas vertentes inovadoras presentes na BNCC (BRASIL, 2017), a mesma define às aprendizagens por competências mobilizando conhecimentos (conceituais e procedimentais), habilidades (cognitivas, socioemocionais e práticas), atitudes e valores a fim de resolver demandas complexas da vida cotidiana, do mundo do trabalho e do pleno exercício da cidadania. Nesse sentido, a base ao se referir às decisões pedagógicas indica que elas devem ser orientadas para o desenvolvimento de competências que estimulem ações com o compromisso da educação brasileira, com a construção de uma sociedade democrática, justa e inclusiva, assim como, com a formação humana por serem considerados fatores essenciais a serem desenvolvidos ao longo da Educação Básica.

No tocante à Geometria no Ensino Fundamental, a BNCC (BRASIL, 2017) argumenta que nesse campo da Matemática é preciso garantir que os estudantes consigam relacionar observações empíricas do mundo real com suas respectivas representações, associando-as a uma atividade matemática, identificando e aplicando conceitos e propriedades, além de fazer induções e conjecturas. Assim, será possível que os alunos sejam capazes de resolver problemas em diversas contextos das situações que lhes são submetidos.

Para tal, ainda segundo o documento, o Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático[11], assim os estudantes poderão desenvolver a capacidade de interpretar e formular conceitos matemáticos em uma variedade de contextos, visto que, eles estarão sendo preparados com competências e habilidades que propiciam o raciocínio, a representatividade, a comunicação e a argumentação matemática.

Os conhecimentos matemáticos apresentados pela BNCC são estruturados em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística. A partir de cada unidade temática são apresentados os objetos do conhecimento pertinentes a cada grau de escolarização, destacando as habilidades a serem desenvolvidas. Em nossa pesquisa apresentamos uma breve análise sobre a unidade temática: Geometria, por ser o foco do nosso trabalho.

Sendo assim, no que se refere à Geometria, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017, p. 267) enfatiza a importância do estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos que se fazem necessários para resolver problemas de diferentes áreas do conhecimento. Afinal, com o pensamento geométrico os estudantes conseguem investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir

---

[11]Segundo a Matriz do Pisa 2012, o "letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos". Dessa forma, o estudante é capaz de raciocinar matematicamente utilizando conceitos, fatos, procedimentos e ferramentas matemáticas a fim de descrever, explicar e antever fenômenos. Consequentemente, é possível que os indivíduos reconheçam o papel que a matemática exerce no cotidiano sendo cidadãos construtivos e reflexivos, aptos a fazer julgamentos com fundamentos e a tomar decisões necessárias para determinada situação (BRASIL, 2017, p.266).

argumentos geométricos convincentes. E, ainda destaca a compreensão entre as relações conceituais e procedimentais da Geometria com Aritmética e a Álgebra, que por sua vez, podem ser trabalhadas de forma integrada.

No caso dos Anos Finais do Ensino Fundamental, o ensino e aprendizagem da Geometria precisam consolidar e ampliar os conceitos estudados. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também atividades que analisam e produzem ampliações e reduções de figuras planas, identificando seus elementos variantes e invariantes com intuito de desenvolver os conceitos de semelhança e congruência. Esses conceitos sendo apresentados nessa etapa da Educação Básica, os alunos serão, conforme a base, "capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples" (BRASIL, 2017, p.272), contribuindo, por exemplo, para a formação do raciocínio hipotético-dedutivo.

Destaca-se ainda, a importância de criar condições de aprendizagens com o auxílio de diversos recursos didáticos e materiais significativos, com o objetivo de despertar no estudante o interesse para aprender Matemática sistematizando conceitos. Outro ponto é que os alunos tenham a oportunidade de lidar com abstrações existentes em situações-problemas conseguindo fazer relações aplicáveis em outros contextos.

A nível estadual, os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (2012) fundamentado mediante o Currículo Básico Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco (CBC – PE, 2008) também apresenta contribuições para o ensino de Geometria nos Anos Finais do Ensino Fundamental enfatizando, por exemplo, que "as atividades propostas pelo professor devem levar o estudante à percepção de que figuras geométricas são caracterizadas por suas propriedades" (PERNAMBUCO, 2012, p. 93).

A seguir trazemos algumas considerações sobre quatro livros didáticos adotados no PNLD 2017 que serviram de base para a construção da sequência didática do nosso estudo.

3.2.2 Livro Didático

Segundo os documentos oficias, os triângulos se destacam como uma das figuras geométricas essenciais a serem estudadas no Ensino Fundamental por trazerem os elementos básicos para a construção de outras figuras que compõem o ensino da Geometria na educação básica. Mesmo apresentando uma aparência simplória, em comparação a outras figuras, os triângulos trazem diversas contribuições no âmbito da Matemática devido as suas propriedades e características, assim, em consonância com a BNCC (2017, p. 272), recomendamos o ensino desse saber no Ensino Fundamental Anos Finais "de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento" a fim de realizar demonstrações simples, as quais possam contribuir para a formação do raciocínio hipotético-dedutivo, um tipo de raciocínio importante para a Matemática.

Na maioria dos livros didáticos do Ensino Fundamental Anos Finais, o estudo dos Triângulos é abordado com mais ênfase no 8º ano, pois os autores abordam diversos resultados sobre elementos de um triângulo, condição de existência, desigualdade triangular, relação entre lados e ângulos, semelhança, congruência, casos de congruência de triângulos, simetria, área de um triângulo, teoremas, demonstrações geométricas, entre outros.

Os condicionantes do estudo dos Triângulos em livros didáticos são preconizados pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) na unidade temática Geometria que orienta a formulação de habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental. Nessa unidade temática, o documento aponta que é possível explorar formas de aprendizagem capazes de levar os estudantes a:

> [...] um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (BRASIL, 2017, p. 271).

Dessa forma, a unidade temática Geometria ao abordar o estudo de Triângulos estimula o aluno a perceber semelhanças e diferenças, a identificar irregularidades, procedimentos de observação, representações e construções de figuras, além do manuseio de instrumentos de medidas permissíveis de fazer conjecturas sobre algumas propriedades dessas figuras (BRASIL, 1998, 2017).

Nesse contexto, fazendo uma comparação com os documentos curriculares: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017) e o Currículo de Matemática de Pernambuco para o Ensino Fundamental (CBC, 2012), listamos algumas habilidades (quadro 3) sobre o estudo de Triângulos trabalhadas no 8º ano do Ensino Fundamental por ser nessa etapa de escolarização a maior ênfase dada pelos documentos oficiais para esse saber geométrico. Vejamos algumas habilidades que os livros didáticos precisam abordar em suas obras conforme os documentos oficiais:

Quadro 3: Habilidades dos Triângulos segundo os PCN, a BNCC e o CBC.

	Etapa	Habilidades
PCN (1998)	8º Ano	• Desenvolver o conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície). • Verificar propriedades de triângulos pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.
BNCC (2017)	8º Ano	• Reconhecer as condições necessárias e eficientes para obter triângulos congruentes e aplicar esse conhecimento em demonstração simples, como de propriedades dos quadriláteros.
CBC (2012)	8º Ano	• Reconhecer triângulos congruentes a partir dos critérios de congruências. • Resolver e elaborar problemas que envolvam critérios de congruência de triângulos. • Utiliza a congruência de triângulos para descrever propriedades de quadriláteros: quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos.

Fonte: A própria autora.

De posse dessas informações, analisamos brevemente como é apresentada a Congruência de Triângulos (polo do saber) em quatro livros didáticos, entre os onze recomendados e aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD, 2017). Não analisamos o livro do sistema de ensino adotado pela instituição escolar por sabermos das críticas referentes a organização dos conteúdos programáticos frente aos requisitos da BNCC (2017), visto que a escola se encontrava em tramitação para um novo sistema de ensino.

A escolha dessa quantidade deu-se pelo fato de que entre os onze livros didáticos aprovados pelo PNLD 2017, tivemos acesso apenas a quatro deles, apesar de o objetivo principal da nossa pesquisa não ser a análise de livros didáticos, porém consideramos importante fazer uma breve análise de como o conteúdo, polo do saber, é apresentado nos livros, acreditamos que as obras analisadas nessa seção foram relevantes e suficientes para contribuir com o nosso estudo no que se refere a elaboração da sequência didática.

Assim, os livros escolhidos para uma breve análise descritiva foram “Projeto Teláris” de Luiz Roberto Dante (2016), “Matemática: compreensão e prática” de Ênio Silveira (2015), “Matemática Bianchini” de Edwaldo Bianchini (2015) e “Vontade de Saber” de Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro (2015).

Para a análise observamos em cada livro a conciliação com o que é recomendado pelos documentos oficiais de orientação curricular no Brasil sobre os quais discorremos ao decorrer do subitem 2.2. Chegamos as seguintes considerações:

- **Semelhanças nas obras apresentadas**

Uma semelhança de fundamental importância é que todos os livros apresentaram concordância no raciocínio para as definições de Congruência de Triângulos, os casos de congruência e as propriedades, entretanto sentimos falta de situações que utilizassem ferramentas de ensino manipuláveis, como é o caso de softwares de geometria dinâmica, capazes de contribuir para a construção do saber, conforme segurem os PCN (BRASIL, 1998). Todas as obras trazem exemplos resolvidos e exercícios de fixação.

Silveira (2015), Souza e Pataro (2015) têm em comum a proposta de trabalhar Congruência de Triângulos apenas na quarta unidade, além de introduzirem os conceitos sobre o assunto com definições, exemplos e exercícios de fixação, Bianchini também se encaixa nesse último aspecto.

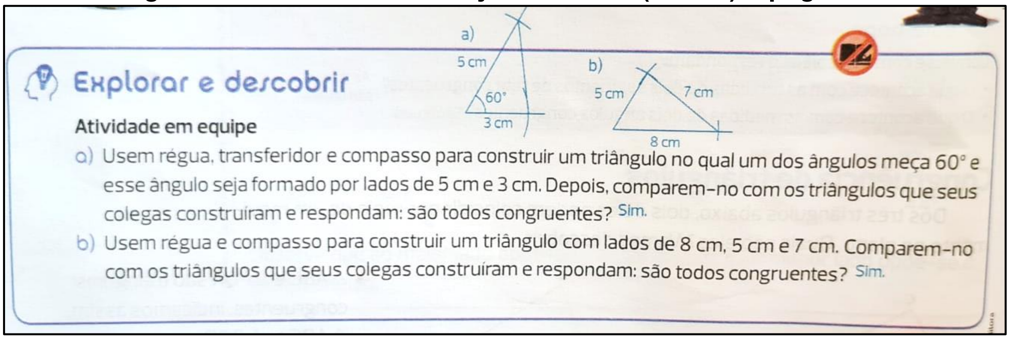
Dante (2016) e Bianchini (2015) utilizam demonstrações para aplicar casos de congruência de triângulos.

- **Peculiaridades nas obras apresentadas**

Apenas em Dante (2016), o conteúdo Congruência de Triângulos é introduzido no capítulo 3 a partir de algumas situações sobre figuras congruentes e congruência de triângulos e em seguida os casos de congruência, que por sua vez, também são apresentados inicialmente por meio de situações e logo resolvidas, além de uma seção “Bate-papo” para discussão entre os colegas, depois proporciona que o estudante entenda o conteúdo em questão.

O livro didático ainda propõe, no recorte abaixo, uma atividade em equipe (seção "Explorar e descobrir"), sendo esta última a construção de triângulos usando régua, transferidor e compasso individualmente, em seguida é feita a comparação das construções individuais com as construções dos outros colegas de classe. Vale destacar que é necessário a mediação do professor para conduzir as observações feitas pelos alunos de forma a favorecer a construção do conhecimento por parte dos estudantes. Podemos observar melhor no recorte a seguir:

Figura 2: Livro didático "Projeto Teláris" (8º ano) – página 96


Explorar e descobrir

Atividade em equipe

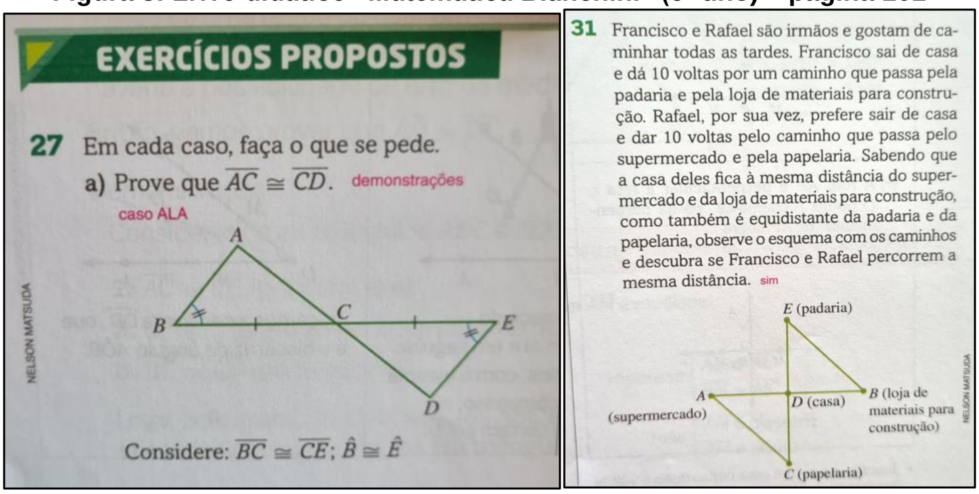
a) Usem régua, transferidor e compasso para construir um triângulo no qual um dos ângulos meça 60° e esse ângulo seja formado por lados de 5 cm e 3 cm. Depois, comparem-no com os triângulos que seus colegas construíram e respondam: são todos congruentes? Sim.

b) Usem régua e compasso para construir um triângulo com lados de 8 cm, 5 cm e 7 cm. Comparem-no com os triângulos que seus colegas construíram e respondam: são todos congruentes? Sim.

Fonte: Dante (2016)

O livro didático de Bianchini (2015) e Dante (2016) trazem demonstrações, porém Bianchini se destaca nesse ponto por propor atividades para que o aluno também demonstre conceitos mediante situações-problema, postulados, teoremas, demonstrações geométricas, além de trazer desafios, atividades práticas com compasso, régua e transferidor. Outro pronto é que apenas esta obra remete a História da Geometria. Nas atividades, o livro didático traz questões de reflexão, como podemos observar o próximo recorte.

Figura 3: Livro didático "Matemática Bianchini" (8º ano) – página 161


EXERCÍCIOS PROPOSTOS

27 Em cada caso, faça o que se pede.

a) Prove que $\overline{AC} \cong \overline{CD}$. demonstrações

caso ALA

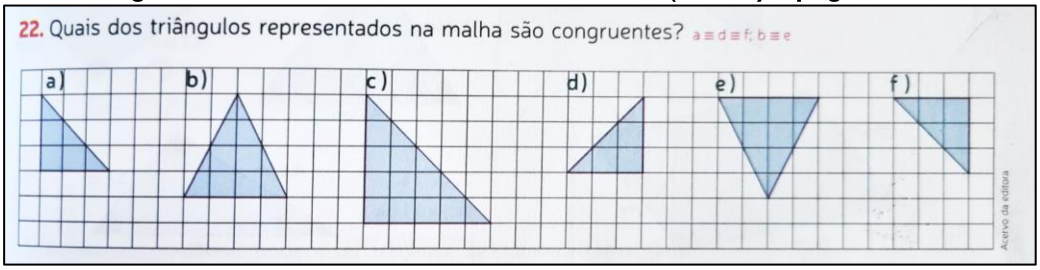
Considere: $\overline{BC} \cong \overline{CE}$; $\hat{B} \cong \hat{E}$

31 Francisco e Rafael são irmãos e gostam de caminhar todas as tardes. Francisco sai de casa e dá 10 voltas por um caminho que passa pela padaria e pela loja de materiais para construção. Rafael, por sua vez, prefere sair de casa e dar 10 voltas pelo caminho que passa pelo supermercado e pela papelaria. Sabendo que a casa deles fica à mesma distância do supermercado e da loja de materiais para construção, como também é equidistante da padaria e da papelaria, observe o esquema com os caminhos e descubra se Francisco e Rafael percorrem a mesma distância. sim

Fonte: Bianchini (2015)

Souza e Pataro (2015) trazem os conceitos Congruência de Triângulos e seus casos de forma reduzida, sem convidar o estudante a fazer outras análises. Nos exercícios de fixação, os autores se destacam por trazer uma questão com triângulos dispostos numa malha quadriculada para identificar congruência, conforme recorte a seguir.

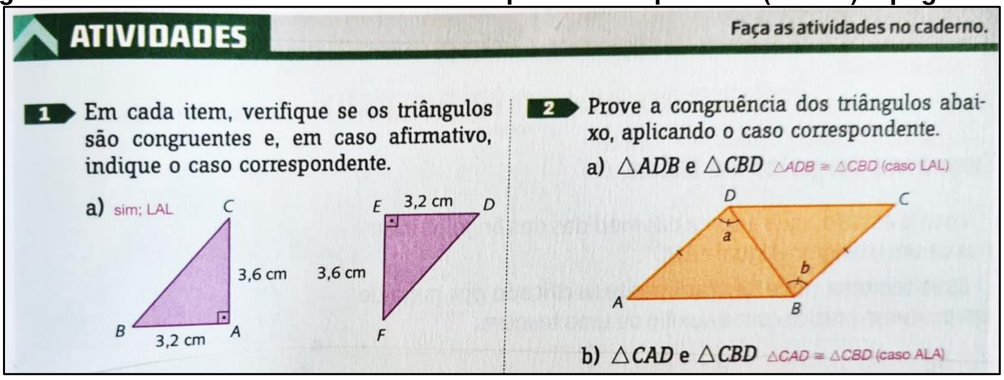
Figura 4: Livro didático "Vontade de Saber" (8º ano) – página 223



Souza e Pataro (2015)

Silveira (2015) quando propõe atividades traz apenas exercícios de fixação, assim percebemos a ausência de uma provocação didática capaz de motivar o estudante no processo de aprendizagem despertando sua curiosidade pelo assunto estudado. No recorte seguinte podemos observar como são propostos os exercícios.

Figura 5: Livro didático "Matemática: compreensão e prática" (8º ano) – página 221



Fonte: Silveira (2015)

Diante da breve reflexão sobre as abordagens de Congruência de Triângulos em quatro dos onze livros de Matemática recomendados e aprovados pelo PNLD (BRASIL, 2017), pudemos observar que apenas um desses livros parte de uma situação contextualizada e propõe uma atividade em equipe. Entretanto, segundo as orientações dos documentos oficiais, como é o caso dos PCN (1998) – documento que serviu de apoio para a construção dos livros – os conteúdos geométricos quando ensinados mediante situações reais, para contextualizar os conteúdos, e com a utilização de ferramentas matemáticas podem contribuir para a formação dos estudantes de maneira a ajudá-los a utilizar os conhecimentos geométricos para resolver problemas práticos no contexto social, como também aguçar a visualização geométrica.

Após a análise dos quatro livros didáticos aprovados pelo PNLD 2017 fizemos uma breve pesquisa em seis livros do PNLD 2020 dos onze livros aprovados e, percebemos que os autores continuam com as mesmas linhas de abordagem para Congruência de Triângulos (inclusive algumas obras repetem a mesma esquematização do PNLD anterior), em sua maioria apresentam os conceitos com definições por meio da comparação de dois triângulos, exemplos e exercícios de fixação. Assim, mesmo com as mudanças nas orientações curriculares propostas pela BNCC (2017) não observamos grandes alterações no que se refere às propostas didáticas para o estudo do polo do saber.

Contudo, apresentamos no quadro a seguir algumas observações gerais sobre as análises vistas nessa seção.

Quadro 4: Análise de alguns livros didáticos

<table>
<tr><td colspan="4">OBSERVAÇÕES GERAIS SOBRE OS LIVROS DIDÁTICOS OBSERVADOS</td></tr>
<tr><th>Orientação Curricular</th><th>Período</th><th>Livros analisadas</th><th>Considerações</th></tr>
<tr><td rowspan="4">PCN
(1998)</td><td rowspan="4">PNLD
2017</td><td>Dante (2016)</td><td rowspan="4">Com a chegada dos PCN, a geometria passou a ser vista em toda a Educação Básica, porém na maioria dos livros didáticos aparecia no final, geralmente IV Unidade. No que se refere a Congruência de Triângulos a maioria das coleções de livros didáticos continuaram com a mesma abordagem do MMM, com algumas exceções: situações de reflexão ao analisar figuras, atividades de construção em equipe com alguns instrumentos didáticos, sejam eles régua, transferidor e compasso.</td></tr>
<tr><td>Silveira (2015)</td></tr>
<tr><td>Bianchini (2015)</td></tr>
<tr><td>Souza e Pataro
(2015)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">BNCC (2017)</td><td rowspan="3"></td><td>Dante</td><td rowspan="3">Em 2017, com a BNCC impondo como os conteúdos deverão aparecer, em espiral, traz a Geometria desde a Unidade I nos livros</td></tr>
<tr><td>Silveira</td></tr>
<tr><td>Bianchini</td></tr>
</table>

	PNLD 2020	Souza e Pataro	didáticos. Por outro lado, Congruência de Triângulos continua, na maioria das obras do PNLD 2020, com as mesmas abordagens das coleções do PNLD 2017.
		Giovanni Júnior e Castrucci	
		Gay e Silva	

Fonte: Autoria própria

Com base no que analisamos nos documentos de orientação curricular e nos livros didáticos os quais tivemos acesso, elaboramos em nosso estudo, uma sequência didática baseada na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008), por entendermos que essa sequência aborda a Congruência de Triângulos a partir de um conjunto de atividades em que os estudantes estabelecem estratégias de resolução, comunicam essas estratégias entre si, levantam hipóteses, testam essas hipóteses, para então compreenderem o que é Congruência de Triângulos e entenderem como funcionam os casos de congruência de triângulos.

3.3 O Uso de Tecnologia para o Ensino da Geometria

Nos últimos anos, com o advento e a disseminação de recursos tecnológicos voltados à informática, a sociedade tem sido impactada em diversas situações, sejam elas na forma como as pessoas se comunicam, a maneira como é estabelecida a economia, a diversão, em geral o pensamento e o comportamento humano (MORAN, 2012).

Consequentemente, a tecnologia digital traz novos paradigmas educacionais, impulsionando as instituições escolares a tomar um novo posicionamento diante da formação do estudante para que ele seja capaz de resolver problemas com diversos estilos de aprendizagem.

Pensando nesse contexto, ao tratar de tecnologia no ensino e aprendizagem dos saberes em geral faz-se necessários algumas reflexões: o sistema educacional das escolas está acompanhando o rápido desenvolvimento das tecnologias, que por sua vez, encontra-se cada vez mais presente no contexto social das pessoas e do mundo? Os docentes e as instituições de ensino estão capacitados para incluir as ferramentas tecnológicas como metodologia de ensino?

As pesquisas apontam que infelizmente o uso da tecnologia em sala de aula é bastante restrito por vários motivos, dentre eles temos: carência na infraestrutura e na disposição de recursos tecnológicos na maioria das escolas brasileiras; das escolas que têm boa infraestrutura e dispõem de algumas tecnologias, poucos docentes utilizam nas suas práticas pedagógicas ao trabalharem os conteúdos geométricos, sendo de fundamental importância para a percepção visual e espacial das figuras, por isso a necessidade de adaptarmos aos avanços tecnológicos, mesmo sendo uma mudança com um alto nível de complexidade de ser alcançada (KENSKI, 2007; BITTENCOURT; BITTENCOURT, 2010).

Para as práticas pedagógicas e as situações de construção das aprendizagens dos estudantes, as tecnologias apresentam-se como bons recursos. Vale destacar que as tecnologias não atuam como atores principais do processo de ensino e aprendizagem, e sim, como instrumentos capazes de trazer condições para a construção do saber. Contudo, a tecnologia precisa ser pensada didaticamente por parte do professor através do planejamento de aula, observando quais os objetivos que se pretende alcançar com as ferramentas tecnológicas utilizadas para a construção do conhecimento por parte dos alunos (PADILHA, 2010).

Com base nesse cenário, pesquisadores defendem a postura do professor ao trabalhar com tecnologias. Para que os recursos tecnológicos sejam significativos no processo de aprendizagem, os estudantes devem ser os atores da situação, e não receptores de informações de forma passiva, já o docente destaca-se como o mediador que promove condições suficientes para que a aprendizagem aconteça (GIANCATERINO, 2009; MORAN, 2012).

Nesse contexto, ferramentas que estimulariam o estudante na participação ativa da construção do saber são os softwares de geometria dinâmica, os quais faremos uma breve análise na próxima seção. Esses recursos apresentam para o aluno, um ambiente de exploração e investigação dos conceitos matemáticos, em especial do campo geométrico, com a possibilidade de testar modos distintos de resolução, simular situações e modificar rapidamente gráficos ou figuras (MARTINS, 2008).

3.3.1 Geometria dinâmica

No ensino, o conceito de Geometria Dinâmica é empregado para designar o manuseio de programas de construções geométricas na tela do computador, os quais permitem a construção de objetos com ferramentas capazes de modificá-los, mas sem alterar suas propriedades. Dessa forma, eles são caracterizados como programas de manipulação direta, isto significa dizer que o usuário manipula a representação gráfica dos objetos presentes na tela, sem a preocupação da representação interna, o código (BONGIOVANNI, 2016).

Em consonância com o autor, Zulato (2002) relata que a Geometria Dinâmica teve referência histórica na França com o software Cabri Géomètre e nos Estados Unidos com o software Geometer´s SketchPad, ambos por volta da década de 1980. Entretanto, a Geometria Dinâmica começou a se expandir nos anos 90 popularizando comercialmente esses dois programas.

De acordo com Bongiovanni (2016), o termo “Dynamic Geometry” (Geometria Dinâmica) foi criado por Nick Jackiw e Steve Rasmussen e teve registro pela Key Curriculum Press (responsável pela comercialização do Geometer´s SketchPad). Com o passar dos anos centenas de softwares de geometria dinâmica foram introduzidos no mercado, entre os gratuitos, por exemplo, temos o GeoGebra, o CaRMetal, o Calques 3D, o Régua e Compasso e o Igeom.

Na sala de aula, os softwares de Geometria Dinâmica permitem ao professor tornar o ensino mais atrativo e por meio deles levar o aluno a construir os conceitos geométricos identificando as suas propriedades com uma melhor percepção visual, que talvez fossem difíceis de ser apresentados com qualidade usando quadro branco e lápis. Após as construções dos objetos geométricos, os elementos que os compõem poderão ser arrastados, dessa forma os estudantes conseguirão analisar o comportamento das suas manipulações, nos softwares, fazendo conjecturas aos conhecimentos matemáticos (BORBA; SILVA; GADANIDIS,2014).

Ainda segundo os autores (IBIDEM, 2014), a geometria quando trabalhada apenas por meio da aula expositiva com livro, régua, compasso, lápis e caderno, conhecida como Geometria Estática, não traz significado ao distinguir desenho e construção, diferentemente da Geometria Dinâmica que com o recurso arrastar presente nos softwares ganha sentido para a aprendizagem dos discentes.

Pereira (2012) acredita que utilizando os softwares de Geometria Dinâmica docentes e discentes são levados a uma investigação mais ágil nas construções geométricas, aparecendo os resultados em segundos na tela do computador, já quando propostas na lousa ou no papel tomariam um tempo maior.

Os softwares são enfatizados em inúmeras propostas curriculares, afinal eles dinamizam os conteúdos e potencializam o processo pedagógico. Dentre as orientações curriculares encontramos na BNCC (2017, p.298) que os softwares de geometria dinâmica, encarados como recursos didáticos, podem “despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática”. Todavia, esses recursos precisam estar integrados a situações didáticas propícias à reflexão, contribuindo para a sistematização, como também para a formalização dos conceitos geométricos.

Pensando por este lado, diversos autores ao fundamentarem a Geometria atrelam ao uso de softwares como tecnologias educacionais capazes de contribuir para uma melhor visualização e compreensão de conceitos geométricos.

Por conseguinte, as pesquisas apontam para a importância de trabalhar os saberes geométricos com softwares de Geometria Dinâmica por produzirem situações de análises reflexivas durante as construções dos conceitos matemáticos. Diversos estudiosos destacam o software GeoGebra devido às suas contribuições no alcance aos objetivos didáticos da Geometria. Assim, em especial, esse software foi empregado em nosso trabalho com a proposição da sequência didática, por isso focalizamos algumas informações e aplicações básicas do GeoGebra no ensino da Geometria.

3.3.2 GeoGebra e Cabri-Géomètre: algumas sucintas comparações

Dentre os softwares de Geometria Dinâmica decidimos fazer uma breve comparação entre o GeoGebra por se destacar nas pesquisas como um software acessível e capaz de contribuir para o ensino e aprendizagem da Matemática, como veremos com mais ênfase no Capítulo 3; e no caso do Cabri-Géomètre, por ter sido um dos pioneiros na contribuição de pesquisas matemáticas. Para tanto, expomos alguns pontos comuns e outros divergentes entre os dois softwares.

No tocante às aproximações, segundo Lopes (2011), o recurso *arrastar* é o principal aspecto em comum aos dois programas, além disso ambos possuem área de trabalho, espaço esse destinado às representações das figuras geométricas com diversos recursos nesse ambiente. Com o uso do *mouse*, o estudante tem a possibilidade de exercer as interações necessárias com as suas construções.

Dentre as divergências, temos que o GeoGebra é um software livre, se destacando por ser bem mais acessível, enquanto o Cabri-Géomètre é licenciado. Como também, com o GeoGebra é possível que o estudante ao construir figuras geométricas consiga estabelecer relações entre a Geometria e a Álgebra. Já no Cabri-Géomètre sua centralização é nas construções geométricas, disponibilizando apenas a visualização das figuras, porém, em alguns casos, é possível gerar gráficos de certas funções, coordenadas de pontos e equações (PEREIRA JÚNIOR; SOUTO PEREIRA, 2009).

Na próxima seção trazemos uma breve análise referente algumas pesquisas que versam sobre a Geometria Dinâmica do GeoGebra frente ao estudo de Triângulos.

3.4 Pesquisas sobre a Geometria Dinâmica do GeoGebra e o estudo dos Triângulos

Existem diversas pesquisas realizadas com softwares de Geometria Dinâmica, em especial o GeoGebra, na educação básica e no ensino superior versando sobre os processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

Sendo assim, apresentaremos e discutiremos brevemente seis pesquisas que integram o estudo dos triângulos com a Geometria Dinâmica, destacando o GeoGebra, em comum com a nossa proposta de pesquisa com intuito de observarmos os resultados do trabalho com este software, bem como algumas percepções de estudantes e professores acerca do tema.

A primeira pesquisa, tendo como autoria Brizola (2015), intitulada "Classificação dos Triângulos quanto aos lados e ângulos, Apresentação do Teorema de Pitágoras", apresenta a análise de uma sequência didática, desenvolvida com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, com ênfase no estudo da classificação de triângulos e do Teorema de Pitágoras. De acordo com o autor da obra, o objetivo geral foi "diferenciar o triângulo retângulo dos demais triângulos e compreender a relação feita por Pitágoras a partir da área construídas sobre seus lados" (BRIZOLA, 2015, p. 6).

Constatamos que embora o foco desse trabalho esteja voltado à aplicação dos conteúdos mencionados anteriormente, no decorrer do texto o autor apresenta algumas considerações sobre a experiência de utilizar o GeoGebra. Inclusive, mostra a diferença entre construções de triângulos e suas propriedades usando o GeoGebra e outros softwares, como também essas construções à mão livre no caderno. Para tanto, Brizola (2015, p.3) afirma que ao se tratar do ambiente de Geometria Dinâmica "[...] não basta colocar um "quadradinho" em um dos ângulos internos de um triângulo para torná-lo triângulo retângulo, como normalmente acontece quando usamos papel e lápis".

Observamos ainda que, nessa pesquisa, a sequência didática se iniciou com a proposição de atividades nos cadernos dos estudantes, em que eles escreveram as definições da parte teórica quanto ao estudo dos triângulos em relação à suas características e propriedades. Segundo Brizola (2015), por meio da utilização do caderno para representar os tipos de triângulos, houveram muitas irregularidades nos desenhos, consequentemente afetou as análises dos alunos sobre os diferentes tipos de triângulos. O mesmo procedeu com outras análises feitas à mão. Contudo, o autor sentiu a necessidade de usar softwares de Geometria Dinâmica por acreditar que facilitaria tanto a visualização quanto a manipulação dos assuntos geométricos estudados.

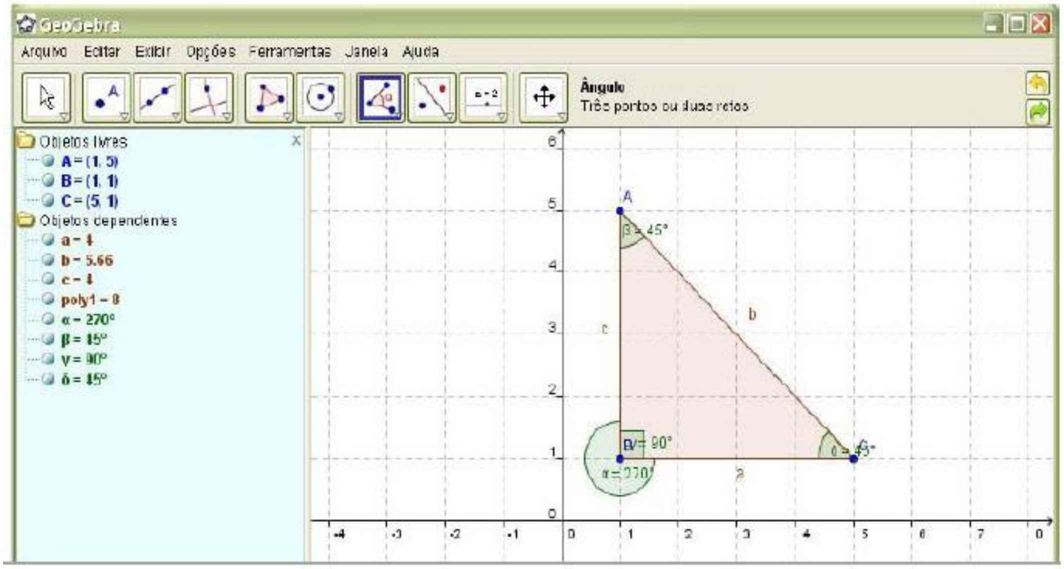
Em outro momento da sequência, o autor utilizou o software GeoGebra e percebeu um maior interesse dos estudantes nas atividades, com participação ativa na medida em que surgia uma nova proposta, os alunos perguntavam e para comparar e modificar resultados, eles apresentaram mais facilidade usando o software, bem como não apresentaram dificuldades sobre a utilização das ferramentas do GeoGebra. Todavia, mesmo com o software, Brizola (2015) percebeu uma grande defasagem na linguagem matemática dos alunos frente às suas descrições e, talvez devido à falta de atenção dos sujeitos, as definições demonstradas em sala de aula antes das atividades no GeoGebra não foram assimiladas como se esperava.

Com base nesse cenário, o autor verificou que a proposta da sequência teve êxito, visto que o objetivo foi alcançado e a utilização do GeoGebra contribuiu significativamente com o estudo do saber. Entretanto, foi constatado que seria mais satisfatório ter trabalhado primeiramente com o software e mediante as construções feitas nele discutir as constatações dos estudantes para depois apresentar as classificações dos triângulos e definir o Teorema de Pitágoras. Afinal, nesse formato facilitaria a compreensão dos conceitos estudados, com as observações no GeoGebra e as anotações no caderno seria possível calcular situações-problema do cotidiano (BRIZOLA, 2015, p.24).

A segunda pesquisa, de autoria Nascimento (2012), intitulada "“Avaliação do uso do Software GeoGebra no Ensino de Geometria: Reflexão da Prática na Escola”, voltada aos estudantes e professores de Matemática, trouxe uma proposta para o uso do GeoGebra no estudo de conceitos geométricos como uma nova perspectiva de ensino e aprendizagem da Matemática. O objetivo dessa pesquisa foi pautado em “como fazer para que o professor possa receber uma preparação para colocar em prática as habilidades que os recursos tecnológicos precisam? Como fazer uso dos recursos tecnológicos no ensino da matemática, mais precisamente o uso do GeoGebra?” (NASCIMENTO, 2012, p.127).

A atividade proposta nesse trabalho, de acordo com o autor, utiliza o GeoGebra para demonstrar o “dinamismo” da Geometria Dinâmica. Na demonstração foi escolhido a construção de um triângulo retângulo para ser feita em sala de aula. Observemos na figura 6.

Figura 6: Construção de um Triângulo Retângulo no GeoGebra



Fonte: Nascimento (2012, p. 129)

Nascimento (2012) enfatiza que “uma vez efetuada a construção podemos mover os pontos A ou B ou C pela área de desenho e o programa que implementa a GDI, automaticamente, redesenhará todos os objetos preservando suas propriedades” (NASCIMENTO, 2012, p.129). Em seu trabalho, o autor não explicita as propriedades do triângulo construído, porém reproduzindo a construção no GeoGebra 6.0, a partir dos procedimentos estabelecidos nessa pesquisa, constatamos que o triângulo ABC não foi construído mediante suas propriedades em relação à classificação de um triângulo retângulo ter um ângulo reto, pois ao movimentar os seus vértices ele se deforma, não mantendo o ângulo de 90°.

Por outro lado, ao final do trabalho, o autor enfatiza que os sujeitos participantes da sua pesquisa relataram “[...] a grande facilidade do programa, de sua usabilidade e eficiência, alguns acharam mais fácil de entender pelo software do que na sala de aula, pois não necessitaria de cálculos” (NASCIMENTO, 2012, p. 131). Ainda conforme o referido autor, os alunos perceberam que nas construções com poucos cliques no *mouse* o software apresenta uma resposta rápida e correta.

A terceira pesquisa, intitulada “O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA EM UMA ESCOLA PÚBLICA: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio”, Pereira (2012) utilizou em sua

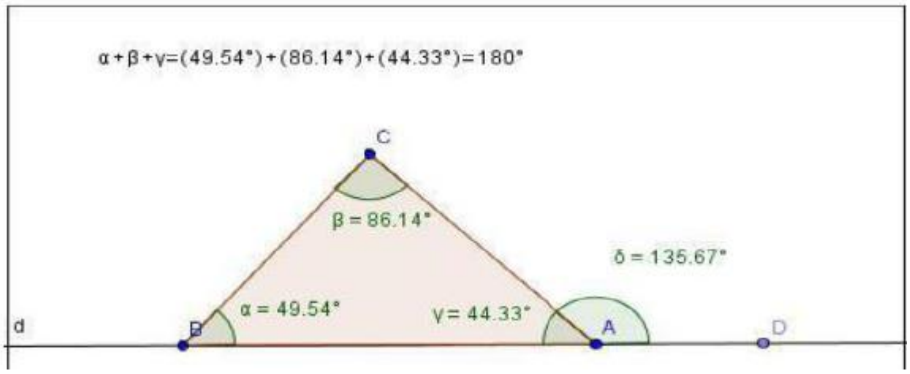
Dissertação de Mestrado, o GeoGebra no Ensino Fundamental e Médio de uma escola da rede pública, com intuito de analisar como se dava a interação entre aluno e professor postos em um ambiente favorável à Geometria como o software GeoGebra.

Nesse trabalho, o autor apresentou algumas atividades sobre triângulos, dentre elas foi abordado a construção e observação dos ângulos internos e externos de um triângulo qualquer. A atividade teve como objetivo:

> [...] ilustrar a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer no arrastar de um de seus vértices. A procura por uma reflexão em torno de um ângulo externo ao triângulo e a soma de dois ângulos internos não adjacentes a ele foi evidenciada junto aos questionamentos preparados para atividade (PEREIRA, 2012, p. 59).

Vejamos na figura 7 o resultado final da construção do triângulo qualquer feita pelos estudantes:

Figura 7: Atividade sobre observação dos ângulos de um triângulo



Fonte: Pereira (2012, p. 59)

Segundo Pereira (2012), a partir dessa construção e da ferramenta *arrastar* do software, a atividade permitiu que os estudantes pudessem mover os vértices do triângulo para a verificação das características e propriedades dos triângulos isósceles, equiláteros e escalenos; conforme os discentes moviam os vértices A, B e C os valores dos ângulos mudavam, porém a soma dos ângulos internos sempre permanecia sendo 180°, como também a medida do ângulo externo sempre era igual à soma dos ângulos internos, nesse exemplo denominados α e β, pois o ângulo interno γ com o seu ângulo externo é igual a 180º e a soma dos internos de α, β e γ também é 180º.

Ainda de acordo com o autor, mesmo a sequência didática tendo sido realizada com a cooperação e colaboração entre estudantes e professores num ambiente de geometria dinâmica ao abordar os conteúdos no software, alguns problemas permearam a atividade no que tange à nomeação dos ângulos internos do triângulo ABC, dificultando assim a utilização da ferramenta *Inserir Texto*. “Casos em que, os alunos inseriram o ângulo externo na soma dos 3 ângulos internos, fez-se necessário uma pausa durante a atividade para exemplificar como modificar o nome dado a alguns objetos” (PEREIRA, 2012, p. 59).

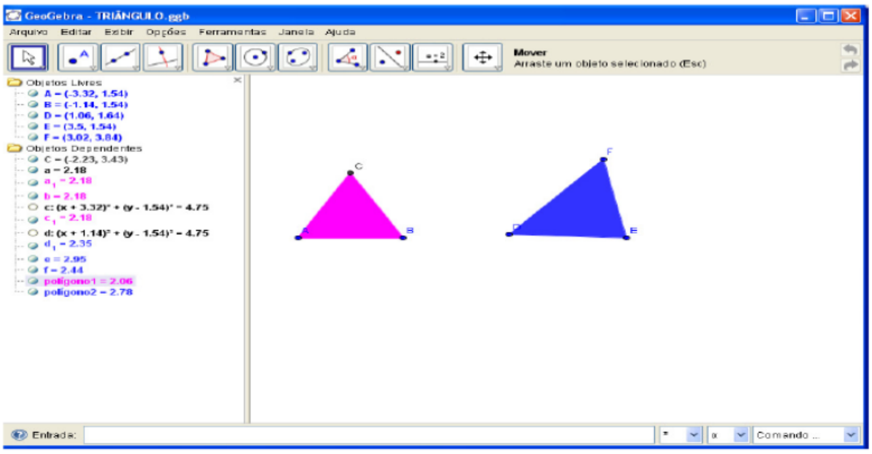
No que se refere a interação dos sujeitos participantes da pesquisa nas construções realizadas no GeoGebra, o autor acredita que “a interatividade e experimentação vivenciada através do software e discussões nos grupos e subgrupos compuseram um ambiente de aprendizagem rico” (PEREIRA, 2012, p. 38).

Conforme Pereira (2012), as atividades realizadas na investigação propuseram nitidamente a possibilidade de uma postura cooperativa e colaborativa e com o recurso *arrastar* do GeoGebra foi possível vivenciar a experimentação e verificação de novos conceitos geométricos por meio da interação dos alunos com recursos de geometria dinâmica num ambiente colaborativo.

A quarta pesquisa, de autoria Medeiros (2011), intitulada “Estudo dos Triângulos: uma proposta para o ensino de geometria com auxílio de mídias digitais”, apresenta um trabalho realizado com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e da EJA em que investigou as possíveis contribuições do software GeoGebra para a construções dos conceitos sobre o estudo de triângulos.

A autora trabalhou com várias atividades sobre o estudo de triângulos, como exemplo destacamos a atividade sobre a movimentação de figuras, a qual tinha como propósito fazer com que os estudantes visualizassem uma construção arquivada já feita no GeoGebra, conforme figura 8, e utilizando o ícone *mover* (1º botão do software) movimentassem dois triângulos dados para a observação de suas características, se eles as mantinham ou deformavam.

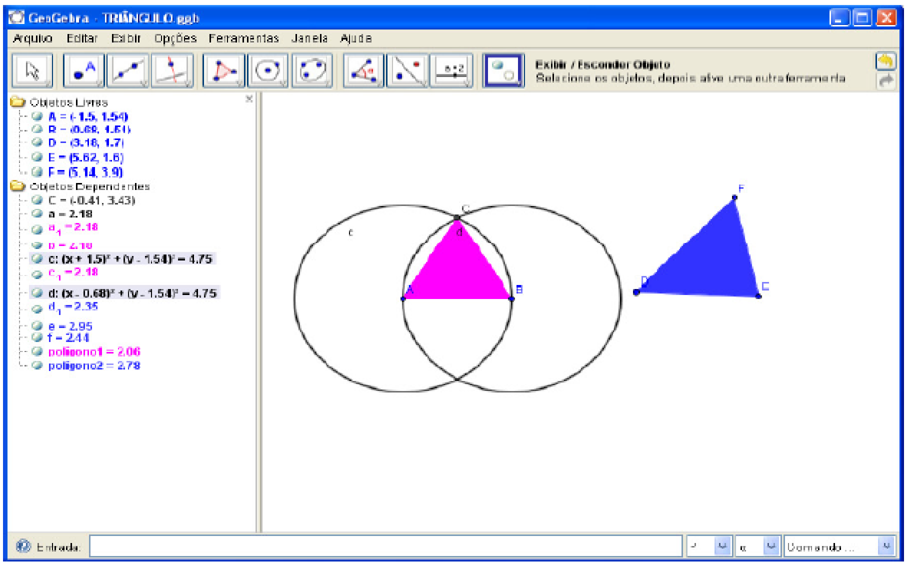
Figura 8: Atividade de “mover figuras”



Fonte: Medeiros (2011, p. 20)

Mediante as análises de Medeiros (2011), com essa atividade apresentada na figura 03, os estudantes perceberam que o triângulo ABC mantinha as suas características e propriedades, já o triângulo DEF deformava. Com base nessas observações, a autora solicitou aos alunos que usassem a função *esconder objeto* para repetir a construção passo a passo, a fim de ativar na janela da álgebra os objetos escondidos, observando assim os procedimentos das construções. Vejamos na figura 9 o que os dados encontrados pelos alunos.

Figura 9: Mostrando objetos escondidos na Janela da Álgebra do GeoGebra



Fonte: Medeiros (2011, p. 20)

Com essa atividade, os estudantes conseguiram visualizar a diferença entre a construção de um triângulo feito com as propriedades que o define, pois de acordo com a autora, os resultados mostram que as relações geométricas se mantiveram nesse caso; diferentemente do triângulo DEF que foi construído como se fosse à mão, sem se preocupar com as relações métricas desse polígono. Dessa forma, dentre as considerações observadas, Medeiros (2011, p. 21) afirma:

> Os lados do triângulo ABC aumentam ou diminuem, mas continuam tendo medidas iguais entre si, ou seja, o triângulo continua sendo equilátero, enquanto que o movimento do outro triângulo assume qualquer característica (escaleno, isósceles ou equilátero), já que seus lados são variáveis livres.

Nas apresentações dos resultados, Medeiros (2011) cogita a possibilidade de que os alunos poderiam ter feito as construções para que depois com a manipulação chegassem às conclusões dos conceitos geométricos observados, porém com a atividade solicitada foi possível visualizar as características e propriedades dos triângulos devido o diferencial de utilizar um software de Geometria Dinâmica, o qual tem a possibilidade de arrastar os objetos construídos, o que não seria possível com a utilização de apenas papel, lápis e régua; assim o objetivo da sequência foi alcançado.

Para a autora, o GeoGebra permitiu aos estudantes a possibilidade de explorar situações problemas e fazer conjecturas sobre o conteúdo que estava sendo estudado. Assim, os estudantes puderam "passar de um nível visual de entendimento geométrico para níveis de descrição/análise ou até mesmo abstração" (MEDEIROS, 2011, p. 21).

Além disso, Medeiros (2011) trouxe em sua pesquisa algumas reflexões, tais como: os estudantes demonstraram não ter afinidade com a escrita matemática no momento de descrição de suas análises; atividades propostas com a utilização de softwares necessitam de uma mediação mais individualizada por parte dos professores no momento em que for perceptível a não familiaridade dos alunos com softwares de geometria dinâmica em seu cotidiano; a utilização de tecnologias digitais é uma proposta eficaz para o ensino e aprendizagem da Geometria, principalmente quando os discentes têm conhecimentos que são pré-requisitos sobre os assuntos estudados; atividades no GeoGebra propõem aos alunos passar por momentos de observação e interpretação dos dados exigindo tempo e paciência e, muitas vezes, eles não estão acostumados com essa didática.

A quinta pesquisa analisada, intitulada "O trabalho com geometria dinâmica em uma perspectiva investigativa", Silva e Penteado (2009) tiverem como objetivo analisar "as potencialidades do uso de um software de Geometria Dinâmica

(GeoGebra) como uma das possíveis ferramentas para o ensino e aprendizagem de Geometria" (SILVA; PENTEADO, 2009, p. 1066) e, diferentemente das pesquisas anteriores, essa é destinada especificamente aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática, ou seja, futuros professores de Matemática.

Para o estudo, os autores tiveram a intenção de verificar como um grupo de licenciandos em Matemática se adaptavam ao GeoGebra e quais as possibilidades do software para as suas práticas docentes. Assim, os sujeitos participantes desenvolveram atividades usando as ferramentas do GeoGebra e de posse de suas funcionalidades foram estudando as possibilidades de aplicação nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental e Médio (SILVA; PENTEADO, 2009, p. 1076).

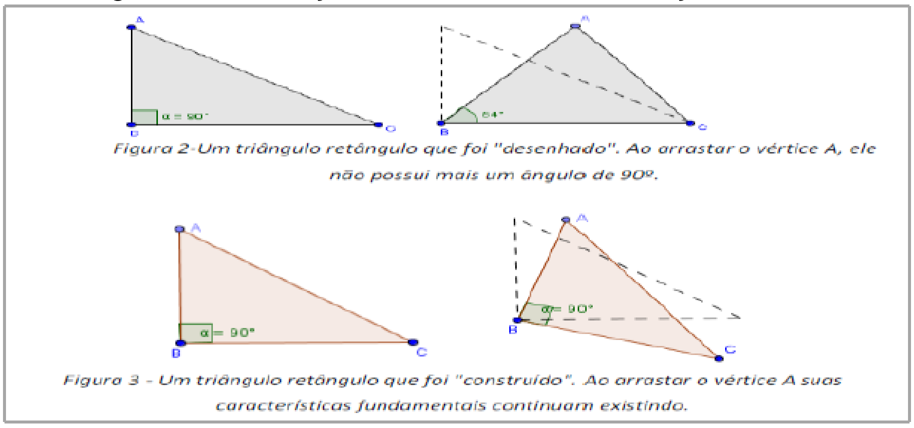
Silva e Penteado (2009, p. 1701) apresentaram em sua revisão bibliográfica que ao se referir aos estudantes de uma maneira geral é importante destacar que quando eles usam pela primeira vez um ambiente de Geometria Dinâmica, "a visão que geralmente possuem sobre desenhar e construir um objeto geométrico acabam se misturando. Em um primeiro momento, eles acabam utilizando o software apenas como uma ferramenta de desenho". Por outro lado, com o recurso de arrastar a figura, verificam que desenhar à mão livre é diferente de construir, isso porque no segundo caso as propriedades são respeitadas durante a construção.

No que tange ao estudo dos triângulos com softwares de Geometria Dinâmica, os autores destacam a construção de um triângulo retângulo:

> Um estudante em um ambiente GD que quer construir um triângulo retângulo poderia usar um ponto de referência da tela do software para criar um segmento perpendicular à base do triângulo, dessa forma ele teria "desenhado" esse triângulo. Porém, quando um dos vértices é arrastado, seu triângulo não possui mais um ângulo reto, descaracterizando assim sua construção. (SILVA, PENTEADO, 2009, p. 1701).

Na figura 10 podemos observar a exemplificação da citação anterior:

Figura 10: Diferença entre desenhos e construções



Fonte: Silva e Penteado (2009, p. 1702)

Ainda analisando a figura 04, Silva e Penteado (2009, p. 1701) enfatizam que ao construir um triângulo retângulo no GeoGebra, as propriedades fundamentais que definem o triângulo, como possuir um ângulo reto, continuam sendo evidenciadas "mesmo quando o vértice A é arrastado pela tela". Dessa maneira, se a proposta ao utilizar o software seja apenas expor as figuras prontas aos estudantes, eles terão uma visão de apenas um ambiente para desenho.

Nos resultados da pesquisa, Silva e Penteado (2009) apresentam que os alunos do curso de Licenciatura em Matemática produziram várias atividades no software GeoGebra e posteriormente, após análises, aplicaram em turmas do Ensino Médio, finalizando com uma revisão das atividades e discussão de possíveis erros das ações nas intervenções didáticas. Entretanto, constatamos que esse o material analisado não traz uma pesquisa finalizada, consequentemente não encontramos conclusões versando sobre como o grupo pesquisado se apropriou do GeoGebra destacando as possibilidades de uso em sala de aula.

Mesmo assim, os autores garantem que "os ambientes de geometria dinâmica podem favorecer o ensino e a aprendizagem de geometria por caminhos novos e dinâmicos, além de complementar e enriquecer com novas estratégias a sala de aula" (SILVA; PENTEADO, 2009, p. 1073). Como também, eles citam algumas limitações que podem ser encontradas em sala de aula quando são utilizados softwares, sejam elas: verificar se o espaço físico é apropriado, se existem equipamentos suficientes para a proposta e, se o sistema operacional que se pretende usar é compatível com o software escolhido para determinada sequência didática.

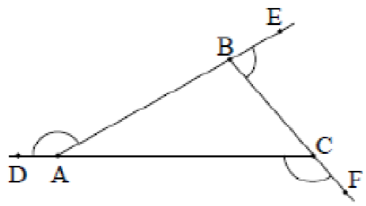
E, por fim, na sexta pesquisa analisada, de autoria Ponte, Oliveira e Candeias (2009), os autores trazem um material de consulta ao professor com atividades para o 7º ano do Ensino Fundamental voltadas aos estudos de triângulos e quadriláteros. Nesse trabalho também são apresentados indicações e orientações para o docente de como desenvolver com êxito as tarefas propostas pensando na estrutura dos procedimentos e prováveis conjecturas dos estudantes acerca de determinado assunto.

Segundo Ponte et al. (2009, p. 5), com as tarefas propostas por eles, os estudantes apresentariam a possibilidade de “formular estratégias próprias, ao mesmo tempo que mobilizam conhecimentos e capacidades anteriormente desenvolvidas”. Por conseguinte, o trabalho nestas atividades consistiria no “ponto de partida para o desenvolvimento e formalização de novos conceitos e representações, o que deve ser feito, tanto quanto possível, com o contributo dos alunos”.

As sugestões de tarefas propostas pelos autores são inicialmente apresentadas para ambientes de Geometria Dinâmica, depois são recomendadas várias atividades sobre o Estudo dos Triângulos que podem ser executadas em softwares de Geometria Dinâmica, entre elas, são consideradas construções de triângulos e posteriormente indagações que levem os estudantes às reflexões sobre as construções e manipulações com intuito validar hipóteses chegando às conclusões sobre o assunto estudado. Além disso, o material traz orientações para o professor sobre cada atividade sugerida. Como exemplo, a figura 11 relata uma tarefa que explora propriedades e medidas de ângulos esternos de um triângulo construído.

Figura 11: Atividade proposta para o estudo de ângulos externos de um triângulo

1. Constrói um triângulo ABC. Prolonga os seus lados, como mostra a figura, e acrescenta os pontos D, E e F.



1.1. Mede as amplitudes dos ângulos DAB, EBC e ACF e adiciona as medidas obtidas. O que concluis?

1.2. Arrasta um dos vértices do triângulo e escreve uma conjectura sobre o valor da soma dos ângulos externos de um triângulo. Formula uma conjectura sobre o valor da soma das amplitudes dos ângulos externos num triângulo qualquer.

2. Considera novamente o triângulo ABC da figura anterior.

2.1. Qual é o valor da soma $\angle DAB + \angle BAC + \angle EBC + \angle ABC + \angle ACF + \angle BCA$?

2.2. Tendo em atenção que o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, qual é o valor da soma dos ângulos externos no triângulo ABC?

2.3. A conclusão que tiraste na alínea anterior permaneceria válida se tivéssemos considerado outro triângulo? Porquê?

Fonte: Ponte et al. (2009, p. 32)

A cada conteúdo abordado nessa obra, Ponte et al. (2009) trazem diversas sugestões que servem de base para a elaboração de novas atividades partindo das tarefas propostas pelos autores. Como também, para a realização de cada atividade as indicações de como o professor deve seguir para obter resultados positivos trazem segurança na elaboração e execução das atividades.

No entanto, observamos que todo o material foi elaborado e proposto para ambientes de Geometria Dinâmica em geral, assim os autores não trazem detalhes de como os objetos poderiam ser construídos em um determinado software.

Fazendo uma análise geral das seis pesquisas apresentadas anteriormente, verificamos que a maioria dos autores buscam apresentar ou até mesmo esclarecer que os softwares de Geometria Dinâmica não devem ser usados em sala de aula apenas como um recurso para desenhar, pelo contrário, eles se preocupam em expor as potencialidades e funcionalidades dessas ferramentas diferenciando construir figuras e desenhar a mão livre.

No estudo sobre Triângulos, por exemplo, os autores demonstram que nas pesquisas os estudantes conseguem assimilar melhor suas características e propriedades quando são propostas atividades em softwares de Geometria Dinâmica, visto que quando construídos a mão livre, os alunos podem apresentar dificuldades em assimilar e estabelecer conjecturas para descrever as características dos Triângulos.

Além disso, percebemos nas pesquisas que o “dinamismo” se encaixa como uma das principais características sobre Geometria Dinâmica. Através do dinamismo encontrado em alguns softwares, como no GeoGebra, é possível arrastar os objetos construídos possibilitando transformar figuras geométricas à medida em que analisa as manipulações, permitindo assim, a “agilidade na investigação, pois figuras que demorariam muito tempo para serem construídas no papel são criadas em segundos na tela do computador” (SILVA; PENTEADO, 2009, p. 1069).

Contudo, conseguimos perceber a importância da existência de pesquisas sobre a utilização de softwares de Geometria Dinâmica por apresentarem propostas positivas para a contribuição do ensino e aprendizagem da Matemática com novas propostas didáticas.

CAPÍTULO IV

4 O USO DO SOFTWARE DINÂMICO GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE ENSINO DA GEOMETRIA

Neste capítulo, discorremos acerca do software de Geometria Dinâmica, o GeoGebra, como um possível recurso de ensino da Geometria, o seu desenvolvimento histórico e sua interface para um conhecimento mais detalhado sobre as suas ferramentas e funções.

4.1 O recurso da Geometria Dinâmica e o software GeoGebra

Diversos autores apontam que o uso de tecnologias como recursos de ensino da Matemática (NASCIMENTO; SCHMIGUEL, 2017; DINIZ, 2016; RAMIRO, 2014; LOPES, 2013), em especial da Geometria favorecem o processo de ensino e aprendizagem nesta área de conhecimento. Assim, os estudantes podem interagir com o saber matemático mediante o uso de ambientes de aprendizagem baseados em tecnologias educativas na instituição escolar.

Dentre vários recursos tecnológicos para trabalhar conceitos geométricos se destacam os softwares de Geometria Dinâmica. Isso porque estes softwares fazem com que os discentes realizem investigações sobre “propriedades geométricas de diversas figuras que dificilmente eles poderiam observar utilizando apenas o quadro e o giz” (SILVA; SANTOS, 2013).

Com base nessa linha de análise, Silva e Santos (2013, p. 2-3) acrescentam algumas reflexões sobre o uso de softwares de Geometria Dinâmica a partir da análise das concepções de alguns autores:

> Silva e Penteado (2009) entendem por softwares de Geometria Dinâmica aqueles que permitem construir e manipular objetos geométricos na tela do computador. Além disso, o que diferencia um software de Geometria Dinâmica dos demais é a possibilidade de “arrastar” uma figura construída utilizando o mouse.

No que se refere a utilização do software de Geometria Dinâmica GeoGebra, Cardoso et al. (2013, p. 516) afirmam que “se dá, basicamente, com o uso do mouse”. Além disso, sua interface é composta por uma barra de ferramentas, uma barra de menu, a janela geométrica, a janela algébrica ou de texto, um menu de comandos e dois menus de símbolos.

Conforme Petla (2008), apesar de o GeoGebra ser intuitivo e autoexplicativo possibilitando aos iniciantes terem a capacidade de manuseá-lo, faz-se necessário que os usuários conheçam os saberes matemáticos para dar sentido as construções dos objetos.

Tratando-se de sua utilização para a aprendizagem da Matemática, Cardoso (2013), enfatiza que na Educação Básica, especificamente no Ensino Fundamental, o GeoGebra tem tido destaque na aplicação da Geometria Euclidiana e no estudo de Funções Afim e Quadráticas. Na Geometria, em especial, o ensino e aprendizagem mediante essa ferramenta vem se tornando importante para a construção do conhecimento e da inter-relação entre a álgebra e a aritmética.

Na mesma linha de raciocínio, Kotsko (2011) e Nascimento (2012), observa no software a facilidade de manipulação, a habilidade de visualização, a argumentação lógica e a aplicação dos conceitos matemáticos no mesmo ambiente em que didaticamente, o GeoGebra possibilita uma satisfação em relação à aprendizagem dos estudantes.

Além das contribuições cognitivas, o uso de um software pode motivar os alunos a procurarem possibilidades para resolver diversas situações problemas, mas é preciso que o professor esteja bem preparado, conhecendo as potencialidades do software para poder desenvolver com este recurso, atividades de ensino bem-sucedidas (SAINT, 1995 apud SILVA; SANTOS, 2013). Neste ponto é preciso que haja uma mudança no papel do professor e dos alunos ao irem para a sala de informática (ou espaço com recursos digitais: smartphones, chromebooks, tablets). O professor deve ser o mediador entre o aluno e sua aprendizagem, já o aluno deve ser ativo e participante na construção de seu conhecimento e não apenas um mero receptor de informações.

Especificamente sobre o GeoGebra, Lovis e Franco (2013) relatam que com as ferramentas desse software, as manipulações geométricas são favoráveis à construção do conhecimento, todavia o estudo em si mesmo não é suficiente, são necessárias algumas questões sobre o professor: o planejamento da aula com ênfase nos objetivos para dar significado ao estudo, o domínio do software e a mediação durante o processo.

Corroborando com os autores, Silva e Penteado (2009) destacam como uma análise importante que além de observar as possibilidades do GeoGebra, é preciso também verificar se existem limitações quando for aplicar determinada atividade nas salas de aula; a exemplo, é preciso checar se existem equipamentos suficientes para todos os estudantes, se o espaço físico é adequado, se o sistema operacional utilizado é compatível ao software, entre outros.

De acordo com as recomendações descritas na BNCC (2017), têm-se como sugestão o uso de softwares que permitam o aluno pensar, refletir e criar soluções para com o conhecimento estudado. Entretanto, vale destacar que o uso do computador precisa ter um fim educativo, por isso cabe ao professor a escolha de um software que satisfaça as necessidades de aprendizagem de determinado conteúdo.

Segundo Nascimento (2012, p.127):

> A proposta do uso de softwares de geometria dinâmica, no processo de ensino e aprendizagem em geometria pode contribuir em muitos fatores, especificamente no que tange à visualização geométrica. A habilidade de visualizar pode ser desenvolvida, à medida que se forneça ao aluno materiais de apoio didático baseados em elementos concretos representativos do objeto geométrico em estudo.

Diante do contexto, Lorenzato (2009) enfatiza que o ensino de geometria pode adquirir características mais dinâmicas com a utilização de softwares, pois ele permite diferentes possibilidades de visualização para os objetos geométricos na tela do computador, assim educadores e discentes realizarão explorações relacionando esses objetos com conceitos de geometria euclidiana.

Além disso, com a inserção de recursos tecnológicos na escola, a dinâmica de ensino da geometria abrange uma mudança na proposta pedagógica, tornando possível o surgimento de profissionais críticos e criativos, capazes de, por meio do uso de tecnologias diferenciadas, abordarem conceitos utilizando também a experimentação. Isso contribui para as mais variadas explorações de conjecturas e construções de representações geométricas, como também para reflexões sobre os assuntos matemáticos estudados na sala de aula de matemática.

Com base nessas discussões, percebemos que o trabalho com software de Geometria Dinâmica, sem dúvida, modifica o ambiente de ensino e aprendizagem potencializando a criação de conjecturas durante a aula. Para isso acontecer, a escolha do software GeoGebra se revela como importante ferramenta favorável no envolvimento da aula entre aluno, professor e saber geométrico/matemático.

Dentre vários softwares de geometria dinâmica, o GeoGebra se destaca por ser um software gratuito que pode ser utilizado em qualquer nível de ensino, desde o ensino básico até o ensino superior.

4.2 Histórico e desenvolvimento do software GeoGebra

O software GeoGebra foi criado em 2001 por Markus Hohenwarter (docente do Departamento de Matemática Aplicada da Universidade de Salzburgo, Áustria), escrito em Java e disponível em múltiplas plataformas, por isso ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS X, Chromebook e, celulares na versão Android e iOS. Na figura 12 podemos ver o slogan do software.

Figura 12: Slogan do software GeoGebra

Fonte: Hohenwarter, 2009.

O GeoGebra é um **software livre**[12], de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra, cálculos simbólicos, tabelas, gráficos, probabilidade e estatística em um único ambiente. Este software é considerado como uma ferramenta eficaz no trabalho geométrico de forma interativa, com a vantagem didática de mostrar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto interagindo-se entre si.

É importante destacar que mesmo o usuário já tendo concluído as construções no software, as suas funções podem ser alteradas dinamicamente possibilitando perceber as propriedades dos objetos (COSTA; LACERDA, 2012).

Além dos aspectos didáticos, o GeoGebra se mostra como um recurso tecnológico capaz de criar ilustrações profissionais a fim de serem usadas no Microsoft Word, no Open Office ou no LaTeX. Segundo JÚNIOR (2011) a aquisição deste software pode ser feita por inúmeros sites de download encontrados na internet, porém o que se encontra sempre atualizado e é destinado exclusivamente ao GeoGebra, o seu site oficial cujo endereço ttp://www.geogebra.org disponível em

[12]Software livre, de acordo com o sistema operacional GNU, é um "[...] software que respeita a liberdade e senso de comunidade dos usuários". Atualizações expressas em <https://www.gnu.org/philosophy/free-sw.html>.

cinquenta e cinco línguas diferentes e usado em 190 países. Para a linguagem em português, está disponível de forma gratuita no site http://geogebra.org/cms/pt_br.

De acordo com Nóbriga e Araújo (2010, p. 9):

> Apesar do GeoGebra fornecer condições que permitem a elaboração de situações que favorecem a construção de conhecimentos pelo aluno, ele, sozinho, não pode ensinar coisa alguma. Para que haja aprendizagem efetiva com este recurso, é necessário a elaboração de situações de uso. (...) é necessário que o aluno reflita durante a execução das atividades, ou seja, que ele busque experimentar de diferentes maneiras, percebendo as propriedades, conjecturando e justificando. (...) O papel do professor é de fundamental importância nesse processo. Ele precisa criar novos mecanismos para fazer com que os alunos reflitam e percebam o que de fato está por trás das construções que eles estão fazendo, além de auxiliá-los nas justificativas das construções.

Com base nos apontamentos do texto percebemos que além das contribuições cognitivas, o software GeoGebra pode motivar os alunos a analisarem diversas possibilidades para a resolução de determinadas situações problemas. Entretanto, é preciso que o docente tenha domínio das potencialidades do software e seja mediador entre o discente e o aprendizado. Já o discente deve ser ativo e participante na construção do conhecimento, não sendo um mero receptor de informações.

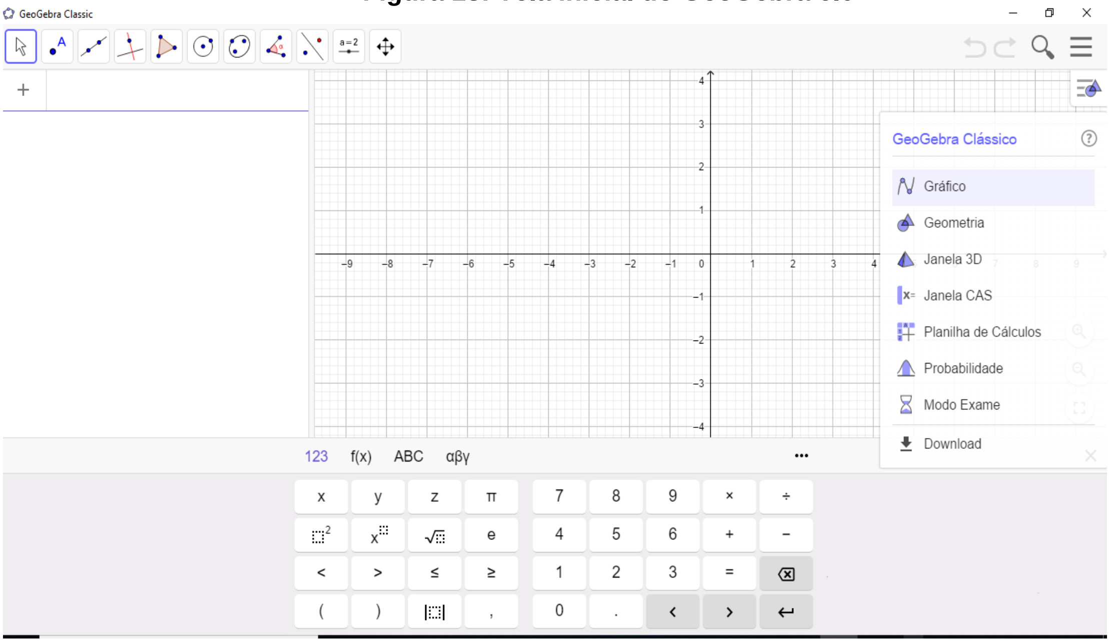
É importante salientar que o software educativo GeoGebra não tem a pretensão de substituir os livros didáticos, pelo contrário, ele é um recurso didático atrativo e favorável à aprendizagem, assim, o potencial do software GeoGebra é de ser coadjuvante nas estratégias de ensino dos saberes matemáticos estudados. Contudo, faz-se necessário a utilização deste software dinâmico seguido de fundamentação teórica contida em livros didáticos.

A seguir apresentamos algumas imagens representando a interface do GeoGebra 6.0 para uma melhor análise visual do aplicativo.

4.3 Interface do GeoGebra

A barra de ferramentas do software dinâmico GeoGebra 6.0 está dividida em 11 janelas, como podemos ver na figura 13 (layout na versão baixada do site http://www.geogebra.org), as quais são muito úteis na construção geométrica. Vale ressaltar que na versão On-line também tem a mesma aparência e funcionalidades.

Figura 13: Tela inicial do GeoGebra 6.0



Fonte: http://www.geogebra.org

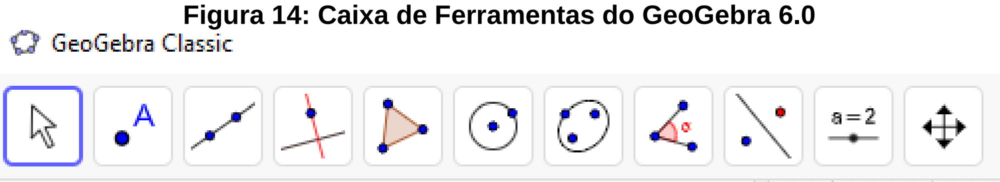
Na figura 13 temos a Barra de Ferramentas, a Barra de Menu, à esquerda a Janela de Álgebra com o Campo de Entrada (espaço destinado a inserção de comandos escritos do programa), à direita a Janela de Visualização geométrica (janela de gráficos) e abaixo a calculadora.

De acordo com Nóbriga e Araújo (2010, p.1):

> Um dos diferenciais deste programa em relação aos outros softwares de Geometria Dinâmica é o fato de se poder acessar funções, tanto via botões na Barra de Ferramenta, quanto pelo Campo de Entrada. Além disso, pode-se alterar as propriedades dos objetos construídos via janela de Álgebra e também através de algumas ferramentas do Botão Direito do Mouse.

Para visualização da estrutura deste software apresentamos a Barra de Ferramentas e suas opções da configuração padrão contidas em cada botão (da figura 14 até a figura 25).

Figura 14: Caixa de Ferramentas do GeoGebra 6.0



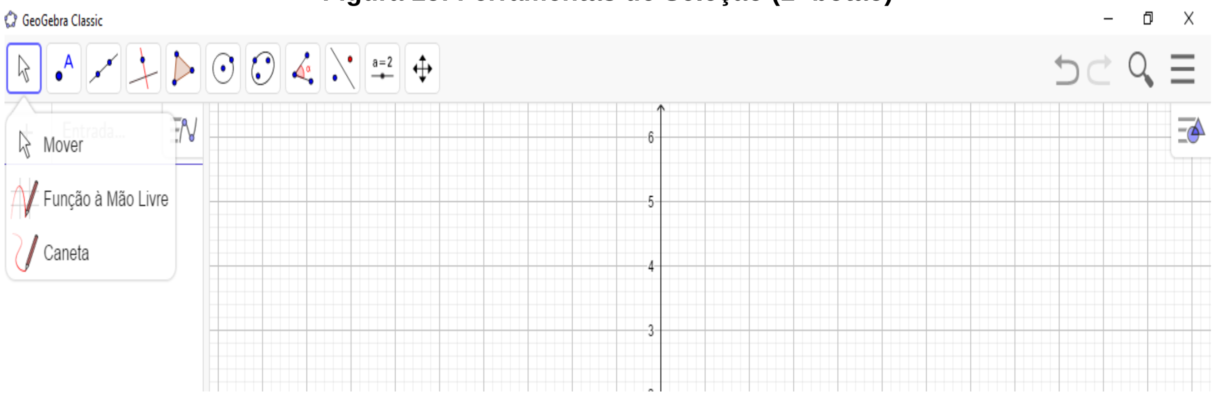
Fonte: http://www.geogebra.org

Na figura 5 podemos observar a visualização da caixa de ferramentas do GeoGebra 6.0 após realizado a instalação dessa versão do software, porém é possível personalizar de acordo com a necessidade de cada usuário, com intuito de tornar mais acessível dependendo do trabalho a ser realizado.

- Ferramentas de Seleção

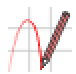
Por meio deste ícone é possível ter acesso à quatro ferramentas: “Mover ou Selecionar Objetos”, “Função à Mão Livre” e “Caneta”, em que para ter acesso é necessário clicar na seta no canto inferior direito de cada um como ocorre na figura 15.

Figura 15: Ferramentas de Seleção (1º botão)



Fonte: http://www.geogebra.org

 Mover: Com esta ferramenta é possível arrastar um ou mais objetos.

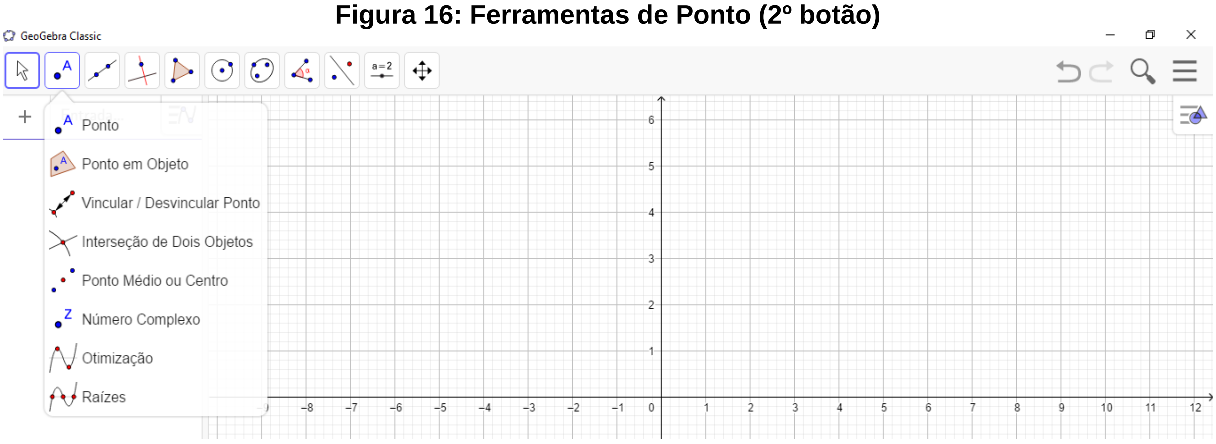
 Função a mão livre: Permite desenhar uma função ou um objeto geométrico arrastando-se o mouse.

 Caneta: Permite escrever na janela de visualização podendo mudar a cor usando a Barra de Estilo.

- Ferramentas de Ponto

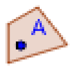
Com este ícone é possível o acesso a oito ferramentas: “Ponto”, “Ponto em Objeto”, “Vincular / Desvincular Objeto”, “Intersecção de Dois Objetos”, “Ponto Médio ou Centro”, “Número Complexo”, “Otimização” e “Raízes” e para acessá-los é preciso clicar na seta no canto inferior direito de cada um como mostra a figura 16.

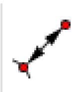
Figura 16: Ferramentas de Ponto (2º botão)

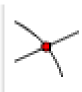


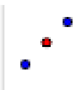
Fonte: http://www.geogebra.org


Ponto: Permite inserir pontos mediante um clique na janela de visualização ou sobre um objeto construído.

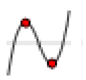

Ponto em Objeto: Permite inserir pontos com um clique no interior de um objeto ou em sua fronteira.

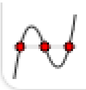

Vincular / Desvincular Objeto: Permite vincular e desvincular itens ao clicar em um objeto e em um ponto.


Intersecção de Dois Objetos: Selecione dois objetos ou clique diretamente na intersecção.


Ponto médio ou centro: Selecione dois pontos, um segmento, um círculo ou uma cônica.


Número complexo: Clique na janela de visualização para criar um número complexo.

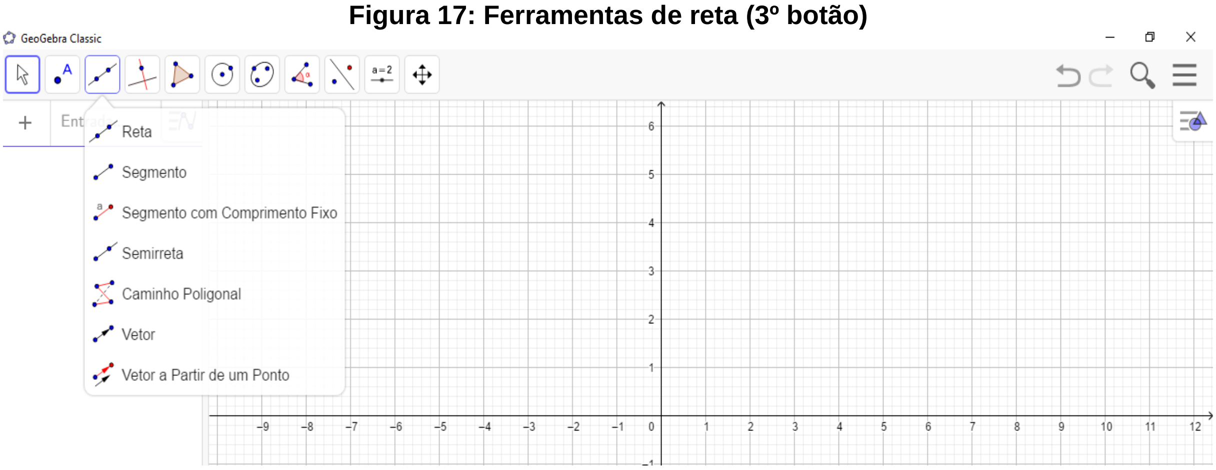

Otimização: Permite inserir/selecionar uma função.

 Raízes: Permite encontrar as raízes de uma função selecionada.

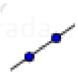
- Ferramentas de reta

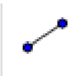
Através deste ícone temos acesso a sete ferramentas: “Reta”, “Segmento”, “Seguimento com comprimento fixo”, “Semirreta”, “Caminho poligonal”, “Vetor” e “Vetor a partir de um ponto" onde para poder acessá-los é necessário clicar na seta no canto inferior direito de cada um conforme aparece na figura 17.

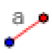
Figura 17: Ferramentas de reta (3º botão)

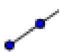


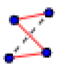
Fonte: http://www.geogebra.org

 Reta: Permite selecionar dois pontos para definir uma reta.

 Segmento: Permite selecionar dois pontos para ser a extremidade de um seguimento.

 Seguimento com comprimento fixo: Selecione primeiro um ponto e, depois, digite o comprimento do segmento, onde esse segmento ficará paralelo ao eixo x.

 Semirreta: Selecione primeiro a origem e, depois, outro ponto ao qual a semirreta passará.

 Caminho poligonal: Selecione todos os vértices e então, clique novamente no vértice inicial.

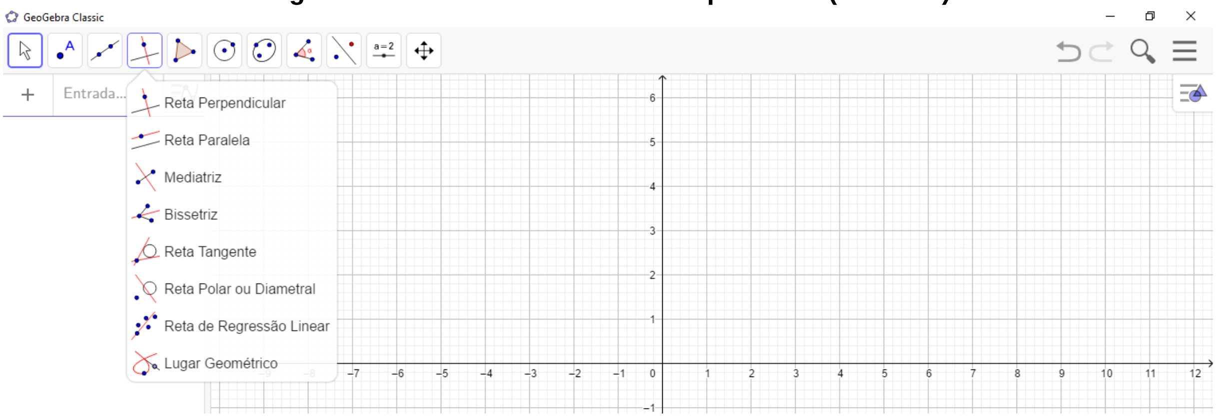
Vetor: Selecione primeiro a origem e, depois, a outra extremidade.

Vetor a partir de um ponto: Selecione primeiro o ponto de origem e, depois, um vetor.

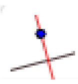
- Ferramentas de retas específicas

Através deste ícone temos acesso a oito ferramentas: “Reta Perpendicular", “Reta Paralela”, “Mediatriz”, “Bissetriz”, Reta Tangente”, “Reta Polar ou Diametral”, “Reta de Regressão Linear” e “Lugar Geométrico”, onde para poder acessá-los é necessário clicar na seta no canto inferior direito de cada um como ocorre na figura 18.

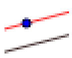
Figura 18: Ferramentas de retas específicas (4º botão)



Fonte: http://www.geogebra.org

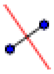


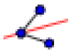
Reta Perpendicular: Selecione primeiro o ponto em que a reta irá passar, depois, uma reta (ou segmento, ou semirreta, ou vetor) ao qual deseja que a reta seja perpendicular.

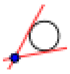


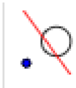
Reta Paralela: Selecione primeiro o ponto em que a reta irá passar, depois, uma reta

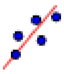
(ou segmento, ou semirreta, ou vetor) ao qual deseja que a reta criada seja paralela.

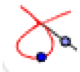
 Mediatriz: Selecione dois pontos ou um segmento.

 Bissetriz: Selecione três pontos ou duas retas.

 Reta Tangente: Selecione primeiro um ponto e. depois, um círculo, uma cônica ou uma função.

 Reta Polar ou Diametral: Selecione primeiro um ponto ou uma reta e, depois, um círculo ou uma cônica.

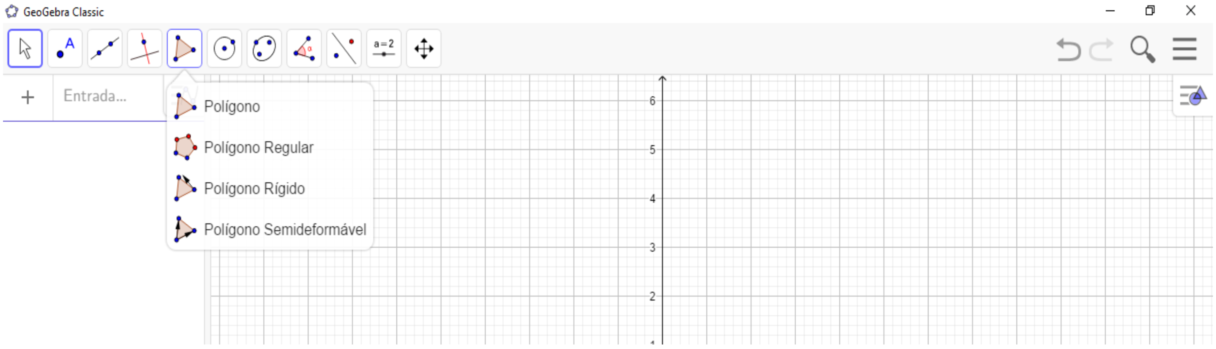
 Reta de Regressão Linear: Selecione pontos usando o retângulo de seleção ou selecione uma lista de pontos.

 Lugar Geométrico: Selecione o ponto do lugar geométrico e, depois, o ponto sobre o objeto ou o controle deslizante.

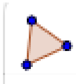
- Ferramentas de polígonos

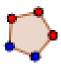
Através deste ícone temos acesso a quatro ferramentas: “Polígono", “Polígono Regular”, “Polígono Rígido” e “Polígono Semi-deformável”, onde para poder acessá-los é necessário clicar na seta no canto inferior direito de cada um como ocorre na figura 19.

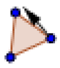
Figura 19: Ferramentas de polígono (5º botão)

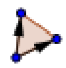


Fonte: http://www.geogebra.org

 Polígono: Selecione todos os vértices e, então, clique novamente no vértice inicial.

 Polígono Regular: Selecione primeiro dois pontos e, depois, digite o número de vértices.

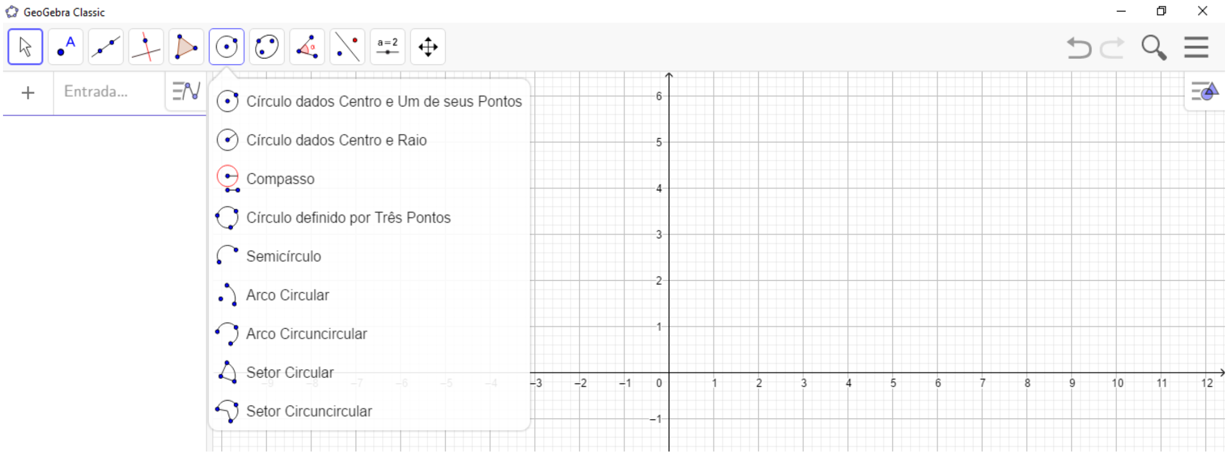
 Polígono Rígido: Selecione todos os vértices e, então clique no primeiro vértice novamente (ou apenas clique sobre um polígono para fazer uma cópia rígida).

 Polígono Semi-deformável: Selecione todos os vértices e, então clique novamente no vértice inicial.

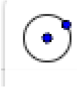
- Ferramentas de curvas

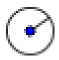
Através deste ícone temos acesso a nove ferramentas: “Círculo dados centro um de seus pontos", “Círculo dados centro e raio”, “Compasso”, “Círculo definido por três pontos”, “Semicírculo definido por dois pontos”, “Arco Circular”, “Arco Circuncircular”, “Setor Circular”, e “Setor Circuncircular”, onde para poder acessá-los é necessário clicar na seta no canto inferior direito de cada um como ocorre na figura 20.

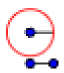
Figura 20: Ferramentas de curva (6º botão)

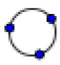


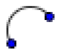
Fonte: http://www.geogebra.org

 Círculo dados centro e um de seus pontos: Selecione o cento e, depois, um ponto do círculo.

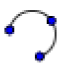
 Círculo dados centro e raio: Selecione o centro e, depois, digite a medida do raio.

 Compasso: Selecione um segmento ou dois pontos para definir o raio e, depois, o centro.

 Círculo definido por três pontos: Selecione três pontos do círculo.

 Semicírculo definido por dois pontos: Selecione dois pontos.

 Arco Circular: Selecione o centro e, depois, dois pontos.

 Arco Circuncircular: Selecione três pontos.

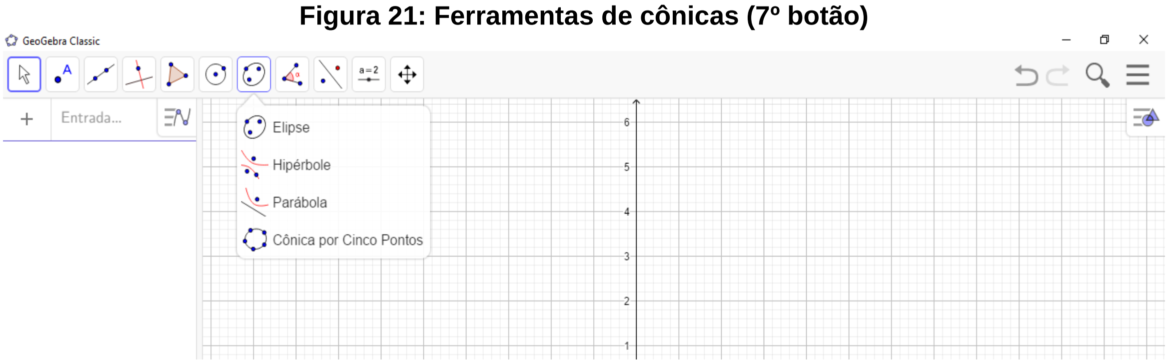
 Setor Circular: Selecione o centro e, depois, dois pontos.

 Setor Circuncircular: Selecione três pontos.

• Ferramentas de cônicas

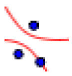
Através deste ícone temos acesso a quatro ferramentas: “Elipse", “Hipérbole”, “Parábola” e “Cônica por cinco pontos”, onde para poder acessá-los é necessário clicar na seta no canto inferior direito de cada um como ocorre na figura 21.

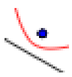
Figura 21: Ferramentas de cônicas (7º botão)

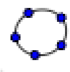


Fonte: http://www.geogebra.org

 Elipse: Selecione dois focos e, depois, um ponto da elipse.

 Hipérbole: Selecione dois focos e, depois, um ponto da hipérbole.

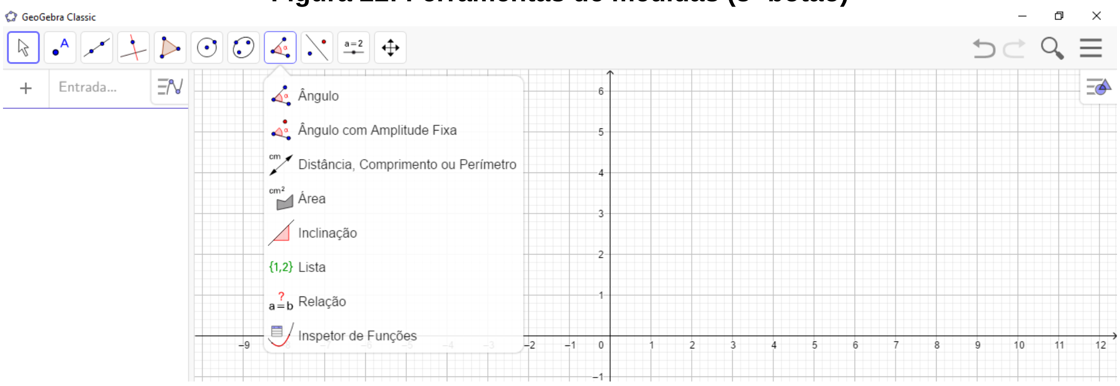
 Parábola: Selecione primeiro o foco e, depois, a diretriz.

 Cônica por cinco pontos: Selecione cinco pontos da cônica.

- Ferramentas de medidas

Através deste ícone temos acesso a oito ferramentas: “Ângulo", “Ângulo com Amplitude Fixa”, “Distância, Comprimento e Perímetro”, “Área”, “Inclinação”, “Lista”, “Relação” e “Inspetor de Funções”, onde para poder acessá-los é necessário clicar na seta no canto inferior direito de cada um como ocorre na figura 22.

Figura 22: Ferramentas de medidas (8º botão)



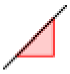
Fonte: http://www.geogebra.org

 Ângulo: Selecione três pontos ou duas retas.

 Ângulo com Amplitude Fixa: Selecione um ponto, um vértice e uma amplitude para o ângulo.

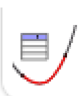
 Distância, Comprimento ou Perímetro: Selecione dois pontos, um segmento, um polígono ou círculo.

 Área: Selecione um polígono, um círculo ou uma elipse.

 Inclinação: Selecione uma reta (ou semirreta ou um segmento).

{1,2} Lista: Arraste e marque um retângulo em torno dos objetos.

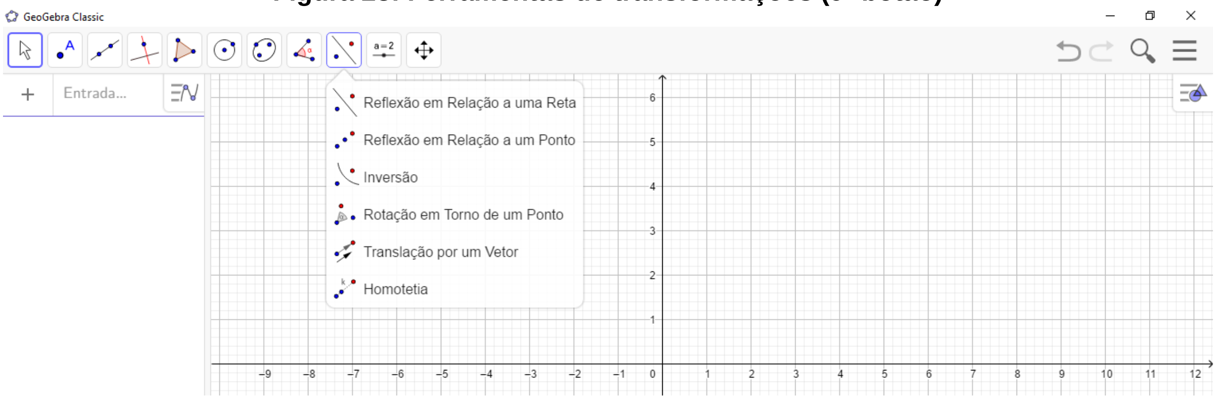
$a \overset{?}{=} b$ Relação: Selecione dois objetos.

 Inspetor de Funções: Selecione uma função.

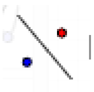
- Ferramentas de transformações

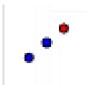
Através deste ícone temos acesso a seis ferramentas: “Reflexão em Relação a uma Reta", “Reflexão em Relação a um Ponto”, “Inversão”, “Rotação em torno de um Ponto”, “Translação por um Vetor” e Homotetia”, onde para poder acessá-los é necessário clicar na seta no canto inferior direito de cada um como ocorre na figura 23.

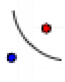
Figura 23: Ferramentas de transformações (9º botão)

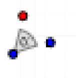


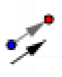
Fonte: http://www.geogebra.org

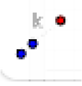
 Reflexão em Relação a uma Reta: Selecione primeiro o objeto e, depois, a reta de reflexão.

 Reflexão em Relação a um Ponto: Selecione primeiro o objeto e, depois, o centro da reflexão.

 Inversão: Selecione primeiro o objeto e, depois, o círculo.

 Rotação em torno de um Ponto: Selecione primeiro o objeto, depois o centro e, então, o ângulo de rotação.

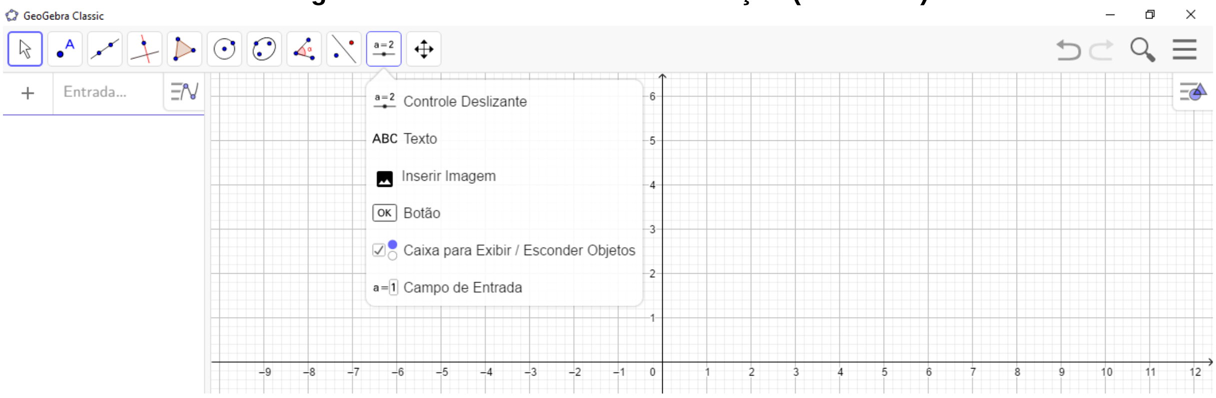
 Translação por um Vetor: Selecione primeiro o objeto a ser transladado e, depois, um vetor.

 Homotetia: Selecione o objeto, depois o centro e, a razão da homotetia.

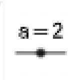
- Ferramentas de visualização

Através deste ícone temos acesso a seis ferramentas: “Controle Deslizante", “Texto”, “Inserir Imagem”, “Botão”, “Caixa para Exibir/Esconder Objetos” e “Campo de Entrada”, onde para poder acessá-los é necessário clicar na seta no canto inferior direito de cada um como ocorre na figura 24.

Figura 24: Ferramentas de visualização (10º botão)

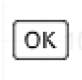


Fonte: http://www.geogebra.org

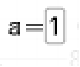
 Controle Deslizante: Clique na janela de visualização para especificar a posição do controle deslizante.

 Texto: Clique na área de trabalho ou em um ponto para criar um texto.

 Inserir Imagem: Clique na janela de visualização para inserir a da imagem.

 Botão: Clique na janela de visualização para inserir um botão.

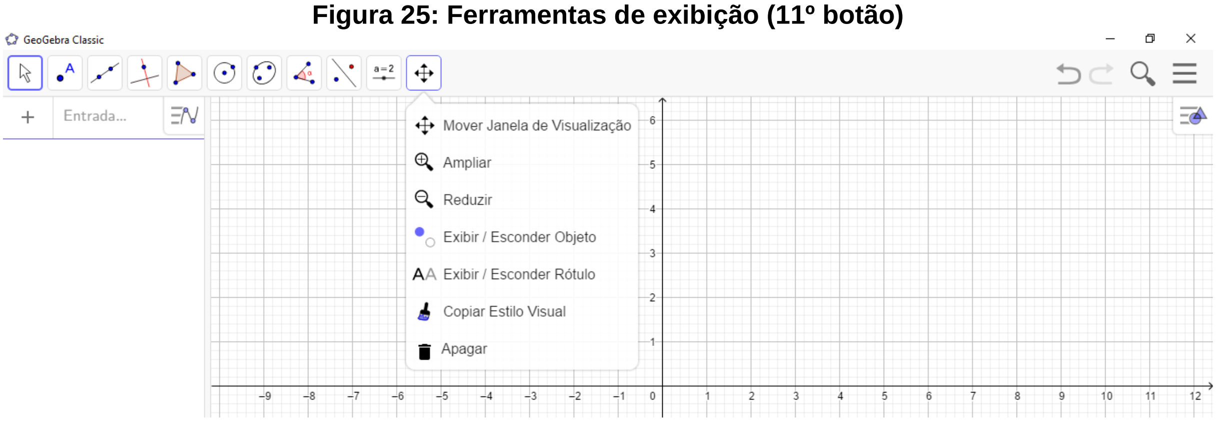
 Caixa para Exibir/Esconder Objetos: Clique na área de trabalho para criar uma caixa.

 Campo de Entrada: Clique na janela de visualização para inserir um campo de texto.

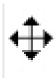
- Ferramentas de exibição

Através deste ícone temos acesso a sete ferramentas: “Mover Janela de Visualização", “Ampliar”, “Reduzir”, “Exibir/Esconder Objeto”, “Exibir/Esconder Rótulo”, “Copiar Estilo Visual” e “Apagar”, onde para poder acessá-los é necessário clicar na seta no canto inferior direito de cada um como ocorre na figura 25.

Figura 25: Ferramentas de exibição (11º botão)

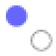


Fonte: http://www.geogebra.org

 Mover Janela de Visualização: Arraste a janela de visualização ou um eixo (shift + arrastar).

 Ampliar: Clique na área de trabalho para ampliá-la (ou movimente a roda do mouse).

 Reduzir: Clique na área de trabalho para reduzi-la (ou movimente a roda do mouse).

 Exibir/Esconder Objeto: Selecione os objetos e, em seguida, ative uma ou outra ferramenta.

 Exibir/Esconder Rótulo: Selecione o objeto para exibir/esconder o seu rótulo.

 Copiar Estilo Visual: Clique no objeto modelo e, em seguida, naquele (s) cujo estilo pretende alterar.

 Apagar: Selecione o objeto para apagá-lo.

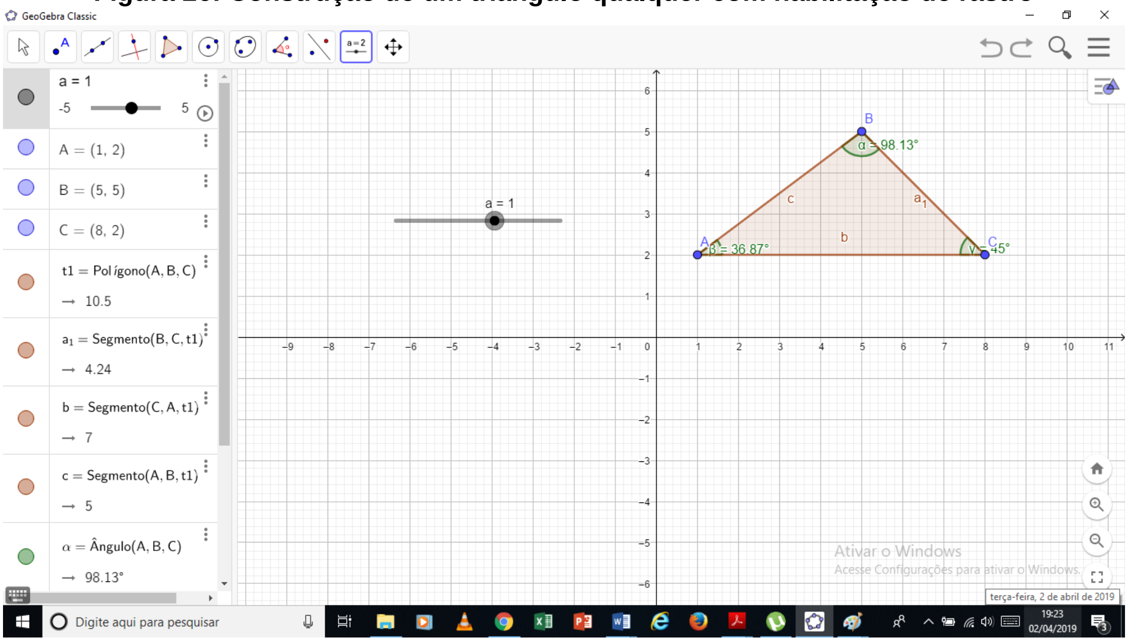
Vale destacar que além da caixa de ferramentas, seus respectivos ícones e suas funcionalidades, também é importante conhecer a funcionalidade da área de trabalho, pois ela é composta por um sistema de eixos cartesianos, os quais são responsáveis pelas construções geométricas e ao mesmo tempo pela janela de álgebra, onde aparecem as equações e coordenadas equivalentes às construções produzidas no software.

Ao analisar a interface do GeoGebra e a sua funcionalidade podemos perceber que realmente ele é um software dinâmico que possui como vantagem didática representar o mesmo objeto de duas maneiras diferentes, através da Janela de Álgebra e da Janela Geométrica (janela de visualização). Sendo que uma das funções da Janela de Álgebra é exibir as informações algébricas que estão na Janela Geométrica. Já a Janela de Visualização é “o local destinado aos objetos construídos. É possível modificar e colorir os objetos, alterar a espessura de linhas, medir ângulos, medir distâncias, exibir cálculos, etc.” (PEREIRA, 2012, p.31)

Além disso, este software apresenta no Campo de Entrada de texto a capacidade de escrever comandos, equações, coordenadas e funções, de forma que os mesmos são exibidos na Janela de Álgebra e na Janela de Visualização mediante a tecla *enter*.

Em seguida, iremos apresentar um exemplo de construção geométrica na tela do GeoGebra 6.0 para melhor análise do software. Existem diversos assuntos na área da Matemática que podemos trabalhar usando este programa, dentre eles segue a construção de um triângulo qualquer com a finalidade de analisar o GeoGebra com mais eficácia.

Figura 26: Construção de um triângulo qualquer com habilitação de rastro



Fonte: A pesquisadora desse trabalho.

Na figura 17 podemos observar que em toda a construção de um triângulo com habilitação de rastro em dois de seus ângulos, o software GeoGebra disponibiliza o processo com visualizações na Janela de Álgebra e também na Janela Geométrica. Essa característica específica deste software dinâmico faz com que o aluno compreenda melhor o assunto relacionando o saber algébrico com o saber geométrico.

Assim, no decorrer desse trabalho focalizamos algumas informações e aplicações sobre o software GeoGebra sendo desenvolvidas e experimentadas na sequência didática para o estudo de Congruência de Triângulos.

CAPÍTULO V
5 ABORDAGEM METODOLÓGICA

Neste capítulo apresentamos o delineamento metodológico idealizado para a realização dessa pesquisa. Apresentaremos o delineamento da pesquisa em quatro momentos. Num primeiro momento, retomaremos o objetivo do estudo e apresentaremos os sujeitos envolvidos, bem como o espaço da investigação. Em um segundo momento, faremos uma discussão versando sobre a natureza do nosso trabalho. Num terceiro momento, apresentaremos a construção dos dados e, em seguida, as etapas da investigação. Finalizaremos explicitando como os dados foram analisados.

5.1 Objetivo geral, sujeitos e campo de pesquisa

O objetivo geral dessa pesquisa, como já foi citado anteriormente, foi *analisar os efeitos de uma sequência didática utilizando o software GeoGebra no ensino do saber geométrico envolvendo o estudo de Congruência de Triângulos no 8º ano do ensino fundamental.*

Elegemos, como sujeitos participantes desse estudo, um professor licenciado em Matemática e seus respectivos alunos do 8º ano do ensino fundamental de uma escola da rede privada de ensino.

Escolhemos o 8º ano do Ensino Fundamental para que fosse possível investigar o ensino do saber geométrico Congruência de Triângulos. Isso se deve por ser no (8º) que é introduzido formalmente o estudo desse conteúdo matemático, conforme destaca a BNCC (BRASIL, 2017, p.272):

> Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo.

A escolha da geometria se deu pelo fato de que percebemos as dificuldades no domínio do saber geométrico por parte dos alunos, que acontece, em parte, devido às rupturas no ensino da matemática, pois, em geral, o trabalho didático do professor prioriza mais o ensino aritmético e algébrico (CLEMENTE et al., 2018; PEREIRA, 2001).

É importante destacar que na análise dos dados, com o intuito de preservarmos a identidade dos sujeitos participantes da pesquisa, cada discente recebeu um código, formado por uma letra e dois números. A letra escolhida foi a “A”, em referência a palavra aluno. A numeração variava de 01 a 18, que corresponde à quantidade de estudantes da turma. Dessa forma, a turma investigada era composta pelos discentes: A01, A02, A03, A04, ..., A18.

Tomamos como campo de pesquisa uma instituição privada localizada no município de Jaboatão dos Guararapes – PE. A escolha por esta escola aconteceu devido ao vínculo institucional da pesquisadora, que é professora de Matemática da instituição, como também, por disponibilizar apoio didático e participação ativa de um professor colaborador para os procedimentos da investigação.

5.2 Natureza da pesquisa

Como sugere a literatura, a metodologia da pesquisa surge mediante vários fatores, tais como a proposta da pesquisa, o contexto social, as características do pesquisador e dos participantes do processo investigativo. Segundo Felcher, Ferreira e Folmer (2017, p.8) **“**uma investigação nasce de uma ideia, que pode ser resultado de distintas ações, observações, leituras, estudos e crenças, nasce, ainda, de um livro, uma pesquisa ou um fato”. Por este motivo procuramos olhar para a aplicabilidade do GeoGebra ao se estudar Congruência de Triângulos no 8º ano do Ensino Fundamental com a possibilidade de potencializar, de forma contextualizada e significativa, a construção de conceitos geométricos, uma vez que a Geometria é fundamental para a compreensão de diversos conteúdos matemáticos.

Enfocamos essencialmente, que a metodologia utilizada nesta pesquisa é baseada na modelagem das Situações Didáticas de Brousseau (2008), especificamente seguindo a Modelagem das Situações Adidáticas (quadro 1): as fases de ação, formulação, validação e institucionalização, verificando como citado anteriormente, quais os efeitos de uma sequência didática, elaborada pela pesquisadora, para o ensino de Congruência de Triângulos através do auxílio das ferramentas do GeoGebra aplicada no 8º ano do Ensino Fundamental.

Vale ressaltar que quando se propõe uma Sequência Didática com base nas fases propostas por Brousseau na Teoria das Situações Didáticas, a cada nova atividade quase sempre as fases de ação e formulação são vivenciadas novamente. Sobretudo, a cada nova atividade as fases de ação e formulação estarão se realimentando/reiniciando, não existe um passo rígido. Mas, em alguns momentos, nas atividades a ideia de ação e formulação, o limite é muito tênue e, porém, existem atividades que no momento da sequência fica evidente que aquele é um momento de ”AÇÃO”.

5.3 Construção dos dados

Como essa pesquisa é de natureza exploratória, entendemos que os dados são construídos durante todo o processo de investigação, visto que até o pesquisador, mesmo mantendo a vigilância necessária ao processo, também os produzirá no que se refere à organização do corpus da pesquisa (MOREIRA, 2011; MARCONI; LAKATOS, 2011). Sendo assim, numa pesquisa exploratória tem-se o entendimento que mesmo o pesquisador apresentando os dados na íntegra, ele os analisa com o seu olhar, sua interpretação dos fatos.

Nesta pesquisa, o estudo de Congruência de Triângulos foi realizado a partir de uma sequência didática experimental, como proposta pela Teoria das Situações Didáticas, através da utilização do GeoGebra, por ser um software de geometria dinâmica capaz de possibilitar a visualização e a construção de triângulos mediante a manipulação de ferramentas no campo da geometria, da álgebra e da aritmética.

Com base nesse cenário, usamos as técnicas de observação e registro em um diário de campo, e a gravação em áudio das aulas: todas as aulas foram gravadas e houve realização de uma entrevista com o professor colaborador antes da sequência didática proposta em sala de aula, a fim de conhecer um pouco a turma e a metodologia de ensino do professor ao trabalhar com Congruência de Triângulos. Uma segunda entrevista foi desenvolvida após a sequência didática, objetivando saber como o professor avaliou o desenvolvimento da sequência didática proposta, a utilização do software e o desempenho dos alunos.

A respeito do diário de campo, com esse recurso foi possível fazer anotações descrevendo os momentos relevantes das aulas, considerando os objetivos da pesquisa.

5.4 Etapas da investigação

A investigação foi realizada em cinco etapas principais: 1) levantamento das propostas curriculares (PCN, BNCC, CBC) para o ensino de congruência de triângulos e como esse saber aparece nos livros didáticos aprovados pelo PNLD 2017; 2) elaboração da sequência didática pela pesquisadora; 3) apresentação da proposta da sequência didática pela pesquisadora ao professor colaborador; 4) desenvolvimento da sequência didática de Congruência de Triângulos; 5) entrevistas com o professor antes e após o término da realização da sequência didática.

A seguir apresentamos as etapas da investigação, explicitando-as em maior detalhe.

5.4.1 Currículo e livros aprovados pelo PNLD

Nessa etapa fizemos uma investigação acerca de como os PCN, a BNCC e a CBC propõe o ensino de congruência de triângulos. Em seguida, realizamos o levantamento dos livros didáticos aprovados pelo PNLD 2017 do Ensino Fundamental, analisando como a Congruência de Triângulos era abordada nesses materiais. Assim, foi possível elaborar a sequência didática seguindo, como um dos critérios de elaboração, as recomendações do Programa Nacional do Livro Didático.

De posse dessas informações, procedemos com a análise do livro didático da escola que se encontrava à disposição do professor e dos alunos, por entender que os saberes sobre Congruência de Triângulos, nesse material, encontravam-se mais acessíveis aos estudantes, sendo o primeiro contato que eles teriam com o conteúdo abordado. Cabe destacar que, segundo pesquisas, muitos professores utilizam o livro didático adotado para determinada turma como o maior aporte “um (quase) manual de usuário” para as aulas (LAJOLO, 1996, p.2; CHOPPIN, 2004).

O livro adotado pela instituição escolar, elaborado por um determinado sistema de ensino, abordava o assunto sobre Triângulos no penúltimo capítulo. Além disso, o conteúdo era subdividido nas seguintes seções do conhecimento: **Elementos de um triângulo**; **Relações de desigualdade nos triângulos** (Relações entre o maior lado e maior ângulo, Desigualdade triangular); **Segmentos e pontos notáveis de um triângulo** (Mediana e baricentro, Bissetriz interna e incentro, Altura e ortocentro, Circuncentro de um triângulo); **Triângulo isósceles** (Propriedades do triângulo isósceles); **Triângulo equilátero** (Propriedades do triângulo equilátero); **Relações**

entre os ângulos de um triângulo (Soma das medidas dos ângulos internos, Soma das medidas dos ângulos externos); **Ângulo externo**; **Congruência de triângulos** (Casos de congruência de triângulos: L.L.L., L.A.L., A.L.A., L.A.A$_o$, A$_r$.L.L.[13], sendo esse último conteúdo o escolhido para a sequência didática.

Dessa forma, a sequência didática teve de ser aplicada no final da IV Unidade do ano letivo.

5.4.2 Elaboração da sequência didática

Nessa etapa, a sequência didática elaborada pela pesquisadora para o ensino de Congruência de Triângulos, procedeu mediante as contribuições da Teoria das Situações Didáticas, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC – de Matemática do Ensino Fundamental – Anos Finais (BRASIL, 2017) e, em livros recomendados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) que são utilizados no ensino fundamental e pelo sistema de ensino adotado na instituição colaboradora da pesquisa.

A nossa pesquisa contemplou a sequência didática pautada nas fases da Teoria das Situações Didáticas, a saber: situações de ação, de formulação, de validação e de institucionalização, as quais foram apresentadas no *Quadro 1: Modelagem das situações adidáticas* do capítulo 1 desse trabalho. Além disso, a sequência didática foi desenvolvida utilizando como recurso didático o software GeoGebra 6.0 e dividida em dois encontros: 1º) familiarização do GeoGebra e 2º) construção dos conceitos de congruência de triângulos.

5.4.3 Desenvolvimento da sequência didática sobre Congruência de Triângulos

A sequência didática foi elaborada para ser realizada em dois encontros. O primeiro encontro referiu-se a um período de 50 minutos com a proposta de ser realizada individualmente. O segundo encontro teve um período de duas aulas geminadas de 50 minutos cada uma. As atividades desse segundo momento foram realizadas em dupla, tendo sido o professor colaborador o responsável pela escolha das duplas.

[13]L.L.L. (lado, lado, lado), L.A.L. (lado, ângulo, lado), A.L.A. (ângulo, lado, ângulo), L.A.Ao (lado, ângulo, ângulo oposto), Ar.L.L. (ângulo reto, lado, lado – caso especial do triângulo retângulo: hipotenusa-cateto).

As aulas foram realizadas numa terça e sexta-feira no período da tarde (de acordo com o horário de aulas do colégio) com a utilização do software GeoGebra, versão 6.0, instalado nos Chromebooks[14] do colégio participante da pesquisa, de forma que cada estudante teve o seu dispositivo móvel para manipular no período da realização da sequência didática.

Mesmo os alunos tendo cada um o seu aparelho eletrônico, eles puderam trocar ideias com os colegas (assim tivemos construção individual e construção coletiva), pois a investigação aconteceu numa sala denominada “Sala 360º”[15], disposta com mesas redondas para trabalhos coletivos. Os estudantes foram organizados em duplas, assim, totalizando 9 duplas, sendo organizadas cada dupla em uma mesa redonda.

Durante a sequência os estudantes manipulavam o GeoGebra para a familiarização do software, no primeiro momento, e no segundo momento com vistas à construção dos conhecimentos sobre Congruência de Triângulos e as atividades em duplas com desafios/atividades a serem manipulados no GeoGebra, à medida em que as construções eram realizadas, os discentes, em paralelo com as manipulações no software, respondiam as atividades da ficha impressa conforme orientações do professor, o qual teve o papel de mediador da aprendizagem.

Optou-se por um professor colaborador para a realização da sequência didática por ser o regente da turma e para que a pesquisadora pudesse fazer suas observações e anotações no diário de campo durante o desenvolvimento da sequência.

Decidimos que as atividades poderiam ser discutidas em dupla por considerarmos a importância as reflexões e discussões estabelecidas entre os membros de cada dupla vivenciadas durante a sequência, contribuindo para a construção do conhecimento geométrico. No trabalho em dupla, os alunos constroem hipóteses, debatem entre si e argumentam acerca de diversas ideias, que poderiam não surgir caso a atividade fosse individual. Além disso, possibilita ao

[14]São considerados como um tipo de computador novo projetado com a finalidade de realizar tarefas com mais rapidez e facilidade executando o Chrome OS, visto como um sistema operacional de armazenamento em nuvem, além de integrar o melhor do Google com diversos níveis de segurança (Funcionalidades disponíveis em https://support.google.com).

[15]Nessa sala além das mesas redondas, tem quadros brancos nas quatro paredes e uma lousa digital, Chromebooks para cada aluno, um computador mestre para o professor, caixa de som, microfone, entre outros equipamentos de multimídia.

pesquisador/professor/observador verificar como os estudantes trabalham em grupo (LEAL, 2005; MELO, 2009).

No decorrer do percurso das atividades, os alunos receberam a orientação de gravarem suas produções do software GeoGebra em uma pasta contida na área de trabalho do Chromebook. As duplas receberam, também, uma ficha de atividades para fazerem os registros das produções decorrentes da sequência. A finalidade era de averiguar as estratégias usadas pelos estudantes durante a realização das atividades sugeridas na sequência didática, observando se, em seus registros, eles referenciavam (ou não) as propriedades das figuras geométricas.

As gravações aconteceram no final do segundo semestre do ano letivo, por obedecer a organização temporal do currículo daquela série. Vale destacar que toda a sequência de atividades foi gravada em áudio desde as explicações e intervenções do professor colaborador até os discursos e realização das atividades dos alunos, para que pudéssemos perceber todo o desenho das aulas, bem como as entrevistas com o docente.

Enquanto pesquisadora, buscamos o máximo possível que a nossa presença na “Sala 360°” não interferisse no desenvolvimento da sequência didática. Porém, em certos momentos, o professor nos consultava para tirar algumas dúvidas sobre condução das atividades.

Para a construção das atividades, além da análise dos livros aprovados pelo PNLD (2017) analisamos também o livro adotado pela instituição escolar, elaborado por um determinado sistema de ensino.

Com base no conteúdo programático, elaboramos a Sequência Didática com as atividades de natureza experimental/exploratória para serem executadas no GeoGebra, versão 6.0. As atividades indicavam os passos a serem seguidos para que os alunos compreendessem melhor, por meio das construções, conceitos e propriedades da Congruência de Triângulos e seus casos.

Para melhor compreensão da proposta da Sequência Didática e de sua estrutura, explanaremos as atividades com os seguintes requisitos:

- Os objetivos da Sequência Didática;
- Rol de atividades da Sequência Didática;
- Objetivos específicos dos itens das atividades.

A partir do conteúdo programático Congruência de Triângulos e tomando as ideias da TSD, as atividades foram realizadas seguindo as fases de ação, formulação, validação e institucionalização, conforme mencionado anteriormente.

A seguir, explicaremos a dinâmica das atividades dos dois encontros da sequência didática.

5.4.3.1. Estrutura do 1º Encontro da Sequência Didática: orientações das atividades sobre a familiarização das ferramentas do GeoGebra

O primeiro encontro da sequência didática foi constituído por três atividades, nas quais foram abordados os conceitos de ângulo e bissetrizes; circunferência e equidistância, respectivamente.

Objetivo do 1º encontro[16]:

Promover a manipulação das ferramentas do GeoGebra através da introdução dos conceitos de ângulo, circunferência e equidistância. A finalidade nesse 1º encontro foi a familiarização dos estudantes com o software supracitado.

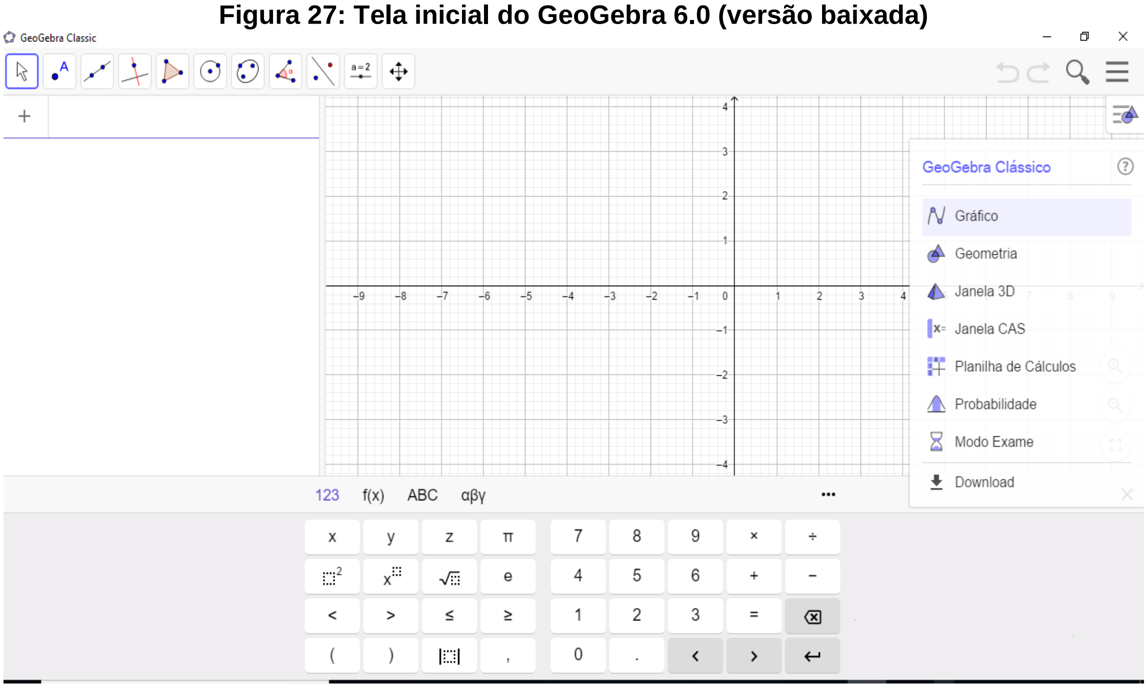
Rol de atividades da Sequência Didática

A sequência das atividades iniciou a partir da observação e breve apresentação das ferramentas do software GeoGebra 6.0, mediante a introdução de conceitos sobre ângulos e bissetriz, circunferências e equidistância, com intuito de contribuir para as contruções do 2º encontro.

---

[16]O primeiro encontro trouxe atividades inspiradas na pesquisa de COSTA (2016). Todavia, na referida pesquisa o autor trabalhava com quadriláteros notáveis. A referência completa da pesquisa encontra-se no final da dissertação.

Figura 27: Tela inicial do GeoGebra 6.0 (versão baixada)



Fonte: http://www.geogebra.org

Anteriormente à realização da sequência didática propriamente dita, o professor colaborador estabeleceu um diálogo com os alunos expondo como ocorreria o desenvolvimento das atividades. Para a pauta de diálogo elencamos os seguintes tópicos:

✓ A proposta das atividades utilizando Chromebooks e o software GeoGebra 6.0 na Sala 360º da escola;

✓ Uma breve apresentação do GeoGebra 6.0 que seria usado como ferramenta de aprendizagem do saber da sequência didática;

✓ Os procedimentos da sequência didática: atividades individuais (na ficha) e em dupla (troca de informações durante as construções);

✓ Análise das produções dos alunos a partir dos arquivos digitais enviados ao professor.

Após o diálogo, na Sala 360º, o professor apresentou aos discentes o software GeoGebra de forma mais detalhada, com a exploração de alguns comandos básicos. Neste 1º encontro, mostrou o ambiente do software relacionando alguns campos da Matemática: Álgebra, Aritmética, Geometria, Tabelas e Gráficos (plano cartesiano) e introduziu os conceitos de ângulos e bissetriz, circunferência e equidistância com algumas construções no software, conforme análise e discussão dos dados no capítulo 5.

Atividade 01 – Ângulos e bissetriz

a) Trace um segmento de reta *AB*.

b) Estabeleça uma reta que seja perpendicular ao segmento de reta *AB*, pelo ponto *A*. Depois, marque um ponto *C* na reta construída.

c) Mova os pontos da figura analisando se a reta continua perpendicular ao segmento *AB*. Caso não permaneça perpendicular reinicie a construção.

d) Qual a relação existente entre a reta perpendicular e o ângulo $C\hat{A}B$? Qual a medida do ângulo formado?

e) Trace um segmento de reta *PQ*.

f) Construa o ângulo $O\hat{P}Q$ com medida exatamente igual a 45°.

g) Mova os pontos de sua figura, caso a medida do ângulo modifique, reconstrua a figura.

h) Como você fez para construir o ângulo de 45°?

i) Grave o arquivo como A01.

A atividade 01 teve por finalidade introduzir o aluno no ambiente do GeoGebra, além de construir a noção de ângulos e de bissetriz como um componente que surge por meio de propriedades geométricas. A opção de reta perpendicular se justifica pela possibilidade de explorar ângulos retos, sobretudo, no caso de triângulos retângulos. A noção de bissetriz, abordada nos itens *e*, *f* e *g*, ainda surge por intermédio do ângulo de 90°, servindo então para se obter o ângulo de 45° ao se construir o ângulo reto.

É importante salientar que ao orientar os estudantes ao moverem as figuras da atividade, o que se pretende obter é a validação das construções a partir das propriedades.

Atividade 02 – Circunferência

a) Marque um ponto *W* e uma reta *r*, que passe por ele.

b) Considerando o ponto *W*, trace uma reta que seja perpendicular à reta *r*, passando por *W*. Depois, nomeia a reta traçada de *s*.

c) Crie dois pontos *A* e *B* pertencentes à reta *r*, de forma que a distância do ponto *W* até o ponto *A* seja congruente à distância do ponto *W* ao ponto *B*, obtendo a relação: *WA* = *WB*.

d) Crie dois pontos *C* e *D* pertencentes à reta *s*, satisfazendo a relação: *WA* = *WB* = *WC* = *WD*.

e) Arraste os pontos da figura formada analisando a relação existente entre eles. O que acontece com essa relação? Existe alguma alteração? Reinicie o processo em caso positivo.

f) Marque outros quatro pontos (*E*, *F*, *G* e *H*) mantendo a relação de congruência entre as distâncias: *WA* = *WB* = *WC* = ... = *WG* = *WH*.

g) Qual afirmação se pode chegar acerca dos pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* e *H* em relação ao ponto *W*? Observando a região do plano formada pelos oito pontos, como poderíamos chamá-la de forma que satisfaça a relação de congruência entre as distâncias até o ponto *W*?

h) Grave o arquivo como A02.

O objetivo da atividade 02 foi construir a ideia de circunferência como o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de um ponto central. A noção de circunferência, em geral, é trabalhada com os estudantes. No ensino convencial, cabe destacar, a relação de equidistância levando em consideração a visualização do formato da circunferência é pouco trabalhada. Essa ideia de circunferência é fundamental para a construção de triângulos congruentes partindo das medidas dos lados.

Atividade 03 – Noção de equidistância

a) Estabeleça três pontos *A*, *B* e *C* não colineares.

b) Crie um ponto *W*, de forma que ele esteja à mesma distância dos pontos *A*, *B* e *C*.

c) Movimente os pontos criados e observe se eles mantêm a mesma distância. Reinicie, em caso negativo.

d) O que você observou?

e) Grave o arquivo como A03.

O objetivo da atividade 03 foi tornar possível a compreensão do conceito de equidistância, dados pontos que estejam a uma mesma distância de um ponto central. A atividade anterior – 02 - sobre circunferência contribuiu para essa observação, como também os alunos poderiam levar em consideração conhecimentos prévios sobre ponto médio e mediatriz, visto que eles haviam estudado em aulas anteriores com o professor regente.

5.4.3.2. Estrutura do 2º Encontro da Sequência Didática: orientações das atividades sobre Congruência de Triângulos no GeoGebra

O segundo encontro foi constituído por uma atividade com um total de nove questões, no formato de situações-problema, compreendendo a exploração efetiva da Congruência de Triângulos, bem como os quatro casos que garantem a congruência (LLL, LAL, ALA e LAA$_o$). Essas atividades foram construídas no software GeoGebra 6.0 e as considerações dos estudantes foram registradas paralelamente em uma ficha impressa.

Objetivos do 2º encontro da Sequência Didática:

- Compreender Congruência de Triângulos;
- Identificar e aplicar os Casos de Congruência de Triângulos.

Rol de atividades do 2º encontro da Sequência Didática

A seguir apresentaremos as atividades propostas para a construção do conhecimento.

Atividades do GeoGebra 6.0 – Congruência de Triângulos

I) Construa um triângulo ABC. Como devemos proceder? Registre suas considerações na letra a) da ficha.

II) Determine a medida dos lados e dos ângulos internos do triângulo ABC. Para isso o que é preciso? Qual ferramenta utilizar no GeoGebra?

III) Mova os vértices do triângulo, analisando o que ocorre.

IV) No canto inferior esquerdo do software tem-se o campo “Entrada”. Escreva “soma = α + β + γ” (enter). No campo algébrico apareceu qual resultado? Qual conclusão você chegou? Registre suas considerações na letra b) da ficha.

V) Mova o triângulo ABC para visualizar o que acontece com essa soma. Existe alguma propriedade que justifique o que está acontecendo?

De posse dessas observações, os estudantes foram orientados a seguirem oito passos determinantes na construção do conhecimento:

VI) Agora siga os passos seguintes para a construção do conhecimento. Registre suas considerações na letra c) da ficha.

Passo 1: Em “ferramentas de ponto” (2º botão) trace um ponto A’ que corresponde ao ponto A do triângulo ABC que você construiu. Renomeando para A’.

Passo 2: Trace outro ponto qualquer para traçar uma semirreta que passa pelos dois pontos que sirva como base para um novo triângulo (3º botão). Depois tome compasso (6º botão) com a medida de $\overline{AC}$ e posicione em A’. A interseção formada se refere ao ponto C’, assim trace usando o 2º botão (renomeando).

Passo 3: Tome compasso com a medida do seguimento $\overline{AB}$ e posicione em A’. Para não confundir retire (exibir objeto) referente à interseção C’.

Passo 4: Tome compasso com a medida indo desde o ponto B ao ponto C, segmento $\overline{BC}$ e centralize em C’.

Passo 5: Marque o ponto de interseção entre as duas circunferências que seria B’ (o 3º botão do novo triângulo).

Passo 6: Trace o triângulo A’B’C’. Para melhor visualização tire os traços de compasso e semirreta.

Passo 7: Agora deixe visíveis as medidas dos ângulos e dos lados do triângulo A’B’C’ (A’$\widehat{B'}$C’, B’$\widehat{C'}$A’ e C’$\widehat{A'}$B’).

Passo 8: Determine a distância dos segmentos do triângulo A'B'C' usando o 8º botão.

VII) Mova o triângulo ABC. Para isso o que é preciso?

VIII) Ao mover o triângulo ABC, o que aconteceu? O que podemos concluir? Registre suas considerações respondendo da letra d) até a letra f) da ficha.

IX) Grave o arquivo como B01.

Após realizados os nove itens da atividade, o professor entrou com a institucionalização do saber, utilizando o GeoGebra, para que os estudantes finalizassem as atividades respondendo as letras g) e h) da ficha.

No item VI e nas letras c) e d) da ficha foi apresentada uma situação que se propunha a gerar conflito cognitivo, uma vez que os alunos deveriam compreender que para garantir a Congruência, o triângulo A'B'C' poderia estar circunscrito na circunferência ou entre circunferências.

As atividades das letras a) até a letra g) da ficha foram respondidas durante as construções e manipulações das figuras no software GeoGebra 6.0 (detalhadas no quadro 5 e nas análises dos dados) e no final, após a institucionalização, foi respondida a atividade da letra h).

Além disso, é importante reforçar que a partir da atividade da letra c) foi criada uma orientação (Apêndice III) para o professor acerca da construção de um triângulo congruente para os alunos seguirem nove passos, sendo que a cada um deles (a cada momento de ação), os alunos eram questionados a refletirem a fim de fazer formulações e validá-las no GeoGebra. Assim, foram feitas duas atividades paralelas, as construções no GeoGebra e as questões da ficha.

Atividades da ficha – Construção de triângulos, congruência e seus casos

O quadro a seguir apresenta o detalhamento das atividades da ficha com as expectativas de mobilização dos alunos durante as construções e manipulações no GeoGebra para a construção do conhecimento Congruência de Triângulos.

Quadro 5: Detalhamento das atividades

ATIVIDADES	EXPECTATIVA DE MOBILIZAÇÃO DOS ALUNOS
a) Para a construção de um triângulo o que precisamos saber? Como devemos proceder no GeoGebra?	Saber as condições de existência de um triângulo, bem como construir diversos tipos de triângulos no GeoGebra.
b) Ao mover o triângulo ABC o que acontece com a soma = α + β + γ? Justifique a sua resposta.	Perceber que mesmo movendo o triângulo ABC a soma das medidas de seus ângulos internos permanece igual a 180°.
c) Desenhe um triângulo A'B'C' no GeoGebra de forma que coincida com o triângulo ABC. Para isso o que é preciso?	Determinar as propriedades do triângulo ABC para a construção de um triângulo congruente.
d) Para a congruência de dois triângulos o que é necessário determinar?	Definir quando dois triângulos são congruentes.
e) Ao movimentar os vértices dos triângulos construídos encontre triângulos congruentes do tipo Equilátero, do tipo Isósceles e do tipo Escaleno. Escreva na tabela abaixo as medidas dos lados e dos ângulos encontrados.	Saber classificar triângulos a partir das medidas dos seus lados em equilátero, isósceles ou escaleno, observando a congruência dos dois triângulos construídos.
f) A partir da congruência dos dois triângulos e seus movimentos no GeoGebra, o que você observou?	Identificar as propriedades dos triângulos construídos mediante a análise de congruência sabendo conceituá-las.
g) Quais as suas considerações sobre congruência de triângulos e seus casos LLL, LAL, ALA e LAAo?	Conhecer os casos de congruência de triângulos para descobrir medidas desconhecidas em diversos contextos, sejam eles em um software ou em situações-problema.
h) Verifique em cada item se podemos ou não garantir que os triângulos são congruentes sem efetuar medições. Em caso positivo, indique o caso que garante a congruência (LLL, LAL, ALA ou LAA_o).	Aplicar os casos de congruência de triângulos para descobrir medidas desconhecidas sem efetuar medições, garantindo a congruência dos triângulos.

Fonte: Autoria própria.

5.4.4 Entrevistas com o professor colaborador e apresentação da proposta da sequência didática pela pesquisadora

Essa etapa foi dividida em três momentos que designamos de I, II e III.

Momento I:

Realização da primeira entrevista aberta com o professor mediante duas perguntas abertas:

Para você o que é Congruência de Triângulos?

Geralmente quais os recursos que você utiliza para ensinar Congruência de Triângulos aos seus estudantes? Conhece o GeoGebra e o utiliza?

Nosso objetivo com essa entrevista foi o de identificarmos elementos sobre a relação do professor com o saber geométrico em questão, bem como os possíveis recursos utilizados para a construção do saber por parte dos alunos.

No que se refere à primeira pergunta, acreditamos que os dados nos possibilitaram perceber alguns indícios da relação ao saber do professor, os quais apenas na prática em sala de aula foram confirmadas.

Momento II:

Nesse segundo momento, propusemos ao professor a realização da sequência didática elaborada pela pesquisadora. Como ele aceitou a proposta, seguimos com as orientações, regras e atividades da sequência sobre a sua aplicação. O material que foi entregue à professora com os objetivos, procedimentos e atividades da sequência didática encontra-se no apêndice.

Momento III:

Realização da segunda entrevista com o professor mediante duas perguntas abertas:

O que você observou dos alunos no decorrer da sequência didática?

Você usaria a proposição dessa sequência didática em outras turmas?

A finalidade para a segunda entrevista era de observar, através da fala do docente, quais os impactos da referida sequência didática, a partir do seu ponto de vista, analisando se ela fez sentido para os sujeitos participantes, sejam eles: os estudantes e o professor.

5.4.5 Aplicação da sequência de Congruência de Triângulos

Essa etapa foi realizada através do registro em gravação de áudio e um diário de campo contendo a aplicação da sequência didática aplicada pelo professor durante as três aulas geminadas sobre Congruência de Triângulos.

Dispomos de alguns aparelhos eletrônicos para a gravação dos áudios, dessa forma colocamos nas mesas dos alunos e um aparelho próximo ao professor, a fim de captar com mais clareza os elementos condutores da sequência didática, ou seja, a construção do conhecimento por parte dos alunos enquanto o professor mediava a aplicação das atividades, bem como as interações entre os alunos e entre estudante(s) e professor. O intuito da disposição dos aparelhos foi manter o cuidado para que os direcionamentos das aulas pudessem acontecer fluentemente não interferindo na naturalidade das ações dos sujeitos envolvidos.

O diário de campo foi construído durante a realização das três aulas. Nele constaram as anotações que a pesquisadora julgou um aporte extra de grande relevância e pertinência para o esclarecimento do objeto de estudo desta pesquisa.

5.5 Modelização e análise das situações da sequência didática

Nesse capítulo apresentaremos os elementos que foram considerados na elaboração da sequência didática. Cabe destacar que toda a sequência foi elaborada pela pesquisadora. Os documentos oficiais, o livro didático e material didático da escola em que a sequência foi desenvolvida subsidiaram a proposição da sequência.

Aqui, destacamos que, uma vez que a sequência foi proposta com base na Teoria das Situações Didáticas, que lançamos mão de algumas ideias da Engenharia Didática, qual sejam: a realização de uma análise inicial (preliminar) que considere como o saber aparece nos documentos oficiais – o que a noosfera[17] propõe que deve ser ensinado acerca desse saber - e livros didáticos, quais os conceitos fundamentais que necessitam ser apropriados pelos alunos, na construção de conhecimentos

---

[17]Noosfera, tal como definida por Chevallard (1985, *apud* Brito Menezes, 2006) é uma instituição (invisível) que é responsável pelas transformações dos saberes científicos (savoir savant) em saberes a ensinar (savir à ensigner).

relacionados à congruência de triângulos, contemplando, também, o que as pesquisas revelam como sendo as principais dificuldades dos alunos nessa construção.

5.6 Análise dos dados

Para a análise dos dados elencamos os seguintes critérios:

I) Transcrição das aulas dos dois encontros, gravadas em áudio, em que a sequência didática foi aplicada;

No primeiro encontro da sequência didática foi feita a transcrição da aula de 50 minutos, a qual se referiu à familiarização do software GeoGebra com as atividades sobre ângulos e bissetriz, circunferência e noções de equidistância. Já a segunda transcrição se referiu ao segundo encontro da sequência didática, sendo essa etapa realizada em duas aulas geminadas de 50 minutos cada uma, em que foi trabalhada a sequência didática propriamente dita, sobre congruência de triângulos.

II) De posse dos dados construídos por meio das transcrições e das anotações feitas no diário de bordo (campo), ao decorrer das aulas, buscamos investigar os efeitos da sequência didática no ensino de Congruência de Triângulos, utilizando o software GeoGebra com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental, mediante as regras estabelecidas pela pesquisadora e desenvolvidas pelo professor titular da turma. Para tal, direcionamos nossa análise seguindo as etapas da Teoria das Situações Didáticas:

- Ação;
- Formulação;
- Validação;
- Institucionalização.

Levando em consideração as análises das gravações, dos registros no diário de campo, das entrevistas inicial e final feitas com o professor, e dos protocolos das atividades dos estudantes, fizemos uma discussão articulando as análises das atividades da sequência.

Com base nesse cenário, seguimos com a apresentação dos capítulos relativos à modelização da sequência didática e à análise e discussão dos dados.

CAPÍTULO VI

6 MODELIZAÇÃO E ANÁLISE DAS SITUAÇÕES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesse capítulo apresentaremos a modelagem e análise das situações dos dois encontros da sequência didática.

6.1 Primeiro encontro da sequência didática

Analisaremos brevemente a modelagem das atividades do primeiro encontro (familiarização do GeoGebra), embora a ênfase maior será dada ao segundo encontro, que trata a sequência didática propriamente dita.

Atividade 01 – Ângulos e bissetriz

No software GeoGebra, um segmento de reta pode ser construído de maneira simples através da terceira ferramenta, a qual tem o recurso "Segmento"; a reta perpendicular com o recurso "Reta perpendicular" e o ponto *C* pode ser marcado a partir de "Ponto".

Da mesma forma, o segmento de reta $\overline{PQ}$ pode ser traçado mediante o recurso "Segmento". A fim de obter o ângulo $O\hat{P}Q$ fazia-se necessário que os discentes construíssem, através do recurso "Reta perpendicular", duas retas que fossem perpendiculares ao segmento de reta $\overline{PQ}$, sendo que a primeira deveria passar por *P* e a segunda pelo ponto *Q*. Logo em seguida, com o auxílio do recurso "Bissetriz", existente na quarta ferramenta, os estudantes construíram a bissetriz do ângulo $\hat{P}$, que corta, exatamente no ponto $\hat{O}$, a reta perpendicular que passa por *Q*, chegando a obter, então, o ângulo $O\hat{P}Q$ com medida igual a 45°.

Atividade 02 – Circunferência

Com as ferramentas do software GeoGebra, o ponto *W* poderia ser marcado com o recurso "Ponto" e a reta *r* com o recurso "Reta". Como a reta *s* deveria ser perpendicular à reta *r*, o recurso para traçá-la poderia ser "Reta perpendicular", e os pontos *A* e *B* com o recurso "Ponto" ou a partir de "Ponto Médio ou Centro", como uma outra opção de recurso.

Consequentemente, com o recurso “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos”, os pontos *C* e *D* poderiam ser marcados, em que *W* seria o centro do círculo, e *A* ou *B* um dos seus pontos traçados. Assim, o círculo construído, que representa uma circunferência, intercepta a reta *s* em dois pontos: *C* e *D*.

A fim de traçar os pontos restantes (*E*, *F*, *G* e *H*), os alunos poderiam utilizar a ideia de bissetriz mediante o recurso “Bissetriz”, para que fosse possível construir duas retas perpendiculares entre si capazes de passarem na bissetriz do ângulo $\widehat{W}$, de forma que as retas cortassem o círculo nos pontos *E*, *F*, *G* e *H*.

Atividade 03 – Equidistância

No GeoGebra, uma possível construção seria marcar os três pontos *A*, *B* e *C* a partir da construção de um triângulo qualquer, utilizando o recurso “Polígono” existente na quinta ferramenta do software. Esses pontos seriam os vértices do triângulo *ABC* e, o ponto *W* deveria possuir a mesma distância dos pontos criados, se caracterizando como o circuncentro desse triângulo.

Com intuito de obter o ponto *W* como o circuncentro do triângulo, os estudantes deveriam determinar as mediatrizes de cada lado do triângulo, através de retas perpendiculares aos lados do triângulo, de forma que passassem no ponto médio dos segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$. Para isso, fazia-se necessário deliberar os pontos médios dos segmentos de reta citados anteriormente utilizando o recurso “Ponto Médio ou Centro”, o qual consta na segunda ferramenta do GeoGebra e as retas perpendiculares a partir do recurso “Reta perpendicular”. As retas traçadas, mediatrizes do polígono triangular, se interceptavam no ponto *W*, circuncentro do triângulo, que por sua vez, eram equidistantes aos vértices do triângulo (*A*, *B* e *C*).

Por fim, com as medianas do triângulo, seria possível obter o centro da circunferência inscrita no triângulo *ABC*.

6.2 Segundo encontro da sequência didática

A seguir temos o arquivo da sequência didática[18] discriminando as atividades mediante o detalhamento das expectativas elencadas pela pesquisadora como possíveis de serem previstas pelos alunos ao realizá-las no software GeoGebra 6.0,

[18]O material da Sequência Didática com todas as atividades (conforme o estudante recebeu) se encontra no apêndice.

bem como observações importantes da pesquisadora para as construções no software e possíveis formulações (hipóteses) dos estudantes no desenvolvimento das atividades.

Para a análise das questões indicaremos as expectativas previstas por E, e, quando for prevista mais de uma expectativa, chamaremos de E1 a expectativa 1, de E2 a expectativa 2, e assim por diante. Usamos a mesma linha de indicação para as justificativas (J, J1, J2, ...), para as formulações (F, F1, F2, ...) e, para as observações (OSB.1, OBS.2, ...).

---

a) Para a construção de um triângulo o que precisamos saber? Como devemos proceder no GeoGebra?

Expectativas da letra a)

E1. Espera-se que os estudantes conheçam as condições de existência de um triângulo e os seus elementos (vértices, lados, ângulos internos e externos) e aplique esses conhecimentos como estratégia de construção;

E2. Ao construir triângulos no GeoGebra, os alunos poderiam verificar que com o 5º botão na barra de ferramentas seria uma possibilidade de construção, visto que o símbolo do botão é um triângulo;

E3. Os discentes poderiam representar a construção de um triângulo com base em assuntos geométricos estudados anteriormente, a exemplo: marcar três pontos não colineares, ligar os pontos formando segmentos de reta que seriam os três lados;

E4. Os estudantes poderiam argumentar que a construção de um triângulo é possível a partir da construção/manipulação de três circunferências.

Outras estratégias mais complexas poderiam ser pensadas, todavia não são esperadas para o 8º ano do Ensino Fundamental de acordo com a BNCC (2017).

---

b) Ao mover o triângulo ABC o que acontece com a soma = $\alpha + \beta + \gamma$? Justifique a sua resposta.

Expectativas da letra b)

E1. Espera-se que os estudantes saibam previamente que as letras minúsculas do alfabeto grego, como por exemplo, α, β e γ, vistas no GeoGebra durante a construção do primeiro triângulo representam os seus ângulos internos;

E2: Ao mover o formato do triângulo vai mudar, bem como, os elementos (ângulos, lados e vértices), porém a soma dos ângulos internos de um triângulo continua sendo 180°.

Possíveis justificativas:

J1: Ao mover um vértice do triângulo no GeoGebra, o seu formato/estrutura/medida é modificado (empírica);

J2: A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° (constante). Espera-se que no 8º ano os estudantes já tenham esse conhecimento matemático.

---

c) Desenhe um triângulo A’B’C’ no GeoGebra de forma que coincida com o triângulo ABC. Para isso o que é preciso?

Expectativa da letra c)

E: Espera-se que os estudantes saibam os conceitos sobre semelhança e comparação de triângulos, dentre os conceitos que antecedem a congruência de triângulos.

Observações importantes:

OBS.1: A letra **c)** é a primeira atividade da sequência que explora a congruência de triângulos. O triângulo ABC foi o que os estudantes construíram anteriormente, em que identificaram os elementos de um triângulo, por exemplo. Em seguida, é preciso desenhar um novo triângulo, por isso eles deverão entender que para verificar se triângulos são congruentes faz-se necessário termos pelo menos dois triângulos a fim de estabelecermos comparações, uma vez que, a sequência seria aplicada em duas aulas, tornando a comparação dos triângulos não muito explorada, de porte que pelas orientações estabelecidas para o professor, os estudantes já seriam orientados a construir um triângulo considerando a congruência.

OBS.2: A partir da letra **c)** foi criada uma orientação, passo a passo, para o professor acerca da construção de um triângulo congruente (8 passos), conforme apêndice. Uma das orientações para o professor foi a de não esquecer de dizer, em hipótese alguma, que de modo mais simplificado, para garantir a congruência, a circunferência precisa estar circunscrita ao triângulo.

OBS.3: Um aspecto relevante do GeoGebra para a compreensão da construção de triângulos, particularmente para a questão de congruência, é que ao mover um elemento do triângulo todos os outros elementos serão alterados.

OBS.4: Nessa atividade primeiro foi criado um triângulo qualquer, já para o segundo triângulo precisou do triângulo qualquer (triângulo inicial) para ser construído, assim seria possível comparar se os triângulos são congruentes.

---

d) Para a congruência de dois triângulos o que é necessário determinar?

Expectativa da letra d)

E: Espera-se que os estudantes percebam que o segundo triângulo depende das características do primeiro. Eles precisam conhecer as propriedades de um triângulo e de outros elementos da geometria, como por exemplo: ponto, reta, plano, semirreta, segmento de reta, posição relativa entre retas, medidas angulares, circunferência, entre outros.

---

e) Ao movimentar os vértices dos triângulos construídos encontre triângulos congruentes do tipo Equilátero, do tipo Isósceles e do tipo Escaleno. Escreva na tabela abaixo as medidas dos lados e dos ângulos encontrados.

Expectativa da letra e)

E: Espera-se que os alunos observem que pela movimentação dos elementos de um triângulo, possibilitadas pelo GeoGebra, será possível construir todos os tipos de triângulos.

Observações importantes:

OBS.1: Essa é uma atividade mais manipulativa, com registros numéricos, sem uma análise mais refinada (aprofundada).
OBS.2: As letras **e)**, **f)** e **g)** são complementares. De acordo com os passos da SD, na letra **e)** temos a "AÇÃO" da sequência, na **f)** a "FORMULAÇÃO" e na letra **g)** a "INSTITUCIONALIZAÇÃO". Essas três fases iniciais "ação e formulação" são ligadas ao aluno, enquanto a "institucionalização" ao professor.

---

f) A partir da congruência dos dois triângulos e seus movimentos no GeoGebra, o que você observou?

Momento de "FORMULAÇÃO" na letra f) por parte dos alunos
F1: Para analisar se dois triângulos são congruentes pode-se partir da medida de seus lados, de seus vértices ou de seus ângulos, ou seja, partir de um elemento do triângulo;
F2: A movimentação que for realizada em um triângulo, necessariamente acontecerá no segundo triângulo, pois o segundo triângulo foi construído a partir dos elementos do primeiro.
F3: As propriedades dos triângulos não são alteradas. Por exemplo, independentemente das movimentações, a soma dos ângulos internos continuam sendo 180°;
F4: O que determina um triângulo ser equilátero, isósceles ou escaleno são as medidas dos seus lados;
F5: Os triângulos congruentes, ao serem movimentados podem apresentar três lados iguais, apenas dois lados iguais e um ângulo correspondente, apenas um lado e dois ângulos correspondentes, dois ângulos iguais e um lado correspondente. Aqui temos uma formulação a priori dos casos de congruência de triângulos que serão institucionalizados pelo professor na letra **g).**

g) Quais as suas considerações sobre congruência de triângulos e seus casos LLL, LAL, ALA e LAA_o?

Momento de "INSTITUCIONALIZAÇÃO" na letra g)

Nessa atividade o professor entra com o saber, explicando-o formalmente, ou seja, na linguagem matemática, pois cabe exclusivamente a ele. A orientação para o docente é que a intervenção dele fosse a menor possível, assim a fase de "institucionalização" só aparece no fim de toda a Sequência Didática. Dessa maneira, nas atividades anteriores o professor comporta-se como o mais sucinto possível, conduzindo o aluno a construir o conhecimento. Portanto, as fases de "ação e formulação" foram acontecendo várias vezes durante a Sequência Didática. Nem sempre é possível identificar se uma fase é puramente só ação ou formulação, mas que essas fases iniciais, sobretudo essas três: ação, formulação e validação são ligadas aos alunos e acontecem sequencialmente. Por outro lado, conseguimos perceber com clareza que na letra **e)** temos puramente a ação; já na letra **f)** temos a formulação.

Observações importantes:

OBS.1: Nessa letra **g)** o professor sinaliza que quando os alunos movimentaram os triângulos os casos de congruência de triângulos apareceram.

OBS.2: A institucionalização é possível mediante as formulações da letra **f).**

h) Verifique em cada item se podemos ou não garantir que os triângulos são congruentes sem efetuar medições. Em caso positivo, indique o caso que garante a congruência (LLL, LAL, ALA ou LAA_o).

Expectativa da letra h)

E: Espera-se que os estudantes tenham compreendido o conceito de Congruência de Triângulos e os seus casos, sabendo diferenciá-los e perceber quando dois triângulos não são congruentes.

Observação importante:

Essa atividade não é mais no GeoGebra.

Atividade pós-institucionalização. Nessa letra h) os estudantes são submetidos a colocar em prática o que aprenderam durante as atividades anteriores.

CAPÍTULO VII
7 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Tendo realizado o nosso estudo, apontaremos alguns aspectos relevantes sobre a análise da sequência didática com os recortes das falas do professor e dos alunos, como também os recortes dos arquivos das construções dos estudantes no GeoGebra 6.0, observando a modelagem da TSD de Brousseau. Ressaltamos que, ao analisarmos os dados construídos, estaremos evidenciando o nosso objetivo, mencionado anteriormente, que é analisar os efeitos de uma sequência didática utilizando o software GeoGebra no ensino do saber geométrico envolvendo o estudo de Congruência de Triângulos no 8º ano do ensino fundamental.

7.1 Análise do 1º e 2º encontros da aplicação da sequência didática de Congruência de Triângulos

Como citado anteriormente, a sequência didática foi composta por dois encontros: familiarização com a ferramenta e desenvolvimento da sequência propriamente dita, sendo a primeira destinada ao estudante em sua aproximação com o software GeoGebra, a partir de conceitos sobre ângulos e bissetriz, circunferências e equidistância e, a segunda consistiu em explorar os conceitos de congruência de triângulos.

No decorrer da sequência na sala de laboratório da escola, denominada “Sala 360°”, a turma foi organizada em 9 duplas, visto que havia um total de 18 estudantes. O professor de Matemática da turma investigada se responsabilizou pela organização e montagem das duplas. O quadro 6 apresenta a distribuição dos discentes em duplas.

Quadro 6: Distribuição dos estudantes investigados em duplas

Duplas	Alunos
D01	A03 e A16
D02	A05 e A12
D03	A08 e A11
D04	A01 e A14
D05	A06 e A09
D06	A02 e A15
D07	A04 e A10
D08	A07 e A13
D09	A17 e A18

Fonte: Dados da pesquisa

A seguir, apresentamos a análise dos dados produzidos em cada um dos dois encontros da sequência didática. É importante salientar que realizamos uma análise mais refinada apenas no segundo encontro da sequência didática, pois foi a fase que explorou efetivamente a construção do conceito de Congruência de Triângulos e também os seus casos (LLL, LAL, ALA e LAA_o).

7.1.1 Análise do 1º encontro da aplicação da sequência didática de Congruência de Triângulos

O primeiro encontro da sequência teve por finalidade introduzir os conceitos de ângulo, bissetriz, circunferência e equidistância. Para isso, o encontro foi composto por três atividades distribuídas em uma aula de 50 minutos.

No decorrer das atividades do 1º encontro, os alunos passaram pelas três fases da modelagem das situações adidáticas (*ação*, *formulação* e *validação*), vistas no capítulo 1 desse trabalho.

Primeira atividade do 1º encontro – Ângulos e bissetriz

O professor inicia a aula esclarecendo que o trabalho a ser realizado naquele dia seguirá uma dinâmica diferente da usual nas aulas de Matemática. Observemos o recorte de protocolo no quadro nº 07.

Quadro 7: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Hoje nós teremos uma aula diferente. Certo? Essa aula fugirá um pouco da nossa rotina. Normalmente nós seguimos o livro didático para aprendermos novos conceitos matemáticos, fazermos atividades e correções orais, eu explico o assunto e vocês fazem os exercícios. Bem! O que vai acontecer é o seguinte: vamos ter a sequência didática da dissertação de mestrado da professora Fernanda. Fernanda está aqui hoje, mas qualquer dúvida que vocês tenham acerca do tema, vocês perguntam a mim e a gente continua nossa aula. Beleza? Eu não vou falar qual é o assunto, mas como vamos trabalhar algumas situações, depois vocês saberão qual é o conteúdo. Durante as atividades da sequência, nós utilizaremos um software de geometria dinâmica chamado GeoGebra, por isso estamos aqui na "sala 360°" e usaremos o Chromebook. A cada atividade vocês irão gravar os arquivos em documentos na pasta denominada A01 e também explicar oralmente como você pensou para responder as atividades. Em outras atividades também serão feitos registros em fichas, em que vocês responderão de acordo com o que sabem. Nesse momento eu irei dividir a turma em duplas e cada uma ficará numa mesa redonda. [...] Vamos lá! Agora vamos conhecer o software.... Como podem ver aí no software é possível aprendermos vários assuntos matemáticos.

Fonte: Dados da pesquisa

Com o recorte de protocolo do quadro 07, é possível percebermos o início da proposição de uma sequência didática, pois o fato de o professor não explicitar o conteúdo matemático a ser estudado, organizando o meio para que o estudante estabeleça estratégias de resolução das atividades, mantendo a postura de mediador da aprendizagem e dando ao aluno a autonomia para construir o saber, faz com que as propostas da Teoria das Situações Didáticas sejam contempladas.

Afinal, de acordo com Almouloud (2007, p.31), a TSD busca estabelecer um modelo possível de interação entre o estudante, o conhecimento e o *milieu*, em que "a aprendizagem deve se desenrolar".

Dessa forma, no recorte de protocolo do quadro 07 observamos que o *milieu* foi organizado para que fosse possível observar as articulações dos sujeitos na relação didática com outras possíveis relações identificadas numa situação didática (objeto central da teoria das situações didáticas). Conforme Brousseau (2008), a situação didática é munida por um conjunto de relações entre os estudantes, um *milieu* (contendo possivelmente objetos ou instrumentos) e um professor (sendo o sistema educativo) para que os alunos construam um determinado saber.

Pensando nisso, as atividades foram elaboradas partindo das ideias da situação adidática, parte essencial da situação didática. Assim, a sequência didática dessa dissertação buscou não revelar ao estudante a intenção de ensinar, porém ela foi pensada, planejada e construída pela pesquisadora para proporcionar ao aluno condições favoráveis à apropriação de um novo conhecimento geométrico sob a condução do professor regente da turma.

Desse modo, a primeira atividade do 1º encontro da sequência didática explorou a construção de ângulos e suas medidas, bem como o conceito de bissetriz. Nesse sentido, em um primeiro momento, a atividade propunha que os estudantes construíssem um segmento de reta $\overline{AB}$ e uma reta perpendicular ao segmento de reta.

A reta perpendicular deveria passar pelo ponto *A*, e ainda deveria ser traçado, na reta em questão, um ponto *C*. Em seguida, os estudantes foram orientados a moverem os pontos *A*, *B* e *C* da figura, observando se a reta permanecia perpendicular ao segmento de reta $\overline{AB}$, refazendo a construção caso não acontecesse o que foi sugerido. Como também, era necessário estabelecer a relação existente entre a reta perpendicular e o ângulo *CÂB* e a medida do ângulo formado.

Com esse primeiro momento da atividade, os alunos passaram pela *dialética da ação*, que consiste em colocar o estudante numa situação de ação, possibilitando-o julgar o resultado de sua ação e, se necessário, ajustá-lo sem a intervenção do professor, "graças à retroação do *milieu*. Assim, o aluno pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar um outro: a situação provoca assim uma aprendizagem por adaptação" (ALMOULOUD, 2007, p.37).

Em um segundo momento da atividade, os estudantes foram solicitados a traçar um segmento de reta $\overline{PQ}$, depois a construir um ângulo $O\hat{P}Q$ de medida igual a 45°. Em seguida, os alunos deveriam mover os elementos da figura, analisando o comportamento da medida angular, além de explicar como construíram o ângulo $O\hat{P}Q$.

Nesse segundo momento da atividade, os discentes além de passarem novamente pela fase de ação, também passaram pela *dialética de formulação*, pois tiveram a oportunidade de trocar informações em dupla para organizar o raciocínio de construção e explicar oralmente e por escrito como fizeram a atividade.

Segundo Brousseau (2008), a *dialética de formulação* consiste em proporcionar ao aprendiz condições para este construir uma linguagem compreensível por todos, capaz de considerar os instrumentos e as relações matemáticas existentes na situação adidática estabelecida.

Nas construções e manipulações do primeiro momento da Atividade 01, seis duplas (D01, D03, D04, D06, D07 e D09) conseguiram observar que a reta construída permanecia perpendicular ao segmento de reta $\overline{AB}$: *"Quando a gente move os pontos a reta continua perpendicular"* D01; *"A reta CA continua perpendicular à reta AB" D03; "A reta é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ formando um ângulo de 90°"* D04; *"Como foi formado um ângulo de 90°, então a reta com o segmento são perpendiculares"* D06; *"Percebemos que como as retas são perpendiculares se fecharmos o segmento $\overline{CB}$ dá para formar um triângulo"* D07; *"A reta AC é infinita e perpendicular ao segmento traçado"* D09.

Duas duplas (D02 e D05) perceberam que ao traçar uma reta que passasse pelos pontos B e C seria possível construir um triângulo com um ângulo de 90°. Além disso, D08 observou que esse triângulo poderia ser classificado de acordo com as suas medidas, mas não lembrava como diferenciar essa classificação.

No segundo momento da Atividade 01, sobre a construção do ângulo de 45° cinco duplas (D01, D02, D06, D07 e D09) construíram duas retas perpendiculares aos pontos *P* e *Q*. Depois, por meio do ângulo $\hat{P}$ formado com o segmento de reta $\overline{PQ}$ e levando em consideração também a reta perpendicular que passa por *P* (tendo medida de 90°), conseguiram criar um segmento até o ponto *O*, dividindo o ângulo $\hat{P}$ na metade: *"Pegamos o ângulo de 90° e dividimos na metade para chegar em 45° que foi o ângulo solicitado"* D01; *"Nós sabíamos que 45° era a metade de um ângulo reto, daí seguimos essa ideia"* D02; *"Como a gente já havia construído um ângulo reto percebemos que traçando outra reta que dividisse o ângulo $\hat{P}$ ao meio seria possível encontrar 45°"* D06; *"Primeiro nós construímos o segmento, depois a reta perpendicular, por último outra reta que dividisse o ângulo de 90° por 2 e chegamos em 45°"* D07; *"É só observar que 45° é metade de 90°"* D09.

Duas duplas (D03 e D04) utilizaram o recurso da malha quadriculada do software para a construção do ângulo de 45°: *"Utilizamos a malha quadriculada do GeoGebra para chegar em 45°"* D03; *"Com a malha do plano cartesiano encontramos a metade de 90°"* D04.

As outras duas duplas restantes (D05 e D08) construíram o ângulo de 45° apenas usando o recurso da visualização e a possibilidade de arrastar do GeoGebra: *"Simplesmente, a gente moveu o ponto até chegar em 45°"* D05; *"Depois que nós fizemos a figura, usamos o recurso mover para chegar no ângulo pedido"* D08.

Com as análises das respostas das duplas, observamos o debate sobre a certeza das asserções e as interações com o *milieu*, caracterizando a terceira fase da modelagem das situações adidáticas, a *dialética de validação* sobre o conceito de ângulos e bissetriz, uma vez que para Brousseau (2008), essa etapa se caracteriza como aquela em que o aluno deve mostrar a validade de suas asserções, mediante a linguagem matemática, os estudantes conseguiram trazer nas discussões em sala, provas de suas assertivas e refutações nas construções no GeoGebra.

Segunda atividade do 1º encontro – Circunferência

A segunda atividade do primeiro encontro propôs a exploração do conceito de circunferência. Dessa forma, em um primeiro momento, foi solicitado que os estudantes criassem o ponto *W* e uma reta *r* que passasse por esse ponto. Tomando como base a construção, os alunos deveriam a partir do ponto *W* traçar uma reta perpendicular à reta *r* e que passasse por W, depois nomeá-la de *s*. Em seguida, os alunos foram solicitados a marcarem dois pontos *A* e *B* pertencentes à reta *r* e que tivessem a mesma distância do ponto *W*, assim a distância do ponto *W* até o ponto *A* deveria ser a mesma que do ponto *W* até o ponto *B*, tornando-se possível satisfazer a condição de *WA* = *WB*.

Em seguida, sobre a reta *s*, os discentes foram orientados a construir dois pontos *C* e *D*, satisfazendo a condição de *WA* = *WB* = *WC* = *WD*. Depois, com intuito de analisar se a relação estabelecida na atividade havia sido executada, os estudantes deveriam deslocar os pontos das figuras e, se houvesse alguma alteração os discentes teriam de refazer a questão, assim nesse primeiro momento da segunda atividade, os estudantes passaram pela fase de ação.

Em um segundo momento da Atividade 02, os estudantes foram solicitados a construir outros quatro pontos *E*, *F*, *G* e *H*, de modo que continuasse mantendo a relação de distância *WA* = *WB* = *WC* = *WD* = ... = *WG* = *WH*. Além disso, a referida atividade trouxe o questionamento sobre a relação entre os pontos marcados *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* e *H* com o ponto *W*, e sobre a região do plano formada pelos pontos criados, possibilitando aos alunos passarem pela fase de ação e formulação.

De posse das possibilidades de modelagem das construção vistas no Capítulo 5, observamos que no primeiro momento da Atividade 02, cinco duplas (D01, D03, D06, D07 e D09) conseguiram observar a relação de equidistância dos pontos A, B*,* *C* e *D* em relação ao ponto *W*: *"Os pontos possuem a mesma distância até W, mesmo quando movemos os outros pontos"* D01; *"Quando movimentamos o ponto W, as retas ficaram mais visíveis e os pontos continuavam com a distância de antes"* D03; *"As distâncias não foram alteradas"* D06; *"Os segmentos continuam do mesmo tamanho" D06; "Mesmo mudando de lugar com os movimentos dos pontos, mantiveram a distância" D07; "Não modificou a proposta da atividade"* D09.

Duas duplas (D02 e D04) observaram a relação existente apenas entre as retas, não fazendo referência aos pontos que distam do ponto *W*: *"Movendo o ponto W, as retas continuam concorrentes"* D02; *"Quando movimentamos uma reta, a outra também é movimentada, tendo em comum o ponto W"* D04.

No que tange ao segundo momento da atividade, sete duplas (D01, D02, D03, D04, D06, D07 e D08) observaram que os pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* e *H* tinham a mesma distância em relação ao ponto *W*, observando que eram equidistantes: *"Os pontos têm a mesma distância para W"* D01; *"Estão todos a 3 cm de distância para W" D02; "Todos possuem a mesma distância de W"* D03; *"Os segmentos formados são iguais"* D04; *"O ponto W fica entre os outros pontos, mantendo a mesma distância"* D06; *"Todos os pontos possuem a mesma distância até chegar em W"* D07;

“Observando a distância pela malha quadriculada, os pontos têm a mesma distância de W, 2 cm cada” D08.

Apenas uma dupla (D09) conseguiu perceber que a região formada pela união dos pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* e *H* poderia ser chamada de circunferência: *“Podem formar uma circunferência”.* Outras quatro duplas utilizaram outras classificações: *“Poderia formar um octógono regular”* D01; *“Poderíamos formar vários triângulos”* D05; *“Poderíamos formar apenas um círculo”* D06; *“Todos os pontos formam polígonos”* D07. Com esses resultados evidenciamos que os estudantes apresentaram dificuldades em reconhecer a existência de uma circunferência nas construções da Atividade 02, o que nos leva a perceber a importância de trabalhar conceitos geométricos como esse, partindo da atribuição de mais aulas dedicadas ao estudo, justamente por, nesse caso, não ser um assunto tão simples de ser tratado no ensino básico que antecede o oitavo ano do Ensino Fundamental.

Terceira atividade do 1º encontro – Equidistância

A terceira atividade do 1º encontro da sequência didática teve por finalidade possibilitar aos estudantes a determinação do centro de uma circunferência marcando três pontos equidistantes. Com base nessa proposta, em um primeiro momento a atividade solicitou que os alunos marcassem três pontos *A*, *B* e *C* não colineares. Por conseguinte, deveriam criar um ponto *W* de forma que estivessem à mesma distância dos pontos já marcados (*A*, *B* e *C*). Com essa atividade mais uma vez as duplas foram levadas à *dialética de ação* proposta por Brousseau (2008).

De posse dessas construções, os discentes foram orientados a mover os pontos marcados para verificar se a distância entre os pontos permanecia congruente; caso negativo, deveriam refazer a atividade solicitada. Finalizando com a justificativa referente à solução dos problemas propostos. Nesse momento, as duplas passaram pela *dialética de formulação* por meio da troca de informações.

Apenas a dupla de estudantes (D01) construiu um triângulo fazendo uso da modelagem prevista no capítulo 5 para essa atividade: *“Primeiro a gente criou o triângulo e colocou o ponto W no centro dele, assim foi possível ter todas as distâncias iguais”* D01.

Quatro duplas (D03, D04, D06 e D09) não citaram o ponto médio, apenas referenciaram a circunferência durante a construção: *“Só foi possível mexer quando* *construímos um círculo, porque antes não se mexia. Percebemos que como o círculo tem raio a distância seria a mesma"* D03; *"A distância permanece a mesma, pois na circunferência a distância do centro até qualquer ponto forma um raio que é igual aos outros"* D04; *"Com as ferramentas do GeoGebra nós conseguimos deixar os pontos com as mesmas distâncias"* D06; *"Usando a ideia de circunferência é possível manter as distâncias iguais mesmo movendo os pontos"* D09.

Uma dupla (D02) construiu uma circunferência a partir de três pontos *A*, *B* e *C* e considerou o ponto médio como o centro: *"Primeiro colocamos três pontos distantes um do outro, com a ferramenta do GeoGebra fizemos um círculo com os pontos pertencendo a ele, depois marcamos o ponto do meio que era o centro"* D02.

Uma dupla (D07) percebeu que os pontos marcados eram equidistantes: *"Como W é o ponto central, os outros ficam a mesma distância dele"* D07. Entretanto, duas duplas (D05 e D08) não conseguiram estabelecer a relação de equidistância: *"Toda vez que movemos os pontos eles ficam com valores diferentes, umas medidas maiores e outras menores"* D05; *"Quando os pontos são movidos, as medidas mudam"* D08.

Com base nas respostas das duplas, percebemos que os estudantes passaram pela terceira etapa da modelagem das situações adidáticas, a *dialética de validação*, uma vez que as discussões sobre as asserções formuladas nos momentos de ação e formulação contribuíram para a validade do conceito de circunferência. Para essa etapa, as duplas conseguiram mostrar a validade das construções, sejam elas positivas, para os estudantes que apresentaram construções condizentes com as propostas dos enunciados das questões, ou em processo de construção, para os alunos que não conseguiram verificar os elementos necessários para provar a equidistância das figuras no GeoGebra, no primeiro momento e tiveram de refazer a atividade.

Assim sendo, as duplas passaram por discussões entre si, tornando o *milieu*, conforme Almouloud (2007, p.39) configura, como uma possibilidade "de estabelecer provas ou de refutá-las". Dessa maneira, durante as discussões, as duplas buscaram organizar as interações com o *milieu* permitindo validar as asserções que foram formuladas nos momentos de *ação* e de *formulação*.

7.1.2 Análise do 2º encontro da aplicação da sequência didática de Congruência de Triângulos

O segundo encontro da sequência didática foi composto por duas atividades paralelas que trabalharam de forma efetiva o conceito de congruência de triângulos, sendo a primeira atividade com nove questões para serem executadas no GeoGebra e a segunda atividade complementar, contendo perguntas da letra a) até a letra h) para registros escritos na ficha impressa, a partir da manipulação dos triângulos construídos no GeoGebra pela atividade 1.

Vale ressaltar que as propostas dessas atividades foram pautadas a partir de fases adidáticas da situação didática, vistos no tópico 1.2 dessa pesquisa, uma vez que o professor não revelou aos estudantes a intenção de ensinar, ou seja, o conhecimento matemático que seria estudado. Ao contrário, a situação didática e o *milieu* foram planejados/organizados para que fosse possível o aluno construir os conceitos do novo saber com autonomia e o professor tivesse a postura de mediador da aprendizagem.

De posse dessas informações, cada atividade (manipulação no software e registros na ficha) será analisada separadamente, sendo a primeira com análise das falas dos estudantes, por meio das gravações (em áudio e do GeoGebra) e registros no diário de bordo, e a segunda com análise nos registros da ficha impressa. Apesar das duas atividades desse encontro terem os mesmos objetivos, de forma que uma complementa a outra na construção dos dados, organizamos a análise separadamente, para uma melhor compreensão do leitor.

Nesse segundo encontro da sequência didática, a tipologia das situações adidáticas apareceu até a sua última etapa, assim os estudantes passaram pela *dialética de ação, de formulação, de validação e de institucionalização*.

Brousseau (2008) modela as situações adidáticas como se fosse um jogo em que os estudantes dispõem de estratégias capazes de permitir compreender o problema e as regras do jogo, partindo de um conhecimento prévio. E, no momento em que o *milieu* lhe permite retroações, também permite ao sujeito perceber que as estratégias utilizadas não irão ganhar o jogo, sendo necessário refazer o processo através de estratégias cognitivas que viabilizem o conhecimento visado, tornando possível ganhar o jogo por meios didáticos.

Nessa linha de raciocínio, o *milieu* para esse segundo encontro da sequência didática também foi organizado a partir das *variáveis didáticas* estabelecidas pelo autor, sendo aquelas em que para a análise das asserções, se necessário, os estudantes modificam as estratégias pertinentes para resolver um problema, potencializando o desenvolvimento da situação adidática pretendida.

Em sequência, analisamos as atividades do segundo encontro da sequência didática desta dissertação com base na modelagem das situações adidáticas propostas por Brousseau (2008) na teoria das situações didáticas, vistas no Capítulo 1, conforme citado anteriormente.

Atividade do segundo encontro – construção no software

A primeira atividade da sequência didática objetivou construir um triângulo ABC congruente a um triângulo A'B'C' e identificar os casos de congruência de triângulos. Dessa forma, em um primeiro momento, a atividade solicitou que os estudantes criassem um triângulo qualquer e observassem o que aparece na sua construção. Eles perceberam que apareceram as letras A, B e C indicando os vértices do triângulo com suas respectivas coordenadas no campo algébrico, como também letras minúsculas a, b e c indicando os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ do triângulo construído. Observemos o recorte de protocolo do quadro nº 8.

Quadro 8: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Olha, vocês já criaram o triângulo qualquer. Agora eu quero que vocês observem no software o que foi que apareceu além do triângulo.

A – Umas continhas.

A – Umas coordenadas.

P – Umas coordenadas, certo. E elas indicam o quê?

A – São os vértices dos triângulos.

P – Certo. Então esses pontos A, B e C são chamados de quê?

A – Vértices.

P – Ótimo. E essas "partesinhas" aqui a gente chama de quê?

Als – Lados.

P – Lados, ok. Então, os vértices A, B e C e os lados a, b e c apareceram nos dois lugares, no campo algébrico e no campo geométrico representado pelo plano cartesiano.

....

A – Professor, quando a pessoa clica na letrinha b, por exemplo, do ponto A até o ponto C fica em destaque. Isso é para representar o lado?
P – Isso mesmo, como nós aprendemos o segmento começa em um ponto e termina em outro, no seu exemplo temos o segmento $\overline{AC}$*, daí essa letrinha representa o valor desse segmento que você acabou de exibi-lo.*

Fonte: Dados da pesquisa

Durante as transcrições do segundo encontro, observamos que existiu um jogo didático: ora o professor perguntava e os alunos respondiam, ora o professor retomava a pergunta e eles respondiam novamente. Com o recorte de protocolo do quadro 8, percebemos que as três primeiras fases da tipologia das situações não aconteceram necessariamente de forma sequencial, afinal após a construção de um triângulo qualquer, os estudantes foram questionados quanto aos elementos dos triângulos, apresentando nesse momento de respostas a *dialética de validação*.

Essas observações condizem com as propostas pela teoria das situações didáticas de Brousseau (2008), uma vez que quando os sujeitos são colocados em situações suscetíveis de provocar aprendizagens, as tipologias das situações não necessariamente são sequenciais, podendo as fases (situações de ação, de formulação e de validação) acontecerem simultaneamente, apenas a última fase, situação de institucionalização, acontece no final das construções com a participação ativa do professor ao expor convencionalmente e explicitamente o estatuto do saber matemático.

Essa primeira atividade solicitou ainda que os alunos determinassem a medida dos comprimentos dos lados e a medida dos ângulos internos do triângulo ABC, além de mover os vértices analisando o que ocorreria. A finalidade aqui era fazer com que os estudantes percebessem alguns elementos e propriedades dos triângulos, como: *(i) todo triângulo tem três vértices, três lados e três ângulos internos; (ii) os lados e ângulos de um triângulo podem ser iguais e/ou diferentes tendo classificações distintas de acordo com essas medidas; (iii) a condição de existência de um triângulo é que só será possível construí-lo se, e somente se, os seus lados obedeceram à seguinte regra: um de seus lados deve ser maior que o valor absoluto (módulo) da diferença dos outros dois lados e menor que a soma dos outros dois lados; (iv) a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°.*

Na construção do triângulo ABC, o professor regente, com a postura de mediador da aprendizagem, perguntou aos alunos quais os elementos dos triângulos e eles responderam que são vértices, lados e ângulos. Assim, após identificarem esses elementos, o professor pediu, conforme atividade, para eles encontrarem as medidas dos lados e ângulos internos do triângulo construído, utilizando as ferramentas do GeoGebra.

Nesse caso, evidenciamos que mesmo o software GeoGebra favorecendo a determinação das medidas dos comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos do triângulo, tornando, assim, possível para os alunos realizarem correções na construção do polígono, respeitando suas propriedades, a dupla D08, entretanto, construiu o triângulo apenas considerando a sua aparência física, sem uma justificativa baseada em linguagem matemática. Observou-se que a dupla apresentou dificuldade nas fases de ação e formulação, quando construiu o polígono e ao identificar *iii) a condição de existência de um triângulo é que só será possível construí-lo se, e somente se, os seus lados obedeceram à seguinte regra: um de seus lados deve ser maior que o valor absoluto (módulo) da diferença dos outros dois lados e menor que a soma dos outros dois lados*, respectivamente.

O recorte de protocolo do quadro n° 9 ilustra o que discutimos acima.

Quadro 9: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Agora que vocês encontraram as medidas dos lados do triângulo, me digam se elas têm alguma relação. Existe alguma propriedade que fale sobre isso?

A – Todo triângulo tem que ter apenas três lados, só isso. Por exemplo: com três lados construímos um triângulo.

Fonte: Dados da pesquisa

Cinco dessas duplas (D02, D04, D05, D07 e D08) apresentaram produções apenas na fase de ação, não conseguindo formular e validar o conceito, assim essas cinco duplas passaram por situações de ação, mas nas situações de formulação e de validação[19] sentiram dificuldades, pois não conseguiram sozinhos encontrar os ângulos internos. Com a ferramenta “ângulo” no GeoGebra, os participantes mediram

[19]Teoricamente, uma *situação de ação* consiste em colocar os sujeitos suscetíveis a tomar decisões, para que seja possível expor em prática os seus saberes ao resolver determinado problema, sendo o momento de surgir um conhecimento não formulado matematicamente. Uma *situação de formulação* é aquela em que os participantes são levados a explicitar as estratégias utilizadas. Para isso, eles precisam formulá-las verbalmente, transformando o conhecimento implícito em explícito, assim o aluno retoma sua ação em outro nível e consequentemente se apropria do conhecimento de maneira consciente. Já na *situação de validação*, o estudante não comunica apenas uma informação, ele também precisa afirmar a veracidade dos fatos dentro de um sistema determinado, nessa fase sua estratégia é demonstrada para interlocutores (BROUSSEAU, 2008).

os ângulos internos do triângulo. Apesar de o professor deixar claro que a medição correta seria clicar nos vértices dos triângulos no sentido anti-horário e em relação ao vértice/ponto do meio, demonstraram não saber usar tal sentido. Houve inúmeras tentativas para esta situação, a maioria dos alunos ao utilizarem o sentido incorreto encontrava o ângulo externo e não o interno na tela do GeoGebra. Ao observarem os ângulos medidos pelo professor colaborador, percebiam que os deles não estavam corretos. Observemos o recorte ilustrativo no quadro n° 10.

Quadro 10: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

A1 – Professor, eu fiz um ângulo externo. (Sorrisos)

A2 – Eu também. (Sorrisos)

P – É porque vocês fizeram ao contrário, tenta fazer usando a sequência A$\hat{B}C$, no sentido anti-horário (na ordem alfabética) para achar o ângulo $\hat{B}$. Façam isso em todos os outros. Encontrem os três ângulos internos do triângulo ABC.

A1 – Professor, vem cá!

A2 – Professor! Professor! Vem aqui também!

A3 – Professor, o meu só está ficando o inverso.

A4 – Eu também não estou conseguindo.

A – Professor, eu só tô conseguindo fazer o externo.

P – Tente seguir a sequência.

A – O meu já está aparecendo os ângulos internos.

P – Só um instante! Eu vou passar em todas as duplas orientando.

....

P – Vai ficar mais ou menos assim, olha [...].

Aqui o professor não estabelece mais o papel de mediador e mostra ao aluno um modelo a seguir.

A – Ah!!!

P – Certo? Apareceu isso aí, tá vendo? Para visualização melhor do ângulo, eu vou mover aqui e puxar o ângulo para eu ver melhor.

Fonte: Dados da pesquisa

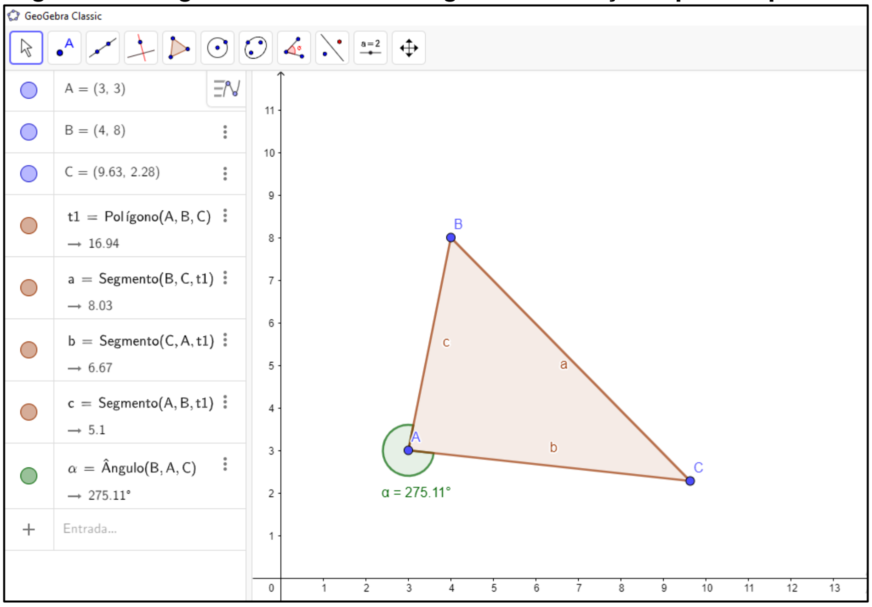
Observando os erros dessas cinco duplas podemos ressaltar de positivo que ao verificarem que o sentido utilizado para traçar os ângulos internos do triângulo ABC não estava dando certo, automaticamente eles apagavam e tentavam novamente em outro sentido. Dessa forma, puderam realizar diversas maneiras de validação[20] e

---

[20]Os estudantes perceberam que para encontrar os ângulos internos de um triângulo era preciso seguir uma sequência no GeoGebra; identificaram qual o processo para encontrar ângulos externos; diferenciaram as medidas dos ângulos internos e externos de um triângulo; identificaram os elementos e algumas propriedades de um triângulo.

entender a forma correta para encontrar as medidas dos ângulos no software. A figura 28 (dupla D07) ilustra esse tipo de produção.

Figura 28: Ângulo externo do triângulo ABC traçado pela dupla D07



Fonte: Dados da pesquisa.

Após a dupla D07 dizer que não estava conseguindo traçar os outros ângulos internos, apenas ângulo externo, o professor não manteve mais o papel de mediador da aprendizagem e mostrou aos estudantes um modelo a seguir. Nesse momento, aconteceu uma ruptura das regras negociadas entre a pesquisadora e o professor. Isso mostra que o docente não conseguiu se desprender da prática que costumeiramente desenvolvia na sala de aula.

Em sequência, outras duplas (quatro no total) conseguiram realizar a atividade e orientaram os colegas que sentiram dificuldades, mostrando seu raciocínio. Assim, foi possível identificar as trocas de informações entre as duplas. Além disso, os estudantes passaram pela fase de formulação das propriedades ao moverem os triângulos, conforme protocolo do quadro 11. É possível perceber o entusiasmo dos alunos ao movimentarem o polígono.

Quadro 11: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

Outros alunos conversam entre si mostrando os raciocínios...

A – Quando eu movo o meu, os formatos vão mudando, vão ficando diversos triângulos.

A – O meu também faz isso, olha...

A – Que massa!

Fonte: Dados da pesquisa.

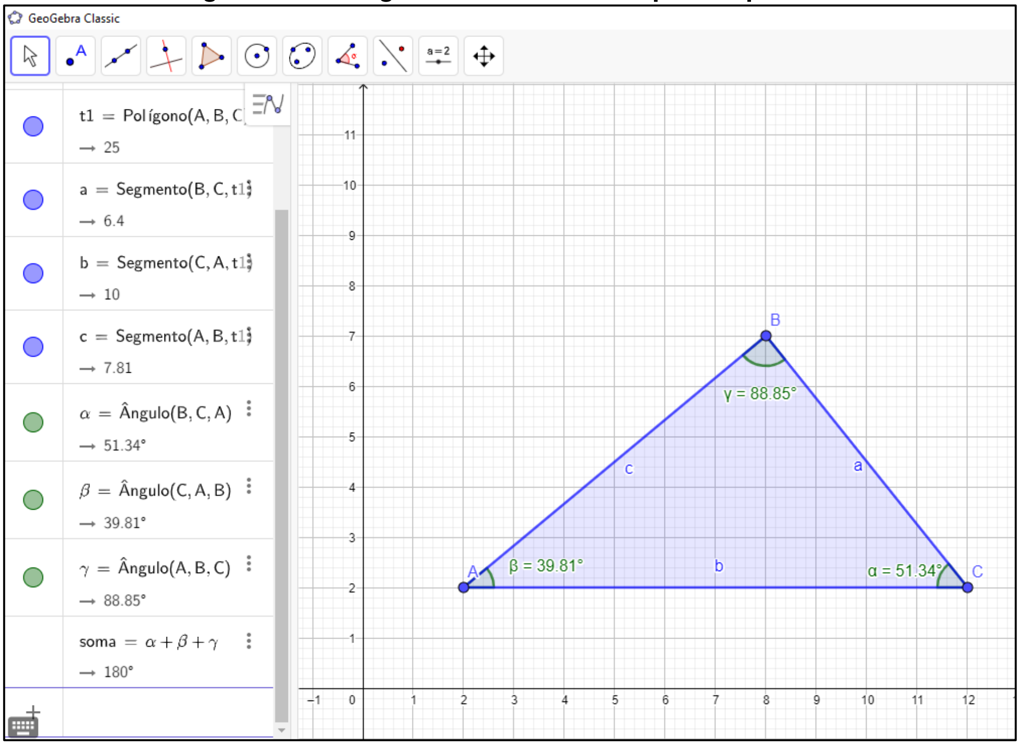
No momento seguinte, após encontrar as medidas dos lados e ângulos internos do triângulo ABC, a atividade orientou que os alunos observassem que no canto inferior esquerdo do software tem o campo “Entrada”. Eles deveriam digitar “soma = $\alpha + \beta + \gamma$” e dar um *enter* verificando o que ocorreria no campo algébrico, em seguida mover os pontos da figura, para continuar analisando o que aconteceria com essa soma. Nesse sentido, eles poderiam evidenciar que: *(iv) a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°.*

No item 4.4.3.2 vimos como os alunos poderiam resolver a atividade no software GeoGebra partindo do princípio de que eles já teriam conhecimento dos elementos, propriedades de características dos triângulos. Analisando as produções das duplas de alunos no GeoGebra, verificamos que três duplas (D01, D03 e D06) apresentaram construções características ao item 4.4.3.2. Na figura 01 encontramos um exemplo mostrando esse tipo de produção (dupla D03).

Dessa forma, verificamos que a dupla D03 construiu o triângulo considerando seus elementos e propriedades *(i) todo triângulo tem três vértices, três lados e três ângulos internos, (ii) os lados e ângulos de um triângulo podem ser iguais e/ou diferentes tendo classificações distintas de acordo com essas medidas e (iv) a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°.* Consequentemente, nesse primeiro e segundo momentos dessa atividade, ela passou pela fase de ação enquanto construía o triângulo, pela fase de formulação por ter considerado os elementos e propriedades de um triângulo e de validação ao verificar no campo da álgebra do GeoGebra que a soma dos ângulos internos de um triângulo permanecia sendo sempre 180° mesmo quando os valores dos ângulos mudavam.

Na figura 29, os estudantes usaram o recurso da malha quadriculada do software, que pode ter contribuído para eles terem precisão na atividade.

Figura 29: Triângulo ABC construído pela dupla D03



Fonte: Dados da pesquisa.

As produções das duplas de estudantes D01, D03 e D06, assim como as outras duplas analisadas nessa pesquisa evidenciaram que eles apresentam dificuldades em compreender e aplicar a propriedade *(iii) a condição de existência de um triângulo é que só será possível construí-lo se, somente se, os seus lados obedeceram à seguinte regra: um de seus lados deve ser maior que o valor absoluto (módulo) da diferença dos outros dois lados e menor que a soma dos outros dois lados*, o que exige a necessidade de o professor regente da disciplina de Matemática realizar um trabalho mais sistemático em sala de aula. Os estudantes conseguem perceber que o triângulo é um polígono que possui três lados, todavia não apresentaram nas produções, nem tampouco nas falas e registros escritos a propriedade *(iii)* ao construírem os triângulos no software GeoGebra.

No recorte de protocolo do quadro12 a seguir, observamos que algumas duplas (D01, D02, D03, D06 e D07) passaram pela fase de validação da propriedade *(iv) a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°*, outras (D04, D05, D08) que não conseguiram voltaram na fase de ação e de formulação para conseguir validar o processo. Ao validarem a atividade, todos os alunos constataram a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Quadro 12: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Após digitar "soma = α + β + γ" deem um enter.

A – 180°. Apareceu 180°! Que massa!

P – Isso! 180° todo mundo?

A – Não!

P – Então, refaz o processo.

A – Deixa eu te ajudar. "Pera"!

Algumas duplas sentem dificuldades e refazem o processo. As duplas se ajudam e o professor passa orientando baixinho cada dupla ou integrante da dupla que não conseguiu.

A – Amigo, deixa eu te ajudar. Apaga esse que você fez. Sabe apagar? Apaga aí... Aí escreve assim "soma = α + β + γ", depois dar um enter.

P – Beleza, pessoal! Vamos continuar. Agora movam os vértices do triângulo ABC e me digam o que acontece com os ângulos.

A – Os valores dos ângulos mudam.

A – Os ângulos do meu triângulo também mudaram para outros valores e são diferentes da minha dupla.

P – Certo. Mas, o que acontece com a soma desses ângulos internos?

A – Continua 180°.

A – Isso mesmo.

Nesse momento, todos os alunos constam que a soma permanece sendo 180°.

P – E vocês acham que isso acontece por quê?

A – Porque a soma sempre vai ser 180°, já que é um triângulo.

P – Todos concordam?

Als – Sim!

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse momento, o professor foi até a pesquisadora para tirar algumas dúvidas sobre a sequência didática, em especial pedir orientação sobre o manuseio de algumas ferramentas do GeoGebra. Em seguida, ele procede com a sequência e, na maioria das vezes, busca manter a postura de mediador da aprendizagem não revelando os conhecimentos geométricos que serão abordados, assim os alunos continuam a atividade com entusiasmo a cada descoberta. Podemos perceber no recorte de protocolo do quadro 13.

Quadro 13: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Pronto pessoal, agora que todos já construíram o triângulo qualquer, identificaram os vértices, os lados e os ângulos internos desse triângulo vamos prosseguir com mais descobertas a partir de outras construções.

A – Professor, o senhor vai trazer a gente mais vezes aqui?

A – Poderia ser uma vez na semana.

P – Vamos ver a possibilidade.

Fonte: Dados da pesquisa.

Em um terceiro momento da atividade, os estudantes são questionados quanto à classificação dos triângulos de acordo com as medidas dos seus lados e dos seus ângulos, diferenciando ângulos agudos, retos e obtusos através da movimentação do triângulo referentes à propriedade *(ii) os lados e ângulos de um triângulo podem ser iguais e/ou diferentes tendo classificações distintas de acordo com essas medidas*. As duplas D02, D05 e D08 apresentaram dificuldades em diferenciar triângulos equiláteros, isósceles e escalenos, bem como os tipos de ângulos internos.

Quadro 14: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Agora movimentem o triângulo ABC e verifiquem a possibilidade da classificação dos triângulos em equilátero, isósceles e escaleno, como também as medidas dos ângulos internos, por exemplo: é possível encontrar ângulos agudos, retos e obtusos?

A – Professor, dá um exemplo de como fazer. Nós não estamos conseguindo.

A – Nós também esquecemos as diferenças dos tipos de triângulos.

A – Isso. Nós sabemos quando é triângulo retângulo que tem ângulos de 90°.

P – É possível um triângulo ter mais de um ângulo de 90°? A soma permaneceria 180°?

Os alunos conversam entre si e manipulam o triângulo no GeoGebra.

A – Não! Só pode ter um ângulo de 90° para a soma dar sempre 180° só pode ter um.

P – Como vocês chegaram a essa conclusão?

A – Quando a gente movimenta os vértices do triângulo ABC, os ângulos são alterados, mas só fica um ângulo com 90°, os outros não chegam nesse valor, pelo contrário, são sempre menores que 90° e quando somamos os três ângulos internos o resultado é sempre 180°.

A – Isso mesmo. No meu caso, o ângulo A do triângulo que construí é 90° graus, daí quando eu movimento os vértices B e C eles vão mudando os graus, mas nunca chegam em 90°, porque já tem o ângulo A com essa medida.

A – Gente, se nós observarmos realmente não seria possível dois ângulos medirem 90°, porque já daria 180° e o outro não poderia ser 0°, caso contrário não formaria um triângulo. Né verdade, professor!?

P – Exatamente.

A – Realmente faz sentido.

Fonte: Dados da pesquisa.

No recorte de protocolo do quadro 14, as duplas D02, D05 e D08 são questionadas a pensar se é possível um triângulo ter mais de um ângulo interno medindo 90° graus, nesse momento eles passam pela fase de formulação prevista na modelagem das situações adidáticas, pois conversam com os colegas sobre a indagação do professor, depois chegam na fase de validação concluindo que em um triângulo só é possível ter um ângulo medindo 90° para que a propriedade *(iv) a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°* permaneça sendo válida.

Posteriormente o docente diferencia os tipos de triângulos classificando-os e dá exemplos diferenciando-os, nesse momento o professor volta à postura habitual de exemplificar, isto é, mostrar um modelo para os alunos continuarem a movimentação, mesmo tendo negociado com a pesquisadora para sempre manter a postura de mediador da aprendizagem, levando os discentes à construção do saber.

De posse dessas informações, os alunos seguem com a movimentação do triângulo ABC para encontrar os diferentes tipos de triângulos e as medidas dos seus ângulos externos fazendo registros na ficha impressa. Duas duplas - D07 e D08 - continuaram com dificuldades em encontrar os tipos de triângulos quanto à classificação dos seus lados e ângulos, dessa forma o professor exemplifica. Observemos os resultados no recorte de protocolo do quadro 15.

Quadro 15: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Tá. Vou mostrar se é possível construir um ângulo de 90°... Vejam! Pronto. Estão vendo? Com a movimentação foi possível construir um ângulo de 90° graus. Assim, como o triângulo tem esse ângulo, qual o nome dele?

Als – Triângulo retângulo.

P – Ótimo.

Algumas duplas não conseguem de imediato, daí chamam o professor e ele faz observações.

P – Vejam só! Prestem atenção aqui. Quem não conseguiu vejam aqui na lousa o que aconteceu. Vou movimentar o ponto A invertendo o movimento. O que aconteceu?

A – Apareceram ângulos externos.

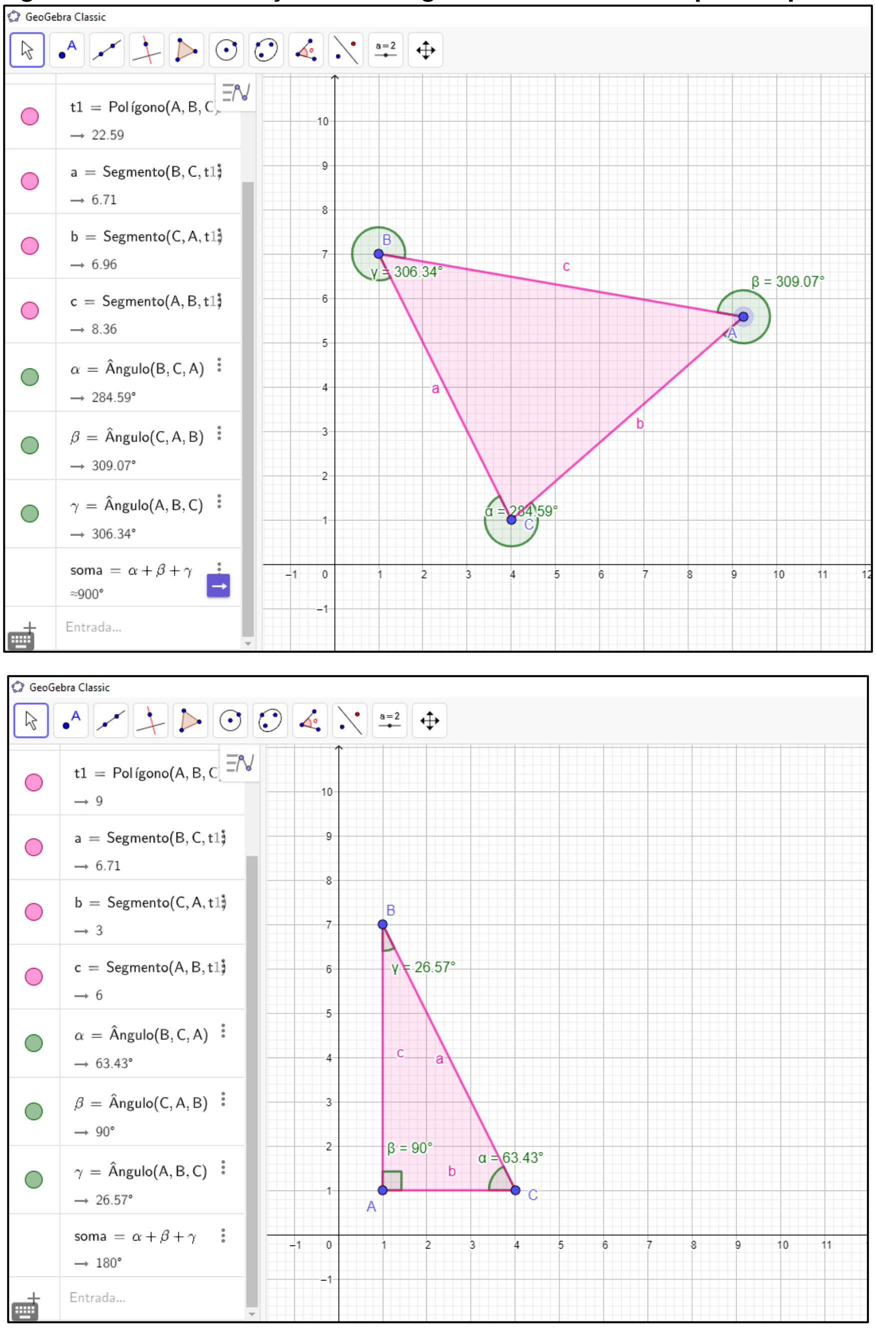
P – E o que houve com a soma?

A – Passou a ser 900 por causa dos ângulos externos.

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse momento de movimentações do triângulo ABC para classificar os tipos de triângulos, os estudantes chegaram a outras análises não previstas nas estratégias da análise a priori: dependendo da movimentação do triângulo ABC a soma é alterada devido à junção de ângulos internos e externos, conforme podemos ver na figura 30 da dupla D02.

Figura 30: Movimentação do triângulo ABC construído pela dupla D02



Fonte: Dados da pesquisa.

Com a geometria dinâmica disponível no GeoGebra foi possível que os alunos formulassem novos conceitos geométricos, mas que de certa forma contribuíram para as análises da construção do saber proposto na sequência didática. Afinal, a partir do momento em que algumas duplas não conseguiram apresentar as medidas dos ângulos internos do triângulo ABC no GeoGebra, momentos de retroações aconteceram, pois eles perceberam que além de não aparecer o ângulo interno desejado, a soma dos ângulos na janela da álgebra do software constava 900°, muito além do esperado que deveria ser 180°.

Nesse momento da atividade, os alunos passaram pela *dialética da ação*, à medida em que as duplas foram colocadas para agir sobre a situação buscando um retorno de informações para suas ações, bem como pela *dialética de formulação* ao trocarem informações entre si na busca de uma linguagem matemática compreensível por todos e que fizesse sentido para a resolução do problema em questão, por fim os estudantes também passaram pela *dialética da validação* ao mostrarem a validade do modelo por eles criado, submetendo assim, ao que Almouloud (2007, p. 39) chamaria de “mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor”.

Após a construção do triângulo ABC, da identificação dos seus elementos e de sua classificação mediante a manipulação no software, os discentes foram instigados para descobrir novos conceitos, mas agora com a construção de um novo triângulo. Nesse momento, o docente volta a postura de mediador da aprendizagem, visto que tinha essa observação nas orientações do professor (Apêndice III). Aqui a sequência didática inicia os princípios para a congruência de triângulos, porém esse conceito não foi revelado para os alunos. Observemos o recorte de protocolo do quadro 16.

Quadro 16: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Vejam só. Psiu! Atenção aqui. Me respondam uma coisa, se eu quisesse construir um novo triângulo, que coincidisse com o triângulo ABC já criado, como eu deveria fazer? Vamos chamar esse novo triângulo de A’B’C’.

A – Deveria construir um triângulo igual?

P – Respondam essa pergunta na letra c) da ficha. Agora vamos seguir alguns passos importantes. Mas, antes alguns organizem os triângulos puxando um pouco para o lado esquerdo e os que tiverem com o triângulo muito grande diminuam. Cliquem em “mover” que vocês conseguem.

A – Assim?

P – Tá ótimo.

Alguns alunos mostram se está correto e o professor sinaliza confirmando que sim.

P – Pronto. Olhem para o quadro agora. Vamos começar alguns passos...

Fonte: Dados da pesquisa.

Com o recorte de protocolo do quadro 16, fica evidente que o saber congruência de triângulos foi brevemente abordado a partir do conhecimento do aluno, que poderia responder sem a interferência do professor, indicando mais informações sobre coincidir figuras, por exemplo, porém nesse instante não foi trabalhado esse conceito, os alunos foram orientados a responder na ficha. Em seguida, as duplas foram orientadas a seguirem os oito passos, vistos no tópico 4.4.2.1 desse trabalho, para uma nova construção e na medida em que os passos são executados, os sujeitos participantes foram questionados sobre as construções realizadas.

Percebemos que aqui os estudantes também poderiam ter sido instigados a responderem como construir um ponto qualquer usando as ferramentas do GeoGebra vistas na barra de comandos. Por outro lado, o professor pede para os alunos olharem e seguirem o exemplo dele, depois segue com questionamentos sobre os resultados das construções voltando às regras negociadas com a pesquisadora. Observemos como procedeu o passo 1 através do recorte de protocolo do quadro 17.

Quadro 17: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Pronto. Olhem para o quadro agora. Vamos começar alguns passos... Apertem no segundo botão e coloquem a opção “Ponto”.

P – Apareceu um ponto D, né?

A – Por que apareceu um ponto D?

P – O que você acha?

A – Ah! Porque já tem os pontos A, B e C?

P – Isso.

A – Posso criar o ponto D em qualquer lugar?

P – Só não pode dentro do triângulo ABC. Coloca em outro lugar, sem ser em cima do triângulo. Depois que vocês criarem o ponto D é para renomear como A’. Vejam!

(O professor explica o passo a passo para renomear)

Os alunos apresentam dificuldades em identificar a tecla que tem o apóstrofo... O professor explica...

P – Vejam que o ponto foi renomeado para A’. Quem não conseguir renomear como A’ pode colocar A1. Então, o primeiro passo é em “ferramentas de ponto” (2º botão) trace um ponto A’ que corresponde ao ponto A do triângulo ABC que você construiu. Renomeando para A’.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, os sujeitos participantes seguiram as orientações para o segundo passo da sequência didática e foram fazendo as construções, apresentando poucas dúvidas. Durante essas criações, os alunos passaram pela fase de ação e formulação, com troca de informações entre as duplas. A exemplo temos o recorte de protocolo do quadro 18.

Quadro 18: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Agora que todos já fizeram isso vamos para o segundo passo. Marquem outro ponto qualquer, mas que não seja muito distante nem tão próximo desse ponto A'.

A – Perto ou longe. (Sorrisos)

O professor e alguns alunos sorriem também.

P – Você entendeu. Nem tão perto, nem tão longe. Pronto, essa distância está boa. Então, nesse segundo passo, vocês irão marcar esse outro ponto qualquer e traçar uma semirreta que passa pelos dois pontos que sirva como base para um novo triângulo. Tracem a semirreta.

O professor dá um tempinho e verifica como está ficando as produções passando pelas mesas.

P – Terminaram?

Als – Sim!

A – Calma, professor! Deixa, consegui.

P – Agora tome compasso com a medida de $\overline{\boldsymbol{AC}}$ *e posicione em A', ou seja, no 6º botão tem a opção "Compasso", daí você clica de A até o C do triângulo antigo. O que apareceu?*

A – Uma circunferência.

P – Isso! Leve a circunferência até que o centro da circunferência fixando em A'. Pronto, a interseção formada se refere ao ponto C', assim marque usando o 2º botão (renomeando). Renomeiem da mesma forma que fizemos anteriormente com A'.

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse segundo passo, os alunos foram levados às construções seguindo as instruções do professor sem muitos questionamentos. Aqui percebemos que os discentes já estavam conseguindo manusear melhor as ferramentas do GeoGebra. Isso implica dizer que, para além das instruções, a experiência com o recurso/software faz com que os alunos se apropriem cada vez mais das suas regras de funcionamento.

Ainda no que diz respeito ao segundo passo, a dupla D04 pede que o docente dê um exemplo, inicialmente ele estimula os alunos a fazerem sozinhos apenas repetindo as informações do passo. Como a dupla não consegue ele explica dando exemplo no quadro, conforme recorte de protocolo do quadro 19.

Quadro 19: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

A – O senhor pode mostrar como faz?

P – Tenta fazer que você consegue. É só seguir os passos.

O professor aguarda um pouco, mas como a dupla não conseguiu ele repete com o exemplo no software.

P – Vou repetir. Olhem para o quadro e depois vocês fazem. No sexto botão tem a opção compasso, daí você clica e seleciona do A até o C, destacando o segmento $\overline{AC}$ *e posicione o centro da circunferência em A'. Viram? É só levar ela até o ponto A', se não tiver movendo é só ir no primeiro botão que tem a opção mover como vimos. Faz!*

A – Tá. Ah! Foi... E agora?

P – Ok. Agora essa interseção que aparece aí você marca como C', ou seja, renomeia.

A – A interseção é o ponto E?

P – Isso mesmo.

A – Entendi. Pera! Consegui.

A1 – Calma, tio! O ponto de conexão da circunferência com a reta eu renomeio?

P – O ponto de interseção da circunferência com a reta você renomeia para C'. Quem não conseguir colocar C', pode ser C1.

Algumas duplas se ajudam e todos conseguem finalizar.

Fonte: Dados da pesquisa.

Durante o terceiro passo as duplas D01, D07 e D08 apresentaram novas formulações diferentes das outras duplas, ao perceberem que a segunda circunferência quase coincidia com a primeira. Assim, nesse momento, os alunos juntamente com o professor observaram que a segunda circunferência tinha quase o mesmo comprimento que a primeira. Cabe destacar que, nesse momento, o professor pediu orientação à pesquisadora para ver se a situação era resolvida dessa maneira.

Desse modo, a pesquisadora apesar de manter uma postura de não-interferência na dinâmica da sala de aula, precisou explicar ao professor o motivo pelo qual as duas circunferências quase coincidiram, assim ela fez isso em particular para o docente poder explicar a turma. Como o triângulo é isósceles, isso realmente pode acontecer. No exemplo do triângulo do professor as medidas dos lados foram 7 cm, 7cm e 7,25 cm, medidas essas bem próximas de um triângulo equilátero, visto que um lado diferente era 0,25 cm a mais que os outros dois lados. Cabe ressaltar que a pesquisadora sanou as dúvidas do professor em particular, fazendo demonstrações no GeoGebra. Podemos observar essas considerações no recorte de protocolo do quadro 20.

Quadro 20: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Psiu! Gente, eu vou fazer novamente esse terceiro passo com vocês.

A – De novo?

P – Sim, para entendermos o porquê de as circunferências terem quase coincidido.

A – Ótimo. Eu quero saber.

A – Tio, os lados dos triângulos poderiam ser diferentes?

P – Sim.

A – Ok.

..

P – Então vejam...

A – Posso falar como foi professor?

P – Pode.

A – A gente selecionou compasso e foi de A até B, arrastou a circunferência deixando o meio dela em cima do ponto A'. Né isso?

P – Isso mesmo, A05. Percebem que no meu exemplo as circunferências quase coincidiram. Vocês acham que isso aconteceu por quê?

A – Não sei, professor. A minha ficou bem distante da outra. Não está como a do senhor.

P – Seu triângulo tem as mesmas medidas que o meu?

A – Ah! Pera, tio. Acho que estou entendendo. Quando as medidas dos triângulos são diferentes, as circunferências podem ficar perto ou longe uma das outras. É isso?

P – Muito bem. Vamos pensar todos juntos... Todos os triângulos são iguais?

A – Não! Existem equiláteros, escalenos e isósceles.

P – Exatamente! Cada um agora começa a olhar o seu triângulo e classifica ele para entendermos o que acontece com as circunferências.

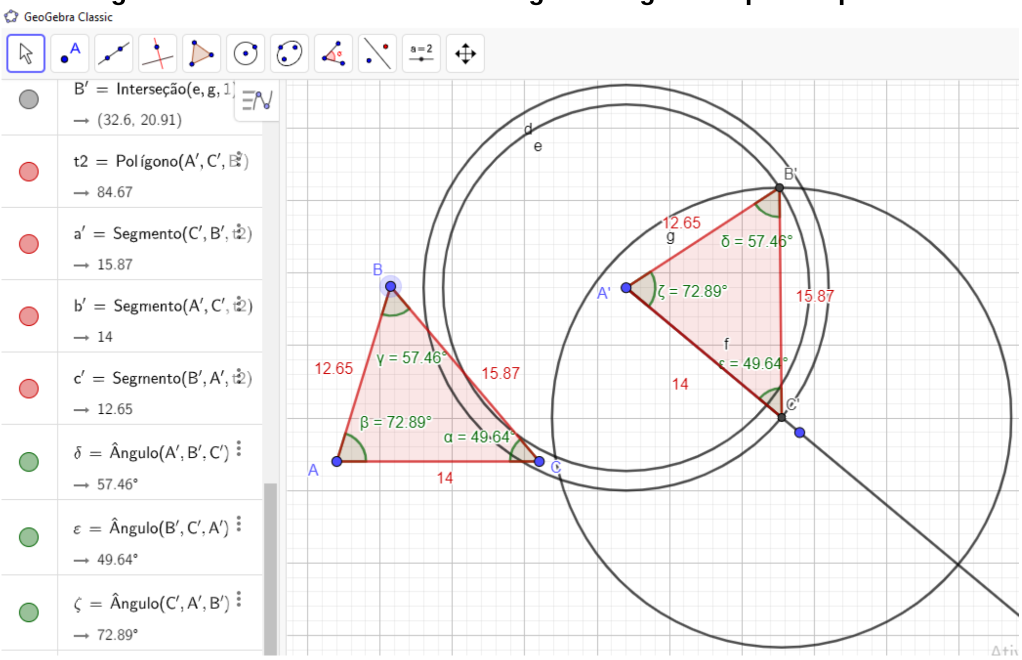
Fonte: Dados da pesquisa.

Com o recorte de protocolo do quadro 20, percebemos que as três fases iniciais das situações adidáticas voltam a acontecer, momentos de ação a partir do momento em que os alunos fazem as construções no GeoGebra, momentos de formulações, quando questionam as dimensões das duas circunferências e das classificações dos triângulos, e momentos de validação dos conceitos vistos na propriedade *(ii) os lados e ângulos de um triângulo podem ser iguais e/ou diferentes tendo classificações distintas de acordo com essas medidas.* Porém, as duplas não conseguiram perceber ainda que a construção de um novo triângulo estava sendo feita a partir dos lados e de circunferências.

Percebemos também que, especificamente, a dupla D06 conseguiu compreender o terceiro passo expondo os procedimentos orientados na sequência didática, dessa forma além do momento de ação, a dupla consegue socializar a sua construção com os demais alunos da sala, formulando conceitos geométricos no tocante à classificação dos triângulos, atendo assim a propriedade *ii)* e, consequentemente a segunda etapa das situações adidáticas, fase de formulação, é evidenciada entre as duplas de estudantes.

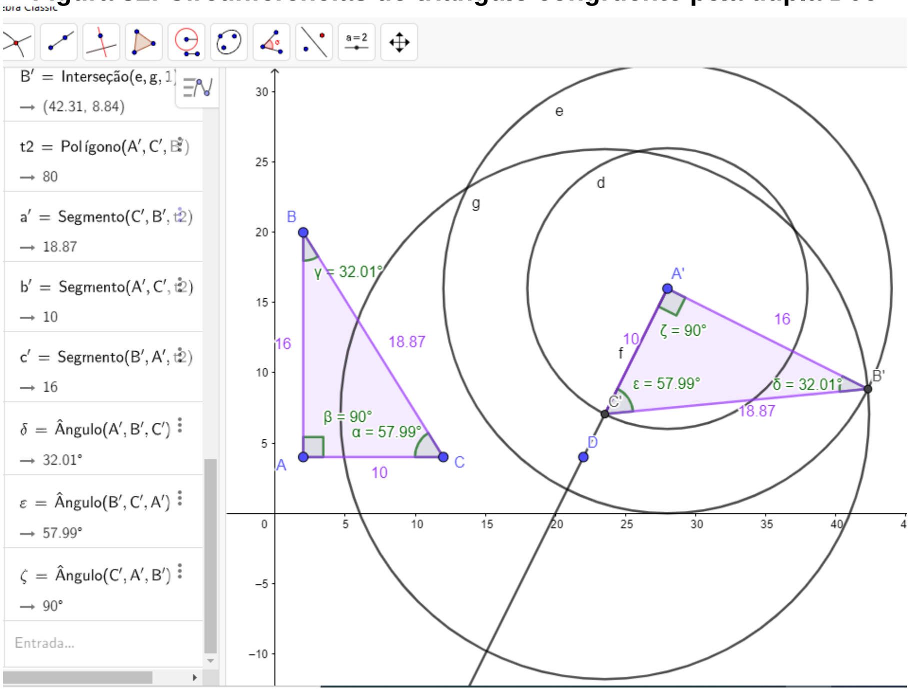
Com isso, nesse terceiro passo, quase todas as duplas (D01, D03, D04, D05, D06 e D07) conseguiram classificar os triângulos e observar as mudanças nas distâncias das duas circunferências em relação ao triângulo construído, ao do colega da dupla e ao do professor chegando à conclusão que o tipo de triângulo determina o comportamento das circunferências. Exemplificando podemos constatar na construção da dupla D01 conforme figura 31 e na construção da dupla D06 com a figura 32.

Figura 31: Circunferências do triângulo congruente pela dupla D01



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 32: Circunferências do triângulo congruente pela dupla D06



Fonte: Dados da pesquisa.

As duplas D01, D02, D03 e D06 conseguiram perceber no quarto e quinto passos a sequência lógica das construções utilizando as ferramentas do GeoGebra e a linguagem geométrica apropriada para interseção de dois objetos como podemos observar no recorte de protocolo do quadro 21.

Quadro 21: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Pronto, gente. Continuando os passos... No quarto passo, vou pegar novamente o compasso e vai medir agora...

A – De B para C?

P – Exatamente, de B para C.

A1 – Deu igual.

A2 – Deu menor.

A2 – Deu maior.

A3 – O meu deu muito maior.

P – Recapitulando... No quarto passo, tome compasso com a medida indo desde o ponto B ao ponto C, segmento $\overline{BC}$ *e centralize em C', isto é, colocamos em cima de C'. Ok?!*

A – Assim? Pera! Vai botar ponto onde elas se encontram?

P – Sim, mas seguiremos outro passo. Veja: No 3º botão, marque o ponto de interseção entre as duas circunferências que seria B', esse é o quinto passo.

A – Na interseção de dois objetos?

P – Isso.

Fonte: Dados da pesquisa.

Por outro lado, a dupla D08 apresentou dificuldade em renomear o ponto E que apareceu, para B’ como é percebido no recorte de protocolo do quadro 22. Após esse momento de conflito cognitivo da dupla D08, a dupla D01 explicou como procedeu, inclusive já identificando o novo triângulo construído, assim as formulações que aconteceram na transição do quinto para o sexto passo foram construídas em conversas com outras duplas.

Quadro 22: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Atenção aqui! Quando vocês marcaram a interseção apareceu o quê?

A – Um novo pontinho.

A – Um ponto E.

P – Ok. Aí vocês vão renomear para B’.

A – Beleza, professor.

A – B maiúsculo ou minúsculo?

P – B maiúsculo, sempre maiúsculo. Pronto, pessoal, agora nós temos os pontos A’, B’ e C’. Agora você vai na circunferência, qualquer uma das duas e vai em exibir objeto para sumir novamente.

...

A – O meu formou um novo triângulo só que sem reta e circunferência. Eu coloquei exibir objeto para a reta também.

P – Pronto, tá certo. Todos façam o mesmo. Em cima da reta “f” você clica e com a opção exibir objeto ela também some, como a dupla D01 fez.

Fonte: Dados da pesquisa.

Em sequência, as duplas conseguiram identificar na construção que com os três pontos seria possível construir um triângulo e consequentemente no sétimo passo identificar a propriedade *(i) todo triângulo tem três vértices, três lados e três ângulos internos.*

Quadro 23: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Pronto, blz. Agora com esses três pontos nós podemos formar qual figura?

Als – Um triângulo.

P – Certo, um triângulo. Em qual dos botões da barra de ferramentas eu posso formar um triângulo?

A15 – Em reta?

A11 – Em polígono.

P – Isso, polígono. Então tentem criar o triângulo com essa opção. Agora, temos o sexto passo que é trace o triângulo A'B'C', daí para melhor visualização tire os traços de compasso e semirreta, quem ainda não fez isso.
A – É na ordem, professor?
P – Isso, A', B', C' e volta para A'.
A – Professor, posso arrastar a letra para fora?
P – Pode, se os pontos estiverem dentro do triângulo você pode mover para fora, da mesma forma que fizemos com o primeiro triângulo.
A – Tá.
P – Beleza, pessoal? Então, a gente criou um novo triângulo, qual o nome dele?
A – A'B'C'.
A08 – No meu caso A1A2A3.

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, além de marcar o novo triângulo A'B'C', as duplas D01, D03, D04, D05, D06 e D07 identificaram os seus elementos colocando as medidas dos lados e dos ângulos internos, antecipando os passos, como é constatado no recorte de protocolo do quadro 24. Nesses sexto e sétimo passos, o professor manteve a postura de mediador da aprendizagem, oportunizando o momento para as demais duplas explicarem àquelas que sentiram dificuldades, sendo possível a manipulação das ferramentas do GeoGebra entre eles para os momentos de ação e formulação acontecerem.

Quadro 24: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

A – Pode colocar o valor dos lados, professor?
P – Pode sim. Todos agora façam isso. Como é que coloca o valor, lembram?
A – Configurações.
P – Pronto, então com o botão direito do mouse, seleciona configurações...
A – É para colocar os ângulos também?
P – Isso, a próxima etapa é colocar as medidas dos ângulos internos também. Coloca valor em todos, um por um. Daí, temos o sétimo passo: deixar visíveis as medidas dos ângulos e dos lados do triângulo A'B'C' (A'$\widehat{\boldsymbol{B}'}C', B'\widehat{\boldsymbol{C}'}$A' e C'$\widehat{\boldsymbol{A}'}$B').
Nesse momento as duplas se ajudam.

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir das construções dos triângulos ABC e A'B'C', os alunos foram instigados, no oitavo e último passo da construção do segundo triângulo, a fazerem análises de algumas propriedades e elementos dos polígonos construídos. Dessa forma, após cada estudante analisar individualmente as suas produções, as duplas puderam comparar suas ações formulando e validando conceitos geométricos acerca da congruência de triângulos como observamos no recorte de protocolo do quadro 25.

Quadro 25: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Pessoal, agora eu quero que vocês olhem para os dois triângulos e me digam se tem algo parecido.

A – Eles têm as mesmas medidas.

P – Exatamente, os lados têm as mesmas medidas. E os ângulos?

Als – Também.

Nesse momento, algumas duplas chamam o professor para mostrar os triângulos construídos.

P – Pronto, como oitavo passo, vocês determinaram as distâncias dos segmentos do triângulo A'B'C' usando o 8º botão. Assim, vejam os dois triângulos construídos e me digam em quais conclusões podemos chegar.

A03 – Eles são iguais.

A01 – Eles são congruentes.

A05 – São equivalentes.

A – Eles têm tamanhos iguais.

P – E como vocês chegaram à conclusão que os triângulos são congruentes?

A – Ah, professor, podemos ver pelas medidas dos lados e dos ângulos. No meu os dois triângulos medem 6,25; 7,04 e 15 de lados e os ângulos são 30,4°; 60,6°e 89°.

Nesse momento, várias duplas começam a dizer as medidas dos lados e dos ângulos dos triângulos construídos.

P – Certo, vocês acabaram de perceber que foram construídos triângulos congruentes. Então, o nosso objetivo ao construir os dois triângulos foi construir qual conhecimento?

A – Triângulos congruentes.

P – Exato, congruência de triângulos.

A07 – Legal.

A09 – Foi massa mesmo.

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse recorte de protocolo do quadro 25, o professor oportunizou um momento para que os alunos confrontassem suas estratégias de construção através dos resultados das medidas dos lados e dos ângulos dos triângulos ABC e A'B'C' e, assim, validassem o resultado correto: a construção de triângulos congruentes.

Nesse recorte de protocolo do quadro 25, pudemos observar que quando as duplas compararam os triângulos construídos no momento em que disseram as medidas dos ângulos internos do triângulo ABC fazendo correspondência às medidas dos ângulos internos do triângulo A'B'C', bem como as correspondências dos lados e vértices dos triângulos, os estudantes passaram por *situações de validação*, em que a validação da certeza das asserções durante os debates que foram formulados nos momentos de ação e de formulação permitiram organizar as interações com o *milieu*, satisfazendo as concepções de Brousseau (2008) envolvidas numa situação adidática.

Após os alunos vivenciarem as fases de ação, formulação e validação, em relação às etapas de construção dos triângulos congruentes, eles foram conduzidos à observação dos casos de congruência de triângulos LLL (lado, lado, lado); LAL (lado, ângulo, lado); ALA (ângulo, lado, ângulo); LAA_o (lado, ângulo, ângulo oposto), mediante os elementos e propriedades dos triângulos construídos durante a sequência didática. Contudo, os alunos passaram pela última fase das situações adidáticas de Brousseau, a fase de institucionalização, nesse momento o professor agiu de forma ativa expondo convencionalmente as asserções das duplas a partir das movimentações dos polígonos construídos pelos alunos e comparando com construções feitas por ele.

Com as manipulações dos triângulos, as duplas puderam observar os casos de congruência de triângulos conforme recorte de protocolo do quadro 26. A medida em que o professor institucionalizava o saber, os alunos eram questionados a validar conceitos geométricos movendo os vértices do triângulo ABC construído, assim a institucionalização aconteceu em consonância com as respostas dos estudantes frente às novas descobertas dos casos.

Quadro 26: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Pronto, então vejam: o caso lado, lado, lado (L.L.L.) fala o seguinte: dois triângulos são congruentes quando possuem os três lados respectivamente congruentes, ou seja, com as mesmas medidas. Para testarmos a veracidade desse caso podemos verificar a partir das construções dos triângulos de vocês. Façam o seguinte: escolham um dos pontos do triângulo ABC e mova-o. Me digam o que vai acontecendo com os dois triângulos ABC e A'B'C'.

Als – Nossa! Estão mexendo os dois.

A09 – Que legal.

A13 – As medidas vão mudando nos dois triângulos.

A15 – É professor, os lados e os ângulos vão mudando.

A14 – Os triângulos vão ficando maior ou menor.

A11 – Que legal, velho.

Fonte: Dados da pesquisa.

As duplas D01, D03, D04, D06 e D07 começaram a perceber que mesmo movendo os triângulos as medidas dos lados permaneciam sendo congruentes pelo caso L.L.L., isso porque os triângulos foram construídos com esse objetivo, o segundo triângulo (A'B'C') foi construído com base no primeiro triângulo (ABC). Observemos o recorte de protocolo do quadro 27.

Quadro 27: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Agora parem de mover um pouco. Pronto! O lado $\overline{AB}$ *é congruente a qual lado?*

A – Ao lado $\overline{A'B'}$*.*

P – Certo, então todos vejam se a medida do lado $\overline{AB}$ *é a mesma do lado* $\overline{A'B'}$*.*

Als – Sim!

A07 – Não mudou, mesmo a gente movendo.

P – Agora vejam se os outros dois lados também correspondem a esse caso. Vejam se o lado $\overline{BC}$ *é congruente a* $\overline{B'C'}$ *e se o lado* $\overline{AC}$ *é congruente ao lado* $\overline{A'C'}$*. Comparem as medidas da sua dupla.*

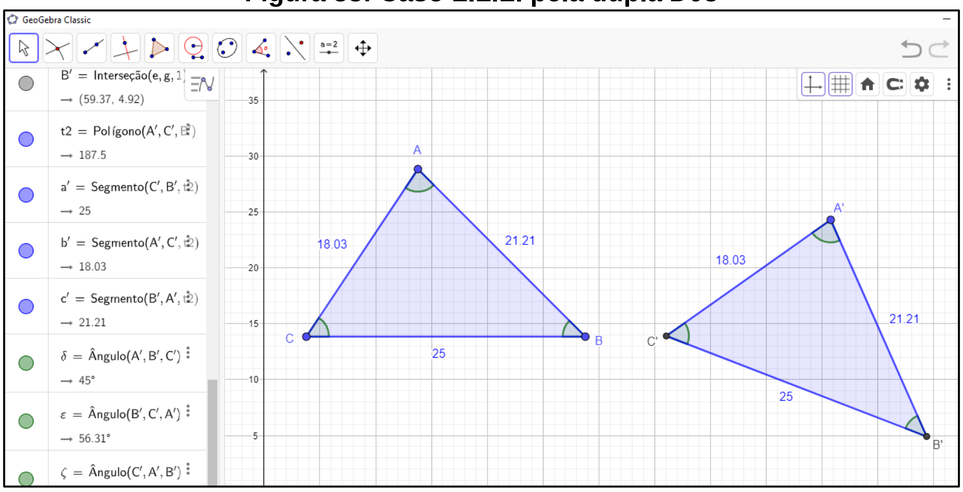
A – Tio, no nosso caso eu vejo se $\overline{BC}$ *é congruente a* $\overline{B1C1}$ *e se* $\overline{AC}$ *é congruente a* $\overline{A1C1}$*, né?*

P – Isso mesmo, quem fez nesse formato só muda a nomenclatura, mas a ideia é a mesma.

Fonte: Dados da pesquisa.

Com a institucionalização do caso L.L.L., os estudantes são questionados sobre os passos para a construção do segundo triângulo que eles fizeram no GeoGebra e, com a mediação do professor, apenas a dupla D03 percebeu que a construção do triângulo A'B'C' congruente ao triângulo inicial foi criado usando o caso lado, lado, lado. Depois da exposição da dupla, as demais validaram a informação concordando com a observação dos colegas. Na figura 33 observamos o caso L.L.L manipulado pela dupla D03.

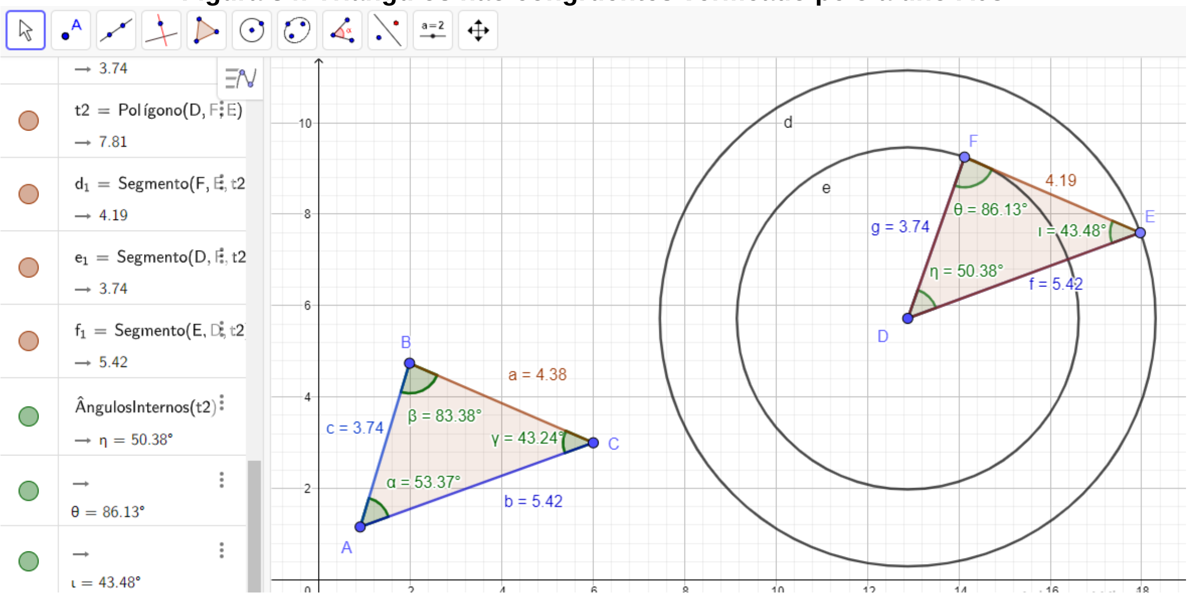
Figura 33: Caso L.L.L. pela dupla D03



Fonte: Dados da pesquisa.

Para finalizar a análise do caso L.L.L., os alunos foram orientados a analisarem a construção do professor de um novo triângulo partindo apenas como base as medidas de dois lados. Em seguida, o professor pediu para um estudante ir até o notebook dele mover um vértice do triângulo e, nesse momento, os estudantes percebem que apenas um triângulo se move, enquanto o outro não. Assim, eles identificam a importância dos requisitos do caso um, os três lados precisam ser congruentes. Aqui, momentos de ação, formulação e validação voltaram a acontecer para institucionalizar o caso lado, lado, lado. Na figura 36 verificamos o exemplo de não congruência.

Figura 34: Triângulos não congruentes verificado pelo aluno A08



Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa figura podemos observar um exemplo da manipulação do aluno A08. Os estudantes perceberam que apenas os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ possuíam as mesmas medidas e, consequentemente os triângulos ABC e DFE não eram congruentes, pois de acordo com os lados dos triângulos, as três medidas deveriam ser congruentes. Nesse momento, os estudantes passavam pela fase de institucionalização do caso LLL, observando que à medida em que A08 movia qualquer vértice de um dos dois triângulos, as medidas dos segmentos congruentes não se alteravam; mas por outro lado, os demais segmentos de reta e os ângulos internos alteravam os valores sem a presença da congruência.

Dessa forma, os alunos puderam observar que as condições necessárias para a congruência de dois triângulos pelo caso LLL (lado, lado, lado) não se aplicavam na figura 36.

Continuando a institucionalização, o segundo caso de congruência de triângulos, L.A.L., é verificado pelos estudantes conforme recorte de protocolo do quadro 28.

Quadro 28: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Pois bem, gente. [...] Agora eu quero que vocês olhem para um lado, um ângulo e outro lado, sigam esse critério. Vou repetir, observem, nessa ordem um lado, um ângulo e outro lado. Continuam iguais?

Als – Sim!

A05 – Já é outro caso, professor?

P – Isso mesmo, é o caso L.A.L., lado, ângulo, lado.

A12 – Que legal! As três medidas vão mudando da mesma forma.

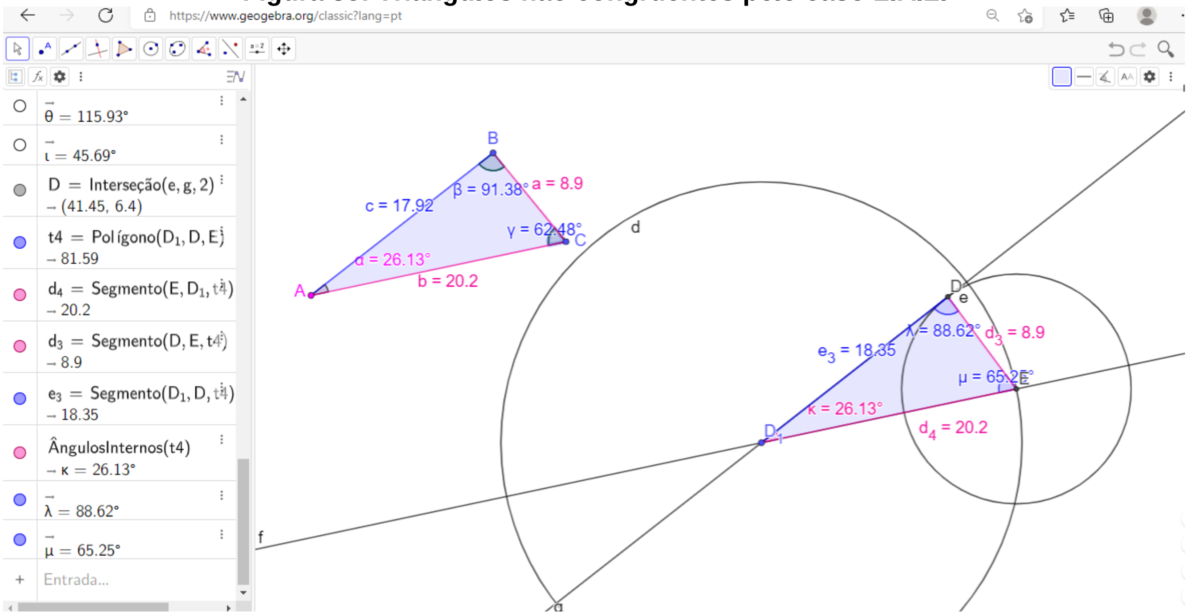
A08 – Muito legal mesmo.

Fonte: Dados da pesquisa.

Com o recorte de protocolo do quadro 28 percebemos que o aluno A05 conseguiu identificar o surgimento de um novo caso de congruência de triângulos. O professor solicitou aos alunos que com a opção “Exibir objeto” retirasse os outros valores os quais não seriam analisados e deixassem apenas os valores correspondentes a nova análise: a medida de um lado, de um ângulo e do outro lado, nessa ordem. Em seguida, movessem um vértice do triângulo ABC observando o ocorrido.

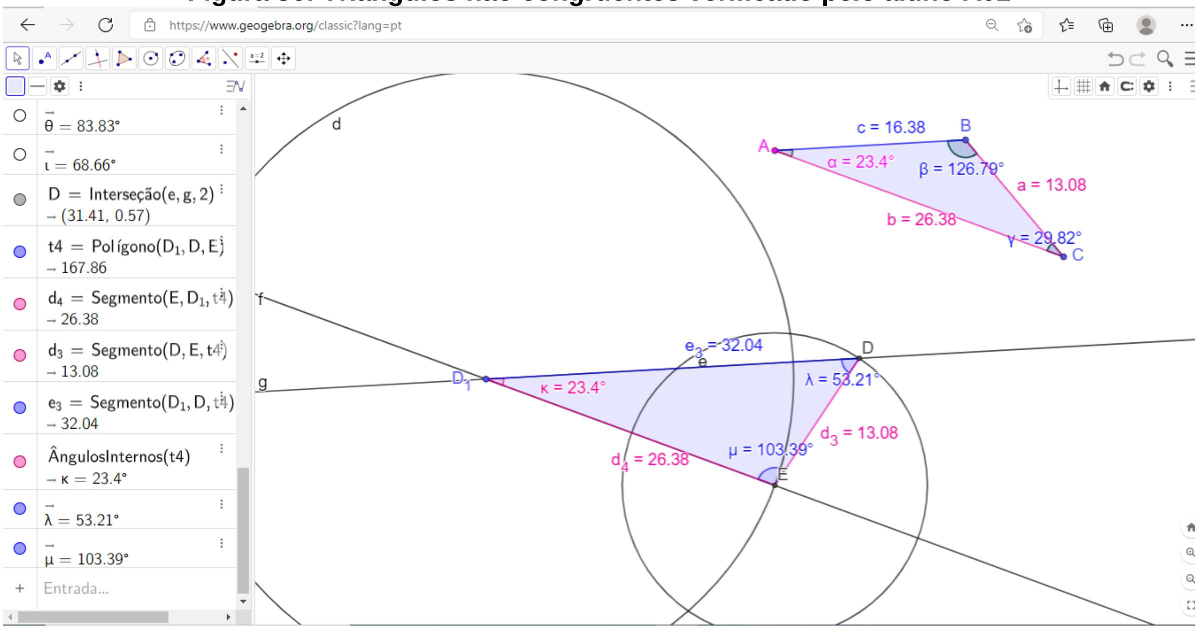
Para finalizar a institucionalização do segundo caso de congruência de triângulos, o docente fez novas demonstrações no GeoGebra fazendo indagações aos alunos acerca do caso L.A.L. Os alunos observaram nas demonstrações os requisitos para a congruência de triângulos mediante esse caso, conforme podemos ver na figura 35. Em seguida, na figura 36, temos o exemplo de uma construção de um novo triângulo com dois lados e um ângulo congruente, mas que não tornava os dois triângulos congruentes, visto que a ordem, ou melhor, a regra estabelecida pelo segundo caso não havia sido cumprida. A cada novo conceito institucionalizado, um aluno era convidado para fazer a manipulação verificando a construção do saber em questão.

Figura 35: Triângulos não congruentes pelo caso L.A.L.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 36: Triângulos não congruentes verificado pelo aluno A02



Fonte: Dados da pesquisa.

Vale ressaltar que mesmo os alunos tendo compreendido o segundo caso de congruência de triângulos, o professor por costumeiramente fazer durante as aulas decidiu desenhar dois triângulos no quadro branco para reforçar a explicação desse caso.

As duplas D02 e D03 conversaram baixinho entre si, depois o aluno A11 expôs uma nova formulação, a qual foi possível perceber, com a mediação do docente, que para verificar se dois triângulos são congruentes os casos de congruência de triângulos satisfazem as verificações, não precisando aparecer nas figuras todas as medidas dos lados e ângulos internos. O recorte de protocolo do quadro 29 mostra essa verificação.

Quadro 29: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Então, vimos até agora dois casos, o lado, lado, lado, o caso lado, ângulo, lado. E, agora vamos ver mais um caso observando o GeoGebra. Se eu deixar a medida desse ângulo Â, desse lado $\overline{AB}$ *e desse outro ângulo* $\hat{B}$ *e deixar as medidas correspondentes congruentes do outro triângulo, o que acontecem quando eu movo... Vejam! O que está acontecendo?*

A09 – Essas três medidas continuam congruentes por esse caso.

P – Isso mesmo.

A10 – Professor, então para a gente saber se os dois triângulos são congruentes não precisa ver os três ângulos e os três lados de uma vez, né? A gente pode seguir esses casos aí?

P – Bem observado, A11. Ainda não vimos todos os casos, mas já posso adiantar que sim. Então, vejam, esse terceiro caso é o A.L.A., ou seja, ângulo, lado, ângulo. Nesse caso temos a seguinte definição: dois triângulos são congruentes quando possuem um lado e os dois ângulos adjacentes a ele respectivamente congruentes. Entenderam?

A – Tio repete, por favor!

Nesse momento o professor repete o terceiro caso.

....

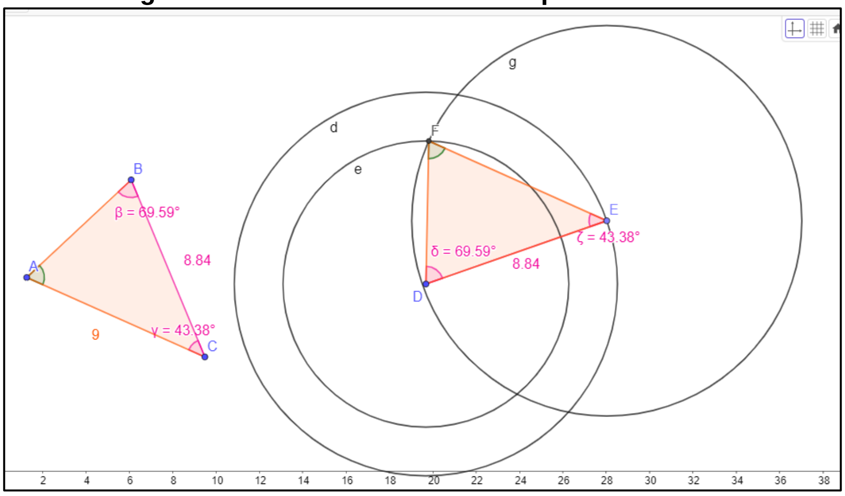
P – Entenderam agora?

Als – Sim, professor.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na figura 37 podemos observar o resultado da institucionalização do terceiro caso, A.L.A.

Figura 37: Caso A.L.A. verificado pelo aluno A16



Fonte: Dados da pesquisa.

Com a institucionalização do 4º caso de congruência de triângulos (L.A.Ao), a dupla D01 conseguiu compreender expondo suas colocações, porém três duplas, D02, D04, D05, D07 não conseguiram perceber na primeira demonstração os critérios que fundamentam a congruência dos dois triângulos, como foi o caso de ângulos opostos e ângulos adjacentes. Dessa forma, novas construções foram feitas para análises. As demais duplas não se colocaram inicialmente, apenas no final confirmaram que haviam compreendido. No recorte de protocolo do quadro 30 podemos verificar essas análises.

Quadro 30: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – O 4º caso de congruência é o seguinte: lado, ângulo, ângulo oposto, é o caso L.A.Ao. Esse caso diz o seguinte: dois triângulos são congruentes quando possuem um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes. Então, quem poderia dar um exemplo pelo software.

Nesse momento, alguns alunos levantam a mão para participar...

P – Vamos na ordem de quem falou primeiro. Fala A16.

A16 – Eu acho que é o que faltou dizer, tipo o lado $\overline{AB}$, o ângulo Â e o ângulo $\hat{C}$. Seria isso?

P – Exatamente. Vamos testar, gente, para entender o que A16 disse. Usando a ferramenta "Exibir objeto" deixem visíveis apenas o lado $\overline{AB}$, o ângulo Â e o ângulo $\hat{C}$, no segundo triângulo construído deixem os lados congruentes correspondentes ao primeiro triângulo, em seguida mova o triângulo ABC para ver o que acontece.

Nesse momento, os alunos fazem as manipulações, o professor auxilia quando necessário e as duplas se ajudam. Alguns alunos chamam o docente em particular para validar as construções.

....

P – Terminaram? Psiu! Prestem atenção aqui. Todos terminaram?

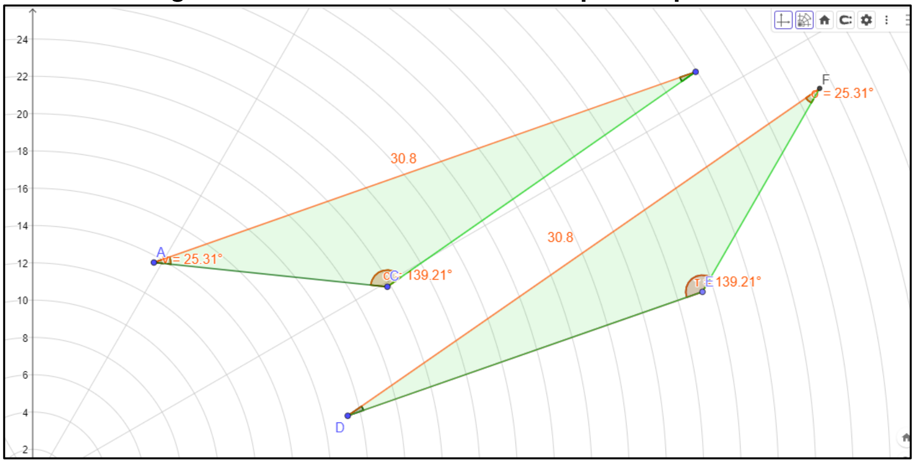
Als – Sim!

Fonte: Dados da pesquisa.

Embora a maioria das duplas tenha seguido os passos da atividade com autonomia, formulado e validado as respostas entre si, o recorte de protocolo do quadro 30 demonstra que alguns alunos ainda não conseguiram se adequar às regras estabelecidas na atual construção do saber, pois esperavam que o docente validasse ou não uma estratégia, um raciocínio chamando-o em particular.

Após as manipulações para a validação do quarto caso de congruência de triângulos, as duplas conseguiram manipular os triângulos ABC e A'B'C' conforme os critérios pré-estabelecidos pelo professor. Podemos verificar essa última etapa de construção do saber através do registro da dupla D06, conforme figura 38.

Figura 38: Caso L.A.Ao verificado pela dupla D06



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao finalizar a institucionalização dos quatro casos de congruência de triângulos, as duplas demonstraram satisfação pela aula diferenciada. Um aluno destacou suas dificuldades ao compreender conceitos geométricos por não ter habilidade em desenhos, mas sinalizou que com a referida aula realizada com o GeoGebra foi possível entender o assunto. Observamos no recorte de protocolo do quadro 31.

Quadro 31: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

P – Tá certo. Então, nós vimos quatro casos de congruência de triângulos, quais foram eles? Tentem dizer na ordem do que vimos...

Als – L.L.L., L.A.L., A.L.A. e L.A.Ao.

P – Ok! Lado, lado, lado; Lado, ângulo, lado; ângulo, lado, ângulo e, Lado, ângulo, ângulo oposto. Pronto. O que vocês observaram no final? Conseguiram perceber o assunto estudado?

A11 – Sim, professor, congruência de triângulos e os 4 casos.

A09 – Isso mesmo.

A05 – E agora, o que a gente vai fazer?

P – Agora, cada um vai gravar o arquivo. Em documentos tem uma pasta chamada Atividade 2. Salvem lá.

A09 – Já vai acabar? Professor traz a gente mais vezes para aprender geometria, pois eu sou péssima em desenhar e aqui eu consegui compreender melhor o assunto.

A14 – Eu também.

P – Vocês gostaram foi?

Als – Sim!

A08 – Foi legal!

Fonte: Dados da pesquisa.

<u>Atividade complementar da 2ª sessão – registros na ficha</u>

No momento em que analisamos os registros dos estudantes na ficha de atividades impressas, notamos que nenhuma das duplas fez referência explícita às propriedades *(ii)* e *(iii)* do triângulo, limitando-se a observar se os lados e ângulos internos do triângulo ABC eram iguais ou não, ao moverem os seus vértices.

Desse modo, quatro duplas de alunos (D01, D03, D06 e D07) verificaram que movendo os vértices da figura ela continua sendo um triângulo: *“Precisamos de três lados unidos por três pontos para poder fazer três categorias de triângulos e sempre manter as regras ao usar retas, segmentos de reta, semirretas, pontos e intercessões para formar triângulos”* D01; *Devemos criar 3 pontos e interligá-los para formar um triângulo com lados, pontos e ângulos, colocando os valores para diferenciar triângulos”* D03; *“Que ele tem três lados a gente une os lados. Devemos usar as ferramentas necessárias no GeoGebra”* D06; *“Devemos saber princípios básicos e os aplicar no programa”* D07.

Ao mover o triângulo ABC, sete duplas (D01, D02, D03, D04, D06, D07 e D09) afirmaram que a soma dos ângulos internos de um triângulo permanecia sendo 180° evidenciando a propriedade *(iv): “Continuou medindo 180°, pois a soma dos ângulos internos dá sempre 180° independente da medida do triângulo” D01; “Continua a mesma, pois o resultado sempre será 180°” D02; “A soma deles é igual a 180°. Isso ocorre devido a soma interna dos triângulos” D03; “A soma sempre é 180°” D04; “Nada, pois independentemente do que acontecer com o triângulo, a soma sempre será 180°; “Nada, pois os ângulos internos de um triângulo têm 180°” D07; “180°, pois é o padrão”.*

Nesse contexto, apenas a dupla D08 (alunos A07 e A13) não conseguiu compreender completamente a propriedade (iv): “*Dá 180°, pois é a soma dos ângulos externos”* A07; *“Sim, continua aparecendo os ângulos internos de um triângulo”* A13. Percebemos que o aluno A07 apresentou dificuldades em diferenciar ângulos internos de ângulos externos e, o aluno A13 não explicou corretamente a questão.

Seis duplas (D01, D03, D04, D06, D07 e D09) observaram que para os triângulos construídos serem congruentes o triângulo A’B’C’ era necessário coincidir com o triângulo ABC: *“Para que coincidam os triângulos precisam ser congruentes”* D01; *“É necessário envolver uma determinada semirreta com diferentes circunferências provenientes dos ângulos de cada vértice do ‘triângulo-mãe’”* D03;

“Ser congruente para coincidir” D04; *“Fazer uma semirreta, depois fazer compasso e apagar tudo menos os pontos A’B’C’ para formar o triângulo que vai ter as mesmas medidas do 1º triângulo”* D06; *“O triângulo congruente ao ABC precisa partir de circunferências tendo os lados como base”* D07; *“É preciso das ferramentas certas que fazem o triângulo novo ser congruente ao ABC”* D09.

Três duplas (D02, D05 e D08) registraram apenas os elementos para a construção dos triângulos, exemplificando temos: *“Precisa dos pontos, dos lados e dos ângulos”* D02, as demais duplas (D05 e D08) repetem os elementos.

Sete duplas (D01, D02, D03, D04, D06, D07 e D09) afirmaram que ao movimentar os vértices dos triângulos congruentes construídos é possível encontrar triângulos equiláteros, isósceles e escalenos. Para isso, as duplas registraram as medidas dos lados e dos ângulos internos, a exemplo a dupla D04 encontrou as seguintes medidas: *triângulo equilátero com lados iguais a 4,84 cm cada um e cada ângulo interno medindo 60°; triângulo isósceles, lados sendo* $\overline{AB}$ *= 6,5 cm,* $\overline{BC}$ *= 6,5 cm e* $\overline{AC}$ *= 5 cm, já os ângulos mediam* $\hat{A}$ *= 45,24°,* $\hat{B}$ *= 67,38° e* $\hat{C}$ *= 67,38°; triângulo escaleno com lados* $\overline{AB}$ *= 6,5 cm,* $\overline{BC}$ *= 14,15 cm e* $\overline{AC}$ *= 10,32 cm, ângulos* $\hat{A}$ *= 112,51°,* $\hat{B}$ *= 42,37° e* $\hat{C}$ *= 25,12°.* Vale ressaltar que os estudantes sentiram dificuldades em classificar os triângulos, mas com a mediação do professor essas duplas conseguiram registrar as medidas corretamente na ficha. Dessas duplas, apenas D07 e D09 fizeram a soma das medidas dos ângulos internos para validar a propriedade *(iv).*

Sete duplas (D01, D02, D03, D04, D06, D07 e D09) registraram o que acontecia a partir da congruência dos dois triângulos construídos e seus movimentos no GeoGebra: *“Eles são congruentes e se um mudar o outro muda também”* D01; *“O triângulo A’B’C’ segue o movimento do triângulo ABC mantendo as medidas”* D02; *“Que quando o ‘triângulo-mãe’ se move, o seu derivado também se move igualmente”* D03; *“Os dois se movem do mesmo jeito”* D04; *“Os dois triângulos são iguais mesmo movendo e encontrando novas medidas”* D06; *“Que eles têm todos os lados e ângulos iguais”* D07; *“Que os dois triângulos são congruentes independente do movimento que fizemos, as medidas mudam e continuam iguais”* D09.

Duas duplas (D05 e D08) não responderam corretamente ao que se pedia na questão trazendo respostas vagas: *“Observamos os movimentos dos triângulos, os lados e os ângulos”* D05; *“Que quando os dois estão prontos se mexem”* D08.

Quatro duplas (D02, D03, D06 e D09) fizeram considerações sobre a congruência de triângulos e os seus casos LLL, LAL, ALA e LAAo: *“Para saber se é congruente ou não, precisa só observar os lados e os ângulos e definir a qual caso pertence”* D02; *“Podemos perceber se dois triângulos são congruentes simplesmente pelos casos”* D03; *“Dois triângulos são congruentes se tiverem as mesmas medidas, mas não precisa ver todas de uma vez, basta seguir os casos vendo três”* D06; *“Com os lados e os ângulos conseguimos perceber se os triângulos ABC e A’B’C’ são congruentes, se não quisesse mover os triângulos era só verificar o caso de congruência”* D09.

Três duplas (D01, D04 e D07) registraram os casos de congruência de triângulos: *“Observamos essa congruência ao observar os lados e ângulos iguais nos casos: lado, lado, lado, lado, ângulo, lado, ângulo, lado, ângulo e lado, ângulo, ângulo oposto”* D01; *“LLL = lado, lado, lado / LAL = lado, ângulo, lado / ALA = ângulo, lado, ângulo / LAAo = lado, ângulo, ângulo oposto”* D04; *“LLL – tudo igual; LAL – lado igual, ângulo igual e lado igual, ALA – ângulo igual, lado igual e ângulo igual, LAAo – lado igual, ângulo igual e ângulo oposto igual”* D07.

Duas duplas (D05 e D08) não registraram respostas condizentes com o enunciado da questão: *“Que são casos diferentes e determinam a classificação dos lados e ângulos”* D05; *“Que os casos são as considerações dos triângulos”* D08.

Após a institucionalização sobre congruência de triângulos e os seus casos, os alunos verificaram na ficha de atividades impressas se cinco pares de triângulos listados eram congruentes sem efetuar medições, em caso positivo os estudantes deveriam indicar o caso que garantia a congruência. Observamos que penas as duplas D05 e D08 não conseguiram identificar todos os casos.

As demais duplas, sete no total, (D01, D02, D03, D04, D06, D07 e D09) apresentaram os casos de congruência. Dessas sete duplas apenas D01, D03 e D06 justificaram a impossibilidade de um par de ângulos ser congruente por apresentar apenas ângulos de mesma medida: *“Não é possível identificar a congruência, pois só é possível garantir quando o triângulo tem pelo menos um lado igual”* D01; *“Não é possível identificar, pois não existe lado”* D03; *“Não é possível garantir que esses triângulos são congruentes, porque não existe lado* D06.

7.2 Análise comparativa entre as expectativas previstas na modelização e análise das situações e as expectativas identificadas nos alunos

Nesse tópico analisaremos comparativamente apenas as estratégias utilizadas pelos estudantes no segundo encontro seguindo a estrutura da modelização e análise das situações (tópico 5.2). Dessa forma, procederemos a análise dos itens da atividade da ficha impressa, visto que as questões dessa natureza só foram respondidas mediante as construções e manipulações no GeoGebra. Levaremos em consideração também as respostas dos alunos na gravação e nas anotações do diário de bordo.

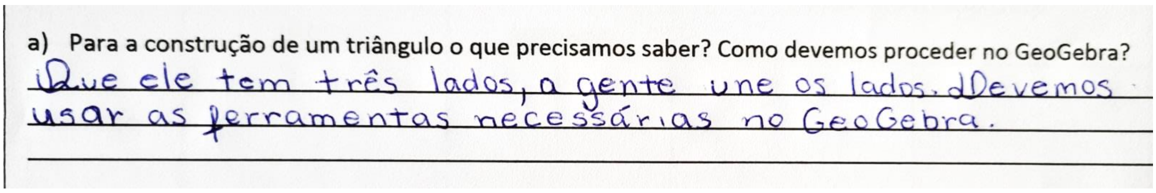
Durante toda a atividade de construção e manipulação da sequência didática, os estudantes passaram pelas três fases da Teoria das Situações Didáticas: ação, formulação e validação várias vezes; depois veio o momento da institucionalização do saber por parte do professor, finalizando a sequência didática com uma questão considerada como pós-institucionalização. Nesse caso os alunos não usaram mais o software, apenas a ficha impressa para análise de cinco pares de ângulos a fim de verificar os casos de congruência de triângulos, se possível.

Buscamos nos registros dos alunos alguns exemplos para recorte de protocolo em cada questão da ficha impressa.

Questão *a* da ficha – Para a construção de um triângulo o que precisamos saber? Como devemos proceder no GeoGebra?

Para resolver a primeira questão observamos que nenhum aluno usou a expectativa **E1** por completo, assim não conseguiram identificar as condições de existência de um triângulo, apenas os seus elementos (vértices, lados, ângulos internos e externos). Segue um exemplo de protocolo que mostra parte do uso da expectativa E1.

Quadro 32: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos


a) Para a construção de um triângulo o que precisamos saber? Como devemos proceder no GeoGebra?
Que ele tem três lados, a gente une os lados. Devemos usar as ferramentas necessárias no GeoGebra.

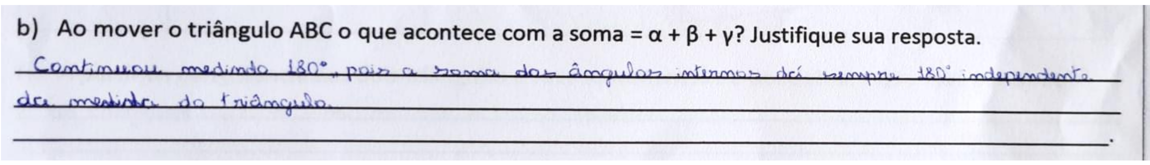
Fonte: Dados da pesquisa.

A expectativa **E2** apareceu apenas no discurso oral coletado em gravação, nesse caso a maioria dos alunos conseguiu perceber que o GeoGebra tem uma ferramenta com um símbolo em formato de triângulo (5º botão). A estratégia **E3** (construção de um triângulo marcando três pontos não colineares e ligar os pontos formando segmentos de reta que seriam os três lados) foi evidenciada pelas duplas D01, D03 e D06. Já a expectativa **E4**, em construir um triângulo usando circunferências, não foi mencionada por nenhuma das duplas.

Questão *b* da ficha – Ao mover o triângulo ABC o que acontece com a soma = α + β + γ? Justifique a sua resposta.

Na segunda questão, a maioria dos estudantes aplicou as expectativas **E1** e **E2** utilizando as ferramentas do GeoGebra, sendo a primeira estratégia responsável pelas medidas dos ângulos internos de um triângulo e, a segunda pela movimentação do triângulo ABC na verificação da propriedade *(iv) a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°*. As justificativas **J1** para resposta da expectativa **E1** e a **J2** para argumentação da expectativa **E2** foram evidenciadas pela gravação e ficha impressa, respectivamente. O protocolo do quadro 33 referenda esse fato.

Quadro 33: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos


b) Ao mover o triângulo ABC o que acontece com a soma = α + β + γ? Justifique sua resposta.

Continuou medindo 180°, pois a soma dos ângulos internos dá sempre 180° independente da medida do triângulo.

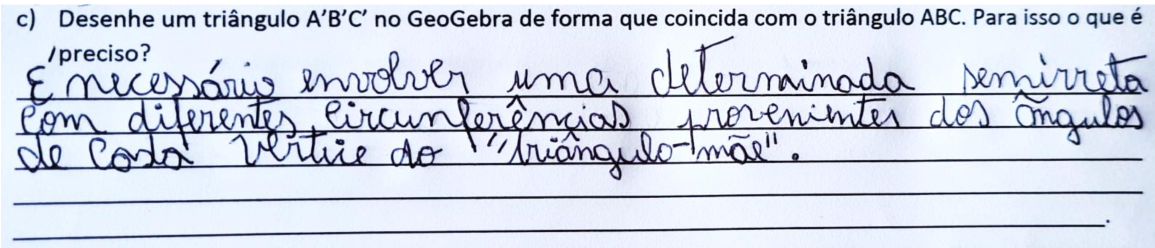
Fonte: Dados da pesquisa.

Questão *c* da ficha – Desenhe um triângulo A’B’C’ no GeoGebra de forma que coincida com o triângulo ABC. Para isso o que é preciso?

No item *c*, os estudantes observaram que para os triângulos serem congruentes, o triângulo A’B’C’ precisava coincidir com o triângulo ABC, satisfazendo a expectativa **E**. Especificamente seis duplas (D01, D03, D04, D06, D07 e D09) quando foram movimentar os triângulos para estabelecer comparações perceberam que ao mover um elemento do triângulo ABC todos os outros elementos moviam-se tendo seus valores alterados, mas a congruência entre os triângulos permanecia.

Vejamos o recorte de protocolo:

Quadro 34: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos


c) Desenhe um triângulo A'B'C' no GeoGebra de forma que coincida com o triângulo ABC. Para isso o que é preciso?

É necessário envolver uma determinada semirreta com diferentes circunferências provenientes dos ângulos de Cada Vértice do "triângulo-mãe".

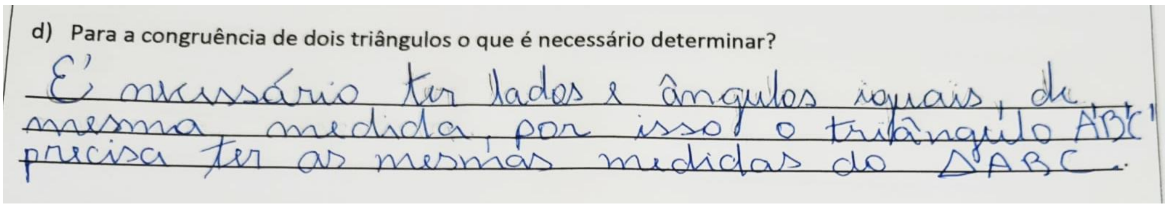
Fonte: Dados da pesquisa.

No recorte de protocolo 34 evidenciamos que quando o aluno chama o triângulo ABC de “triângulo-mãe”, ele consegue perceber a importância dos elementos do triângulo inicial para a construção do triângulo congruente, apenas teve um equívoco ao dizer que para o segundo triângulo construído tomou como base as medidas dos ângulos, uma vez que, os critérios utilizados partiram dos segmentos de reta (lados) do triângulo inicial.

Questão d da ficha – d) Para a congruência de dois triângulos o que é necessário determinar?

No item *d*, a maioria dos alunos teve um raciocínio coerente com o que foi proposto, se aproximando com o previsto na expectativa **E**. Assim, embora os estudantes não dominarem todas as propriedades dos triângulos, nem alguns conteúdos da geometria, eles conseguiram perceber que para dois triângulos serem congruentes, o segundo triângulo precisava coincidir com o primeiro triângulo, ambos precisavam manter as mesmas medidas, por isso após a análise das construções perceberam que o triângulo A’B’C’ tomou como base de construção as medidas do triângulo ABC. Vejamos o exemplo na argumentação da dupla D02.

Quadro 35: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos


d) Para a congruência de dois triângulos o que é necessário determinar?

É necessário ter lados e ângulos iguais, de mesma medida, por isso o triângulo ABC' precisa ter as mesmas medidas do ΔABC.

Fonte: Dados da pesquisa.

No recorte de protocolo 35 evidenciamos que a dupla D02 conseguiu perceber que para a construção do segundo triângulo (A'B'C') fazia-se necessário levar em consideração as medidas dos lados e dos ângulos internos do triângulo inicial (ABC).

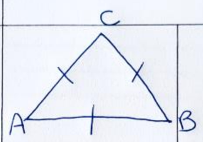
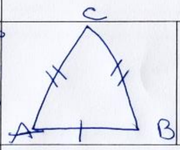
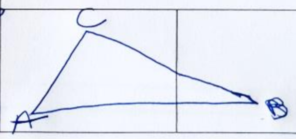
Questão *e* da ficha – Ao movimentar os vértices dos triângulos construídos encontre triângulos congruentes do tipo Equilátero, do tipo Isósceles e do tipo Escaleno. Escreva na tabela abaixo as medidas dos lados e doa ângulos encontrados.

Com essa questão, os estudantes moveram os vértices dos triângulos no GeoGebra e tiveram a possibilidade de encontrar uma variedade de exemplos em um curto intervalo de tempo, além disso foi possível obter triângulos com os valores dos lados na forma decimal, nesse caso observamos que eles estavam habituados apenas com lados medindo valores naturais.

A maioria das duplas preencheu a tabela com facilidade após mediação do professor ao recordar a diferença entre triângulos equiláteros, isósceles e escalenos. Nessa questão, houve o momento de institucionalização do professor sobre um assunto que ele já havia trabalhado em sala de aula: classificação dos triângulos, assim a estratégia **E** foi executada posteriormente. O protocolo exemplifica os triângulos registrados pela dupla D04.

Quadro 36: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

e) Ao movimentar os vértices dos triângulos construídos encontre triângulos congruentes do tipo Equilátero, do tipo Isósceles e do tipo Escaleno. Escreva na tabela abaixo as medidas dos lados e dos ângulos encontrados.

TRIÂNGULO	MEDIDAS DOS LADOS	MEDIDAS DOS ÂNGULOS	DESENHO A MÃO LIVRE
Equilátero	$\overline{AB} = 4{,}84$ $\overline{BC} = 4{,}84$ $\overline{AC} = 4{,}84$	$\hat{A} = 60°$ $\hat{B} = 60°$ $\hat{C} = 60°$	
TRIÂNGULO	MEDIDAS DOS LADOS	MEDIDAS DOS ÂNGULOS	DESENHO A MÃO LIVRE
Isósceles	$\overline{AB} = 6{,}5$ $\overline{BC} = 6{,}5$ $\overline{AC} = 5$	$\hat{A} = 45{,}29°$ $\hat{B} = 67{,}38°$ $\hat{C} = 67{,}38°$	
TRIÂNGULO	MEDIDAS DOS LADOS	MEDIDAS DOS ÂNGULOS	DESENHO A MÃO LIVRE
Escaleno	$\overline{AB} = 6{,}5$ $\overline{BC} = 14{,}15$ $\overline{AC} = 10{,}32$	$\hat{A} = 112{,}51°$ $\hat{B} = 42{,}37°$ $\hat{C} = 25{,}12°$	

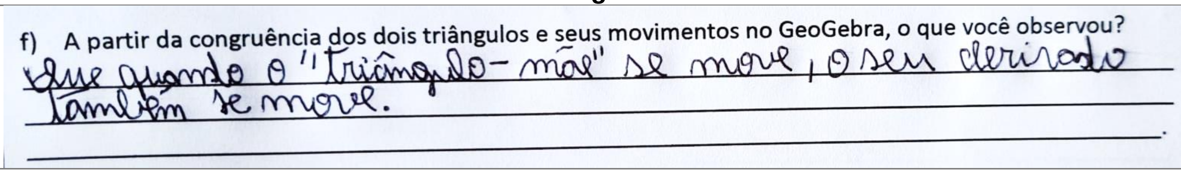
Fonte: Dados da pesquisa.

No recorte de protocolo em questão percebemos que os alunos passaram pela etapa de ação e, posteriormente na questão *f*, pela etapa de formulação ao encontrar diversos exemplos de triângulos congruentes.

Questão *f* da ficha – A partir da congruência dos dois triângulos e seus movimentos no GeoGebra, o que você observou?

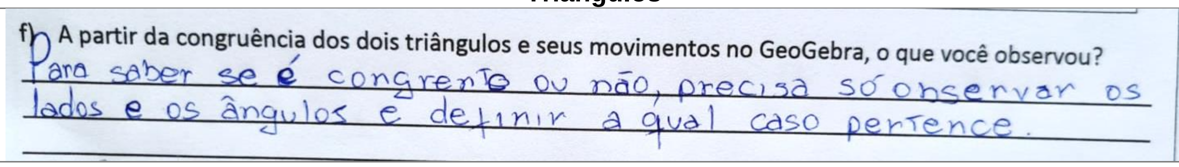
Nessa questão, as duplas passaram pela fase de formulação e a maioria conseguiu atender as formulações **F1, F2, F3, F4** e **F5.** Vale salientar que a **F5** apareceu parcialmente, só após a intervenção do professor foi possível perceber melhor indícios dos casos de Congruência de Triângulos. Os alunos fizeram relações com os lados e os ângulos. Vejamos nos recortes de protocolo das duplas D03 e D07.

Quadro 37: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos


f) A partir da congruência dos dois triângulos e seus movimentos no GeoGebra, o que você observou?
Que quando o "triângulo-mãe" se move, o seu derivado também se move.

Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 38: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos


f) A partir da congruência dos dois triângulos e seus movimentos no GeoGebra, o que você observou?
Para saber se é congrento ou não, precisa só observar os lados e os ângulos e definir a qual caso pertence.

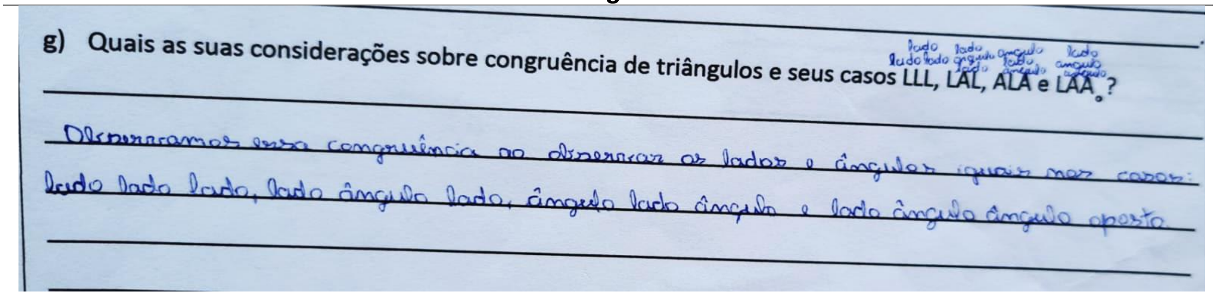
Fonte: Dados da pesquisa.

Questão *g* da ficha – Quais as suas considerações sobre congruência de triângulos e seus casos LLL, LAL, ALA e LAA$_o$?

Para essa questão, os estudantes passaram pela última fase, a institucionalização, em que puderam dar sentido aos passos seguidos nas construções dos triângulos congruentes. Aqui o professor formalizou os conceitos geométricos levando em consideração as formulações das duplas e fazendo com que os alunos percebessem os casos de congruência de triângulos que possibilitam verificar a congruência sem o auxílio de instrumentos e cálculos geométricos, apenas aplicando os casos.

Percebemos que com a institucionalização, a maioria das duplas conseguiu sistematizar o saber fazendo considerações e/ou registrando os casos de congruência dos triângulos ABC e A'B'C', conforme podemos verificar nos recortes das duplas D01 e D09.

Quadro 39: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos

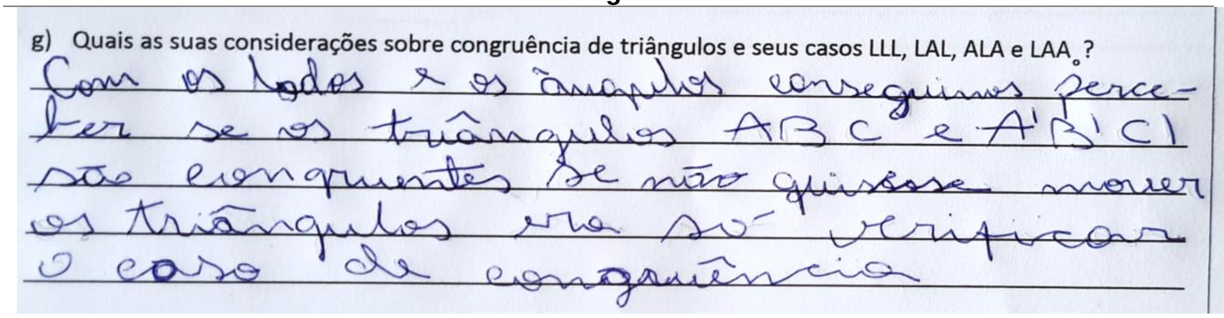


g) Quais as suas considerações sobre congruência de triângulos e seus casos LLL, LAL, ALA e LAA_o?

Observamos essa congruência ao observar os lados e ângulos iguais nos casos: lado lado lado, lado ângulo lado, ângulo lado ângulo e lado ângulo ângulo oposto

Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 40: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos



g) Quais as suas considerações sobre congruência de triângulos e seus casos LLL, LAL, ALA e LAA_o?

Com os lados e os ângulos conseguimos perceber se os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes se não quisesse mover os triângulos era só verificar o caso de congruência

Fonte: Dados da pesquisa.

Para finalizarmos a análise comparativa temos a última questão proposta da sequência didática:

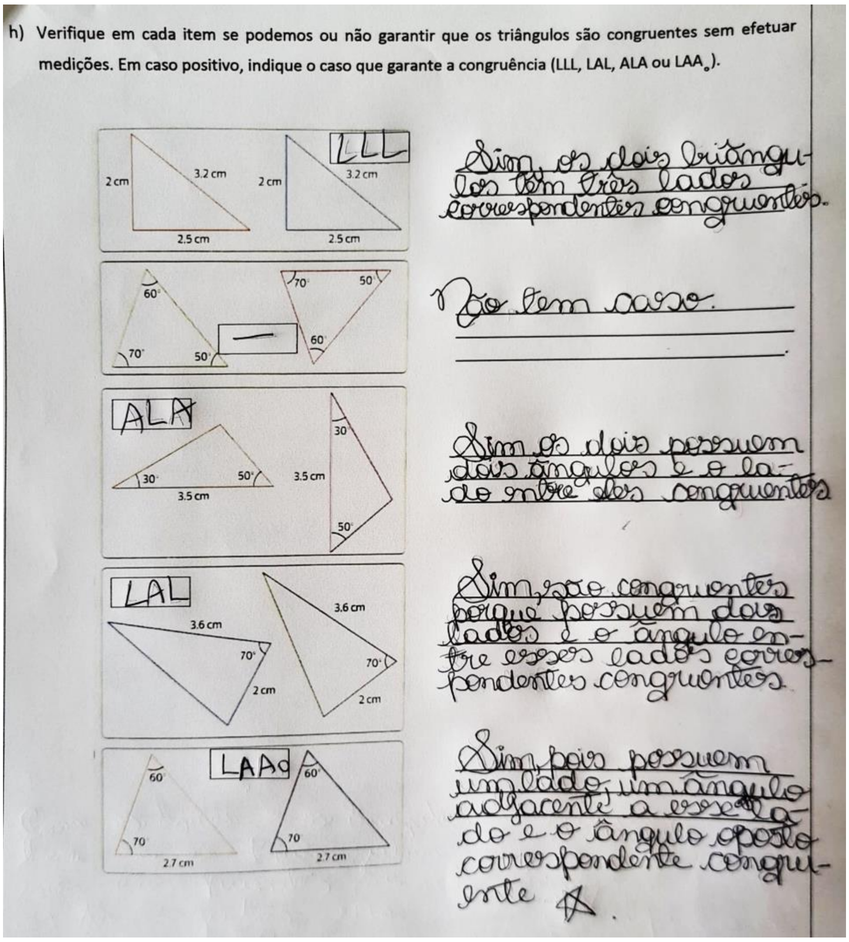
Questão *h* da ficha – Verifique em cada item se podemos ou não garantir que os triângulos são congruentes sem efetuar medições. Em caso positivo, indique o caso que garante a congruência (LLL, LAL, ALA ou LAA_o).

Essa questão foi respondida após a institucionalização, não sendo mais realizada no GeoGebra, como vimos no tópico 4.4.3 desta pesquisa por realmente ter sido resolvida após concluídas as fases de ação, formulação, validação e institucionalização pautadas na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, abordadas no capítulo 1.

A partir desse item, os estudantes puderam colocar em prática os conceitos de congruência de triângulos e os seus casos construídos ao decorrer das atividades anteriores. Para tal, quase todas as duplas, com exceção das duplas D05 e D08, conseguiram identificar os pares de triângulos congruentes justificando o único caso impossível de garantir a congruência, alguns estudantes justificaram na ficha e outros na gravação.

Vejamos no recorte de protocolo:

Quadro 41: Recorte de Protocolo das aulas da sequência didática de Congruência de Triângulos



Fonte: Dados da pesquisa.

Com o recorte de protocolo 41 podemos observar que a dupla D06 conseguiu identificar quando dois triângulos são congruentes a partir dos quatro casos de congruência explorados no GeoGebra 6.0. Os estudantes partiram das definições dos casos para explicar a existência ou não da congruência, percebendo que apesar do segundo quadro apresentar triângulos com os três ângulos internos de mesma medida, não existe um caso que garanta a congruência, inclusive alguns alunos comentaram na gravação que em todos os casos têm a presença de um lado congruente e não apenas de ângulos. Contudo, conseguimos perceber que as quatro fases da TSD foram vivenciadas durante as construções no software GeoGebra. Consequentemente, essa atividade após a institucionalização foi compreendida pela maioria dos estudantes participantes da pesquisa.

Vale ressaltar que em nossa pesquisa o olhar é para a sequência didática e a possibilidade que essa sequência tem de criar condições favoráveis à construção do conhecimento. Isso parece que aconteceu, uma vez que eles realizaram essa atividade imediatamente depois da institucionalização e conseguiram se sair bem. Quando dizemos *favorecer o processo de construção do saber* é entendendo que essa construção é processo e, assim sendo, caracteriza-se como um percurso, ou melhor, um caminho que não se consolida em duas aulas.

Concluída a análise dos dados coletadas nesse trabalho percebemos que a sequência didática fez sentido para os estudantes por ter mobilizado nesses alunos reflexões, levantamento de hipóteses e ações que foram desencadeadoras do processo de construção do conhecimento.

No quadro 42, é possível observarmos uma síntese da participação dos alunos na sequência didática com base nas fases da tipologia das situações adidáticas de Brousseau (2008).

Quadro 42: Relação dos alunos e suas respectivas produções durante a sequência

Situações adidáticas	**Construção e manipulação**	**Percentual**
Ação	A01, A02, ..., A18	100%
Formulação	A01, ..., A05, A08, A10, A11, A12, A14, ..., A18	67%
Validação	A01, A02, A03, A08, A11, A14, A15, A16, A17 e A18.	55%
Institucionalização	A01, A02, ..., A18.	100%

Fonte: Dados da pesquisa.

7.3 Análise das entrevistas com o professor colaborador

Nesse tópico faremos uma breve análise das duas entrevistas com o professor colaborador, que era regente dessa turma desde o início do ano letivo. A primeira entrevista foi realizada antes e a segunda após o desenvolvimento da sequência didática.

Entrevista I

Nesse primeiro momento da entrevista realizamos duas perguntas abertas: *1. Para você o que é Congruência de Triângulos? 2. Geralmente quais os recursos que você utiliza para ensinar Congruência de Triângulos aos seus estudantes? Conhece o GeoGebra e o utiliza?*

Consideremos no recorte de protocolo do quadro 43, a resposta do professor para a primeira pergunta:

Quadro 43: Recorte de protocolo da entrevista I com o professor (pergunta 1)

P – Bem, a minha definição, inclusive que eu falo para os meus alunos é justamente a do livro. Quando se estuda Congruência de Triângulos é preciso ter, no mínimo, dois triângulos de forma que os lados e os ângulos correspondentes sejam respectivamente congruentes.

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que a resposta do docente teve embasamento no texto do livro didático. Já em relação à segunda pergunta, tivemos o objetivo de sabermos se é habitual para o professor abordar Congruência de Triângulos de forma diferenciada da sequência didática que propomos ou não, a fim de evitarmos alguma comparação. Como o professor respondeu que geralmente usa o livro didático e apesar de conhecer o GeoGebra chegou a usar na elaboração de avaliações sobre outros assuntos percebemos que a Sequência Didática proposta seria uma nova proposta para a aprendizagem desse saber geométrico.

Quadro 44: Recorte de protocolo da entrevista I com o professor (pergunta 2)

P – Geralmente eu utilizo o livro do sistema de ensino adotado pelo colégio, como também alguns instrumentos matemáticos, por exemplo: régua, compasso e transferidor. Assim, os alunos desenham triângulos e depois analisa se eles são congruentes. Quando dar tempo, eu também trabalho com eles por meio de figuras, eles recortam triângulos e formam os pares verificando a congruência ao colocar uma figura sobre a outra. Em relação ao GeoGebra eu conheço, mas confesso que utilizo mais para elaborar avaliações e atividades no momento em que preciso de figuras geométricas. Mas, acho que seria interessante usar outros recursos. Eu até gostaria de conhecer a aplicabilidade do GeoGebra para esse assunto. Acredito que vai ser super válido.

Pudemos observar que apesar de o professor nunca ter trabalhado a Congruência de Triângulos utilizando o software GeoGebra, expôs sua intenção e disponibilidade para aplicar a referida sequência didática proposta pela pesquisadora.

Entrevista II

Para a segunda entrevista, o professor colaborador respondeu duas indagações: *O que você observou dos alunos no decorrer da sequência didática (comportamento, reação com o GeoGebra, desempenho nas atividades)? Você usaria a proposição dessa sequência didática em outras turmas?*

Observemos no recorte de protocolo, a resposta da primeira pergunta:

Quadro 45: Recorte de protocolo da entrevista II com o professor (pergunta 1)

P – Durante os dois encontros da sequência didática, os alunos demonstraram dependência do professor para as construções das atividades, pois, na maioria das vezes, a cada situação de atividade eles me chamavam para eu validar se a construção estava correta ou não. Além disso, se os dados saíssem diferentes do colega, eles queriam saber quem estava certo. Alguns inclusive, mesmo dizendo que havia conseguido realizar a atividade, me chamavam para mostrar as figuras. Mas, isso é uma característica dessa turma, realmente eles são acostumados a me chamarem para eu dar o aval na resolução das questões propostas. Em relação a sequência em si, eu percebi que eles amaram, inclusive ficaram me perguntando se eu iria levar mais vezes para a "Sala 360°" e construir figuras no GeoGebra. Pelos comentários que eles faziam, eu percebi que o software fez sentido para eles, principalmente para os alunos que disseram não saber desenhar bem, nem manipular instrumentos geométricos como compasso, transferidor, entre outros. Entusiasmo não faltou (Sorrisos)! Na resolução das atividades, eu percebi que eles sentem bastante dificuldades em diversos conceitos geométricos, principalmente de lembrar das propriedades dos triângulos, mesmo eles tendo estudado nessas últimas semanas o capítulo de Triângulos. Ficou faltando apenas ensinar para eles a Congruência de Triângulos que seria a sequência didática de hoje. Por fim, eu percebi que durante a sequência de atividades eles estavam empenhados em fazer e, no final, os alunos conseguiram compreender os quatro casos que garantem a congruência dos triângulos.

Diante do discurso do professor no recorte de protocolo percebemos que a sequência didática mobilizou os alunos, tanto em termos de motivação, quanto em termos de desencadear o processo de construção do conhecimento.

Toda perspectiva da sequência didática, sobretudo, da sequência proposta em função de uma situação adidática dá a ideia de que o aluno interaja no *milieu*, e a partir daí ele levante hipóteses para um começo no processo de construção do saber.

No entanto, o modelo de ensino que estamos acostumados e que os alunos estão acostumados ainda é aquele que necessita dessa presença, esse professor não pode se distanciar desses estudantes, como seria a proposta da sequência didática pautada na Teoria das Situações Didáticas, porque culmina que os próprios estudantes convocam esse professor como se ele fosse o responsável por validar a construção. Na perspectiva da situação adidática, por sua vez, a validação é inerente ao docente, sendo a própria ferramenta capaz de validar se deu certo ou não, ou melhor, o próprio milieu constituído possibilita criar um contexto de validação.

Assim, os alunos demonstraram precisar dessa validação do professor, por talvez esses estudantes serem frutos de um ensino diretivo, em que o docente não organiza um meio que potencialize a construção do conhecimento, ao contrário, o professor é aquele que vem e anuncia esse saber que vai ser trabalhado, define, explica, tornando um ensino centrado no docente.

A proposta de sequência de uma situação adidática é aquela em que o professor é o responsável em organizar o *milieu* e não de dar uma assistência diretiva aos alunos, mas eles continuam necessitando dessa validação externa vinda do docente, sendo uma análise fruto das nossas experiências anteriores com a escola e o ensino de Matemática.

Vejamos no recorte de protocolo, a resposta do professor frente a segunda pergunta:

Quadro 46: Recorte de protocolo da entrevista II com o professor (pergunta 2)

P – Sem dúvidas irei usar essa sequência didática em outras turmas, pois existe a possibilidade de os alunos compreenderem melhor a Congruência de Triângulos e seus casos, que inclusive não é um assunto simples, parece ser mais fácil de entender quando utilizam o GeoGebra, isso pelo recurso de arrastar do software e pela visualização dos dados das construções em vários campos, sejam eles, no plano cartesiano com as figuras geométricas, no campo numérico, algébrico... Como também, irei aproveitar para trabalhar outros assuntos da Geometria nessa turma e em outras turmas do fundamental e médio, afinal com o GeoGebra é possível trabalhar diversos assuntos, que realmente usando apenas o desenho no quadro não é possível de perceber bem a movimentação das figuras, as planificações, etc. Eu gostei da sequência didática, pois também aprendi bastante com ela.

Fonte: Dados da pesquisa.

Com o recorte de protocolo do quadro 46, percebemos os impactos da sequência didática não apenas nos alunos, mas também no professor, inclusive o desconforto de um ensino diretivo parece não está apenas nos estudantes, aparenta ter sido revelado no docente, que teve dificuldade de se afastar e deixar o aluno interagir com o meio e que expôs um pouco da sua experiência em ensinar Geometria, frente a essa situação didática que pretendeu desencadear o processo de construção do conhecimento de Congruência de Triângulos.

Contudo, com a segunda entrevista observamos na fala do professor que o ensino de Congruência de Triângulos não é um assunto simples de ser ensinado no oitavo ano do Ensino Fundamental, mas quando proposto no GeoGebra, por ser um software de geometria dinâmica, facilita a compreensão do saber e a garantia da congruência a partir dos seus casos, através da manipulação das construções, da possibilidade de mover as figuras geométricas, de observar todo o processo de construção, verificando os erros e acertos para conseguir validar conceitos. Dessa forma, o ensino geométrico parece fazer sentido para os alunos e o prazer em aprender foi despertado durante a sequência didática.

CAPÍTULO VIII
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo buscou analisar os efeitos de uma sequência didática no ensino de congruência de triângulos, utilizando o software de Geometria Dinâmica GeoGebra como recurso didático.

Na análise das produções da sequência didática, evidenciamos que as estratégias usadas pelos alunos na realização das atividades foram formadas por momentos de ação e reflexão das construções e manipulações, formulações de novos conceitos geométricos, validação de estratégias à medida que acertavam as construções das figuras, e consolidação de conceitos após a institucionalização do saber. A grande dificuldade dos estudantes foi de utilizar conceitos geométricos pré-requisitos (conhecimento sobre figuras planas e suas propriedades) para as construções sem a intervenção do professor.

Em relação ao desenvolvimento da sequência didática, antes da institucionalização, observamos que os estudantes reconheciam figuras geométricas somente pela sua aparência física. Contudo, com a mediação do professor e após a institucionalização do conhecimento foi possível notar alguns indícios de alunos argumentando suas respostas com o uso de algumas propriedades dos triângulos ao comparar a congruência de dois pares de triângulos.

Assim, considerando a teoria de Brousseau (2008), verificamos um progresso importante no processo de desencadear a construção do conhecimento, pois parte considerável dos estudantes conseguiu refletir sobre a construção do saber por etapas determinantes para o processo de construção de conceitos, com análise nas próprias produções da sequência didática.

Nessa pesquisa, observamos que o progresso na compreensão de conceitos geométricos não ocorre em um pequeno intervalo de tempo, mas existe um longo processo para a compreensão da Geometria, dentre eles, o número de aulas. Assim, não pudemos garantir em nosso estudo que os alunos de fato aprenderam a Congruência de Triângulos e os casos que a garantem, mas acreditamos que foi possível desencadear mecanismos que contribuíram para a construção do conhecimento.

Observamos, também, que as marcas de como o ensino de matemática é comumente conduzido, os hábitos didáticos de professores e alunos, em relação ao saber, frequentemente se fizeram presentes, por mais que a sequência proposta tivesse o intuito de criar um ambiente diferente e uma forma diferente de vivenciar o saber na relação didática.

De maneira geral, julgamos que os objetivos traçados nessa pesquisa foram alcançados. Entretanto, algumas questões merecem uma maior discussão em estudos posteriores, sobretudo, em relação à superação de várias dificuldades em usar propriedades e figuras geométricas para a construção de triângulos congruentes.

Dessa forma, também buscaremos em pesquisas futuras realizar um estudo mais refinado sobre a aprendizagem de Congruência de Triângulos com o GeoGebra seguindo a metodologia da Engenharia Didática por acreditarmos que as análises *a priori* e a *posteriori*, realizadas de forma cuidadosa garantem uma melhor observação dos efeitos da construção do pensamento geométrico após o desenvolvimento da sequência didática.

Outros aspectos importantes que poderiam ser observados em pesquisas futuras seriam: primeiro a realização de um pré-teste e de um pós-teste como defende Câmara dos Santos (2001) e, acrescentamos a Engenharia Didática como suporte metodológico, a fim de trazer mais dados precisos sobre ensino e aprendizagem de uma sequência didática. O segundo aspecto seria a proposição de mais aulas e duas turmas para trabalhar a Congruência de Triângulos com uma sequência de atividades para cada caso de congruência e a comparação de dados com um maior números de participantes no estudo.

Com esses resultados produzidos, aparecem algumas inquietações para trabalhos futuros: Quais fatores levam esses estudantes a realizarem tais produções? Como a Teoria das Situações Didáticas explicaria os dados? Quais conhecimentos geométricos se encaixariam para as análises a *priori* e a *posteriori*? Quais situações didáticas foram exploradas no GeoGebra? Quais os tipos de atividades seriam explorados para análises dos dados?

É importante destacar que esse estudo esteve centrado nos efeitos de uma sequência didática usando o software GeoGebra, assim o nosso foco foi no ensino e nos pressupostos que contribuíram para a construção do saber. Também sugerimos em estudos futuros os efeitos de situações didáticas no GeoGebra abordando outros conteúdos geométricos para análise de suas contribuições em larga escala nessa área de conhecimento matemático.

Outro fenômeno que observamos em nosso estudo foi a importância da aplicação de atividades em dupla, principalmente, quando essas atividades estão ligadas à ambientes de Geometria Dinâmica.

Chegamos a essa conclusão devido aos comportamentos dos estudantes durante a realização da sequência didática no GeoGebra. Observamos que os alunos discutiram entre si sobre as atividades no período de todas as fases de ação, formulação, validação e até mesmo na institucionalização. Quando o professor explicava um novo caso de congruência de triângulos, se um colega não compreendesse, o outro contribuía com a explanação, mostrando assim a empolgação por está aprendendo novos conceitos geométricos em um ambiente diferente do usual.

Nesse sentido, os estudantes realizaram a socialização de informações, refletiram acerca de uma melhor estratégia de resolução e, consequentemente, construíram o conhecimento coletivamente.

Nessa perspectiva, nossa experiência com o GeoGebra demonstrou que esse software é um importante recurso didático ao processo de ensino da Geometria e provavelmente de aprendizagem, sobretudo, para o desenvolvimento de pressupostos que desencadeiam a construção do conhecimento no 8º ano do ensino fundamental, tendo a TSD como sustentação teórica.

Além disso, ressaltamos a relevância da Geometria Dinâmica como um caminho para superar dificuldades de conceitos geométricos apresentados pelos alunos do 8° ano do ensino fundamental, partindo de um ensino sistemático com a Geometria.

Por fim, esperamos que esta dissertação contribua de alguma maneira no desenvolvimento de outras pesquisas educacionais, principalmente na área de Matemática para que mais intervenções pedagógicas possam ser vivenciadas em salas de aula e os estudantes tenham a oportunidade de aprender Geometria através da movimentação e análise de construções de figuras geométricas em softwares dinâmicos.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, A. C. O lugar da geometria no ensino fundamental: um estudo no município de Crato – CE. **Anais...** 10 Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, 2010.

ALMEIDA, Fernando Emílio Leite de. **O contrato didático e as organizações matemáticas e didáticas:** analisando suas relações no ensino da equação do segundo grau a uma incógnita. Tese (Doutorado) – UFRPE, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Recife, BR-PE, 2016. 304 f. : il.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. – Curitiba: Ed. UFPR, 2007. 218p.

ALMOULOUD, Saddo Ag; MANRIQUE Ana Lucia; SILVA, Maria José Ferreira da; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. **A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos**. SCIELO Brasil, Revista Brasileira de Educação. Dez – 2004. Disponível em: <SciELO - Brasil - A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos>. Acesso em: Fev.2020.

ANDREY, D.; GALLI, M. **Métodos Geométricos para 1500s de camadas de valores ionicos**. Nexus Network Journal, v. 6, n. 2, p. 31-48, 2004.

ANDRADE, Vladimir Lira Veras Xavier de. **Avaliação dos efeitos de uma sequência didática na concepção de ensino-aprendizagem e na construção do conceito de homotetia em licenciandos de Matemática**. – Recife / PE, fevereiro de 2005. Disponível em: <http://media.wix.com/ugd/9c458c_be17aea5977f48f7899a6dbac5b00511.pdf>. Acesso em: 19 de out. 2016.

ARCHILIA, S. **Construção do termo geral da progressão aritmética pela observação e generalização de padrões**. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2008.

BARBOSA, Paula Marcia. **O estudo da geometria**. Revista Benjamin Constant, n. 25 (2003). Publicado em 28 mar. 2017. Disponível em:<O estudo da Geometria | Benjamin Constant (ibc.gov.br)>. Acesso em: Fev. 2020.

BEZERRA, E. S.; BARBOSA, E. J. T. Um olhar reflexivo sobre a aprendizagem de geometria no ensino fundamental. **Anais...** 11 Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, 2013.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini.** Coleção do Ensino Fundamental (8º ano). 8. ed. – São Paulo: Moderna, 2015.

BITTENCOURT, I. M.; BITTENCOURT, I. G. S. Como professores concebem o uso das TIC em suas práticas pedagógicas. **Anais...** 5 Encontro de Pesquisa em Educação em Alagoas, Maceió, 2010.

BONGIOVANNI, V. (2016). **A Inserção Da Geometria Dinâmica No Ensino Da Geometria:** um olhar didático. *Revista De História Da Educação Matemática*, *2*(2). Recuperado de <http://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/90>.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática:** sala de aula e internet em movimento. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

BRASIL. Senado Federal. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**: nº 5692/71. Brasília, 1971.

BRASIL. Ministério da Educação. Governo Federal. **Base Nacional Comum Curricular:** A Educação é a Base. Matemática do Ensino Fundamental – Anos Finais. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em: <basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>. Acesso em: 01 de Jan. 2019.

BRITO MENEZES, Anna Paula de Avelar. **Contrato Didático e Transposição Didática:** inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do ensino fundamental. 2006. 410f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

BRIZOLA, M. B. d. A. **Classificação dos triângulos quanto aos lados e ângulos, apresentação do teorema de pitágoras**. *Lume Repositório digital,* Rio Grande do Sul. 2015. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/134466>. Acesso em: 05 ago. 2021.

BROUSSEAU, G.. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino / Guy Brousseau; apresentação de Benedito Antonio da Silva; consultoria técnica de José Carlos Miguel; [tradução Camila Bogéa].– São Paulo: Ática, 2008.

CALDATTO, M.; PAVANELLO, R. **Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil:** de 1500 até os dias atuais. *Quadrante*, *24*(1), 103–128. Disponível em: <https://doi.org/10.48489/quadrante.22913>. Acesso em: Jul. 2015.

CÂMARA DOS SANTOS, M.. **Algumas Concepções Sobre O Ensino-Aprendizagem de Matemática**. Educação Matemática Educação, Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Ano.9, N°12, 2002.

CARDOSO, M. C. S. A. et al. **Software gratuitos de geometria dinâmica**. Nuevas Ideas en Informática Educativa TISE, p. 515 – 518, 2013. (ARTIGO)

COSTA, André Pereira da. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental:** um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. 242f. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

COSTA, A. P.; LACERDA, G. H. **Educação Matemática:** o uso do software Geogebra como instrumento de ensino e aprendizagem da geometria plana. **Anais...** 3 Colóquio Brasileiro Educação na Sociedade Contemporânea, Campina Grande, 2012.

CLEMENTE, João Carlos et al. **Ensino e Aprendizagem da Geometria:** um estudo a partir dos periódicos em educação matemática. UFJF: Departamento de Matemática, Grupos de Pesquisa, 2018. Disponível em: <https://www2.ufjf.br/ufjf/?s=jo%C3%A3o+carlos+clemente>. Acesso em: 01 de Jan. 2019.

CHEVALLARD, Y. **Conceitos Fundamentais da Didática:** as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas / Cecilia Parra [et. al.]; Porto Alegre: Arte médicas, 1996.
_____________. La transposition didactique. Du savoir savant au savoir eneigné, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

CHOPPIN, A. **História dos livros e das edições didáticas:** sobre o estado da arte. Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, 2004.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris:** matemática. Coleção do Ensino Fundamental II (8º ano). 2. ed. – São Paulo: Ática, 2015.

D'AMORE, Bruno**. Elementos de Didática da Matemática.** (Trad. de Maria Cristina Bonomi). São Paulo: Livraria da Física, 2007. (capítulo 13).

DINIZ, Joel Félix Silva. **GeoGebra:** uma ferramenta dinâmica na aprendizagem da Geometria no Ensino Básico. Biblioteca Digital de Teses e Dissertações – UFMA: São Luís – MA, 2016. Disponível em: <https://tedebc.ufma.br/jspui/handle/tede/1608>. Acesso em: 03 de dez. de 2018.

DORNELAS, J. J. B. **Análise de uma sequência didática para a aprendizagem do conceito de função afim**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco (UFRPE), Recife, 2007. 118 p.

ESTEVAM, Everton José Goldoni. **(Res)Significando a Educação Estatística no Ensino Fundamental:** análise de uma sequência didática apoiada nas Tecnologias de Informação e Comunicação. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia - Presidente Prudente : [s.n], 2010 xvi, 211 f. : il.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Editora da Unicamp, Campinas, 2004.

EWBANK, Maria Sílvia André. **O ensino da multiplicação para crianças e adultos:** conceitos, princípios e metodologias / Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas – SP: [s.n.], 2002.

FAINGUELERNT, E.K. O ensino de Geometria no 1º e 2º Graus. **A Educação Matemática em Revista**, n. 4, pp. 45-53, 1995.

FELCHER, C.; FERREIRA, A.; FOLMER, V. **Da Pesquisa-ação à Pesquisa Participante:** Discussões a Partir de uma Investigação Desenvolvida no Facebook. In: Experiências em Ensino de Ciências. V.12, No.7, Rio Grande do Sul, 2017.

FELÍCIO, Adriano César. **A Determinação dos Pontos Notáveis de um Triângulo Utilizando o Software GeoGebra**. – São Carlos – SP, 2013. Disponível em: <http://bancodeteses.capes.gov.br/banco-teses/#/>. Acesso em: 01 de setembro de 2016.

FERREIRA, C. R. M. **Os alunos do 1o ano do Ensino Médio e os padrões:** observação, realização e compreensão. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. 119 p.

FREITAS, J. L. M.. **Teoria das Situações Didáticas**. [In] SILVA, B. Antonio, et al. **Educação Matemática: Uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2008. 254p.

FREITAS, J. L. M. Teoria das situações didáticas. In: MACHADO, S. D. A. Educação Matemática: uma (nova) introdução. 3ª ed. São Paulo: EDUC, 2015, p. 77-188.

GÁLVEZ, Grecia. A Didática da Matemática. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (org). **Didática da Matemática**: Reflexões Psicológicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. Cap. 2, p. 26-35.

GIANCATERINO, R. **A matemática sem rituais**. Rio de Janeiro: Wak Ed, 2009.

GIORDAN, Marcelo; GUIMARÃES, Yara A. F. ; MASSI, Luciana. **Uma Análise das Abordagens Investigativas de Trabalhos sobre Sequências Didáticas:** tendências no ensino de ciências. In: VIII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências e I Congresso Iberoamericano de Educação em Ciências, 2012, Campinas, SP. Atas do VIII ENPEC - I CIEC. Rio de Janeiro, RJ: ABRAPEC, 2012. v. 1. p. 1-12. Disponível em : < https://bit.ly/2VbbG8C >. Acesso em : 01 de out. De 2018.

ITACARAMBI, R. R.; BERTON, I. C. B. **Geometria, brincadeiras e jogos**: 1º ciclo do ensino fundamental. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.

JÚNIOR, Edilson José de Santana. **Uso do Geogebra no Ensino das Funções Quadráticas:** Uma proposta para sala de aula. – João Pessoa, PB, 2011. Disponível em: <http://rei.biblioteca.ufpb.br/jspui/handle/123456789/42>. Acesso em: 15 de abril de 2016.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias:** o novo ritmo da informação. Campinas, SP: Papirus, 2007.

KOTSKO, E.G.S. **Sugestão do uso do software Geogebra no ensino de função do segundo grau na oitava série do ensino fundamental**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná. 2011.

LAJOLO, M. **Livro didático:** um (quase) manual de usuário. Em Aberto, Brasília, DF, v. 16, n. 69, p. 2-9, 1996.

LEAL, T. F. Fazendo acontecer: o ensino da escrita alfabética na escola. In: MORAIS, A. G.; ALBUQUERQUE, E. B. C.; LEAL, T. F. **Alfabetização**: apropriação de escrita alfabética. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. **Reflexões sobre o uso do geogebra e o ensino de geometria euclidiana.** Informática na educação: teoria & prática, Porto Alegre, v. 16, n. 1, 2013.

LIMA, Paulo Figuiredo; CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de. **Geometria.** In: CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de. (Coord.) Matemática: Ensino Fundamental. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. p. 135-166. (Coleção Explorando o Ensino; v. 17).

LINS LESSA, M.M.. **Aprender álgebra em sala de aula:** contribuição de uma seqüência didática. Tese de Doutorado não-publicada. Recife: UFPE, 2005.

LOPES, Maria Maroni. **Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o *Software* GeoGebra.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 631-644, ago. 2013. Disponível em: <https://bit.ly/2UWmHFH>. Acesso em: 01 de Out. de 2016.

LORENZATO, Sergio. O **Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. (Coleção Formação de professores). 2. ed. rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

______________. **Para aprender matemática.** (Coleção Formação de professores). 2. ed. ver. – Campinas, SP: Autores Associados, 2008.

______________. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em**

Revista, n.4, pp.3-13, 1995.

MANOEL, Wagner Aguilera; LORENZATO, Sergio. **A importância do ensino de geometria nos anos iniciais do ensino fundamental:** razões apresentadas em pesquisas brasileiras. II Encontro de Educação Matemática nos Anos Iniciais – UFSCAR / São Carlos – SP, 2015. Site: Importância Geometria. Disponível em: <Importância Geopucmetria | Artigos e pesquisas sobre a importância do Enisino de Geometria (wordpress.com)>. Acesso: jul.2020.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Técnicas de pesquisa**: planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisas, elaboração, análise e interpretação de dados. 7 ed. São Paulo: Atlas, 2011.

MARINHO, M. F. S. e SIQUEIRA, M. J. **Promovendo Situações Didáticas no Ensino de Ângulos.** (XI ENEM – SBEM). Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas – Curitiba, PR, 2013.

MARTINS, L.V.; FIOREZE, L.A. O uso do software régua e compasso na construção de mosaicos. **Disciplinarum Scientia**, Rio Grande do Sul, v. 9, Série Ciências Exatas, p. 143-162, 2008.

MASCARIN, L.A. **A utilização de atividades lúdicas e exploratórias no ensino e aprendizagem de matemática**. 2017. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

MATOS, José Manuel; LEME DA SILVA, Maria Célia. **O Movimento da Matemática Moderna e Diferentes Propostas Curriculares para o Ensino de Geometria no Brasil e em Portugal.** Boletim de Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil. vol. 24, núm. 38, abril, 2011, pp. 171-196.

MEDEIROS, S.R.P.d. **Estudo dos Triângulos: uma proposta para o ensino de geometria com auxílio de mídias digitais**. São Sepé, 2011. Trabalho de conclusão de curso. Departamento de matemática pura e aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011.

MELO, A. F.; FREITAS, J. L. M. **Verificação de igualdades algébricas por meio dos quadros aritmético, algébrico e geométrico nos anos finais do Ensino Fundamental**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador, BA. Anais..., Salvador, 2010. Disponível em: . Acesso em: 08 abr. 2017.

MIGUEL, J. C. **Alfabetização Matemática:** implicações pedagógicas projeto do Núcleo de Ensino da FFC - UNESP- Marília (2004).

MORAN, J. M. Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas. In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica.** 19. ed. Campinas: Papirus, 2012.

MOREIRA, Marco Antonio. Pesquisa em ensino. In: _______. **Metodologias de pesquisa em ensino.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011, p. 11-72.

MOTTA, M. S. **Contribuições do Superlogo ao ensino de geometria do sétimo ano da Educação Básica**. 2008. 226f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

NASCIMENTO, Edvaldo Lopes do. e SCHMIGUEL, Juliano. **Referenciais teóricos-metodológicos:** sequências didáticas com tecnologias no ensino de matemática na educação básica. REnCiMa, v.8, n.2, p.115-126, 2017. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1281/886>. Acesso em: 03 de Dez. de 2018.

NASCIMENTO, E. G. A. d. **Avaliação do software GeoGebra como instrumento psicopedagógico de ensino em geometria**. 2012. 112 f. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 2012.

NASCIMENTO, E. G. d. **Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria:** reflexão da prática na escola. XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor, ISSN, 2012.

NASCIMENTO, Eimard Gomes Antunes do**. Avaliação do Uso do Software GeoGebra no Ensino de Geometria:** Reflexão da Prática na Escola. Actas de La Conferencia Latinoamericana de GeoGebra. – Uruguay, 2012. Disponível em: < http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/67.pdf>. Acesso em: 02 de maio de 2016.

NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa e ARAÚJO, Luís Carlos Lopes de. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra**. – São Paulo: Editora Exato, 2010.

NUNES SILVA, Roberto da; NUNES, J. M. V. **Modelos constitutivos de sequências didáticas:** enfoque na Teoria das Situações Didáticas. Revista Exitus, Pará: Santarém, 2019. Vol. 9. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7898051>. Acesso em: 12.Jul.2021.

OLIVEIRA, E. A. e MORELATTI, M. R. **Os Conhecimentos Prévios dos Alunos da 5ª série do Ensino Fundamental**: Um Caminho para a Aprendizagem Significativa de Conceitos Geométricos. III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006.

PADILHA, M. A. S. Professores, professoras, tecnologias e avaliação da aprendizagem: dilemas e proposições no contexto da escola pública. In: CRUZ, F. M. L. **Teorias e práticas em avaliação**. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2010.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. Coleção Tendências em Educação Matemática. – 3. ed.; 1. reimp. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, MG, 2015.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**. v. 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

PEREIRA JUNIOR, J. ; SOUTO PEREIRA, D. L. Estudo do Potencial dos Softwares Geogebra, Cabri-geometrè e Régua e Compasso. **Anais...** 32 Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Cuiabá, 2009.

PEREIRA, Maria Regina de Oliveira. **A Geometria Escolar:** uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino. Biblioteca Digital (Teses e Dissertações). Mestrado em Educação Matemática, PUC – SP, 2001.

PEREIRA, T. d. L. M. **O uso do software GeoGebra em uma escola pública:** interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. 2012. 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. **Base Curricular Comum** para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco: Matemática / Secretaria de Educação. – Recife: SE, 2012. 134p.

_____________. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco:** Matemática. Secretária de Educação, Recife: SE, 2012.

_____________. **SAEPE – 2019**. Volume 3 – Matemática – 7ª série/8ºano Ensino Fundamental. UFJF, Juiz de Fora, 2012a.

PIRES, C. M. Carolino. **Currículos de Matemática**: da organização Linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

PONTE, J.; OLIVEIRA, P.; CANDEIAS, N. **Triângulos e quadriláteros–materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3. o ciclo** – 7° ano. 2009. Disponível em: http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/temas%20matematicos/Triangulos_quadrilateros.pdf>. Acesso em: 02 jun 2020.

QUARTIERI, M. T.; REHFELDT, M. J. H. Investigando conceitos no ensino de geometria. **Anais...** 9 Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, 2007.

RAMIRO, Leandro. **Situações Didáticas no Ensino de Geometria com o aplicativo GeoGebra.** Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – São José do Rio Preto, SP, 2014.

RODRIGUES, Rosimeire dos Santos. SABIÃO, Roseline Martins. **A história da matemática e a importância da geometria.** Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 04, Ed. 06, Vol. 01. pp. 96-110 Junho de 2019. ISSN: 2448-0959.

SANTOS, S.M.F.; LEAL, D. A. **O Ensino de Matemática no Brasil com ênfase na Geometria**. Brazilian Journal of Development, Curitiba, v. 7, 2021. Disponível em: <https://brazilianjournals.com/ojs/index.php/BRJD/article/view/23911/19182>. Acesso: 02 Jul. 2021.

SANTOS, C. A. dos; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em Geometria na Educação Básica:** A fotografia e a escrita na sala de aula. – 2ª ed. – Belo Horizonte: Autêntica, 2021 (ColeçãoTendências em Educação Matemática).

SILVA, Alessandra Querino da. e SANTOS, Tatiana Silva dos. **O Uso do Software Geogebra no Ensino de Geometria Plana**. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. ULBRA – Canoas – Rio Grande do Sul, 16 a 18 de outubro de 2013. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1341/901>. Acesso em: 10 de maio de 2016.

SILVA, G. H. G. d ; PENTEADO, M. G. **O trabalho com geometria dinâmica em uma perspectiva investigativa**. Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, 1, 1066 - 1079, 2009.

SILVA, Girleide Maria da. **Um Estudo sobre o uso do GeoGebra na Aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio.** Repositório Institucional UFSCAR: São Carlos –SP, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/8870>. Acesso em: 02 de jan. de 2019.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática:** compreensão e prática. Ensino Fundamental II (8º ano). 3. ed. – São Paulo: Moderna, 2015.

SOARES, Flávia dos Santos; DASSIE, Bruno Alves; ROCHA, José Lourenço da. **Ensino de matemática no século XX** – da Reforma Francisco Campos à Matemática Moderna. Horizontes, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 7-15, jan./jun. 2004. ISSN: 0103-7706. Disponível em: < https://app.uff.br/ riuff/handle/1/1112>.

SOUZA, Joamir Roberto de. PATARO, Patricia Rosana Moreno. **Vontade de saber matemática**. Ensino Fundamental II (8º ano). 3. ed. – São Paulo: FTD, 2015.

Teixeira, P. J. M.; Passos, C. C. M. (2014). **Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau**. *Zetetiké*, *21*(1), 155–168. Disponível em: https://doi.org/10.20396/zet.v21i39.8646602. Acesso em: 15.Jul.2021.

TOMEI, C. ***Euclides:*** *a Conquista do Espaço*. São Paulo: Odysseus, 2003.

USISKIN, Z. Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar. In: LINDQUIST,M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando Geometria**. Trad. H. H.Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

VALENTE, Wagner. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. Revista ZETETIKÉ, v. 16, n. 30, jul./dez., 2008. São Paulo: Cempem-FE- Unicamp, 2008b.

____________. Osvaldo Sangiorgi, um best-seller. In: VALENTE, Wagner R. (org.). Osvaldo Sangiorgi: um professor moderno. São Paulo: Anablume; Brasília: CNPq; Osasco: GHEMAT, 2008b, p. 13-41.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed Editora, p. 8 Artmed, 1998.

ZULLATO, R. B. A. **Professores de Matemática que utilizam softwares de Geometria Dinâmica:** suas características e perspectivas. 2002. 316f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

APÊNDICES

APÊNDICE I – Sequência didática

Primeiro encontro – Atividades de familiarização do GeoGebra 6.0

Atividade 01 – Ângulos e bissetriz

a) Trace um segmento de reta *AB*.
b) Estabeleça uma reta que seja perpendicular ao segmento de reta *AB*, pelo ponto *A*. Depois, marque um ponto *C* na reta construída.
c) Mova os pontos da figura analisando se a reta continua perpendicular ao segmento *AB*. Caso não permaneça perpendicular reinicie a construção.
d) Qual a relação existente entre a reta perpendicular e o ângulo $C\hat{A}B$? Qual a medida do ângulo formado?

e) Trace um segmento de reta *PQ*.
f) Construa o ângulo $O\hat{P}Q$ com medida exatamente igual a 45°.
g) Mova os pontos de sua figura, caso a medida do ângulo modifique, reconstrua a figura.
h) Como você fez para construir o ângulo de 45°?

i) Grave o arquivo como A01.

Atividade 02 – Circunferência

a) Marque um ponto *W* e uma reta *r*, que passe por ele.
b) Considerando o ponto *W*, trace uma reta que seja perpendicular à reta *r*, passando por *W*. Depois, nomeia a reta traçada de *s*.
c) Crie dois pontos *A* e *B* pertencentes à reta *r*, de forma que a distância do ponto *W* até o ponto *A* seja congruente à distância do ponto *W* ao ponto *B*, obtendo a relação: *WA* = *WB*.
d) Crie dois pontos *C* e *D* pertencentes à reta *s*, satisfazendo a relação: *WA* = *WB* = *WC* = *WD*.
e) Arraste os pontos da figura formada analisando a relação existente entre eles. O que acontece com essa relação? Existe alguma alteração? Reinicie o processo em caso positivo.

f) Marque outros quatro pontos (*E*, *F*, *G* e *H*) mantendo a relação de congruência entre as distâncias: *WA* = *WB* = *WC* = ... = *WG* = *WH*.
g) Qual afirmação se pode chegar acerca dos pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* e *H* em relação ao ponto *W*? Observando a região do plano formada pelos oito pontos, como poderíamos chamá-la de forma que satisfaça a relação de congruência entre as distâncias até o ponto *W*?

h) Grave o arquivo como A02.

Atividade 03 – Noção de equidistância

a) Estabeleça três pontos *A*, *B* e *C* não colineares.
b) Crie um ponto *W*, de forma que ele esteja à mesma distância dos pontos *A*, *B* e *C*.
c) Movimente os pontos criados e observe se eles mantêm a mesma distância. Reinicie, em caso negativo.
d) O que você observou?

e) Grave o arquivo como A03.

<u>Segundo encontro</u> – Atividades de Congruência de Triângulos no GeoGebra 6.0

Atividades do GeoGebra 6.0 – Congruência de Triângulos

I) Construa um triângulo ABC. Como devemos proceder? Registre suas considerações na letra a) da ficha.

II) Determine a medida dos lados e dos ângulos internos do triângulo ABC. Para isso o que é preciso? Qual ferramenta utilizar no GeoGebra?

III) Mova os vértices do triângulo, analisando o que ocorre.
IV) No canto inferior esquerdo do software tem-se o campo “Entrada”. Escreva “soma = α + β + γ” (enter). No campo algébrico apareceu qual resultado? Qual conclusão você chegou? Registre suas considerações na letra b) da ficha.

V) Mova o triângulo ABC para visualizar o que acontece com essa soma. Existe alguma propriedade que justifique o que está acontecendo?

VI) Agora siga os passos seguintes para a construção do conhecimento. Registre suas considerações na letra c) da ficha.

VII) Mova o triângulo ABC. Para isso o que é preciso?

VIII) Ao mover o triângulo ABC, o que aconteceu? O que podemos concluir? Registre suas considerações respondendo da letra d) até a letra f) da ficha.

IX) Grave o arquivo como B01.

APÊNDICE II – Ficha de Atividades

Segundo encontro – Congruência de Triângulos (análise das construções no GeoGebra 6.0)

a) Para a construção de um triângulo o que precisamos saber? Como devemos proceder no GeoGebra?

b) Ao mover o triângulo ABC o que acontece com a soma = $\alpha + \beta + \gamma$? Justifique a sua resposta.

c) Desenhe um triângulo A’B’C’ no GeoGebra de forma que coincida com o triângulo ABC. Para isso o que é preciso?

d) Para a congruência de dois triângulos o que é necessário determinar?

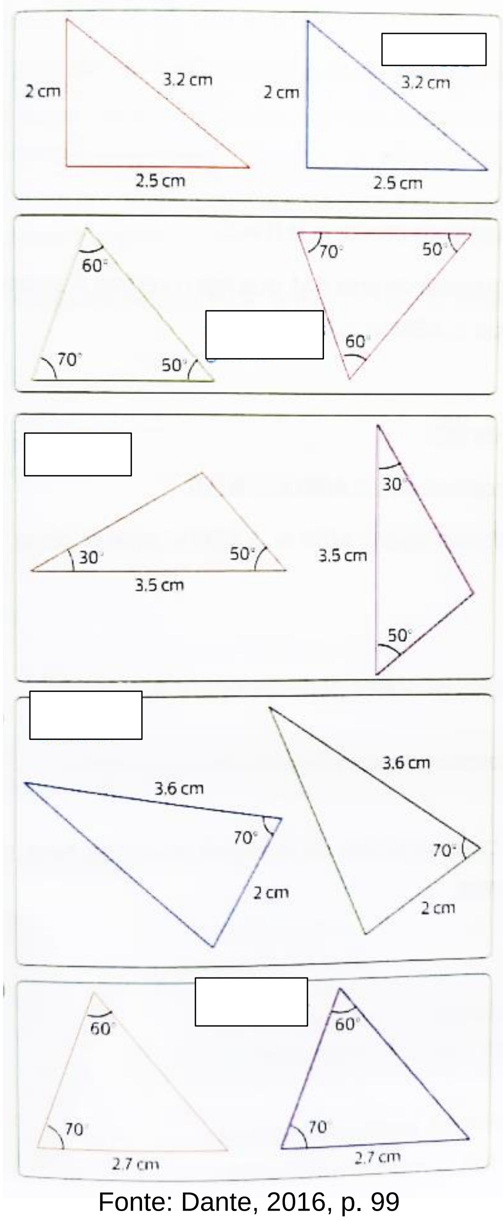
e) Ao movimentar os vértices dos triângulos construídos no GeoGebra, encontre triângulos congruentes do tipo Equilátero, do tipo Isósceles e do tipo Escaleno. Escreva na tabela abaixo as medidas dos lados e dos ângulos encontrados.

TRIÂNGULO	MEDIDAS DOS LADOS	MEDIDAS DOS ÂNGULOS	DESENHO A MÃO LIVRE	
Equilátero				
TRIÂNGULO	MEDIDAS DOS LADOS	MEDIDAS DOS ÂNGULOS	DESENHO A MÃO LIVRE	TRIÂNGULO
Isósceles				
TRIÂNGULO	MEDIDAS DOS LADOS	MEDIDAS DOS ÂNGULOS	DESENHO A MÃO LIVRE	TRIÂNGULO
Escaleno				

f) A partir da congruência dos dois triângulos e seus movimentos no GeoGebra, o que você observou?

g) Quais as suas considerações sobre congruência de triângulos e seus casos LLL, LAL, ALA e LAAo?

h) Verifique em cada item se podemos ou não garantir que os triângulos são congruentes sem efetuar medições. Em caso positivo, indique o caso que garante a congruência (LLL, LAL, ALA ou LAAo).



Fonte: Dante, 2016, p. 99

____
____
______________________________________.

____
____
______________________________________.

____
____
______________________________________.

____
____
______________________________________.

____
____
______________________________________.

APÊNDICE III – Orientações da sequência didática para o professor

Sequência didática – Esboço de aplicação pelo professor

Conhecendo o GeoGebra

O GeoGebra é um software de geometria dinâmica gratuito capaz de trabalhar com a álgebra, a aritmética, a geometria e outros campos da Matemática. Nessas aulas iremos construir o conceito de um conteúdo importante do campo geométrico. No decorrer da aula vocês irão descobrir.

Vamos conhecê-lo um pouco?!

Abrir o software on-line: GeoGebra Classic. Temos no canto superior a barra de ferramentas com 11 botões, ao clicarmos veremos suas funções...

- **Iniciando as construções e manipulações**

Bem! Para iniciarmos as construções e manipulações geométricas no software vamos construir um triângulo qualquer. Como devemos proceder? O que vocês acham? O que precisamos saber? (Espera-se que os alunos digam que usarão o 5º botão e indiquem as características de um triângulo). O que aconteceu?

Com o botão direito do mouse clique em cada letra que representa cada lado do triângulo para exibir o valor dos lados em exibir rótulo. Em mover podemos posicionar melhor as medidas. Em seguida, vamos colocar os valores dos ângulos. Como devemos proceder? Qual ferramenta utilizar? (8º botão / ângulo).

Agora selecionamos os ângulos A^BC, B^CA e CÂB. Clicando no 1º botão podemos mover os valores para melhor visualização.

No canto inferior do software temos o campo entrada. Escrevam “soma = α + β + γ” (enter).

No campo algébrico podemos ver que apareceu qual resultado? O que podemos concluir?

Vamos mover o triângulo para visualizarmos o que acontece com essa soma. E aí? (Possível resposta: a propriedade se mantém).

Em relação aos ângulos internos de um triângulo qual a propriedade que vocês conhecem? (R= A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°).

Agora vamos comparar triângulos, para isso seguiremos alguns passos...

Passo 1: Com o botão... vamos traçar um ponto A’ que corresponde ao ponto A do triângulo que você construiu. Renomeamos A’.

Passo 2: Traçamos outro ponto qualquer para traçar uma semirreta que passa pelos dois pontos que sirva como base para outro triângulo (3º botão). Depois tomamos compasso (6º botão) com a medida de $\overline{AC}$ e posicionamos em A'. A interseção formada se refere ao ponto C', assim traçamos usando o 2º botão (renomeamos).

Passo 3: Tomamos compasso com a medida do seguimento $\overline{AB}$ e posicionamos em A'. Para não confundirmos vamos retirar (exibi objeto) referente à interseção C'.

Passo 4: Tomamos compasso com a medida indo desde o ponto B ao ponto C, segmento $\overline{BC}$ e centralizamos em C'.

Passo 5: Marcamos o ponto de interseção entre as duas circunferências que seria B' (o 3º botão do novo triângulo).

Passo 6: Traçamos o triângulo A'B'C'. Para melhor visualização tiramos os traços de compasso e semirreta.

Passo 7: Agora vamos deixar visíveis as medidas dos ângulos e lados do triângulo A'B'C' (A'^B'C', B'^C'A' e C'Â'B').

Passo 8: Agora vamos ver a distância dos segmentos usando o 8º botão.

PERGUNTAS:

- ✓ O que aconteceu?
- ✓ O que podemos concluir?
- ✓ Mova o triângulo ABC. O que está acontecendo?
- ✓ Ao mover o triângulo ABC o que acontece com a soma α + β + γ? O que significa?

- Momento de explicação dos casos de congruência de triângulos a partir das construções feitas pelos alunos.

APÊNDICE IV – Carta de Apresentação

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS – PPGEC

MESTRADO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

Ao (À) Senhor (a):
Coordenador (a) da Escola

Assunto:
Apresentação de Projeto de Pesquisa

Por meio desta apresentamos o projeto de pesquisa **"Congruência de Triângulos: Análise de uma Sequência Didática utilizando o GeoGebra para o 8º ano do Ensino Fundamental"**, que é desenvolvida pela discente do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências – Curso de Mestrado da Universidade Federal Rural de Pernambuco,

Maria Fernanda Marinho Mendonça. Tal mestranda é orientada pela Professora Doutora Anna Paula de Avelar Brito Lima.

O objetivo do estudo é analisar os efeitos de uma sequência didática na construção do conceito Congruência de Triângulos, utilizando o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra como recurso didático para o 8º ano do ensino fundamental. Nesse sentido, a pesquisa será realizada por meio da aplicação de uma sequência didática a serem aplicados na turma de 8º ano da instituição. No caso da sequência, ela será aplicada na Sala 360° da escola, sendo que os estudantes se organizarão em dupla para resolver as questões propostas.

A expectativa é que o estudo seja desenvolvido no 2º Bimestre do ano letivo 2019. Para o desenvolvimento da sequência pelos alunos serão necessárias, em geral, dois encontros de aproximadamente 150 minutos no total.

Na pesquisa, a sequência didática será aplicada pelo professor regente da turma a ser analisada e não pela pesquisadora, pois, há grande probabilidade de que os estudantes se sintam mais à vontade com o seu professor e para que a pesquisadora possa fazer as anotações observadas durante o desenvolvimento da sequência didática. Dessa forma, esse docente será orientado previamente pela pesquisadora acerca da realização da sequência com seus alunos.

Os dados da pesquisa serão produzidos por meio da análise de registros escritos (fichas de atividades), análise dos dados obtidos pela gravação do GeoGebra, em áudio e por um diário de campo.

Para tanto, pedimos consentimento para que seja possível desenvolver o estudo a partir da coleta de dados (já mencionados anteriormente). Informamos que o aspecto ético deste estudo garante a não identificação das pessoas e da instituição participantes do estudo. Além disso, nos comprometemos, enquanto pesquisadoras, em permitir, aos participantes, um retorno dos dados produzidos no estudo. Pedimos também o consentimento para a exposição desses resultados, em modo de pesquisa, conservando silêncio e moral, com base no termo de consentimento livre a ser rubricado pelo participante. Explicamos que essa autorização é um prérequisito.

Desde já, ficamos gratas por sua atenção e contribuição no processo de formação desta futura mestre em Ensino das Ciências em nosso país. Em caso de dúvida você pode entrar em contato conosco pelo telefone-celular, pelos e-mails apresentados em anexo.

Jaboatão dos Guararapes, ___/____________/_______.

Atenciosamente,

____
Maria Fernanda Marinho Mendonça
Mestranda

____
Profa. Dra. Anna Paula de Avelar Brito Lima
Professora orientadora