UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS
CURSO DE MESTRADO

MARIA SOLANGE DOS SANTOS GAMA

FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE VOLUME E CAPACIDADE À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

RECIFE – PE
2023

MARIA SOLANGE DOS SANTOS GAMA

FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE VOLUME E CAPACIDADE, À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências - PPGEC, da Universidade Federal Rural de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino das Ciências.

Orientadora: Elisângela Bastos de Mélo Espindola

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Ciências e da Matemática.

RECIFE - PE
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G184f Gama, Maria Solange dos Santos
Formulação e resolução de problemas sobre volume e capacidade à luz da Teoria dos Campos Conceituais / Maria Solange dos Santos Gama. - 2023.
214 f. : il.

Orientadora: Elisangela Bastos de Melo Espindola.
Inclui referências, apêndice(s) e anexo(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Recife, 2023.

1. Formulação e resolução de problemas. 2. Teoria dos campos conceituais. 3. Volume. 4. Capacidade. I. Espindola, Elisangela Bastos de Melo, orient. II. Título

CDD 507

MARIA SOLANGE DOS SANTOS GAMA

FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE VOLUME E CAPACIDADE À LUZ DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências - PPGEC, da Universidade Federal Rural de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino das Ciências.

Aprovada em 26 de junho de 2023.

BANCA EXAMINADORA:

____

Profª. Dra. Elisângela Bastos de Melo Espíndola (Orientadora e Presidente)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

____

Profª Dra. Anna Paula de Avellar Brito Lima (Examinadora Interna)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

____

Profª Dra. Cristiane Fernandes de Souza (Examinadora Externa)
Universidade Federal da Paraíba - Campus IV

RECIFE - PE
2023

Dedico este trabalho aos meus pais João Marinho (*in memoriam)* e Maria de Lourdes *(in memoriam*) que, com muito amor, dedicação e simplicidade me ensinaram os verdadeiros valores da vida. Foi por vocês, que sempre me incentivaram aos estudos, me apoiaram e sentiram tanto orgulho pelas minhas conquistas, que iniciei e terminei este trabalho. Nossos laços de amor nos deixarão conectados por toda a eternidade. Gratidão eterna. Amo vocês!

AGRADECIMENTOS

Ao iniciar meus agradecimentos faço uma retrospectiva de tudo que vivi até aqui e não posso deixar de expressar a minha emoção de reviver mais um sonho realizado na minha vida. Cada etapa que avanço na minha jornada revela a grande certeza que tenho de que ninguém consegue crescer sozinho e de que precisamos muito uns dos outros para nos desenvolvermos plenamente.

Meu primeiro agradecimento não poderia deixar de ser a Deus, Pai Amoroso e de infinita bondade, a quem devo a vida e que me permitiu a oportunidade de realizar mais um sonho. Foram muitos anjos que o Senhor colocou na minha vida, nesse período de jornada acadêmica.

Quero registrar minha profunda gratidão:

Aos meus filhos Arthur e Vitória por serem a minha maior motivação, no sentido de não desistir do meu sonho e de me tornar um ser humano melhor. Sei que sofreram junto comigo nesse período, principalmente nos momentos de minha ausência. Quero que saibam que meu amor por vocês é incondicional.

Ao meu amor e companheiro de todas as horas, Marcelo, que foi fundamental nesse período de intensa dedicação aos estudos. Por não me deixar alimentar qualquer ideia que me impedisse de seguir em frente. Agradeço por todo incentivo e por me inspirar a me tornar uma profissional melhor na ´docência matemática. Te amo.

À minha família: minhas irmãs, irmãos, sobrinhos, cunhados, tios e tias por compreenderem minha ausência nesse período. Pelas palavras de incentivo, por torcerem sempre pelo meu crescimento e por ser meu porto seguro. Sei que posso contar com vocês em qualquer circunstância e sou feliz por vocês existirem e fazerem parte de minha vida. Amo vocês.

À minha orientadora, Dra. Elisângela Espíndola, por todos os ensinamentos, dedicação e paciência. Por ter acreditado e respeitado minhas ideias na construção dessa pesquisa, se dispondo a estudar junto comigo. Professora, a senhora é para mim um exemplo de profissional comprometida com o ensino da matemática e a pesquisa. Como é bonito ver seu cuidado com os alunos. Lembrarei sempre com muito carinho, de todas nossas trocas ao longo desse período: das refeições juntas no RU, dos cafezinhos e lanches no LACAPE, dos encontros na Biblioteca do Centro Paulo Freire. Sou grata a Deus por ter sido sua orientanda.

Às professoras Dras. Anna Paula Avellar e Cristiane Souza, que aceitaram fazer parte da banca de defesa e pelas valiosas contribuições que deram, desde a qualificação do meu projeto de pesquisa. Meu respeito e admiração pelas profissionais dedicadas e comprometidas que são, com o ensino e a pesquisa.

Às amigas irmãs que amo e que me acompanharam de perto nessa trajetória: Cleide Oliveira, que sempre me incentivou desde o período da seleção do mestrado, lendo comigo e me orientando nos meus primeiros e inseguros textos. Pelo acolhimento nos momentos de angústia, me oferecendo sempre um ombro amigo e uma escuta sem julgamentos. Obrigada Cleide, por me fazer acreditar que era possível concretizar o meu sonho. Agradeço também à Simone Ferreira, por todo carinho, apoio, disponibilidade e acolhimento. Sua contribuição foi fundamental, em todos os sentidos, nos períodos mais delicados que passei ao longo deste curso de mestrado

Às amigas que não puderam estar tão próximas, fisicamente: Andrezza Freitas, Fátima Alves, Gizella Menezes e Sandra Batista, mas que foram muito presentes por todos os gestos de compreensão por minha ausência, pelas escutas, por todo cuidado, carinho, palavras de incentivo e preocupação com meu bem-estar. Saibam que vocês foram muito importantes para mim, neste período.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências (PPGEC) por todos os ensinamentos.

À secretaria do PPGEC, nas pessoas de Lia e Thiago, que com muita gentileza e disponibilidade me auxiliaram no decorrer do curso.

À minha turma de mestrado 2021: “Turma da Pandemia” por tudo que compartilhamos, mesmo a distância. Em particular agradeço a minha amiga Kédma, que tive a oportunidade de conhecer pessoalmente. Por todo companheirismo que vivenciamos nesses últimos meses. Seu carinho, apoio e incentivo foram providenciais na minha vida.

Ao Comandante Ribeiro, da Escola de Aprendizes-Marinheiros, que me autorizou a desenvolver a pesquisa na referida escola, pelo incentivo ao meu aperfeiçoamento como docente, por favorecer a concessão da licença estudo para que eu pudesse me dedicar às atividades da pesquisa.

À Tenente Luciana, chefe do Serviço de Orientação Pedagógica (SOP), da escola, a qual sou subordinada, que foi a primeira pessoa a emitir parecer favorável à concessão da licença estudo, para eu desenvolver a pesquisa. Meu respeito e admiração por sempre incentivar o aperfeiçoamento dos docentes da escola.

Aos meus colegas de trabalho, Tenente Melo e Tenente Lima, por disponibilizarem seus tempos de aula e pelo apoio na aplicação das atividades da pesquisa, junto comigo.

Aos alunos Aprendizes-Marinheiros da Turma Oscar 2022, que foram os personagens principais para construção dos dados da pesquisa.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização desta pesquisa.

Muito Obrigada!

RESUMO

A presente pesquisa tem como objetivo analisar a Formulação e Resolução de Problemas (FRP) sobre volume e capacidade por alunos egressos do Ensino Médio, de um curso de formação militar, à luz da Teoria dos Campos Conceituais. Dentre os aportes desta teoria, destacamos as situações que dão sentido ao conceito de volume e capacidade: medição, comparação e produção, bem como os componentes dos esquemas: as metas e antecipações, as regras de ação e os invariantes operatórios relacionados a esses conceitos. A questão que orienta esta pesquisa é: Quais aspectos considerar na formulação e resolução de problemas das grandezas volume e capacidade, a partir da Teoria dos Campos Conceituais? Ancoramos a pesquisa nas abordagens qualitativa e quantitativa. Contamos com a participação de cento e onze estudantes de uma escola de formação militar, localizada na região metropolitana do Recife - PE. Para a construção de dados, foram propostas seis atividades para que os alunos formulassem e resolvessem os problemas por eles formulados, a saber: a partir de uma figura; de um problema dado, criar um parecido; de um início dado continuar o problema; de uma pergunta; de uma resposta e a partir de uma sentença. A análise dos dados permitiu identificar, dentre os resultados, que os alunos apresentaram maior dificuldade na FRP a partir de um início dado, continuar o problema, e menor dificuldade, na FRP a partir de um problema dado, criar um parecido. A FRP a partir de uma pergunta foi aquela que apresentou mais regras de ação e invariantes operatórios similares, enquanto a que apresentou uma maior dispersão foi a FRP a partir de um início dado, continuar um problema. De modo geral, as situações de medição com o uso de fórmulas e de transformação de unidades de medidas foram as mais utilizadas nos problemas formulados pelos alunos, enquanto as situações de comparação e produção foram as menos incidentes.

Palavras-chaves: Formulação e Resolução de Problemas; Teoria dos Campos Conceituais; Volume e Capacidade.

ABSTRACT

This research aims at analyzing the Formulation and Resolution of Problems (FRP) about volume and capacity by students who graduated from High School, of a military training course, in the light of the Theory of Conceptual Fields. Among the contributions of this theory, we highlight the situations that give meaning to the concept of volume and capacity: measurement, comparison, and production, as well as the components of the schemes: goals and anticipations, action rules, and operational invariants related to these concepts. The question that guides this research is: What aspects to consider in the formulation and resolution of problems of the magnitudes volume and capacity, from the Theory of Conceptual Fields? We anchor the research in qualitative and quantitative methodologies. We had the participation of one hundred and eleven students of a military training school, located in the metropolitan region of Recife - PE. For the construction of data, six activities were proposed for the students to formulate and solve the problems formulated by the students, namely: from a figure; from a given problem, to create a similar one; from a given beginning, to continue the problem; from a question; from an answer and from a sentence. Data analysis allowed us to identify, among the results, that students had greater difficulty in FRP from a given beginning, to continue the problem, and less difficulty, in FRP from a given problem, to create a similar one. The FRP from a question was the one that presented more rules of action and similar operative invariants. In contrast, the one that presented the greatest dispersion was the FRP from a given beginning, to continue a problem. In general, the measurement situations using formulas and the transformation of measurement units were the most used in the problems formulated by the students, while the comparison and production situations were the least incidents.

Keywords: Problem Formulation and Resolution; Theory of Conceptual Fields; Volume and Capacity.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AM – Aprendiz-Marinheiro

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

C-FMN - Curso de Formação de Marinheiros

EAM - Escola de Aprendizes-Marinheiros

FP - Formulação de Problemas

FRP - Formulação e Resolução de Problemas

IO - Invariante Operatório

OM - Organização militar

RA - Regras de Ação

RP - Resolução de Problemas

S - Situação

TAC – Teorema em Ação Correto

TAE – Teorema em Ação Errôneo

TCC - Teoria dos Campos conceituais

TFM - Treinamento Físico Militar

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos a origem da motivação da presente pesquisa, buscando situar algumas inquietações que nos levaram a investigar a formulação e resolução de problemas sobre volume e capacidade, por alunos egressos do ensino médio, em particular, no cenário de uma escola de formação militar. Situamos também o caminho percorrido para as escolhas teórico-metodológicas da pesquisa, os objetivos traçados e a apresentação das temáticas dos demais capítulos.

1.1 SITUANDO ELEMENTOS MOTIVACIONAIS DA PESQUISA

O Curso de Formação de Marinheiros (C-FMN), realizado na Escola de Aprendizes-Marinheiros, onde a pesquisadora atua como professora de Matemática desde 2008, tem um público formado por jovens, com idade de 18 a 22 anos, com escolaridade de Ensino Médio completo e que aspiram seguir a carreira militar.

A proposta curricular do C-FMN, em relação ao estudo de Matemática, é voltada para resolver situações-problema do cotidiano referentes às futuras profissões dos alunos (eletricistas, mecânicos, mergulhadores, dentre outras). Os conteúdos de Matemática presentes no currículo são contemplados nas disciplinas de Matemática I e II, as quais ocorrem, respectivamente, na primeira e na segunda fase do curso. Em particular, a Matemática I é uma disciplina voltada essencialmente à revisão de conteúdos do Ensino Fundamental. Dentre eles, os conteúdos relacionados a Grandezas e Medidas.

No início das aulas de Matemática I, a cada ano, para atingir os objetivos de aprendizagem relativos a Grandezas e Medidas, a pesquisadora e os outros dois professores da EAM, costumam apresentar alguns problemas para serem resolvidos pelos alunos no contexto do cotidiano marinheiro, envolvendo as grandezas comprimento, área, volume, capacidade e massa. Pela natureza do C-FMN, é abordado, com maior ênfase, o estudo de volume e capacidade. Diante disto, em um determinado dia, ao final de uma aula de Matemática, um aluno apresentou à pesquisadora, voluntariamente, um problema formulado por ele, que envolvia volume, capacidade e massa. Neste contexto, alguns questionamentos foram feitos para que o aluno pudesse reformulá-lo, de modo a retratar uma situação mais próxima da realidade. Com o intuito de incentivar o referido aluno, inserimos o problema formulado por ele numa lista de exercícios proposta para os demais alunos do C-FMN. O problema formulado por este aluno foi o seguinte:

> Cinco caminhões-tanque de características idênticas são capazes de transportar, cada um, 15 toneladas de determinado fluido utilizado como matéria prima numa indústria química. O reservatório da indústria que armazena esse fluido tem dimensões retangulares, com 20 m de comprimento, 150 dm de largura e 0,25 dam de profundidade. Como a estrada de acesso a indústria estava com problemas no asfalto, foi determinado que eles só poderiam transportar até 2/3 de sua capacidade. Quantas viagens, no mínimo, esse comboio precisaria fazer para abastecer 8/10 da capacidade do reservatório, sabendo que a massa de 800 ml do fluido transportado equivale a 1 kg? (AM-3211, 2018).

Observamos que o problema formulado pelo aluno é de difícil compreensão, pois exige o conhecimento de vários conteúdos e operações para sua resolução. Mesmo assim, alguns alunos do C-FMN se sentiram desafiados a resolver o problema e isso serviu de motivação para que ele criasse outros mais.

Essa experiência foi compartilhada com os demais professores de Matemática da EAM, na qual discutimos a respeito dos benefícios que a Formulação de Problemas (FP) articulada à resolução de problemas poderia trazer para as aulas de Grandezas e Medidas. Dentre esses benefícios, supomos que esta atividade poderia favorecer a compreensão dos enunciados dos problemas e dos conceitos e operações para resolvê-los. Diante disso, concordamos que poderíamos inserir a Formulação e Resolução de Problemas (FRP) como um dos critérios de avaliação da disciplina de Matemática I. Apresentamos nossa proposta para os professores e coordenadores das outras EAM e posteriormente para a Diretoria de Ensino da Marinha (DEnsM), que a aceitou.

Pelo exposto, a partir de 2019, a FRP foi inserida como critério de avaliação da disciplina de Matemática I. Definiu-se então, uma atividade de FRP que teria uma pontuação parcial para composição da nota final[1] da avaliação sobre Grandezas e Medidas. Desde sua implementação, temos identificado sobre a atividade de FRP algumas dificuldades, tais como:

[1] A nota da avaliação sobre grandezas e medidas é composta pela soma da nota do trabalho em grupo sobre formulação e resolução de problemas, que vale de 0,0 (zero) a 3,0 (três) pontos, e uma prova escrita que vale de 0,0 (zero) a 7,0 (sete) pontos.

- Escrita do texto desarticulada com o que era solicitado na pergunta do problema;
- Dados incompletos ou inconsistentes para resolução do problema;
- Incompreensão do conceito de capacidade e volume;
- Confusão na escolha da unidade de medida adequada;
- Contextualização com situações irreais.

Diante dessas dificuldades apresentadas pelos alunos da EAM, surgiu a inquietação de buscar suportes teóricos e metodológicos como auxílio à proposição de atividades de FRP. De uma parte, a fim de favorecer a aprendizagem de Grandezas e Medidas, particularmente sobre volume e capacidade. De outra parte, como uma forma de melhorarmos nossa prática docente em relação à melhor elaboração das atividades de FRP, bem como encontrar novos caminhos para a análise e entendimento dos problemas formulados pelos alunos.

Em virtude disso, buscamos inicialmente alguns trabalhos acerca da FRP com abordagem sobre o ensino e a aprendizagem de volume e capacidade na Educação Básica, a fim de melhor tecermos a questão norteadora e os objetivos desta pesquisa. Como expomos nos tópicos seguintes.

1.2 APONTAMENTOS DE PESQUISAS SOBRE FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS

Altoé (2017), em sua dissertação de mestrado, buscou investigar contribuições de atividades relativas à formulação de problemas para o ensino de conceitos de multiplicação e divisão nos anos iniciais do ensino fundamental. Tomou como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) (VERGNAUD, 1990) e, no que se refere à Formulação de Problemas, os trabalhos desenvolvidos por Boavida *et al*. (2008), Chica (2001), dentre outros. A pesquisa foi desenvolvida numa Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio do município de Vargem Alta – ES e contou com a participação de 28 alunos do 5º ano do ensino fundamental e da professora regente. A metodologia utilizada foi delineada na perspectiva da Engenharia Didática. Para tanto, a análise dos dados foi confrontada *a posteriori* pela análise *a priori.* A conclusão desse estudo revelou que essa prática é quase nula nos ambientes escolares, pouco conhecida pelos professores e por vezes considerada muito difícil pelos alunos. Foi constatado também que, embora a professora regente afirmasse trabalhar formulação de problemas, isso não ocorria de maneira eficaz e os alunos passavam boa parte das aulas resolvendo problemas.

Almeida (2018), em sua dissertação de mestrado, tomou por objetivo compreender e descrever o modo como alunos do 3º e 4º ciclos dos anos iniciais se envolvem na resolução de tarefas de formulação de problemas. O aporte teórico utilizado envolveu a literatura sobre formulação e resolução de problemas com base em autores como: Stoyanova e Ellerton (1996), Silver (1994), Christou *et al.* (2005), dentre outros. Utilizou como referência a TCC (VERGNAUD, 1990) e a metodologia utilizada foi o estudo de caso, por meio de entrevistas e observação participante. Nas entrevistas, quanto aos processos de formulação de problemas, constatou-se o conhecimento matemático, relativo à multiplicação e divisão, mobilizado em dois tipos de tarefas: as que solicitaram a formulação de um problema que pudesse ser resolvido por meio de uma expressão de cálculo fornecida e as que pediam a formulação de perguntas que pudessem ser resolvidas a partir de dados fornecidos, num contexto próximo da realidade. O estudo permitiu observar que os alunos usavam essencialmente dois processos de formulação de problemas que tinham relação com a recordação de situações e a antecipação de resoluções antes da formulação. A partir desses resultados, algumas questões foram levantadas e que merecem ser investigadas no desenvolvimento dos processos de formulação de problemas: a complexidade da tarefa proposta e a variedade de formas de apresentação (representação) dos contextos ou dos modelos matemáticos utilizados. O estudo concluiu que a formulação de problemas é um ótimo instrumento para avaliação dos conhecimentos dos alunos.

Andreatta e Allevato (2020) investigaram como ocorre a aprendizagem matemática por meio da elaboração de problemas com estudantes de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental de uma Escola Municipal Comunitária Rural, no Espírito Santo. Isto ocorreu por meio de uma pesquisa-ação. A construção dos dados foi efetuada por meio da observação participante e os problemas elaborados pelos estudantes foram analisados na perspectiva metodológica da Análise Textual Discursiva (ATD) (MORAES; GALIAZZI, 2016). O processo de elaboração dos problemas ocorreu após um trabalho de resolução de problemas geradores, através da mediação do pesquisador e da professora regente. Cada problema gerador proposto aos estudantes estava relacionado a temáticas e conteúdos previstos no Plano de Estudo da escola e abordavam assuntos referentes a fração, medidas de comprimento, medidas agrárias e de massa, raciocínio lógico, equivalência e divisão. A maioria dos textos dos problemas elaborados pelos estudantes envolvia situações de compra e venda e produtos com valores monetários, demonstrando que essas situações estavam associadas aos seus interesses e gostos pessoais. Os conteúdos matemáticos presentes nos textos elaborados referiam-se às operações fundamentais, principalmente a adição e multiplicação. A justificativa desse fato se deu por se tratar de operações que proporcionam mais segurança aos estudantes. Outros aspectos positivos foram observados nesta pesquisa sobre elaboração de problemas: i) a motivação pode ser considerada um ponto de partida para a promoção do interesse e envolvimento dos estudantes nas atividades escolares; ii) as operações fundamentais foram consolidadas; e iii) possibilidades de desenvolvimento da criatividade e criticidade. Dessa forma, os autores concluíram que o trabalho com a elaboração de problemas pode tornar-se mais um recurso em favor da aprendizagem matemática, tão importante quanto a resolução de problemas e outras metodologias.

Spinillo et al (2017) investigaram como professores do ensino fundamental concebem e formulam problemas no campo conceitual das estruturas multiplicativas à luz da TCC (VERGNAUD, 1990). Participaram da pesquisa 39 professores de Matemática do ensino fundamental da rede pública da cidade do Recife-PE. Foi solicitado a cada um deles que formulasse 8 problemas matemáticos que pudessem ser resolvidos por meio de multiplicação e/ou de divisão. Os resultados indicam que os professores conseguem elaborar problemas verbais de forma adequada dentro do campo conceitual das estruturas multiplicativas. A maior dificuldade reside em elaborar problemas que envolvam diferentes relações para um mesmo conceito, no âmbito dessas estruturas. Além disso, os autores identificaram que, mesmo que os problemas elaborados fossem adequados, eles pareciam simples e pouco variados, requerendo apenas um passo para a solução. Ainda apontam que os professores possuem um olhar limitado das situações-problema no campo das estruturas multiplicativas. Desse modo, a formulação de problemas exige conhecer o que é relevante para a resolução de uma dada situação, considerar as relações entre os dados do enunciado, as relações entre estes e a pergunta e o modo de respondê-la.

Nesse estudo também se observou a importância de conhecer, mais amplamente, a relação entre a resolução de problemas e a Educação Matemática, de modo a incluir o professor como formulador de problemas.

Martins, Viseu e Menezes (2019) buscaram conhecer os problemas que os alunos formulam, as estratégias de formulação de problemas que valorizam e que características da criatividade identificam nessa atividade durante a aprendizagem de números racionais não negativos. Tomou-se, por base teórica, as estratégias delineadas por Stoyanova e Ellerton (1996): Situação estruturada, Situação semiestruturada e Situação livre. A pesquisa foi realizada com 21 alunos portugueses do 4º ano (9 - 12 anos) de escolaridade[2], durante a aprendizagem de números racionais não negativos. A abordagem metodológica utilizada foi a qualitativa interpretativa. A construção dos dados foi realizada por meio dos registros escritos das formulações de problemas produzidas em grupos e por um questionário aplicado ao final da pesquisa. O resultado dessa pesquisa apontou que os problemas formulados pelos alunos se aproximam daqueles que são resolvidos nas aulas de matemática e dos que são contemplados nos manuais escolares. Das estratégias de formulação de problemas trabalhadas, a situação semiestruturada “Aceitando os dados: observação de uma imagem” foi considerada pelos alunos a mais interessante e revelou-se mais desafiante e motivadora. O estudo também evidenciou que é possível e desejável trabalhar a formulação de problemas no ensino da Matemática, desde cedo e que esse tipo de atividade favorece a compreensão dos conceitos matemáticos, contribui para a melhoria da resolução de problemas e favorece a criatividade dos alunos.

Diante do exposto, podemos perceber que as pesquisas sobre a formulação de problemas demonstram a importância dessa atividade para a aprendizagem de conceitos matemáticos pelos alunos. Em especial, chamou-nos a atenção como a TCC (VERGNAUD, 1990) tem sido articulada às pesquisas sobre a Formulação de Problemas. Contudo, não encontramos nenhuma pesquisa com o uso desta teoria ou

[2] O sistema de ensino português contempla 12 anos de escolaridade até ao ensino superior. Os primeiros nove correspondem ao Ensino Básico (EB) e os três últimos ao Ensino Secundário (ES). O EB é formado por três ciclos de ensino: o primeiro de quatro anos (com professor único), o segundo de dois anos e o terceiro de três anos.

daquelas que discutem problemas formulados pelos alunos no campo das grandezas e medidas.

Vale ressaltar que embora não tenhamos identificado o uso da TCC (VERGNAUD, 1990), em pesquisas sobre a formulação de problemas, encontramos algumas que analisam a resolução de problemas envolvendo volume e capacidade.

Por exemplo, destacamos as pesquisas de Figueiredo (2013), Melo (2018) e Morais (2013) que nos auxiliam na compreensão das dificuldades de aprendizagem dos alunos sobre estes conceitos. Em nosso entendimento, estas dificuldades podem impactar nas atividades de formulação de problemas. Diante disso, apresentamos no próximo tópico algumas das contribuições dessas pesquisas.

1.3 APONTAMENTOS DE PESQUISAS SOBRE VOLUME E CAPACIDADE

Figueiredo (2013), no seu trabalho de dissertação, analisou, sob a ótica da TCC (VERGNAUD, 1990), como alunos do ensino médio lidam com situações envolvendo a grandeza volume. Além da TCC, tomou como aporte teórico as pesquisas de Douady e Perrin-Glorian (1989) sobre os quadros geométrico, numérico e das grandezas e Baltar (1996) acerca da tipologia de situações que dão sentido ao conceito de área de figuras planas adaptado à grandeza volume: Situação de medição, comparação e produção. Realizou-se um estudo exploratório por meio de um teste de sondagem aplicado a 51 alunos do 3º ano do ensino médio, em três instituições de ensino das redes: privada, pública federal e pública estadual e foram realizadas entrevistas com 10 desses alunos. Sua pesquisa revelou que o campo numérico predomina em relação ao campo geométrico e das grandezas, visto que os alunos do ensino médio compreendem melhor situações de volume em que o aspecto numérico está em jogo, ou seja, as situações de medição são as mais compreendidas por eles. Por outro lado, quando se deparam com situações em que necessitam dissociar e articular os quadros numérico, geométrico e das grandezas, como nas situações de produção, eles apresentam dificuldades, quer seja no campo numérico, quer seja no campo geométrico ou no campo das grandezas. Os aspectos abordados na pesquisa apontaram para lacunas e entraves de natureza epistemológica, que podem estar relacionados a aqueles cuja origem está na complexidade das relações entre volume e outras grandezas físicas e geométricas (massa e área), com os conceitos de dimensionalidade e capacidade. Entretanto, os dados apontam para uma possível origem didática para esses entraves e lacunas, reforçando a hipótese levantada em pesquisas anteriores de que a ênfase excessiva no uso de fórmulas e nas situações de medição não parece dar conta da atribuição de um significado mais amplo para volume.

Melo (2018), no seu trabalho de dissertação de mestrado, desenvolveu a análise dos conhecimentos mobilizados por alunos do ensino médio na resolução de problemas envolvendo o volume do paralelepípedo retângulo, sob a ótica das Imbricações entre Campos conceituais. Utilizou-se a TCC (VERGNAUD, 1990) e o olhar das Imbricações entre Campos Conceituais proposto por Teles (2007) e a conceituação de volume como grandeza à luz de Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996). A pesquisa contou com a participação de 107 estudantes dos 2º e 3º anos do ensino médio de três escolas públicas estaduais, do Agreste Meridional de Pernambuco. Foram utilizados dois instrumentos: testes diagnósticos com 5 problemas envolvendo volume do paralelepípedo retângulo e entrevistas de explicitação. Dentre os resultados desta pesquisa, destacamos, por exemplo, o teorema em ação errôneo (TAE) mobilizado pelos alunos: A medida do volume de um paralelepípedo retângulo é a soma das medidas de suas arestas.

Por sua vez, a pesquisa de mestrado de Morais (2013), teve por objetivo caracterizar a abordagem da grandeza volume em sete coleções de livros didáticos (LD) de Matemática do ensino médio aprovados no Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2012. De maneira análoga às pesquisas mencionadas anteriormente, tomou-se como aportes teóricos a TCC (VERGNAUD, 1990), Douady e Perrin-Glorian (1989), Baltar (1996). Na análise dos LD foram utilizados como critérios de análise: descrição da abordagem de volume, volume como conceito e componente do campo conceitual das grandezas geométricas e fórmulas de volume. Essa pesquisa revelou que a grandeza volume geralmente é abordada na parte final dos LD do 2° ano e por vezes na parte inicial dos LD de 3° ano. O ensino de volume nos LD é realizado em seções de capítulos dedicados ao estudo dos sólidos geométricos, situando volume no domínio da Geometria. As situações de medição são as mais abordadas e mesmo em exercícios de comparação, produção e outros tipos, o aspecto numérico e o uso de fórmulas são os mais enfatizados. A extensão da validade da fórmula do volume do bloco retangular para os casos em que as medidas de comprimento das arestas não são inteiras geralmente não é argumentada nem ao menos explicitada. Ademais, a distinção entre volume e o sólido e entre volume e a medida esteve presente em todas as coleções. Sobre esta pesquisa, convém ressaltar a importância do LD na prática docente e por consequência, na aprendizagem do conceito de volume pelos alunos.

Diante da constatação das dificuldades na aprendizagem dos alunos dos conceitos de volume e capacidade, identificadas nos trabalhos mencionados e a escassez de pesquisas voltadas, especificamente, para a formulação de problemas (FP) envolvendo esses conceitos, consideramos ser relevante desenvolver um estudo, ancorado na Teoria dos Campos Conceituais e em tipos de estratégias de FP, discutidas por autores, a exemplo de Boavida et al. (2008), Chica (2001) e Stoyanova e Ellerton (1996). Nesse sentido, buscaremos nesta pesquisa responder à seguinte questão: Quais aspectos considerar na formulação e resolução de problemas das grandezas volume e capacidade, a partir da Teoria dos Campos Conceituais? Para responder a essa questão, trilhamos os objetivos expostos a seguir.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 Objetivo geral

Analisar a formulação e resolução de problemas sobre volume e capacidade, por alunos egressos do ensino médio, de um curso de formação militar, à luz da Teoria dos Campos Conceituais.

1.4.2 Objetivos específicos

I. Investigar as similaridades e diferenças, quanto aos tipos de situações e elementos do esquema, apresentados pelos alunos na FRP de volume e/ou capacidade;
II. Identificar quais tipos de atividades de FRP de volume e/ou capacidade em que os alunos apresentam maior ou menor dificuldade;
III. Verificar quais regras de ação e invariantes operatórios são mais recorrentes na FRP de volume e/ou capacidade.

Em busca de atingir os objetivos destacados, organizamos a pesquisa conforme apresentamos a seguir.

1.5 APRESENTAÇÃO DOS CAPÍTULOS

Neste Capítulo 1, apresentamos a trajetória e o contexto que nos motivou a investigar a temática da formulação e resolução de problemas envolvendo os conceitos de volume e capacidade; apontamentos sobre algumas pesquisas anteriores a respeito da formulação de problemas e do tema volume e/ou capacidade. Apresentamos também nossa questão de pesquisa, o objetivo geral e os objetivos específicos.

No processo de construção do Capítulo 2, inicialmente, apresentamos as orientações curriculares da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) acerca da elaboração/formulação de problemas pelos alunos. Em busca de maiores esclarecimentos sobre este tema, consultamos na literatura definições sobre as noções de elaboração, formulação e proposição de problemas. Além disso, discutimos a formulação associada à resolução de problemas. Em seguida, apresentamos algumas propostas de atividades desenvolvidas em pesquisas na Educação Básica a respeito deste tema e concluímos explanando sobre procedimentos traçados por algumas pesquisas na análise de problemas formulados por alunos.

O Capítulo 3 traz considerações acerca da Teoria dos Campos Conceituais e o campo conceitual de volume e capacidade. Refinamos elementos sobre esta teoria, tais como, as noções de situações e esquemas, dentre outros. Explanamos como a BNCC (BRASIL, 2018) aborda o estudo das Grandezas e Medidas e as habilidades e competências específicas, referentes a volume e à capacidade, respectivamente, no Ensino Fundamental e Médio. Tratamos esses conceitos à luz de discussões didáticas e tipos de situações, invariantes operatórios e representações simbólicas a estes relacionados.

No Capítulo 4, descrevemos as características do tipo de pesquisa bem como o cenário onde ela foi realizada e o perfil dos participantes. Traçamos os procedimentos metodológicos adotados na construção e análise dos problemas formulados pelos alunos com base nos tipos de atividades propostas e na Teoria dos Campos Conceituais.

No Capítulo 5, apresentamos a análise e discussão dos resultados. Nesse sentido, expomos de forma geral, os erros e acertos em cada atividade de FRP em torno dos tipos de situações de volume e/ou capacidade (produção, medição e comparação). Refinamos os componentes dos esquemas, ou seja, da organização invariante das atividades de FRP (metas e antecipações, regras de ação e invariantes operatórios) apresentados de forma similar e particularizada pelos alunos.

Por fim, no Capítulo 6, apresentamos as considerações finais a respeito da formulação e resolução de problemas sobre volume e capacidade à luz da Teoria dos Campos Conceituais.

2 FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Neste capítulo, apresentamos algumas considerações acerca das orientações curriculares presentes na BNCC (BRASIL, 2018) sobre a elaboração/formulação de problemas matemáticos, com um olhar sobre as habilidades referentes ao estudo de volume e capacidade na Educação Básica. Aprofundamos os significados atribuídos aos termos elaboração, formulação e proposição de problemas. Na sequência, trazemos discussões teóricas acerca da formulação associada à resolução de problemas, e por fim, algumas propostas de atividades para estas formulações.

2.1 ORIENTAÇÕES CURRICULARES SOBRE A FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS

A partir da BNCC (BRASIL, 2018), a elaboração de problemas na área de Matemática ganhou maior destaque, pois aparece nas recomendações didáticas de todas as etapas do ensino básico. Para os anos iniciais do Ensino Fundamental, este documento recomenda:

> Algumas das habilidades formuladas começam por: “resolver e elaborar problemas envolvendo...”. Nessa enunciação está implícito que se pretende não apenas a resolução do problema, mas também que os alunos reflitam e questionem o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada. Nessa perspectiva, pretende-se que os alunos também formulem problemas em outros contextos. (BRASIL, 2018, p.277).

Nos anos finais do Ensino Fundamental, na BNCC, adverte-se que é necessário que os alunos desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos.

> Para favorecer essa abstração, é importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido. Por esse motivo, nas diversas habilidades relativas à resolução de problemas, consta também a elaboração de problemas. Assim, pretende-se que os alunos formulem novos problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto (BRASIL, 2018, p. 299).

No que se refere ao Ensino Médio, a BNCC (BRASIL, 2018) orienta que se aproveite todo o potencial já adquirido pelos estudantes no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior:

> [...] isso significa que novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos (BRASIL, 2018, p. 528-529).

Ainda em relação ao Ensino Médio, a BNCC (BRASIL, 2018) reitera a justificativa do uso do termo “Resolver e Elaborar Problemas” em lugar de “Resolver Problemas”, ampliando e aprofundando:

> [...] o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada. (BRASIL, 2018, p. 536).

Para ampliar nossa visão a respeito da importância dada à formulação de problemas pela BNCC (BRASIL, 2018), efetuamos um levantamento no sentido de identificar o número de habilidades presentes nas unidades temáticas do Ensino Fundamental, que trazem a recomendação de “Resolver e elaborar problemas […]”. O resultado desse levantamento encontra-se indicado na Tabela 1 a seguir.

Tabela 1 - Quantitativo de vezes que o termo “Resolver e elaborar problemas” é indicado nas habilidades da BNCC referentes ao Ensino Fundamental

Unidades Temáticas	**QUANTIDADE DE HABILIDADES COM INDICAÇÃO SOBRE RESOLVER E ELABORAR PROBLEMAS**									**Total**
	ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL									
	1º	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**	**6º**	**7º**	**8º**	**9º**	
Números	1	3	3	3	3	6	4	3	2	28
Grandezas e Medidas	0	0	1	1	1	1	2	3	1	10
Álgebra	0	0	0	0	1	1	2	4	2	10
Geometria	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Estatística e Probabilidade	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total										49

Fonte: Autoria própria com dados baseados na BNCC (BRASIL 2018).

Observando os dados da Tabela 1, podemos perceber que a maior quantidade de habilidades (28) voltadas para resolução e elaboração de problemas encontra-se na unidade temática “Números” e que isto já começa a ser indicado desde o 1º ano do Ensino Fundamental.

Identificamos o quantitativo de 10 habilidades com indicação de elaboração e resolução de problemas em Grandezas e Medidas, equivalente ao número de “Álgebra”. No caso de “Grandezas e Medidas”, isto é sugerido a partir do 3º ano, enquanto em “Álgebra”, a partir do 5º ano. No que diz respeito à “Geometria”, constatamos apenas (1) uma habilidade contemplada no 9º ano e nenhuma para “Estatística e Probabilidade”.

Ressaltamos que das 10 habilidades acerca de resolver e elaborar problemas, em Grandezas e Medidas, 5 delas concernem aos conceitos volume e capacidade e são propostas a partir do 5º ano.

No tocante ao Ensino Médio, identificamos 11 habilidades com “resolver e elaborar problemas”, todas essas relativas apenas à Competência Específica 3:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente” (BRASIL, 2018, p.535).

Na Tabela 2, apresentamos um panorama das habilidades identificadas com a indicação de "Resolver e elaborar problemas”, por cada unidade temática do Ensino Médio.

Tabela 2 - Resolver e elaborar problemas nas habilidades da BNCC do Ensino Médio

Unidades	**Habilidades relativas à Competência Específica 3**
Números e Álgebra	4
Probabilidade e Estatística	4
Geometria e Medidas	3
Total	11

Fonte: Autoria própria com dados baseados na BNCC (BRASIL 2018)

Identificamos, dentre as 11 habilidades com a indicação de “resolver e elaborar problemas”, apenas 1 (uma) voltada aos conceitos de volume e capacidade.

Diante do exposto, constatamos a relevância na BNCC (BRASIL, 2018) dada à formulação de problemas pelos alunos, porém não encontramos nesse documento a indicação de estratégias visando otimizá-la na prática docente. Também percebemos que o termo “Elaboração de problemas” é utilizado por outros autores como formulação ou proposição de problemas. A propósito disto, consideramos necessário aprofundar nosso entendimento sobre estes aspectos.

2.2 DEFINIÇÕES SOBRE ELABORAÇÃO/FORMULAÇÃO/PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

De acordo com o dicionário *Houaiss*, a palavra formulação, que adotamos em nosso trabalho, traz como um dos seus significados o “processo de criar e dar forma a uma ideia, uma teoria, etc.” (HOUAISS; VILLAR; FRANCO, 2001, p. 918). Nos trabalhos relacionados a atividades de criação de problemas, os termos comumente utilizados, além da formulação, são elaboração/proposição.

Segundo Possamai e Allevato (2022, p. 6) “[…] utilizamos o termo criação de problemas para nos referirmos ao conjunto de ideias e ações indicadas como elaboração, formulação e proposição de problemas”.

No Quadro 1, apresentamos uma síntese do estudo realizado por Possamai e Allevato (2022), em 10 teses e dissertações, quanto à definição ou ao entendimento sobre a utilização das expressões: elaboração, proposição ou formulação de problemas. Dentre os 10 trabalhos analisados, 4 desses se baseiam na definição de Silver (1994) e os demais utilizam outras noções.

Quadro 1 - Uso dos termos elaboração/proposição/formulação de problemas em pesquisas

Autores	**Definições ou entendimentos utilizados**
Silver (1994)	“A proposição de problemas se refere tanto à geração de novos problemas quanto à reformulação de determinados problemas” (SILVER, 1994, p.19).
Teixeira (2019)	“O termo formulação de problemas é entendido como a criação de situações a partir de vivências e experiências dos estudantes e/ou por algum tipo de estímulo” (TEIXEIRA, 2019, p. 142).
Furlan (2011)	“Os Parâmetros Curriculares Nacionais são citados por Furlan (2011) para registrar que o autor considera a formulação de problemas como atividade em que os estudantes criam problemas” (POSSAMAI; ALLEVATO, 2022, p. 13).

Carvalho (2015)	Elaboração de problemas se refere “à atividade em que o indivíduo reconheça problemas em questões que envolvam situações matemáticas e seja capaz de expressá-los de forma elaborada” (CARVALHO, 2015, p. 70).
Altoé (2017)	A formulação de problemas é uma “prática inserida na metodologia de Resolução de Problemas que oportuniza aos alunos (re)formularem problemas a partir de determinadas condições pré-determinadas ou problemas dados” (ALTOÉ, 2017, p. 57).
Andreatta e Allevato e (2020)	A elaboração de problemas é assumida como “a décima etapa da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, na qual os estudantes criam problemas após a resolução de um problema gerador” (POSSAMAI; ALLEVATO, 2022, p. 14).
Silva (2016)	No âmbito da “metodologia da resolução, exploração e proposição de problemas”, os estudantes são colocados a criar problemas após a atividade de resolução de problemas, considerando que “na proposição de problemas os alunos empregam os conhecimentos já apreendidos, constroem novas experiências e desenvolvem a criatividade” (SILVA, 2016, p. 39).

Fonte: Autoria própria com dados baseados em Possamai e Allevato (2022).

As definições ou entendimentos apresentados no Quadro 1 apontam como encontramos na literatura usos diferenciados para os termos elaboração, proposição e formulação de problemas, mas, segundo Silveira e Andrade (2022), todos advém da “proposição de problemas”. Esses autores explicam que

> O tema Proposição de problemas aparece na literatura com diversas denominações. Em inglês, é nomeado “Problem posing”, o qual, ao ser traduzido por pesquisadores do mundo inteiro, surge designado como Formulação de problemas, Proposição de problemas, Criação de problemas, entre outros (SILVEIRA; ANDRADE, 2022, p.3).

Além dos termos proposição, formulação e elaboração de problemas, a expressão “exploração de problemas” é utilizada no sentido de

> Na exploração de problemas, inicialmente é proposta uma situação-problema, em que os alunos realizaram um trabalho sobre ele. Juntos, professor e alunos discutem o trabalho feito em um processo de reflexões e de sínteses, chegando, ou não, à resolução do problema, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões. Nesse processo, o trabalho de exploração de problemas não se acaba, não se limita à resolução do problema, podendo ir além e se refere a tudo que se faz nele a partir da relação problema-trabalho-reflexões e sínteses (P-T-RS) (ANDRADE, 1998, p. 26 apud SILVA, 2013, p. 103).

No entendimento de Silva (2013, p. 103), o processo de exploração de problemas não acaba com a sua resposta: “Pode-se pensar além da questão, tirar outras questões e outros raciocínios, num ir e vir que acaba quando se encerra a exploração”.

Para Teixeira e Moreira (2022), a formulação de problemas diverge da elaboração de problemas, pois, de um lado, a formulação de problema é guiada por "um objetivo de aprendizagem associado a um objeto de conhecimento e pode ser proposta a partir de um estímulo, isto é, um disparador temático e/ou por meio de material concreto manipulável ou de um organizador prévio" (TEIXEIRA; MOREIRA, 2022, p. 8-9). Por outro lado, a elaboração de problemas é descrita pelos autores como "uma estratégia que possibilita a reescrita de um problema de outra maneira, mas conservando suas principais características. O problema pode ser formulado ou adaptado pelo professor, ser do livro didático ou formulado pelos pares" (TEIXEIRA; MOREIRA, 2022, p.11).

Assim, podemos perceber que autores, a exemplo de Altoé (2017), Allevato e Andreatta (2020) e Silva (2016), como apresentado no Quadro 1, discutem a Formulação de Problemas articulada à Resolução de Problemas. Consideramos que elas se inter-relacionam, por isso buscamos aprofundar no próximo tópico elementos sobre como se articulam a fim de subsidiar nosso estudo sobre a formulação e resolução de problemas, envolvendo os conceitos de volume e/ou capacidade pelos alunos da EAM.

2.3 A FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS ASSOCIADA À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

De acordo com Jurado (2016 apud SILVEIRA; ANDRADE, 2022, p.6), "a proposição e a resolução de problemas são dois aspectos essenciais da atividade matemática". No entanto, esses autores ressaltam que "pesquisadores em Educação Matemática não têm enfatizado sua atenção sobre a proposição de problemas da mesma forma como sobre a resolução de problemas" (SILVEIRA; ANDRADE, 2022).

Na busca de compreender a inter-relação entre as atividades de Formulação e Resolução de Problemas, destacamos o questionamento de Reis Filho e Marin (2022, p.5): "os problemas já existem e estão prontos para serem trabalhados na resolução de problemas ou é necessário um processo de criação ou aperfeiçoamento dessas situações?".

Segundo Polya (2006, p. 76 apud SOUZA, 2016), "a experiência matemática do estudante estará incompleta se ele nunca tiver uma oportunidade de resolver um problema inventado por ele próprio". Silveira e Andrade (2022, p.3) colocam que “a proposta em trabalhar com a Resolução de problemas em sala de aula compreende, ao trabalhar com a Proposição de problemas, ir além da resolução do problema e da sua solução”. Para esses autores, a proposição de problemas além de possibilitar ampliar os conceitos matemáticos que estão sendo construídos, é relevante devido ao fato de “os alunos deixarem de ser meros expectadores para serem autores em sala de aula” (SILVEIRA; ANDRADE, 2022, p.6).

Reis Filho e Marin (2022, p. 7) veem a formulação e resolução de problemas como um processo e enfatizam que “o caminho é mais importante que o ponto de chegada. Por meio dos métodos utilizados para formular e resolver problemas, surge a oportunidade de se trabalhar os conceitos matemáticos”.

A partir dos estudos de diversos autores (SILVER, 1994, 1997; BOAVIDA et al, 2008; SINGER; ELLERTON; CAI, 2013; SILVEIRA, 2016), Silveira e Andrade (2022, p.7) afirmam que “tarefas de proposição de problemas contribuem para o desenvolvimento do pensamento matemático, possibilitam uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, como também impulsionam a capacidade de resolver problemas”. Nessa direção, eles complementam:

> Na Resolução de problemas, o aluno deve pensar no conceito matemático, principalmente durante e depois do processo de resolução do problema. Isso difere na Proposição de problemas, sobretudo pelo fato de que a postura que pode/deve ser assumida pelo aluno requer uma tomada de consciência a qual exige pensar no conceito matemático antes mesmo da resolução e solução do problema (SILVEIRA; ANDRADE, 2022, p.18).

A formulação de problemas associada à resolução faz parte de recomendações também presentes nos trabalhos de Possamai e Allevato (2020), quando pontuam que

> A associação da elaboração/formulação de problemas com a resolução de problemas tem sido registrada nos documentos curriculares brasileiros, os quais contêm orientações no sentido de que os problemas a serem resolvidos sejam criados não apenas pelos professores, mas, também, pelos estudantes (POSSAMAI; ALLEVATO, 2022, p.2).

Boavida *et al*. (2008) corrobora com a perspectiva de que a formulação de problemas é uma atividade presente na resolução de problemas ao afirmar que

> Alguns autores referem que a resolução de problemas é o processo de aplicar o conhecimento previamente adquirido a situações novas e que pode envolver exploração de questões, aplicação de estratégias e formulação, teste e prova de conjecturas (BOAVIDA et al., 2008, p.15).

Do ponto de vista de English (1997a apud GONTIJO, 2006), a formulação de problemas pode proporcionar aos alunos o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- Compreensão do problema: refere-se à habilidade de reconhecer a estrutura subjacente a um problema e detectar estas estruturas em problemas correspondentes;
- Percepção de diferentes problemas: refere-se aos aspectos que despertam a atenção (ou não) dos alunos em situações rotineiras e não-rotineiras. São as percepções dos alunos com relação a diferentes problemas e as possibilidades de compará-las com as opiniões dos colegas;
- Perceber situações matemáticas sob diferentes perspectivas: perceber que uma situação matemática pode ter mais do que um caminho, sendo esta importante para desenvolver a capacidade do aluno de criar problemas ou de propor alterações em um problema.

Nessa direção, Boavida *et al.* (2008) enfatiza a importância do papel do professor, quando se trata de incentivar os alunos a resolverem ou a formularem problemas.

> Encorajar os alunos a escrever, a partilhar e a resolver os seus próprios problemas, é um contexto de aprendizagem muito rico para o desenvolvimento da sua capacidade de resolução de problemas. Ao colocarem problemas, os alunos apercebem-se da sua estrutura, desenvolvendo, assim, pensamento crítico e capacidades de raciocínio ao mesmo tempo que aprendem a exprimir as suas ideias de modo mais preciso (BOAVIDA et al., 2008, p.27).

Oportunizar ao aluno o exercício de associar a resolução à formulação também é evidenciada por Chica (2001), ao afirmar que “o aluno deixa, então, de ser um resolvedor para ser um propositor de problemas, vivenciando o controle sobre o texto e as ideias matemáticas” (CHICA, 2001, p.151). E ainda,

> Dar oportunidade para que os alunos formulem problemas é uma forma de levá-los a escrever e perceber o que é importante na elaboração e na resolução de uma dada situação; que relação há entre os dados apresentados, a pergunta a ser respondida e a resposta; como articular o texto, os dados e a operação a ser usada. Mais que isso, ao formularem problemas, os alunos sentem que têm controle sobre o fazer matemática e que podem participar desse fazer, desenvolvendo interesse e confiança diante de situações-problemas (CHICA, 2001, p.152).

Nesse sentido, Jurado (2016) questiona o fato de no ensino-aprendizagem de Matemática, os alunos se restrinjam a resolver problemas criados por outras pessoas, embora reconheça que

> Certamente, existem problemas muito bons criados por matemáticos e educadores matemáticos e podem ser muito úteis para certas circunstâncias de ensino ou aprendizagem; no entanto, cada classe, cada conjunto de alunos possui suas particularidades, motivações, dificuldades e exigências, bem como seu próprio ambiente sociocultural e seu conjunto de experiências e conhecimentos prévios. Tudo isto requer atenção particular do professor e – obviamente – o uso de problemas adequados para cada grupo de alunos (JURADO, 2016, p. 79).

Diante do exposto, no próximo tópico, apresentamos à luz de algumas pesquisas realizadas em sala de aula, as propostas ou estratégias de atividades utilizadas com os alunos para a formulação e resolução de problemas, a fim de subsidiar nossas escolhas sobre as atividades mais adequadas a nossa pesquisa.

2.4 PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA A FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS PELOS ALUNOS

Diversos estudos a respeito de formulação de problemas têm buscado inserir atividades que direcionam os estudantes a criarem seus próprios problemas. Silveira e Andrade (2022) afirmam que

> Uma abordagem em sala de aula via Proposição de problemas dá a oportunidade de os alunos criarem contextos inerentes à sua realidade e comunicarem ideias que permitirão fazer relações entre os afazeres cotidianos e os conceitos matemáticos. Desse modo, algumas pesquisas revelam que, na proposição de problemas, o aluno é desafiado a problematizar situações vivenciadas, apresentando e descrevendo suas conexões com o meio social em que está inserido através dos seus conhecimentos cotidianos [...] (SILVEIRA; ANDRADE, 2022, p.6).

Andrade (2017, apud SILVEIRA; ANDRADE, 2022, p.7) pontua que “a proposição de problemas pode ocorrer tanto **antes** como **durante** e **depois** do processo de resolução e exploração de problemas”:

- **Antes** - quando o foco principal não é a solução, e sim a proposição de novos problemas;
- **Durante** - quando, a partir de um problema dado, são formulados e explorados novos problemas, tanto pelo professor como pelos alunos;

- **Depois -** quando a solução de um problema impulsiona um processo de reflexões e síntese, gerando novos problemas em nível mais avançado ou não, e provocando, assim, uma aprendizagem com compreensão.

Possamai e Allevato (2022, p. 14) discutem que “em especial nas pesquisas que têm como finalidade avaliar o desenvolvimento da criatividade, é utilizada, com maior frequência, a apresentação de imagens aos estudantes”. Por exemplo, a apresentação de tirinhas com um contexto bastante aberto, do qual podem emergir problemas com os mais diversos conteúdos, inclusive problemas que não envolvem a Matemática. Outras imagens remetem a contextos que habitualmente são mais sugestivos de situações matemáticas, como compras de produtos, panfletos de supermercados e lojas. Esses tipos de imagens permitem ao professor “ter alguma previsibilidade, tanto do contexto que será utilizado quanto do conteúdo matemático abordado'' (POSSAMAI; ALLEVATO, 2022, p. 14).

Silveira e Andrade (2022) em uma pesquisa sobre a proposição de problemas sobre Análise Combinatória em uma turma do 2º ano do Ensino Médio propôs que isso ocorresse a partir de **sorteio de palavras**. Para tanto, utilizaram a estratégia de sortear uma palavra por cada grupo de alunos. As palavras sorteadas foram: baralho; meninas e meninos; cidade; senhas; letras; livro; fila; cadeiras e futsal. A respeito desta pesquisa, dentre outros resultados, eles concluíram que os alunos foram capazes de fazer relações de uma ideia matemática com diferentes contextos, ou seja, esta atividade propiciou a percepção das relações entre a matemática e sua realidade social.

Campos, Silva e Altoé (2020), no Estudo de Função Afim com estudantes de uma turma do 1º ano do Ensino Médio, utilizaram uma atividade de formulação de problemas a partir do tema “*delivery*”. No início da aula, o professor lançou a pergunta à turma: “Alguém pediu um hambúrguer nesse fim de semana, por *delivery*?”. A partir de um debate que surgiu após a pergunta, lançaram-se outras perguntas que culminaram numa escrita coletiva do enunciado de um problema. Num segundo momento, a formulação dos problemas foi realizada em duplas e por fim, os problemas formulados foram trocados para outras duplas resolverem ou reformularem. Essa experiência revelou que a FP favoreceu o envolvimento dos estudantes na construção do seu próprio conhecimento sobre Função Afim e contribuiu para o desenvolvimento da argumentação e do pensamento crítico frente aos problemas matemáticos.

Boavida *et al.* (2008) sugere duas estratégias para o professor facilitar o processo de formulação de problemas em sala de aula: “E se em vez de?” e “Aceitando os dados”. A primeira, mais diretamente relacionada com a modificação de problemas pelos alunos e a segunda com a criação de problemas.

- **E se em vez de**? Essa estratégia é utilizada a partir da informação que um determinado problema possui. Busca-se identificar o que é conhecido (os dados, as propriedades ou atributos envolvidos), o que é pedido (o desconhecido, a resposta ou a solução) e as restrições que a resposta ao problema pode envolver. A partir dessa identificação alguns desses aspectos ainda podem ser modificados para que outras novas perguntas possam ser formuladas, como por exemplo: **O que é que acontece se ...?** Para alguns autores essa estratégia leva a outra fase chamada de extensão do problema.

- **Aceitando os dados**: nessa estratégia é solicitado aos alunos que criem os seus próprios problemas. Considera-se essa atividade também rica e interessante, mas que deve ser realizada apenas depois dos alunos terem alguma familiaridade, em etapas anteriores, com a modificação de problemas. Alerta-se para um suporte prévio, pois sem este, isso pode levar os alunos a fantasiar, criando problemas sem nenhuma ligação à Matemática ou propondo problemas tão complicados que nem mesmo eles conseguem resolvê-los.

> Esta estratégia parte de uma situação estática, ou seja, de uma expressão, figura, tabela, definição, condição, um conjunto de dados ou informações, sobre os quais se formulam questões. Para explorá-la, o professor pode recorrer e apresentar aos alunos situações ou informações em folhetos, jornais, livros etc. (BOAVIDA et al., 2008, p.29).

Boavida *et al* (2008, p.29), por exemplo, como atividade do tipo “aceitando os dados” propõe a formulação de problema partindo de uma expressão, tal como: “Invente um problema que possa ser traduzido pela expressão 250: 5 = 50”. Neste caso, uma possibilidade de problema seria: “Temos 250 g de rebuçados e queremos fazer 5 saquinhos para prendas com a mesma quantidade. Que peso deverá levar cada saquinho?”.

Por sua vez, Stoyanova e Ellerton (1996 apud MARTINS, VISEU; MENEZES, 2019, p.83) dividiram as estratégias de formulação de problemas em três tipos de situações:

- **Situação livre**, quando se sugere aos alunos que criem um problema a partir de determinada situação.
- **Situação semiestruturada**, quando se dá aos alunos uma situação aberta e se lhes pede que explorem a sua estrutura e a completem aplicando o seu conhecimento, capacidades, conceitos e relações com base nas suas experiências matemáticas prévias. Por exemplo, pode-se pedir aos alunos que criem problemas usando a expressão e que formulem um problema que envolva a utilização do conceito de triângulo retângulo. Esta estratégia é denominada de 'Aceitando os dados'.
- **Situação estruturada**, quando as atividades de formulação de problemas são baseadas num problema específico. A fim de promover este tipo de situação, pode-se fornecer aos alunos um problema no qual se omite a questão final e pedir que formulem uma série de possíveis questões.

Chica (2001) apresenta algumas propostas que podem ser iniciadas de maneira mais simples até o aluno se familiarizar e sentir-se seguro na formulação de seus próprios problemas e que utilizamos na presente pesquisa, tais como:

- **A partir de um problema dado, criar uma pergunta que possa ser respondida através dele** - para essa atividade, Chica (2001, p. 154) enfatiza que "a tarefa do aluno é a de reconhecer no problema os dados disponíveis, a situação criada e evidenciar a existência de um problema através da pergunta inventada".
- **A partir de uma figura dada** - quando apresentamos uma figura ao aluno para que ele formule um problema, diversas interpretações são possíveis e por consequência, a formulação de diversos problemas. De fato, "o ideal é que a figura seja de natureza abrangente, interessante, de modo a propiciar a aparição de diversas ideias" (CHICA, 2001, p. 155-156).

- **A partir de um início dado, continuar o problema** - faz-se necessário que o aluno perceba que nem todos os dados estão disponíveis na parte inicial do texto do problema. Ele precisa colocar outros dados. Além de relacionar os dados oferecidos com os criados. Para tanto, precisa articular o texto de acordo com a situação iniciada e finalizá-lo com uma pergunta (CHICA, 2001).

- **A partir de um problema dado, criar um parecido** - convém deixar claro o que é "ser parecido". Pois, são possíveis interpretações como: "É parecido na história (personagens, cenário), na operação que se utiliza para resolvê-lo (estrutura matemática), na pergunta que é dada, nas ações desenvolvidas, etc." (CHICA, 2001, p. 158).

Como ampliação desse repertório de sugestões, Chica (2001) propõe outras possibilidades para a formulação de problemas, após os alunos terem vivenciado as propostas descritas inicialmente como, a partir de: uma palavra; um tema; um determinado tipo de texto; uma pergunta; uma resposta dada; uma operação matemática. Dentre essas, refinamos abaixo aquelas que consideramos mais pertinentes ao nosso trabalho:

- **A partir de uma pergunta** - conforme Chica (2001, p.164), "a pergunta direciona o raciocínio a ser realizado, a operação conveniente, a tomada de decisão ou a busca de uma estratégia a ser realizada". Quando propomos a formulação de um problema a partir de uma pergunta, buscamos evidenciar para o aluno o quanto esta é importante.

- **A partir de uma resposta dada** - o enfoque desta atividade está na resolução do problema. A resposta dada pode ser de cunho numérico, ou seja, um número, uma palavra ou uma frase. Para cada uma dessas situações, há certa intencionalidade em sua proposta[3].

[3] Por exemplo: Para a resposta "195", os alunos podem relacioná-la ao resultado de alguma operação aritmética envolvendo quantidades que podem ser adicionadas, subtraídas, multiplicadas, divididas ou mais de uma dessas operações. No caso da resposta com a frase "o jardineiro plantou 204 plantas" o aluno deve considerar as restrições da resposta na elaboração do texto do problema, especialmente na pergunta que deve ser orientada pela resposta solicitada.

- **A partir de uma sentença matemática -** De acordo com Chica (2001, p. 168), podemos realizar essa proposta de FP de duas maneiras: “dando apenas o nome da operação ou a própria operação em si, com os números estabelecidos, que não precisa ser necessariamente uma só, mas várias ou até mesmo uma expressão numérica.”

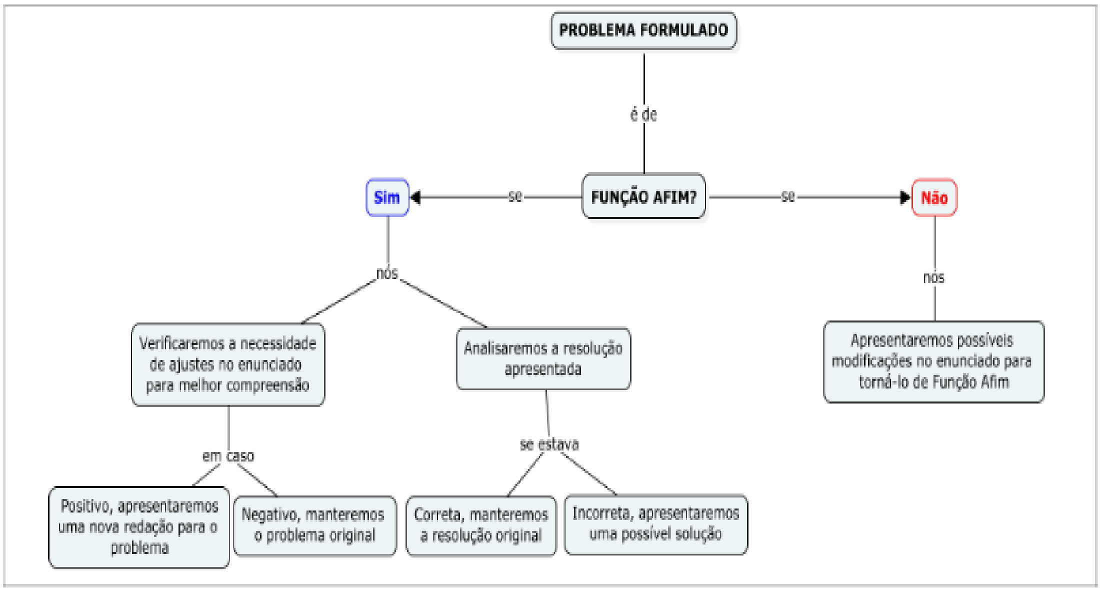
A propósito dessas últimas sugestões, algumas dessas propostas trabalham especificamente com determinadas dificuldades presentes no trabalho com formulação de problemas, tais como: a omissão das perguntas nas situações-problema, a coerência do texto, a criação de problemas não-numéricos, não-convencionais, etc.

Em síntese, neste tópico buscamos apresentar características de atividades para FP. Como podemos constatar, existe uma variedade de atividades que podem ser utilizadas em sala de aula para favorecer a FP pelos alunos. Contudo, outro aspecto que consideramos importante é um olhar especial sobre os caminhos tomados para análise dos problemas formulados. Diante disto, no tópico seguinte, apresentamos um breve comentário sobre alguns caminhos de análise delineados em pesquisas, a exemplo de Campos, Silva e Altoé (2020); Silveira e Andrade (2022); Andreatta e Allevato (2020) e Spinillo *et al.* (2017).

2.5 CAMINHOS PARA ANÁLISE DE PROBLEMAS FORMULADOS PELOS ALUNOS

O esquema indicado na Figura 1, retrata os procedimentos da análise dos problemas formulados e resolvidos pelos alunos, na pesquisa de Campos, Silva e Altoé (2020).

Figura 1 - Esquema do procedimento de análise dos dados



Fonte: Campos, Silva e Altoé (2020, p.8).

Na Figura 1, podemos perceber que a análise dos problemas formulados e resolvidos pelos alunos, tomou por base se estes estavam de acordo com o conceito Função Afim, se necessitava de ajustes no enunciado e se tinha sido respondido corretamente ou não. Sobre o enunciado dos problemas, a pesquisa de Silveira e Andrade (2022) destaca que, na proposição de problemas por alunos, alguns deles necessitam ser reformulados pelo fato de não se caracterizarem por problema que precisa de resposta, já que o enunciado não é claro. Este é, portanto, um aspecto a ser levado em conta: a correlação entre pergunta e resposta.

Andreatta e Allevato (2020) desenvolveram categorias de análise dos problemas formulados pelos alunos, com base na perspectiva metodológica da Análise Textual Discursiva. Como exemplo, apresentamos na Figura 2, os dados construídos na primeira coluna, que representa o código da unidade de significado; na segunda coluna, os textos extraídos dos problemas; e, na terceira coluna, as interpretações preliminares do professor pesquisador.

Figura 2 - Unidades de Significado dos problemas elaborados pelos estudantes

U.S.	Fragmentos de textos[3] dos problemas elaborados pelos estudantes	Interpretação preliminar do Pesquisador
1	"minha mãe vende marmitex"	Elabora situações indiretamente relacionadas ao contexto dos problemas geradores.
2	"vende marmitex por R$ 10,00" "vende 20 marmitex por dia"	Estabelece relações com venda de produtos envolvendo operações multiplicativas.
3	"Maria Eduarda foi à feira"	Elabora situações a partir do contexto dos problemas geradores propostos.

Fonte: Allevato e Andreatta (2020, p. 9).

Na sequência da análise (Figura 3), Allevato e Andreatta (2020), agrupam as unidades de significado de acordo com as características comuns entre elas, isto é, percebendo as semelhanças no seu enredo.

Figura 3 - Organização das subcategorias e categorias de análise dos textos dos problemas elaborados pelos estudantes

<table>
<tr><th>Unidades de Significado</th><th>Aspectos em comum</th><th>Subcategorias</th><th>Categorias de Análise</th></tr>
<tr><td>4, 21, 25</td><td>Apresentam procedimentos/enredos com valores monetários.</td><td>Enredo/pensamento envolvendo adição e subtração</td><td rowspan="7">Aspectos relacionados ao enredo textual envolvendo conteúdos matemáticos</td></tr>
<tr><td>2, 10</td><td>Apresentam procedimentos/enredos com valores monetários.</td><td rowspan="2">Enredo/pensamento envolvendo multiplicação e divisão</td></tr>
<tr><td>5, 8, 11, 21</td><td>Apresentam procedimentos/enredos fora do contexto monetário.</td></tr>
<tr><td>7, 12, 17</td><td>Utilizam a medida de tonelada como elemento central do enredo textual do problema.</td><td>Enredo/pensamento envolvendo medidas de massa</td></tr>
<tr><td>19</td><td>Utiliza o aumento proporcional como elemento central do enredo do problema.</td><td rowspan="2">Enredo/pensamento envolvendo fração, diminuição/aumento proporcional</td></tr>
<tr><td>23</td><td>Utiliza a diminuição proporcional como elemento central do enredo do problema.</td></tr>
</table>

Fonte: Allevato e Andreatta (2020, p. 14).

De outra forma, na análise dos problemas formulados por professores, Spinillo *et al*. (2017), tomaram como critérios: (i) se o que fora formulado era, de fato, um problema matemático ou um enunciado relativo a efetuar uma operação; (ii) se o que fora formulado requeria a multiplicação e/ou a divisão para sua resolução; (iii) se os problemas eram adequados ou inadequados; e (iv) o tipo de problema elaborado. Sobre este último aspecto, considerou-se os tipos de situações do campo conceitual multiplicativo, no sentido atribuído pela Teoria dos Campos Conceituais.

A propósito do que expomos neste capítulo, extraímos para construir o caminho metodológico da pesquisa sobre a FRP envolvendo os conceitos de volume e capacidade, sobretudo, os tipos de estratégias a serem propostas aos alunos, com base em Chica (2001), Boavida *et al.* (2008), Stayonova e Ellerton (1996). Reforçamos nossa intenção em trabalhar a formulação de problemas articulada com a resolução de problemas.

Ademais, os modelos apresentados no tópico 2.4, serviu de inspiração para análise dos problemas formulados pelos alunos, em particular, com base na Teoria dos Campos Conceituais. Sobre esta teoria, apresentamos no próximo capítulo seus principais elementos e pressupostos utilizados na pesquisa do campo conceitual de volume e capacidade.

3 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E O CAMPO CONCEITUAL DE VOLUME E CAPACIDADE

Neste capítulo, buscamos apresentar elementos fundamentais da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), desenvolvida por Vergnaud (1985,1986,1990) que norteiam a análise da FRP pelos alunos da EAM. Discutimos as recomendações da BNCC (BRASIL, 2018) e o que extraímos de algumas pesquisas sobre o campo conceitual de volume e capacidade para o nosso trabalho.

3.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é definida por Vergnaud (1990, p.135) como “uma teoria cognitivista que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, sobretudo aquelas relacionadas com as ciências e as técnicas”. Segundo Vergnaud (1990), a TCC não é específica da Matemática, embora inicialmente tenha sido criada para explicar o processo de conceitualização progressiva das estruturas aditivas, multiplicativas, das relações número-espaço e da álgebra.

Nas considerações de Moreira (2002, p.8), “Vergnaud toma como premissa que o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre ao longo de um largo período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizagem”. A propósito da noção de campo conceitual e dos elementos que o constituem os refinamos a seguir.

3.1.1 Situações, invariantes operatórios e representações

Vergnaud (1986, p.84) considera que um campo conceitual é definido por “um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão”. Diante do exposto, a TCC proposta por Vergnaud (1990) define que um conceito (C) é formado pela tríade de conjuntos (S, I, R), onde:

- S é o conjunto das situações que dão sentido ao conceito (referências);

- I é o conjunto dos invariantes (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) na qual se baseia a operacionalidade dos esquemas (significados); e

- R é o conjunto das representações simbólicas do conceito, suas propriedades, situações e os procedimentos (significantes).

Segundo Moreira (2002, p.11), o conceito de situações para Vergnaud "não é o de situação didática[4], mas sim o de tarefa, sendo que toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, para as quais é importante conhecer suas naturezas e dificuldades próprias". Vergnaud (1990, p.150), explica que o conceito de situação, na TCC, tem um viés psicológico, assim diz respeito aos "processos cognitivos e respostas do sujeito em função das situações com as quais eles são confrontados". Para Magina *et al*. (2001, p. 6), a TCC considera que "existe uma série de fatores que influenciam e interferem na formação e no desenvolvimento dos conceitos e que o conhecimento conceitual deve emergir dentro de situações-problema".

Vergnaud (1985, p. 249) afirma que "um conceito remete a várias situações. Porém, reciprocamente, uma situação remete a vários conceitos". A propósito disso, o desenvolvimento dos conhecimentos se faz por meio de um conjunto relativamente vasto de situações, entre as quais existem parentescos (analogias, contrastes, variações...); e, para a análise dessas situações, é preciso apelar para muitos conceitos e para muitos tipos de simbolizações.

As situações, para Vergnaud (1993), distinguem-se em duas classes:

> Classes de situações em que o sujeito dispõe, no seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação; Classes de situações em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso. (VERGNAUD, 1993, p. 2).

Além disso, Vergnaud (1993), destaca duas ideias em relação ao sentido de situação:

[4] Referindo-se ao sentido atribuído a situações didáticas, na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996).

> 1) a da variedade: existe grande variedade de situações num campo conceitual dado; as variáveis de situação são um meio de construir sistematicamente o conjunto das classes possíveis;
> 2) a da história: os conhecimentos dos alunos são elaborados por situações num campo que eles enfrentaram e dominaram progressivamente, sobretudo para as primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que se pretende ensinar-lhes (VERGNAUD, 1993, p.12).

Em relação aos invariantes operatórios, o componente teorema-em-ação é uma proposição tida como verdadeira sobre o real, enquanto o componente conceito-em-ação é um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento tida como pertinente, relevante. Dito de outra forma, os teoremas-em- ação são definidos "como relações matemáticas que são levadas em consideração pelos sujeitos, quando estes escolhem uma operação, ou sequência de operações, para resolver um problema" (MAGINA *et al*., 2001, p.16).

Para Melo (2018, p. 24), os teoremas em ação podem ser: "verdadeiros ou falsos (corretos ou errôneos), enquanto os conceitos em ação não possuem essa especificidade, no entanto, apresentam a particularidade de serem pertinentes ou não a determinada situação".

Moreira (2002) discute que grande parte dos conceitos e teoremas-em-ação permanecem totalmente implícitos, "mas eles podem também ser explícitos ou tornarem-se explícitos e aí entra a função do ensino: ajudar o aluno a construir conceitos e teoremas explícitos, e cientificamente aceitos, a partir do conhecimento implícito" (MOREIRA, 2002, p.16).

Sobre as representações, Vergnaud (1985, p. 245), afirma que "o conceito de representação é essencial para analisar a formação dos conhecimentos operatórios e para analisar os processos de transmissão dos conhecimentos".

Vergnaud (1985) explica ainda que

> A representação não se refere somente à utilização pelo sujeito de sistemas de significantes sociais linguísticos ou não linguísticos: por certo, a comunicação social é um critério importante da existência da representação; porém, existem outros critérios, notadamente o da emergência em situação de uma conduta nova, apoiada sobre a descoberta e a utilização pelo sujeito, de uma propriedade ou de uma relação pertinente. Em outras palavras, muitas das habilidades motoras implicam a representação, certas escolhas de ações em situação supõem cálculos relacionais complexos, os quais não podem ser dispensados (VERGNAUD, 1985, p. 245).

Compreende-se que a função da linguagem e de outros significantes é tripla:

> - ajuda na designação e, portanto, na identificação de invariantes: objetos, propriedades, relações, teoremas;
> - ajuda com raciocínio e inferência;
> - ajuda na antecipação de efeitos e metas, no planejamento e no controle da ação (VERGNAUD, 1990, p. 159, tradução nossa)[5].

Na TCC, consideramos que as situações dão sentido aos conceitos matemáticos, mas o sentido não está nas situações em si mesmas, nem também nas palavras e nos símbolos matemáticos. “Mais precisamente, são os esquemas evocados pelo sujeito individual, por uma situação ou por um significante que constituem o sentido desta situação ou deste significante para este indivíduo” (VERGNAUD, 1990, p.158).

A respeito da noção de esquema na TCC, aprofundamos esta noção no próximo tópico, tendo em vista que a utilizamos para a análise da formulação e resolução dos problemas pelos alunos.

3.1.2 Os esquemas e seus componentes

Vergnaud (2002a) apresenta duas definições sobre “esquema”:

- Definição 1: o esquema é uma organização invariante da atividade para uma dada classe de situações.
- Definição 2: Um esquema compreende necessariamente quatro componentes.

Sobre a primeira definição, ressalta-se que é a organização da atividade que é invariante e não a atividade ou a conduta, pois um esquema não é um estereótipo. Ele gera uma diversidade de condutas e de atividades segundo as características particulares das situações encontradas.

---

[5] - aide à la désignation et donc à l'identification des invariants: objets, propriétés, relations, théorèmes;
- aide au raisonnement et à l'inférence;
- aide à l'anticipation des effets et des buts, à la planification, et au contrôle de l'action (VERGNAUD, 1990, p. 159).

A invariância caracteriza a organização e não a atividade em si mesma. Vergnaud (2002a) afirma que para estudar a atividade dos indivíduos é necessário identificar as diferentes categorias de situações às quais eles são confrontados.

> A noção de esquema está associada à forma invariante como as atividades são estruturadas ou organizadas diante de uma classe de situações voltadas para a aprendizagem específicas de um conceito. Dessa forma, cada esquema é relativo a uma classe específica de situações, envolvendo necessariamente tanto a dimensão experimental quanto racional vivenciada pelo aluno (PAIS, 2002, p.53).

A relação entre situação e esquema é considerada como fundamental na análise de atividades e dos processos de aprendizagem. As formas de organização da atividade são denominadas de “esquemas”.

> A relação entre os conceitos de situação e de esquema é fundamentalmente dialética, no sentido de que não há esquema sem situação como também não há situação sem esquema. Visto que é o esquema que permite identificar uma situação como fazendo parte de uma certa classe. Eu digo bem uma classe porque o esquema se endereça efetivamente a uma classe de situações (VERGNAUD, 2005, p. 125-126, tradução nossa)6.

Se ainda é justo considerar que o esquema tem um caráter privado, seria incorreto pensar que sua elaboração não seja, ao menos em parte, organizada socialmente. Ele acrescenta que é nos esquemas que se devem investigar os conhecimentos-em-ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que tornam a ação do sujeito operatória.

Sobre a segunda definição, os quatro componentes do esquema são apresentados por Moreira (2002) como:

---

[6] La relation entre les concepts de situation et de schème est fondamentalement dialectique, en ce sens qu’il n’y a pas de schème sans situation, mais pas non plus de situation sans schème, puisque c’est le schème qui permet d’identifier une situation comme faisant partie d’une certaine classe. Je dis bien une classe parce que le schème s’adresse effectivement à une classe des situations. (VERGNAUD, 2005, p. 125-126).

> 1. Metas e antecipações (um esquema se dirige sempre a uma classe de situações nas quais o sujeito pode descobrir uma possível finalidade de sua atividade e, eventualmente, submetas; pode também esperar certos efeitos ou certos eventos);
> 2. Regras de ação do tipo "se...então" que constituem a parte verdadeiramente geradora do esquema, aquela que permite a geração e a continuidade da sequência de ações do sujeito; são regras de busca de informação e controle dos resultados da ação;
> 3. Invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) que dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação; são os conhecimentos contidos nos esquemas; são eles que constituem a base, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e dela inferir a meta a alcançar e as regras de ação adequadas;
> 4. Possibilidades de inferência (ou raciocínios) que permitem "calcular", "aqui e agora", as regras e antecipações a partir das informações e invariantes operatórios de que dispõe o sujeito, ou seja, toda a atividade implicada nos três outros ingredientes requer cálculos "aqui e imediatamente" em situação (MOREIRA, 2002, p. 12-13).

Acerca das metas e antecipações, estas são relacionadas aos objetivos e subobjetivos. Os objetivos são considerados como o componente intencional dos esquemas. Ou seja, os objetivos fornecem aos esquemas sua funcionalidade.

As regras de ação se articulam à tomada de informação e de controle - sua função é produzir a atividade e a conduta. Vergnaud (1985, p. 250) afirma que "as regras de ação constituem um nível relativamente próximo da ação observável". As regras dizem respeito ao componente gerador; haja vista, que gera uma série de ações para atingir um dado objetivo. "[...] As regras constituem a parte generativa do esquema, aquela que é mais imediatamente responsável pelo curso temporal do comportamento e da atividade" (VERGNAUD, 2002b, p. 7, tradução nossa)[7].

Além disso, leva-se em conta o fato que a conduta não é feita apenas de ações, mas também das tomadas de informações necessárias para a continuação da atividade e dos controles que permitem ao sujeito se assegurar de que fez o que pensava fazer e que não se desviou do caminho escolhido. Vergnaud (2002b) explica que essas regras são totalmente condicionadas pela representação do objetivo a ser alcançado e pelas conceituações que permitem identificar os objetos, bem como, suas propriedades e relações, as transformações que a conduta do sujeito supostamente provoca neles.

---

[7] [...] Règles constituent la partie générative du schème, celle qui est le plus immédiatement responsable du décours temporel de la conduite et de l'activité. [...]. (VERGNAUD, 2002a, p.7).

Os invariantes operatórios se configuram como o componente propriamente epistêmico do esquema. Sendo assim, os objetos, propriedades, relações e processos que o pensamento recorta no real para organizar a ação, constituem o núcleo duro da representação do que é necessário fazer em uma dada situação. Sem esses componentes, nem as inferências, nem as regras de ação, nem as predições, nem os significantes têm sentido (VERGNAUD, 1985). Pois, os conceitos em ato permitem reter as informações pertinentes e selecionar os teoremas em ato necessários para o engendramento de regras de ação, tomada de informações e controle para atingir os objetivos (metas).

A respeito das possibilidades de inferência em situação - essas são consideradas como "indispensáveis ao funcionamento do esquema em cada situação particular, *hic et nunc*[8]” (VERGNAUD, 1993, p.6). Por esta característica, este componente do esquema permite “calcular” objetivos, regras e antecipações. Neste sentido, Coulet (2007) enfatiza a dimensão estratégica das inferências. Sendo considerada como estratégicas

> As escolhas conscientes ou, na maior parte do tempo, não conscientes que o sujeito operaciona as regras de ação mobilizáveis na atividade considerada (um mesmo sujeito tem à disposição várias regras de ação que lhe permitem atingir o objetivo visado pela atividade em curso e então é levado a escolher uma em vez de outra) (COULET, 2007, p. 299, tradução nossa)9.

Coulet (2007, p. 301, tradução nossa) relaciona inferências e estratégias ao “que exprime a adaptação do esquema às características específicas da situação e da tarefa. Mais que os cálculos em si mesmo, o que é notado aqui, são os parâmetros que determinam as escolhas das regras de ação”[10]. O que nos remete a certas operações de pensamento do sujeito sobre as consequências de suas ações, sejam por um viés sistemático ou mesmo oportunista. Por exemplo, para a escolha de uma alternativa entre várias, dependendo de suas vantagens e desvantagens.

---

[8] *hic et nunc*. (locução latina que significa "aqui e agora").

[9] Les choix, conscientes ou, la plupart du temps, non conscientes qu’opère le sujet sur les règles d’action mobilizables dans l’activité considérée (un même sujet a généralement, à disposition plusieurs règles d’action lui permettant d'atteindre le but visé par l’activité en cours et se trouve donc amené à choisir celle-ci plutôt que celle-là.) (COULET, 2007, p. 299).

[10] C’est qui exprime l’adaptation du schème aux caractéristiques spécifiques de la situation et de la tâche. Plutôt que les calculs eux-mêmes, ce qui est noté ici, ce sont les paramètres qui déterminent les choix de règles d’action (COULET, 2007, p. 301).

> As condutas observáveis existem, que testemunham a existência dos cálculos e das expectativas, mas seu conteúdo não é facilmente identificável. Os conceitos de regra de ação e de invariante operatório são, justamente, os elementos indispensáveis para caracterizar o conteúdo dos esquemas (VERGNAUD, 1985, p.250).

Diante do exposto, no presente trabalho, tratamos de tomar como norte para a atividade de FRP envolvendo os conceitos de volume e capacidade, os componentes dos esquemas, relativos aos aspectos intencionais, geradores e epistêmicos, ou seja, as metas e antecipações, regras de ação, tomada de informação e controle e invariantes operatórios. Sendo assim, essencialmente pelas metas e antecipações, tomamos por norte o tipo específico de atividade proposta (a FRP a partir de: uma figura, uma resposta, uma pergunta, dentre outras). No que se refere às regras de ação, buscamos identificar o passo a passo da FRP de volume e/ou capacidade pelos alunos, observando os aspectos similares e diferentes nas atividades propostas. No que diz respeito aos invariantes operatórios, a identificação dos seus conhecimentos, em termos de conceitos e teoremas em ação corretos e errôneos. Para tanto, consideramos essencial ampliarmos nossa compreensão sobre o campo conceitual das grandezas de volume e capacidade, como passamos a discutir no tópico seguinte.

3.2 O CAMPO CONCEITUAL DE VOLUME E CAPACIDADE

Antes de fazermos uma explanação a respeito dos conceitos de volume e capacidade, não podemos deixar de ressaltar a importância das Grandezas e Medidas, atribuída pela BNCC (BRASIL, 2018, p. 273), ao afirmar que “As medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade”. De acordo com a BNCC, a unidade temática Grandezas e Medidas, ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas

> [...] favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.). Essa unidade temática contribui ainda para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico (BRASIL, 2018, p. 273).

No que se refere ao estudo de Grandezas e Medidas, já desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, a expectativa é que os alunos

> [...] reconheçam que medir é comparar uma grandeza com uma unidade e expressar o resultado da comparação por meio de um número. Além disso, devem resolver problemas oriundos de situações cotidianas que envolvem grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área (de triângulos e retângulos) e capacidade e volume (de sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, recorrendo, quando necessário, a transformações entre unidades de medida padronizadas mais usuais (BRASIL, 2018, p. 273).

Quanto ao estudo das Grandezas e Medidas nos anos finais do Ensino Fundamental, espera-se que os alunos "reconheçam comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas e que consigam resolver problemas envolvendo essas grandezas com o uso de unidades" (BRASIL, 2018, p. 273).

No Ensino Médio, o estudo das Grandezas e Medidas está associado ao estudo da geometria, cuja unidade temática se denomina Geometria e Medidas. Dessa forma, "os estudantes constroem e ampliam a noção de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, e obtêm expressões para o cálculo da medida da área de superfícies planas e da medida do volume de alguns sólidos geométricos" (BRASIL, 2018, p. 273).

Buscamos identificar nas recomendações da BNCC (BRASIL 2018), quais as habilidades devem ser desenvolvidas, com respeito ao estudo, especificamente de volume e capacidade, nos anos do Ensino Fundamental. Para tanto, fizemos um mapeamento o qual encontra-se explicitado no Quadro 2.

Quadro 2 - Habilidades da BNCC que versam sobre o estudo de volume e capacidade no Ensino Fundamental

ANOS	HABILIDADES
1º	**(EF01MA15)** Comparar comprimentos, **capacidades** ou massas, utilizando termos como mais alto, mais baixo, mais comprido, mais curto, mais grosso, mais fino, mais largo, mais pesado, mais leve, cabe mais, cabe menos, entre outros, para ordenar objetos de uso cotidiano (BRASIL, 2018, p.281).
2º	**(EF02MA17)** Estimar, medir e comparar **capacidade** e massa, utilizando estratégias pessoais e unidades de medida não padronizadas ou padronizadas (litro, mililitro, grama e quilograma) (BRASIL, 2018, p.285).
3º	**(EF03MA18)** Escolher a unidade de medida e o instrumento mais apropriado para medições de comprimento, tempo e **capacidade** (BRASIL, 2018, p.289). **(EF03MA20)** Estimar e medir **capacidade** e massa, utilizando unidades de medida não padronizadas e padronizadas mais usuais (litro, mililitro, quilograma, grama e miligrama), reconhecendo-as em leitura de rótulos e embalagens, entre outros (BRASIL, 2018, p.289).

4º	**(EF04MA20)** Medir e estimar comprimentos (incluindo perímetros), massas e **capacidades**, utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local (BRASIL, 2018, p.293).
5º	**(EF05MA19)** Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e **capacidade**, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais (BRASIL, 2018, p.297). **(EF05MA21)** Reconhecer **volume** como grandeza associada a sólidos geométricos e medir **volumes** por meio de empilhamento de cubos, utilizando, preferencialmente, objetos concretos (BRASIL, 2018, p.297).
6º	**(EF06MA24)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), **capacidade e volume** (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento (BRASIL, 2018, p.303).
7º	**(EF07MA30)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do **volume** de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico) (BRASIL, 2018, p.309).
8º	**(EF08MA20)** Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de **capacidade** de recipientes (BRASIL, 2018, p.315). **(EF08MA21)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do **volume** de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular (BRASIL, 2018, p.315).
9º	**(EF09MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de **volumes** de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas (BRASIL, 2018, p.319).

Fonte: Autoria própria com dados baseados na BNCC (BRASIL 2018).

Como podemos observar no Quadro 2, capacidade é objeto de estudo desde o 1º ano do Ensino Fundamental, no qual se inicia com o aprendizado dos conceitos de “cabe mais” ou “cabe menos”. Nos anos seguintes, as habilidades são voltadas para comparar, estimar e medir, sendo as medições efetuadas inicialmente por unidades não padronizadas antes de envolver unidades usuais padronizadas (litro e mililitro). As transformações de unidades de medidas usuais de capacidade só são iniciadas no 5º ano, no qual aparece pela primeira vez a indicação de resolver e elaborar problemas envolvendo medida de capacidade. É também neste ano que aparece pela primeira vez uma habilidade voltada ao estudo do conceito de volume como grandeza, associada a sólidos geométricos, cuja medida é obtida a partir de empilhamentos de cubos.

A indicação “resolver e elaborar problemas” associadas ao cálculo do volume de blocos retangulares, aparece em habilidades de todos os anos finais do Ensino Fundamental (6º, 7º, 8º e 9º), relativos a esses conceitos. No 6º ano, a indicação é voltada para o cálculo do volume e capacidade sem o uso de fórmulas. No 7º ano, o cálculo do volume passa a ser indicado com as unidades usuais m^3, dm^3 e cm^3. No 8º ano, aparece a relação entre as unidades usuais de volume e capacidade, litro e dm^3 e litro e m^3. Para o 9º ano, é indicado o uso das fórmulas, designadas por “expressões de cálculo” para o cálculo do volume de prismas e cilindros retos.

Quanto ao que se espera dos estudantes no estudo de Grandezas e Medidas, para o Ensino Médio, referentes a volume e capacidade, identificamos nas Competências Específicas 2 e 3, respectivamente, as seguintes habilidades:

> **(EM13MAT201)** Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa. (BRASIL, 2018, p.534).
> **(EM13MAT309)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p.537).

Diante do que constatamos nas recomendações da BNCC (BRASIL, 2018), em relação ao estudo de volume e capacidade, reconhecemos a importância de ampliarmos e aprofundarmos nosso entendimento, a partir da literatura, sobre estes conceitos.

3.2.1 Considerações sobre os conceitos de volume e capacidade como grandezas geométricas

Na nossa experiência docente, com alunos egressos do Ensino Médio, no início do estudo sobre volume e capacidade costumamos fazer algumas indagações com o intuito de verificar qual a compreensão que eles têm a respeito desses temas. Assim, quando fazemos as perguntas: O que vocês entendem sobre o volume de um objeto? E, sobre capacidade? Volume e capacidade significam a mesma coisa? Observamos que é comum recebermos de alguns alunos, às vezes de maneira quase que automática, as seguintes respostas: “volume é o espaço ocupado por um corpo”; “capacidade é a quantidade de líquido que um objeto pode armazenar em seu interior”; “volume e capacidade são coisas distintas"; “volume é comprimento vezes altura, vezes largura”. Apesar da coerência em algumas dessas respostas, observamos a existência de insegurança por grande parte dos alunos na compreensão desses conceitos. Refletimos então que o entendimento sobre os conceitos de volume e capacidade pode influenciar a FRP por esses alunos.

Nesse sentido, buscamos em pesquisas (ex.: FIGUEIREDO, 2013; MORAIS, 2013; ANWANDTER-CUELLAR, 2013; VAN DER MER, 2017; MELO, 2018; LEÃO, 2020) que abordam e reconhecem as relações que existem entre os conceitos de volume e capacidade, elementos que favoreçam a ampliação e aprofundamento da compreensão a respeito desses temas. Figueiredo (2013) pontua que

> O conceito de volume pode ser entendido como o espaço que ocupa um corpo em relação a outros objetos, ou a quantidade de unidades que formam o corpo, ou o espaço ocupado ao submergir um objeto em um líquido, entre outras. Portanto, o conceito de volume está relacionado com outras propriedades dos corpos (físicas e químicas) e com características físicas e geométricas dos objetos (FIGUEIREDO, 2013, p. 34).

Van Der Mer (2017, p. 38) discute que volume "é a quantidade de espaço ocupado por um corpo ou a capacidade de armazenamento que o corpo possui (caso seja oco, desprezem-se as paredes e seja possível utilizá-lo como recipiente)".

Leão (2020) define capacidade como o volume interno de um recipiente, explicando que: "Nesse caso, volume é um conceito mais geral, ou seja, capacidade é um caso particular de volume. Um sólido maciço tem volume, mas não tem capacidade, enquanto um sólido oco tem volume e capacidade" (LEÃO, 2020, p.49).

Lima e Bellemain (2010) reforçam essa afirmação ao pontuarem que

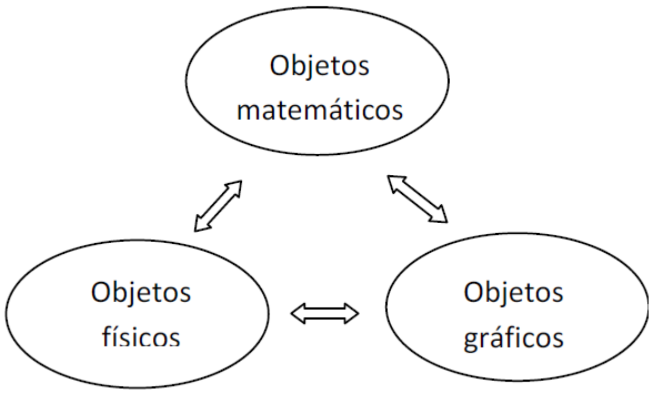
> Quando o objeto considerado é um recipiente – objeto com espaço interno disponível – surge o conceito de capacidade, que nada mais é do que o volume da parte interna de tal objeto. Assim, volume e capacidade são a mesma grandeza, em contextos diferentes (LIMA; BELLEMAIN, 2010, p. 192).

No entanto, é preciso ficarmos atentos quando nos referimos ao volume de um líquido associado à capacidade de recipientes. Sobre esse aspecto, Lima e Bellemain (2010) afirmam que

> Há estreita ligação entre a capacidade de um recipiente e o volume de líquidos que podem ser depositados nele. Tal ligação resulta das propriedades físicas da matéria em estado líquido que ocupa "o espaço disponível" e faz com que se possa utilizar "a quantidade de líquido contido" para dar a ideia de capacidade de recipientes, ou mesmo, para comparar capacidades de recipientes. No entanto, o emprego da expressão acima pode levar à ideia de que "a quantidade do líquido contido" é a "massa do líquido contido", o que gera confusão entre duas grandezas distintas, volume e massa. Por isso, é preciso cautela no emprego da expressão e não seria adequado tomá-la como definição desse conceito matemático, pois a capacidade de um recipiente não depende de haver líquido, ou qualquer outro tipo de material, nele. Além do mais, nos recipientes que são usados no dia a dia, o volume ocupado pelos líquidos que eles contêm é sempre um pouco menor do que a capacidade total desse recipiente (LIMA; BELLEMAIN, 2010, p. 192-193).

De acordo com Lima e Bellemain (2010) no estudo das grandezas geométricas é relevante compreendermos a existência de três componentes: os objetos físicos, os objetos gráficos e os objetos matemáticos (Figura 4). Embora sejam distintos, esses componentes não são dissociados um do outro.

Figura 4 - Componentes das grandezas geométricas

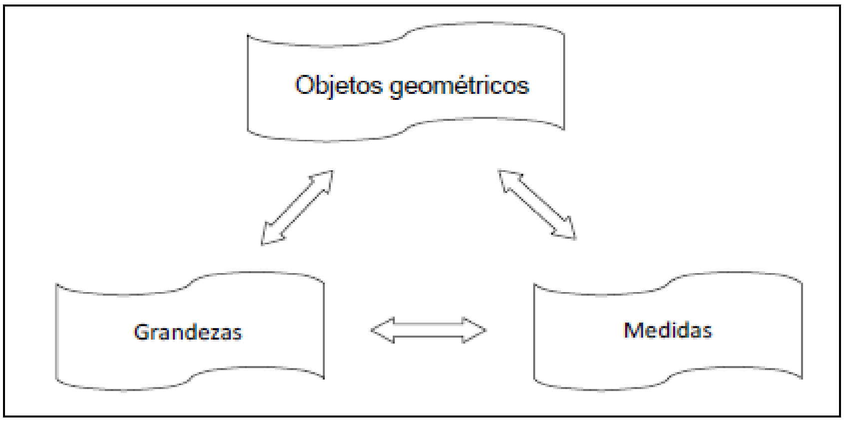


Fonte: Lima e Bellemain (2010, p. 172).

A Figura 4 retrata a inter-relação entre os objetos, no estudo das grandezas geométricas, pela qual "cada um deles pode ser utilizado para representar os outros dois, no contexto da sala de aula" (LIMA; BELLEMAIN, 2010, p. 172). Por exemplo, vamos considerar, um objeto do mundo físico (um tijolo), a este objeto, associamos o conceito matemático de paralelepípedo (objeto matemático) e seu desenho (objeto gráfico).

De acordo com Lima e Bellemain (2010, p. 172) cada um desses três objetos (Figura 4), pode ser denominado por objetos geométricos. Sendo assim, os conceitos envolvidos nesses elementos podem ser organizados em três universos ou domínios (Figura 5): o do objeto geométrico, o da grandeza e o da medida da grandeza.

Figura 5 - Componentes do universo das grandezas geométricas

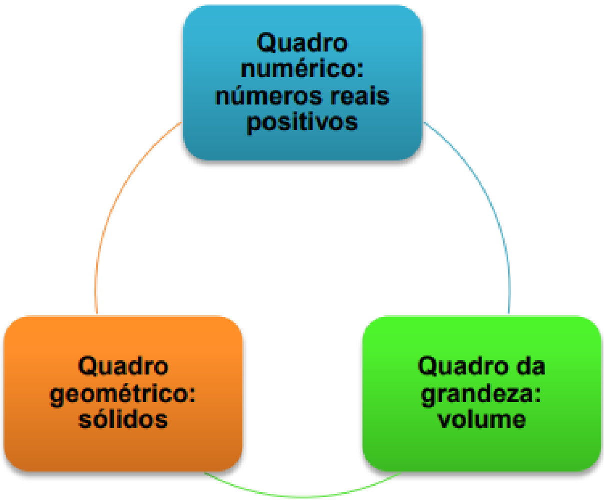


Fonte: Lima e Bellemain (2010, p. 173).

Apesar das componentes presentes na Figura 5 serem distintas, elas são estreitamente ligadas e o desafio do ensino dos conceitos envolvidos é distinguir e articular, de forma simultânea, esses componentes (LIMA; BELLEMAIN, 2010). Para Figueiredo (2013, p. 25), “no caso de volume, que é a grandeza geométrica, estão associados o objeto geométrico que é representado pelo sólido e a sua medida representada pelos números reais não negativos.” Voltando ao nosso exemplo do tijolo, representado pelo paralelepípedo, escolhemos o centímetro cúbico (cm^3) para unidade de medida de volume. A medida do volume do tijolo nessa unidade pode ser o número 100 e assim, para este caso, o volume será indicado pelo símbolo composto 100 cm^3.

De acordo com estudos anteriores sobre a construção do conceito de área como grandeza, à luz de Douady e Perrin-Glorian (1989), são estabelecidos a distinção entre três quadros: quadro geométrico, quadro das grandezas e quadro numérico. Morais (2013) adaptou este modelo para a conceitualização de volume como grandeza (Figura 6) que consiste em associar/dissociar o sólido, o número e a grandeza.

Figura 6 - Representação gráfica do modelo didático de quadros adaptado para volume



Fonte: Morais (2013, p. 32).

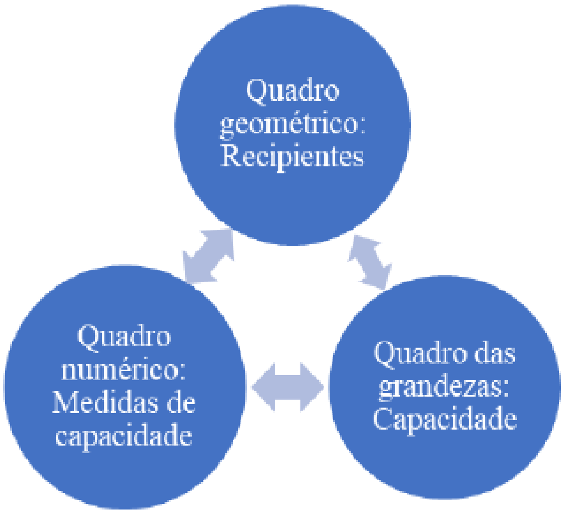
Para compreendermos o modelo (Figura 6), Morais (2013) explica:

> O quadro geométrico é composto pelas figuras geométricas espaciais, a exemplo de pirâmides, esferas, sólidos irregulares, entre outros. O quadro numérico é composto pelos números reais positivos como 7 ou 9,8. Por fim, o quadro das grandezas é constituído de classes de equivalência de sólidos de mesmo volume, as quais podem ser representadas pelo par número/unidade de medida como 3 cm³, 2,5 m³, 30 L etc. (MORAIS, 2013, p.33).

Segundo Morais (2013), os quadros numérico, geométrico e da grandeza são independentes, por isso precisam ser distinguidos. Vale também observar que sólidos diferentes podem ter mesmo volume e que mudança na unidade de medida resulta em valores numéricos diferentes, contudo não provoca alteração no volume. Isso significa que ao variar a unidade de medida, a medida do volume muda, mas o volume permanece o mesmo. Baseado no autor, tomemos como exemplo um bloco de concreto. O bloco pertence ao quadro geométrico, a medida de seu volume pertence ao quadro numérico, e as classes de equivalência dos sólidos, que possuem o mesmo volume do bloco de concreto, pertencem ao quadro das grandezas.

Na Figura 7, expomos como Leão (2020), de forma similar, utilizou o modelo de quadros de Douady e Perrin-Glorian (1989), adaptado para volume por Morais (2013), para a grandeza capacidade.

Figura 7 - Quadro das Grandezas – Grandeza Capacidade



Fonte: Leão (2020, p. 59).

A respeito da diferenciação entre os quadros em relação à capacidade, o quadro geométrico incorpora os recipientes que possuem volume interno, logo possuem capacidade. O quadro das grandezas refere-se à classe de equivalência dos recipientes cuja capacidade é a mesma. Por sua vez, o numérico refere-se ao valor numérico pertencente ao conjunto dos reais positivos dado à capacidade de certo recipiente (LEÃO, 2020).

Anwandter-Cuellar (2013) à luz dos já mencionados trabalhos de Douady e Perrin-Glorian (1989) e da Teoria dos Campos Conceituais (1990) discutem nove concepções dos alunos em torno dos conceitos de volume e capacidade.

Com base em Piaget, Inhelder e Szeminska (1973, apud ANWANDTER-CUELLAR, 2013) caracteriza duas concepções de volume mobilizadas por alunos, no **quadro geométrico**:

- **Volume delimitado:** como sendo um espaço topológico delimitado por uma superfície; o volume como o que é envolvido por suas fronteiras;
- **Volume ocupado**: o volume é visto como o lugar ocupado por um corpo no espaço ou o lugar ocupado por um objeto colocado em relação ao que o circunda.

Anwandter-Cuellar (2013) também caracteriza duas concepções no **quadro numérico**:

- **Volume número:** o volume é visto como um número obtido por meio de uma fórmula, sem qualquer relação com o volume como grandeza;
- **Volume medida:** o volume é considerado o número de unidades necessárias para preencher um sólido.

Em relação ao **quadro numérico - geométrico**, é inserida a concepção de:

- **Volume grandeza:** Dois sólidos equivalentes têm o mesmo volume.

No que diz respeito ao **quadro físico**, temos:

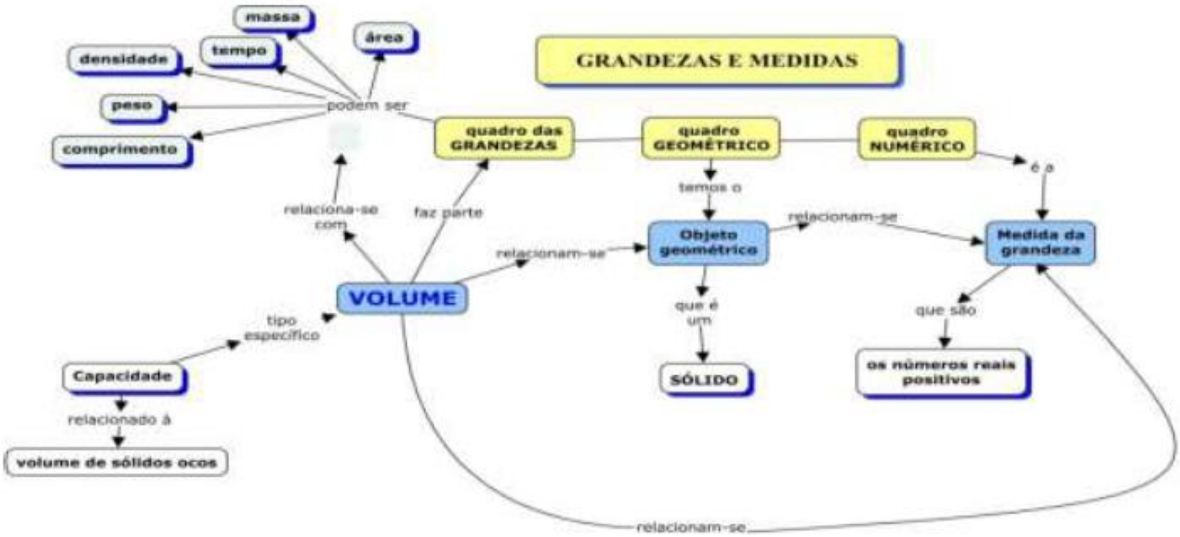
- **Volume deslocado:** este conceito vem do princípio de Arquimedes: "Um corpo imerso em um fluido recebe um impulso verticalmente para cima, cuja intensidade é igual ao peso do fluido deslocado (este volume é igual ao volume imerso do corpo) (FIGUEIREDO, 2013, p. 30). Nesta concepção, o volume de um objeto é igual à quantidade de água deslocada quando o objeto é imerso em água;
- **Volume interior**: é considerado a quantidade de matéria no sentido físico que constitui o objeto. Deste ponto de vista, os conceitos em ato ligados a volume como capacidade fazem parte deste tipo de concepção.

Anwandter-Cuellar (2013) aponta dois tipos de concepções, sendo essas, envolvendo confusões de volume com outros conceitos:

- **Volume área:** o volume é confundido com a área. Tal como "volume é a superfície" ou "volume é a área de um objeto";
- **Volume objeto**: o volume é confundido com o sólido.

Sintetizando a compreensão do modelo proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989) adaptado à grandeza volume, apresentamos na Figura 8 o mapa conceitual elaborado por Righi (2018).

Figura 8 - Mapa conceitual sobre a grandeza volume



Fonte: Righi (2018, p .54).

No mapa conceitual (Figura 8), podemos observar como a autora relaciona as grandezas volume e capacidade, indicando a capacidade como um tipo específico de volume. Bem como, a correlação com outros conceitos (comprimento, área, tempo, densidade, massa e peso). Concordamos com Lima e Bellemain (2010, p. 191) ao afirmarem que “entre as grandezas geométricas estudadas na escola, o volume é um conceito matemático que envolve um grande número de desafios didáticos”. Dentre os desafios didáticos, destaca-se a importância atribuída aos tipos de situações que dão sentido ao conceito de volume e capacidade às quais os alunos experienciam e os diferentes invariantes operatórios e as representações relacionadas a estas.

3.2.2 Situações do campo conceitual de volume

Oliveira (2007) discute que o campo conceitual do volume, no sentido matemático, recorre a um conjunto de situações cuja origem está na Geometria.

> Nesse caso, usam-se sólidos geométricos, estudam-se situações que permitem calcular a medida de alguns desses sólidos como paralelepípedos, cilindros, cones dentre outros. Esses estudos de medição recorrem às estruturas aditivas e às multiplicativas. Além dessas características, o campo conceitual inclui um conjunto de representações, conceitos e teoremas, que interagem com as situações referentes (OLIVEIRA, 2007, p.77).

Com base na classificação de Baltar (1996) sobre as situações que dão sentido ao conceito de área, a saber: “medida, comparação e produção”; outros pesquisadores adotaram esta classificação para o conceito de volume, a exemplo de Morais (2013), Figueiredo (2013) e Melo (2018). Para as situações de medida, adotaremos o termo “Situação de Medição”, a exemplo Morais (2013) que optou por usar o termo “Medição”, ao invés de “medida” e justifica que

> [...] medição se refere ao tipo de situação que consiste em medir o volume, enquanto medida consiste em um número, resultado do processo de medição. Além disso, as situações de medição não se restringem a medições práticas, mas também às medições teóricas (quando se usa, por exemplo, as fórmulas para medir o volume dos sólidos) (MORAIS, 2013, p. 45)

A propósito destes tipos de situações que dão sentido ao conceito de volume, refinamos a seguir cada uma delas, a fim de melhor compreendermos as suas diferentes características.

3.2.2.1 Situações de medição

Bellemain e Lima (2002, p. 45) explicam que “nas situações de medida, destacam-se o quadro numérico e a passagem da grandeza ao número por meio da escolha de uma unidade. O resultado esperado numa situação deste tipo é um número seguido de uma unidade”. Figueiredo (2013) explica a articulação dos diferentes campos conceituais envolvidos nas situações de medição de volume.

> Ao reconhecer, por exemplo, um sólido como sendo um paralelepípedo, o sólido paralelepípedo faz parte do campo geométrico. Ao medir o volume desse objeto, será necessário atribuir um número que irá compor o campo numérico, e uma unidade de medida escolhida para a medição, que irá compor o campo das grandezas geométricas. O quadro das grandezas vai se compor de classes de equivalência, ou seja, vai corresponder a um conjunto quociente composto a partir da relação de equivalência "ter mesmo volume” (FIGUEIREDO, 2013, p. 26).

De acordo com Morais (2013) e Figueiredo (2013), as possíveis estratégias mobilizadas pelos alunos neste tipo de situação são: contagem de unidades (contar sólidos unitários), uso de fórmulas, uso do princípio de Cavalieri, imersão, preenchimento (para os sólidos ocos é possível medir sua capacidade, preenchendo-o com um líquido e observando a quantidade utilizada no preenchimento), transbordamento e estimativas.

Para Morais (2013), nas situações de medição são identificadas:

> Variações que podem intervir nas possíveis estratégias de resolução das atividades, implicando em um maior ou menor nível de dificuldade no enfrentamento dessas situações. Essas variações às vezes favorecem e às vezes bloqueiam certos procedimentos de resolução, o que nos leva a inferir invariantes operatórios e representações simbólicas propiciadas pelas diferentes situações de cada tipo (MORAIS, 2013, p. 45-46).

Estes tipos de variações são refinados à luz de duas categorias de situações de medição: transformação de unidades e operacionalização de medidas.

- **Situações de transformações de unidades**

Em situações de transformação de unidades, consideradas como um subtipo de situação de medição, o aluno dispõe da estratégia de medir o volume de um mesmo sólido usando unidades diferentes, como:

> Medir o volume de sólido formado por cubinhos de 1cm de aresta, pode ter como resposta o par número/unidade de medida de volume cubinhos ou o par número/unidade de medida cm3. Para a conversão de unidades, o aluno deverá utilizar a estratégia de converter uma unidade de volume em outra, ou seja, de uma unidade de medida para um de seus múltiplos ou submúltiplos, ou de uma unidade de medida de volume para uma unidade de medida de capacidade, ou vice-versa (FIGUEIREDO, 2013, p. 40).

Morais (2013, p. 47) comenta que no caso da conversão diretamente de um volume expresso em uma unidade em outra unidade de volume, isto pode ocorrer sem a intervenção explícita do sólido. Tratando-se de um aspecto “mais técnico, onde a tarefa principal é realizar operações que permitem obter diferentes expressões de volume, com diferentes unidades”. Quando um aluno mede o volume de um mesmo sólido usando unidades diferentes, isto favorece a distinção entre a grandeza e o número, “pois medir o volume de um sólido usando unidades diferentes provoca mudança na medida obtida, mas o volume permanece inalterado”. Essa ideia evidencia a equivalência/igualdade entre volumes.

Para Figueiredo (2013, p. 40), um aspecto a ser observado neste tipo de situação é a “natureza dos números, pois os alunos poderão encontrar mais dificuldades diante dos números decimais”. Além disso, sobre as situações de transformações de unidades, consideramos importante destacar o significado do sinal de “igual” e as relações de igualdade. Lima e Bellemain (2010, p. 174) apresentam um exemplo, a propósito da grandeza comprimento, que ilustra a importância da compreensão da noção de igualdade.

Figura 9 - Exemplo proposto sobre transformação de unidades de medidas de comprimento

Fonte: Lima e Bellemain (2010, p. 174).

Ao nos referirmos às propriedades de igualdade, consideramos, conforme Giovanni Júnior e Castrucci (2018), o seguinte:

- 1ª propriedade: a = a, para qualquer a. Essa é a propriedade reflexiva;
- 2ª propriedade: a = b $\Leftrightarrow$ b = a, para quaisquer a e b. Essa é a propriedade simétrica;
- 3ª propriedade: a = b e b = c $\Rightarrow$ a = c, para quaisquer a, b e c. Essa é a propriedade transitiva.

Sobre a propriedade transitiva, no contexto das grandezas volume e capacidade, por exemplo, temos a igualdade $1m^3 = 1000l = 1.000dm^3$. Além disso, convém destacar a insuficiência apenas do número na representação de um volume; ou seja, para um volume ser representado requer um par: número/unidade de medida.

- **Situações de operacionalização de volumes**

De acordo com Morais (2013, p. 48), a situação de operacionalização de volumes é "um subtipo de situação de medição que consiste em efetuar uma operação matemática com volumes permanecendo no quadro das grandezas". Nesse subtipo de situação:

> Intervêm as estratégias adicionar/subtrair volumes e multiplicar/dividir volume por um escalar, as quais são caracterizadas por uma operação envolvendo volumes. Do ponto de vista conceitual, esse tipo de situação permite compreender que dois volumes podem ser adicionados/subtraídos, bem como multiplicados/divididos por um escalar, evidenciando características de uma grandeza (MORAIS, 2013, p. 48).

Morais (2013) explica que nas situações de operacionalização de volumes frequentemente é recorrente o aspecto algébrico, na medida em que são valorizados cálculos algébricos com as fórmulas de volume.

Sobre as situações de operacionalização de medidas, Figueiredo (2013, p. 41), afirma que os alunos podem apresentar dificuldades devido à homogeneidade ou não de unidades e à natureza dos números (naturais, racionais, reais). No que diz respeito às situações em que temos homogeneidade de medidas, podemos refletir por exemplo, qual o significado de: $2dm^3 + 5dm^3 = (2+5)\ dm^3 = 7dm^3$? Tem significado a operação: $2m^3 + 5cm^3$? Qual o significado das igualdades: $2m \times 3m \times 4m = (2 \times 3 \times 4)\ m \times m \times m = 24m^3$? Isto pode requerer que os alunos tenham um domínio sobre certos invariantes operatórios e representações simbólicas bem específicas, por exemplo, sobre as propriedades de operações básicas.

3.2.2.2 Situações de Comparação

Segundo Bellemain e Lima (2002) as situações de comparação se situam essencialmente em torno do quadro das grandezas. Por exemplo:

> Quando comparamos duas superfícies somos conduzidos a decidir se elas pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência. É claro que, com frequência, os quadros geométrico e numérico vão ser necessários para a resolução dos problemas de comparação, mas sua intervenção em geral é secundária com relação ao quadro das grandezas (BELLEMAIN; LIMA, 2002, p. 45).

No caso da grandeza volume, as situações de comparação, consistem em decidir, para um determinado conjunto de sólidos qual deles tem maior/menor volume ou se têm volumes iguais. Vale ressaltar que nas situações de comparação que envolvem dois sólidos podemos determinar diretamente qual deles possui volume maior/menor ou se possuem volumes iguais.

> Se as situações abrangem mais de dois sólidos, é preciso ordená-lo de forma que justifique a transitividade da relação de ordem [...]. Este tipo de situação possibilita ao aluno a mobilização dos conhecimentos do campo geométrico, campo das grandezas e alguns casos conhecimentos do campo geométrico e/ ou campo algébrico (MELO, 2018, p. 43).

Para as situações de comparação, Figueiredo (2013), pondera que há outras formas de se comparar volumes, por exemplo: *Comparação visual* - consiste em comparar por meio da visão os objetos e pela percepção de ordená-los de acordo com o seu volume. *Por inclusão* - um objeto terá maior volume que outro se este couber no interior do objeto de maior volume. Para efetuar a inclusão é preciso que um dos sólidos seja oco. *Por decomposição/recomposição* - tenta-se decompor um dos objetos para formar (recompor) um objeto conhecido, ou parecido com o outro objeto a ser comparado. *Por imersão* - os objetos são colocados no interior de um recipiente de água para que ao imergirem, um a um, seja comparado o nível de água deixado por cada objeto submerso. O nível mais alto corresponderá ao objeto de maior volume. *Por medida e comparação de medidas*, os objetos são comparados utilizando-se a fórmula de volume.

Morais (2013) apresenta possibilidades e características de situações de comparação, tais como: *Comparação não numérica ou relacionando volume de sólidos* - com ênfase sobre o quadro geométrico, nesta não ocorre a explicitação de medidas; *comparação usando o princípio de Cavalieri* - destaca-se o uso do princípio de Cavalieri como justificativa para a igualdade dos volumes dos sólidos *e comparação usando medição* - refere-se a comparar o espaço interno de um objeto. A estratégia de medição e comparação das medidas é claramente valorizada, considerando o domínio numérico e o geométrico. Bem como, o uso da fórmula de volume de um dado sólido.

Vergnaud *et al*. (1983) discute alguns aspectos a serem levados em conta, quanto à comparação e medição de volumes e a passagem de uma concepção unidimensional a uma concepção tridimensional.

Sobre a comparação e medição de volumes, Vergnaud *et al*. (1983, p. 76, tradução nossa) afirmam: "A comparação entre volumes, sua medição e a composição aditiva dessas medições constituem os fundamentos da aritmetização do volume"[11]. A propósito desta afirmação, temos a seguinte explicação:

[11] La comparaison de volumes entre eux, leur mesure et la composition additive de ces mesures constituent les fondements de l'arithmétisation du volume (VERGNAUD *et al.*, 1983, p. 76).

> Medir é associar um número a um objeto, por isso é necessário identificar características deste objeto que a medida do volume levará em consideração. Certas características podem ser manipuladas sem que a medida seja efetivamente realizada, podendo ser suficiente comparar diretamente ou indiretamente os objetos volumétricos; desde que surja um problema de composição, a ordem já não é suficiente, é necessário associar a esses objetos volumétricos, números que serão suas medidas e que serão constituídos no sistema aditivo.
> Medida (A + B) = medida (A) + medida (B) (VERGNAUD et al., 1983, p. 73, tradução nossa)12.

No que concerne à compreensão de uma concepção unidimensional a uma concepção tridimensional de volume, Vergnaud *et al*. (1983) chama a atenção, por exemplo, para o uso da fórmula do paralelepípedo e o que ela representa em relação às dimensões lineares. Haja vista, confusões em torno de: diferenciação entre as medidas das arestas, das faces e do volume de um paralelepípedo; manipular os três tipos de medidas espaciais (comprimento, área, volume) e as diferenciar uma das outras.

3.2.2.3 Situações de Produção

Levando-se em conta a grandeza área, Bellemain e Lima (2002) discutem que as situações de produção são diferentes das situações de medição e de comparação, tendo em vista que

> Enquanto nas situações de comparação e medida em geral há apenas uma resposta correta para cada situação, as situações de produção, frequentemente admitem várias respostas corretas. Além disso, apesar de a resposta esperada para uma situação de produção ser uma superfície (objeto geométrico); a intervenção dos outros quadros pode ser tão importante quanto a do quadro geométrico (BELLEMAIN; LIMA, 2002, p. 45).

Segundo Morais (2013, p. 50), “as situações de produção caracterizam-se pela produção de um sólido com volume menor, maior ou igual a um volume dado e têm

---

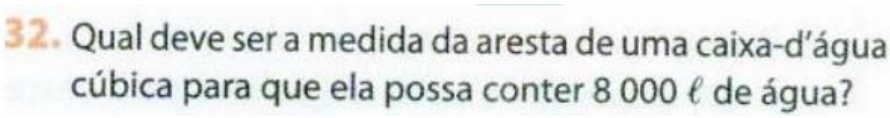
[12] Mesurer c’est associer un nombre à un objet; il faut donc identifier les caractéristiques de cet objet que la mesure-volume prendra en compte. Certaines caractéristiques peuvent être manipulés sans que la mesure soit effectivement construite, il suffit de pouvoir comparer directement ou indirectement les objets volumiques; dès que se pose un problème de composition, l’ordre ne suffit plus et il faut associer à ces objets volumiques, des nombres qui seront leurs mesures et qui se constitueront en système additif.
Mesure (A+B) = mesure (A) + mesure (B). (VERGNAUD *et al*., 1983, p. 73).

como estratégias composição, decomposição-recomposição e princípio de Cavalieri”. Tais estratégias, apresentam os seguintes aspectos:

- A composição consiste em produzir um sólido compondo as unidades de medida;
- A decomposição/recomposição consiste na produção de um “novo” sólido com volume maior/menor ou igual ao volume de um sólido dado;
- O princípio de Cavalieri caracteriza-se pela construção de uma figura a partir do que afirma tal princípio.

Morais (2013) exemplifica uma situação de produção que requer medição (Figura 10), como aquela que remete a procedimentos numéricos/algébricos. Contrariamente, a uma situação de produção sem uso de medição, que não enfoca esses procedimentos.

Figura 10 - Exemplo de situação de produção que requer medição


32. Qual deve ser a medida da aresta de uma caixa-d’água cúbica para que ela possa conter 8 000 ℓ de água?

Fonte: Morais (2013, p. 82).

Sobre a Figura 10, temos que é dado um volume e pede-se o comprimento da aresta de uma caixa que o contenha. Tendo em vista que o volume é dado em litros, para a obtenção do sólido são requeridos procedimentos numérico-algébricos (MORAIS, 2013).

Na Figura 11, temos um exemplo que envolve a produção de sólidos com volume menor que um volume dado. O que não favorece estratégias numérico-algébricas, pois não são dados os comprimentos das arestas da caixa (MORAIS, 2013).

Figura 11 - Situação de produção sem uso de medições

Muitas embalagens de leite que utilizamos têm a forma de um prisma com a base retangular e capacidade de 1 litro.

a) Como você deve cortar uma dessas embalagens de leite de modo a obter um recipiente que permita medir no máximo meio litro?
Procure duas maneiras diferentes de fazer esse corte.

b) Usando ainda embalagens desse tipo, como você fa-ria para obter recipientes que permitissem medir um terço de litro, um quarto de litro, ..., um decilitro?

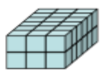
c) E se as embalagens tivessem a forma de um prisma de base pentagonal, como você faria para obter meio litro?

Fonte: Morais (2013, p. 83).

Anwantder-Cuellar (2013), apresenta duas possibilidades de situações de produção: 1. Problemas de produção de um sólido com volume dado; 2. Problemas de produção de sólidos com volume maior ou menor que o volume de um sólido dado. No caso de produção de um sólido com volume dado - “podemos pedir aos alunos que produzam um sólido de mesmo volume que de outro, ou que o volume seja um terço, o dobro etc.”[13] (ANWANTDER-CUELLAR, 2013, p.63, tradução nossa).

Figura 12 - Exemplo de situação de produção de um sólido com o volume dado

Situation problème :
Luc possède 36 petits cubes de 1 cm d’arête. Il veut les arranger de façon à former des parallélépipèdes rectangles comme indiqué ci-dessous :



a) Indique toutes les possibilités de rangement qui donnent de parallélépipèdes rectangles différents.

Fonte: Anwantder-Cuellar (2013, p.69).

Sobre o exposto na Figura 12, temos uma explicação apresentada por Figueiredo (2013). Esta atividade exige do aluno:

[13] On peut demander aux élèves de produire un solide de même volume qu’un autre solide, ou que le volume soit un tiers, le double etc. (ANWANTDER-CUELLAR, 2013, p.63).

> A estratégia de composição ao pedir para construir sólidos diferentes com 36 cubinhos de 1cm de aresta. Porém, além dessa estratégia, o aluno pode dispor da decomposição-recomposição. Através da montagem do sólido formado por 36 cubinhos, para encontrar os sólidos diferentes com o mesmo volume, ou seja, com o mesmo número de cubinhos, o aluno poderá formar outros sólidos, decompondo e recompondo os cubinhos (FIGUEIREDO, 2013, p.41).

Na atividade (Figura 12) temos em cena uma articulação entre o quadro numérico e o geométrico. Busca-se saber se os alunos são capazes de articular os objetos e as fórmulas de cálculo.

Diante do exposto, buscamos tomar como suporte esses tipos de situações de volume (medição, comparação e produção) para analisar aquelas formuladas e resolvidas pelos alunos da EAM, por meio dos procedimentos metodológicos que apresentamos no Capítulo 4. No entanto, no próximo tópico apresentamos um olhar sobre os invariantes operatórios e as representações simbólicas mobilizadas por alunos na resolução de problemas de volume e capacidade. A fim de uma melhor compreensão desses elementos e considerando que estes podem impactar na formulação de problemas sobre esses conceitos.

3.2.3 Invariantes operatórios e representações simbólicas do campo conceitual de volume

Utilizando a TCC, Melo (2018) e Figueiredo (2013) tratam os "teoremas em ação" como uma proposição tida como verdadeira na ação em situação e o conjunto das representações simbólicas como um sistema de símbolos com significados para o sujeito que representa um conceito - com o intuito de analisar esses elementos na resolução de problemas com o paralelepípedo retângulo por alunos do Ensino Médio.

Dessa forma, Melo (2018) identificou diversos teoremas em ação corretos (TAC) e errôneos (TAE) na resolução de problemas sobre o paralelepípedo retângulo. Em relação aos TAC, temos: TAC1: A medida do volume de um paralelepípedo retângulo é o produto das medidas de suas arestas; TAC2: Um metro cúbico equivale a mil litros; TAC3: Paralelepípedos retângulos distintos podem ter mesmo volume e TAC4: Em paralelepípedos retângulos de mesmo volume a soma das áreas de todas as faces não são necessariamente iguais. Quanto aos TAE, foram identificados: TAE1: A medida do volume de um paralelepípedo retângulo é a raiz quadrada da soma das medidas de cada aresta elevada ao quadrado; TAE2: A medida do volume de um paralelepípedo retângulo é a soma das medidas de suas arestas; TAE3: Paralelepípedos retângulos diferentes têm necessariamente volumes diferentes; TAE4: Paralelepípedos retângulos de mesmo volume têm a mesma área total; TAE5: O volume de um sólido se altera na mesma proporção que as medidas de suas arestas. Na identificação dos TAC e TAE, Melo (2018) constatou que os alunos mobilizaram conhecimentos adequados e não adequados do campo das grandezas e do campo numérico. No que diz respeito às representações simbólicas, ela destaca que

> [...] as fórmulas para calcular o volume, as figuras dos paralelepípedos retângulo, as unidades de medidas de comprimento (metro e centímetro), volume (centímetros e metros cúbicos) e capacidade (litros) e os números (naturais, racionais na forma decimal, fracionário e na forma percentual) foram as representações simbólicas mobilizadas por esses alunos. Entretanto, a fórmula foi a representação mais empregada, inclusive em questões que não necessitavam o seu uso. Em relação às figuras e aos números, constatamos que o desenho da figura foi mais utilizado nas situações de comparação, que alguns alunos confundiram a figura espacial com a plana e que os problemas que envolviam números naturais e suas operações obtiveram melhores resultados (MELO, 2018, p. 122).

Por sua vez, Figueiredo (2013) identificou que alunos do Ensino Médio apresentaram os seguintes teoremas em ação corretos na resolução de problemas envolvendo volume: TA1C: Sólidos de mesma massa e mesma densidade têm mesmo volume; TA2C: Sólidos compostos por outros sólidos, organizados diferentemente, têm mesmo volume; TA3C: As áreas das superfícies de sólidos de mesmo volume não são necessariamente iguais; TA4C: Volume e área são grandezas distintas e TA5C: A medida de volume de um paralelepípedo retângulo é o produto das medidas de seus lados. Em relação aos teoremas em ação errôneos, identificou: TA1E: Sólidos diferentes têm necessariamente volumes diferentes; TA2E: Se dois sólidos têm a mesma massa, então têm o mesmo volume. TA3E: O volume de um sólido se altera na mesma proporção que seus comprimentos; TA4E:Se dois sólidos têm mesmo volume, então eles são idênticos; e TA5E: Sólidos de mesmo volume têm a mesma área.

Quanto aos teoremas em ação corretos mobilizados pelos alunos, Figueiredo (2013) constatou que os alunos deram indícios de que compreendem volume como sendo uma grandeza independente do objeto. Por outro lado, no que concerne aos teoremas em ação errôneos, os alunos revelaram não compreender volume como grandeza independente da forma, dando indícios de que apresentam dificuldades no campo geométrico. Para as representações simbólicas, ela identificou que

> As representações utilizadas pelos alunos foram a fórmula, o desenho do sólido, a unidade de medida de volume e os números. A presença de algum tipo de representação, como no caso da fórmula e do desenho, mesmo em questões em que não era solicitado o seu uso, foi evidenciada em alguns protocolos observados, o que dá pistas para trabalhos futuros sobre a importância desses tipos de representação e sua influência na compreensão de volume como grandeza (FIGUEIREDO, 2013, p.165).

Righi, Santarosa e Mathias (2019), em uma investigação com alunos da Licenciatura em Matemática, identificaram na resolução de problemas, teoremas em ação corretos, tais como: “sólidos de mesma massa e mesma densidade têm o mesmo volume”; “volume aumenta com o aumento da temperatura”; “variação do volume depende das características do material”; “o objeto irá se dilatar com o aumento da temperatura e se compactar com seu resfriamento.”; “a dilatação do material depende da intensidade da temperatura”; “o volume como grandeza independe do número, o número pode mudar e o volume continuar o mesmo”; “o volume de um sólido geométrico é o mesmo que o volume interno deste sólido”; “existe independência do volume com a forma do sólido e com a unidade de medida”.

Dentre os teoremas em ação errados, Righi, Santarosa e Mathias (2019, p. 184) identificaram: “volume está ligado à quantidade de material, independe da forma”; “o volume depende do raio. A pizza tem raio maior que a esfera, raio maior implica volume maior”; “volume depende da forma da figura geométrica”; e “balde não é unidade de medida”; “volume é o recipiente, capacidade é o quanto cabe dentro do recipiente”; “se o sólido for maciço, o volume é igual à capacidade”; “o volume de um sólido se altera na mesma proporção que seu comprimento”, dentre outros.

A propósito do que foi discutido neste capítulo e nos capítulos anteriores apresentamos a seguir o percurso metodológico adotado nesta pesquisa que tem por objetivo analisar a formulação e resolução de problemas sobre volume e capacidade, por alunos egressos do Ensino Médio, à luz da Teoria dos Campos Conceituais.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Ao iniciarmos este capítulo, ressaltamos que a presente pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética e Pesquisa da UFRPE sob o nº CAAE 63663922.6.0000.9547 e que só após emissão do Parecer Consubstanciado de nº 5.832.412 foram iniciados os trabalhos de campo de construção e análise dos dados. Para submeter a proposta da pesquisa ao Comitê de Ética foi necessário apresentar alguns elementos que comprovassem sua relevância e aplicabilidade. Para tanto, foram explicitadas algumas informações a respeito dos objetivos e procedimentos metodológicos da pesquisa, além da elaboração dos seguintes documentos e autorizações:

- Apresentação da pesquisadora pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências da UFRPE à escola onde seria desenvolvida a pesquisa (Anexo A).
- Carta de anuência emitida pela direção da escola onde foi desenvolvida a pesquisa (Anexo B).
- Termo de Compromisso e Confidencialidade (ANEXO C).
- Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) para maiores de 18 anos (Anexo D).

Sobre o tipo de abordagem metodológica, esta pesquisa se ancora em características das abordagens qualitativa e quantitativa, considerando que essas duas abordagens são complementares. Haja vista que “a utilização conjunta da pesquisa qualitativa e quantitativa permite recolher mais informações do que se poderia conseguir isoladamente”. (FONSECA, 2002, p. 20 apud GERHARDT; SILVEIRA, 2009). Nessa direção, Gatti (2004) aponta que

> Os métodos de análise de dados que se traduzem por números podem ser muito úteis na compreensão de diversos problemas educacionais. Mais ainda, a combinação deste tipo de dados com dados oriundos de metodologias qualitativas, podem vir a enriquecer a compreensão de eventos, fatos e processos. As duas abordagens demandam, no entanto, o esforço de reflexão do pesquisador para dar sentido ao material levantado e analisado (GATTI, 2004, p .13).

Na sequência dos tópicos deste capítulo, apresentamos o cenário da pesquisa no que diz respeito à organização escolar e aspectos do Curso de Formação Militar (C-FMN), seguido do perfil dos participantes. Detalhamos as etapas da construção dos dados e suas análises à luz da Teoria dos Campos Conceituais e das características das atividades de Formulação e Resolução de Problemas (FRP) propostas aos alunos da EFM.

4.1 O CENÁRIO DA PESQUISA

4.1.1 A Escola de Formação Militar

Essa pesquisa teve como lócus uma Escola de Aprendizes-Marinheiros (EAM), localizada na região metropolitana do Recife. A escolha da EAM pela pesquisadora se deu, particularmente, pelos motivos expostos na introdução deste trabalho, no Capítulo 1. Além disso, pudemos contar com o apoio da Direção, do Serviço de Orientação Pedagógica (SOP) e da colaboração dos professores regentes da disciplina de Matemática da referida instituição de ensino, fatores fundamentais para o desenvolvimento do presente estudo.

A EAM funciona em regime de semi-internato, tem a estrutura de um quartel militar e possui nas suas instalações: campo de futebol, quadras poliesportivas, ginásio de esportes, piscina, sala de musculação, rancho, lavanderia, alojamento, e outras dependências onde é desenvolvido o Curso de Formação de Marinheiros (C-FMN). Os alunos circulam por todas as dependências da escola e, além de assistirem às aulas do C-FMN, participam e se envolvem nas atividades de rotinas relacionadas à limpeza, preparo das refeições, conservação, apoio à segurança e outras relacionadas a funções de suporte em setores e departamentos responsáveis pelo funcionamento da Escola.

4.1.2 Aspectos do C-FMN

O C-FMN é voltado para alunos já com o Ensino Médio completo, que ingressam nele por meio de concurso público. Tem a duração de um ano e é regido por um Currículo por Competências (BRASIL, 2021), cujo objetivo é promover o desenvolvimento de habilidades nos alunos, necessárias ao exercício das funções militares, sendo realizado em duas etapas. Na primeira, os alunos cursam disciplinas com alguns conteúdos do Ensino Fundamental e Médio que correspondem ao Ensino Básico (Matemática, Física, Português e Inglês) e Ensino Militar Naval (Marinharia, Legislação Militar, Controle de Avarias etc.). Já na segunda etapa do C-FMN, os alunos cursam disciplinas específicas às três áreas profissionais, na qual atuarão, futuramente, como marinheiros: Eletroeletrônica, Apoio[14] e Mecânica.

Vale ressaltar que o C-FMN é a última etapa do processo seletivo para ingresso na Marinha do Brasil. Os alunos da EFM são designados Aprendizes Marinheiros (AM) no período que corresponde à primeira fase do C-FMN, conforme foi mencionado, e Grumetes (GR) na segunda fase do curso. Ao final do C-FMN os alunos são classificados pela média final, de acordo com o desempenho acadêmico apresentado no decorrer do ano letivo e são promovidos a Marinheiros (MN).

4.2 PERFIL DOS PARTICIPANTES

A pesquisa contou com a colaboração de 2 professores regentes, que ministram a disciplina de Matemática I na EAM e a participação efetiva de 154 alunos, com idade de 18 a 22 anos, distribuídos em 7 turmas, conforme indicado na Tabela 3. Esses alunos ingressam no C-FMN por meio de concurso público e são oriundos de alguns estados do Nordeste e do estado do Rio de Janeiro.

Tabela 3 - Quantitativo de estudantes por turmas do C-FMN - 2022

TURMAS							**TOTAL**
A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	
24	24	24	20	19	21	22	154

Fonte: Autoria Própria baseada em dados do SOE da EAM.

A distribuição dos alunos por turma é feita de acordo com as áreas profissionais, sendo as turmas A, B e C da área de Eletroeletrônica, as turmas D e E da área de Apoio e F e G da área de Mecânica. Como existe uma padronização nas atividades desenvolvidas pelas disciplinas, segundo o Currículo do C-FMN (BRASIL, 2021) e a disciplina de Matemática I é desenvolvida na 1ª fase do curso, ela é cursada pelos alunos das três áreas profissionais. Dessa forma, para seguir a padronização

[14] Área relacionadas às profissões que atuam no funcionamento das OM, como: motoristas, cozinheiros, marceneiros, pintores, dentre outras.

das atividades, todos os alunos da EAM foram convidados a participar desta pesquisa. Para nos referirmos aos alunos participantes, todos serão designados de acordo com a turma à qual pertencem, seguidos de uma numeração. Por exemplo, os alunos da turma A: A1, A2, etc.

4.3 PROCEDIMENTOS PARA A CONSTRUÇÃO DOS DADOS

Como já foi dito, os dados desta pesquisa foram construídos no cenário da disciplina de Matemática I que é cursada por todos os estudantes do C-FMN. Tal disciplina tem por objetivo construir relações entre os conceitos matemáticos e as situações do cotidiano do trabalho marinheiro. No Quadro 3, a fim de melhor compreensão, expomos os objetivos específicos de aprendizagem sobre volume e capacidade presentes no currículo do C-FMN (BRASIL, 2021).

Quadro 3 - Objetivos de aprendizagem sobre volume e capacidade – Matemática I

COMPETÊNCIA TÉCNICA: 23 - Estabelecimento da relação de grandeza e medidas.
Indicador: 23.1 - Estabelecer relações entre diferentes unidades de medida: comprimento, massa, capacidade, área e volume.
Objetivos de aprendizagem
23.1.8 - Identificar o metro cúbico (m^3) como unidade de medida de volume padrão no Sistema Internacional de Unidades. 23.1.9 - Identificar os múltiplos e os submúltiplos do metro cúbico. 23.1.10 - Estabelecer relações entre as unidades de volume. 23.1.11 - Identificar o litro (L) como unidade de medida de capacidade padrão no Sistema Internacional de Unidades. 23.1.12 - Identificar os múltiplos e os submúltiplos do litro. 23.1.13 - Estabelecer relações entre as unidades de capacidade.

Fonte: Brasil (2021).

No plano de ensino desta disciplina é definido que esses objetivos de aprendizagem sejam desenvolvidos a partir de situações problemas do cotidiano marinheiro. Especificamente, sobre a FRP, como foi mencionado, esta atividade faz parte de uma das etapas do processo de avaliação dos alunos do C-FMN e eles recebem orientações sobre este trabalho (Figura 13) no início do estudo sobre Grandezas e Medidas.

Figura 13 - Recorte das orientações para os alunos sobre a atividade de formulação de problemas presentes no Currículo do C-FMN

2. ORIENTAÇÕES: (grupos de até 5 alunos)

a) **TRABALHO EM GRUPO:** (Valor: 2,0 (dois) pontos)

I. Elaboração de cinco questões inéditas, contextualizadas, com situações reais vivenciadas na rotina marinheira, utilizando **em cada uma** delas **unidades de medidas distintas**, podendo numa mesma questão serem exploradas mais de uma das unidade de medidas estudadas.

As 5 (cinco) questões devem ter os seguintes Índices de Dificuldade (ID):

1 - ID fácil; 3 - ID médio; e 1 - ID difícil.

Nas questões devem ser abordadas:

- Informações sobre atividades desenvolvidas pela Marinha do Brasil, seja em âmbito nacional ou internacional;
- Situações vivenciadas na rotina de bordo do Curso de Formação de Marinheiros.

As questões poderão ser elaboradas através de pesquisa na Revista Marítima ou na *internet*.

Fonte: Brasil (2021).

As orientações indicadas na Figura 13 para FP pelos alunos começaram a ser implementadas na EAM desde 2019. Desde então, todos os professores de Matemática desta escola se envolvem nesta atividade. Dessa forma, particularmente, como procedimentos preliminares (antes da aplicação da pesquisa com os alunos) houve alguns encontros entre a pesquisadora e os dois professores regentes da disciplina de Matemática. Nesses encontros foram discutidas as ações que seriam desenvolvidas nas etapas da pesquisa no que se refere à: quantidade de aulas, quantidade de atividades aplicadas em cada turma, como seria a participação dos alunos e a atuação da pesquisadora e dos professores regentes. Sendo definido que:

i) Antes da aplicação das atividades de FRP, a pesquisadora iria em cada turma fazer o convite aos alunos para participação na pesquisa e explicar como ela seria realizada. Também seria informado aos alunos a existência do TCLE (ANEXO D), que deveria ser assinado[15] por eles, caso concordassem em participar;

[15] Os alunos também foram informados que a assinatura do TCLE não implica a obrigatoriedade da participação até o término da pesquisa, permitindo que a qualquer momento eles possam desistir sem que o ato de desistência acarrete algum ônus ou penalização.

ii) Nas aulas anteriores à aplicação das atividades referentes aos conceitos de volume e capacidade, os professores regentes iriam ministrar aula sobre os conteúdos de volume e capacidade;

iii) As atividades de FRP sobre volume e capacidade seriam aplicadas no período final das aulas ministradas pelos professores regentes. Essas aulas eram conjugadas e tinham a duração, ao todo, de 1 hora e 30 minutos;

iv) As atividades seriam aplicadas individualmente e cada aluno teria um tempo de, no máximo, 40 minutos para formular e resolver os problemas propostos;

v) Todas as atividades aplicadas pela pesquisadora nas aulas de Matemática contariam com a colaboração dos professores regentes no que concerne à sua presença no momento da FRP pelos alunos.

4.3.1 A aplicação das atividades de FRP

A aplicação das atividades aconteceu ao longo de 3 semanas do período letivo de 2022. A pesquisadora fez o acompanhamento das aulas de resolução de problemas sobre volume e capacidade ministradas pelos professores regentes das turmas, antes da aplicação das atividades em cada turma. Do tempo de duração das aulas de 1 hora e 30 minutos, os alunos tiveram 40 minutos para formular e resolver os problemas propostos.

Na Tabela 4, apresentamos o quantitativo de alunos que realizaram as atividades por turma, bem como por atividade.

Tabela 4 - Quantitativo de alunos por cada atividade proposta

ATIVIDADES PROPOSTAS	**QUANTITATIVO DE ALUNOS QUE FORMULARAM PROBLEMAS POR TURMA**							
	Turma A	**Turma B**	**Turma C**	**Turma D**	**Turma E**	**Turma F**	**Turma G**	**Total**
A partir de uma figura dada, criar um problema.		23	22	20				65
A partir de um problema dado, criar um parecido.	23					20	18	61
A partir de um início dado, continuar o problema.		13	16	11				40
A partir de uma pergunta.	20	23			18			61
A partir de uma resposta dada.					19	20	14	53
A partir de uma sentença matemática.	23			13			17	53
TOTAL DE ATIVIDADES	66	59	38	44	37	40	49	333

Fonte: Autoria própria.

Conforme mencionado, as atividades aplicadas em cada turma foram realizadas ao longo de 3 semanas. Sendo assim, houve variação no quantitativo de alunos de cada turma, por atividades, devido a alguns não estarem presentes no dia da aplicação, ou se recusarem a realizá-las, bem como não conseguirem concluí-las em tempo hábil.

Percebemos ser inviável aplicarmos todas as atividades propostas em todas as turmas, pois isso demandaria um quantitativo muito grande de atividades a serem analisadas. Sendo assim, optamos em aplicar duas ou três atividades em cada turma. Dessa forma, das 7 (sete) turmas que participaram da pesquisa, aplicamos 3 (três) atividades distintas nas turmas (A, B, D e G), e 2 (duas) nas turmas (C, E e F).

Por meio da Tabela 4, podemos também constatar que cada atividade proposta foi aplicada em 3 (três) turmas distintas. Tivemos, em média, um quantitativo de 111 alunos envolvidos nas atividades de FRP, o que corresponde a 72% do total de alunos do C-FMN e, ao todo, foram produzidas 333 atividades, cuja análise e discussão dos resultados serão explicitados no Capítulo 5.

4.3.2 Atividades propostas aos alunos para FRP sobre volume e capacidade

No Quadro 4, apresentamos as seis atividades propostas para a FRP pelos alunos da EAM. Elas foram elaboradas baseadas na estratégia proposta por Boavida (2008), intitulada “aceitando os dados”, sendo do tipo “semiestruturada" (STOYANOVA; ELLERTON, 1996) e tomando também por referência as propostas de Chica (2001). Além disso, compreendemos que essas atividades podem ser indutoras à FRP envolvendo situações do campo conceitual de volume e capacidade (medição, comparação e/ou produção).

Quadro 4 - Atividades propostas para FRP sobre volume e/ou capacidade

Formular um problema…	**Enunciados**
A partir de uma figura.	Escolha uma das figuras, elabore um problema sobre volume e/ou capacidade e resolva-o.   Fonte: Protocolo da pesquisa.
A partir de um problema dado, criar um parecido.	Crie um problema parecido e resolva-o: Na Fragata Niterói[16] existe um reservatório no formato de um paralelepípedo retângulo com 200 cm de comprimento por 150 cm de largura. Após um marinheiro retirar água desse reservatório, a altura da água desceu 0,5 cm. Quantos litros de água foram retirados pelo marinheiro?

[16] Tipo de navio que faz parte da esquadra da Marinha do Brasil.

A partir de um início dado, continuar o problema.	Continue o problema, formule uma pergunta e resolva-o: No paiol de gêneros[17] da EAM, devem ser armazenadas 60 caixas cúbicas em pilhas no formato de paralelepípedos...
A partir de uma pergunta	Crie um problema para a pergunta: Quantos copos de suco a jacubeira[18] moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?
A partir de uma resposta dada.	Crie um problema cuja resposta seja: O reservatório tem capacidade de 6.000 litros
A partir de uma operação / expressão matemática.	Elabore e resolva um problema para a sentença: 10 m x 5 m x 2 m = 100 m^3 e resolva.

Fonte: Autoria própria.

A propósito das atividades propostas no Quadro 4, apresentamos a seguir o detalhamento de cada uma delas de acordo com suas especificidades.

4.3.2.1 A FRP a partir de uma figura

Na formulação de um problema a partir de uma figura, de acordo com Chica (2001), os alunos observam a cena ou imagem e retiram dela alguma ideia que pode gerar uma pergunta. Essa pergunta pode tanto ser respondida através do que se vê na figura quanto através das suposições que o aluno pode fazer a partir do que a cena sugere. Para essa atividade, solicitamos que cada aluno observasse duas figuras e escolhesse uma delas a fim de formular um problema (envolvendo o conceito de volume e/ou capacidade) e resolvê-lo. Escolhemos duas figuras que fazem parte da rotina dos alunos no âmbito da EAM.

A primeira figura é referente a um navio de pedra, denominado “Fragata Pernambuco” (Figura 14), no qual são realizadas algumas atividades marinheiras que simulam a rotina dos alunos quando embarcados nos navios da Esquadra da Marinha do Brasil (após conclusão do C-FMN).

---

[17] Depósito, próprio para armazenar gêneros alimentícios.

[18] Recipiente onde é colocado o refresco.

Figura 14 - Fragata Pernambuco da EAM

Fonte: Protocolo da pesquisa.

Na EAM, a Fragata Pernambuco (Figura 14) foi construída dentro de um fosso de água e simula a ideia de um navio, quando este está navegando em meio líquido. Assim, supomos a FRP envolvendo uma situação de medição com imersão de objetos no estado sólido, no caso, o casco da Fragata Pernambuco no fosso preenchido por água. De acordo com Morais (2013), nas situações de medição:

> Em se tratando de objetos no estado sólido, podem ser favorecidas as estratégias de imersão e de preenchimento e transbordamento. No primeiro caso, o volume de um corpo pode ser calculado observando-se o deslocamento de um líquido após a imersão do objeto a ser medido. Preenchimento e transbordamento consistem observar em um recipiente cheio de líquido a quantidade que transborda após a imersão de um sólido (MORAIS, 2013, p. 47).

A segunda figura é referente a um bebedouro que possui um reservatório interno, na parte superior. O referido bebedouro se encontra instalado na EAM, próximo ao Rancho[19] dos alunos e fornece água potável que é consumida por eles ao longo do dia.

[19] Refeitório

Figura 15 - Bebedouro da EAM

Fonte: Protocolo da pesquisa

Em relação à imagem do bebedouro (Figura 15), consideramos a possibilidade de os alunos formularem problemas envolvendo situações de medição com operacionalização de medidas e/ou transformação de medidas. Como também, no caso da figura da fragata imersa no fosso.

Entendemos que a análise a priori sobre as dificuldades dos alunos na compreensão dos conceitos de volume e capacidade, na formulação de problema, pode ser mais difícil de ser prevista que na resolução de problemas. Haja vista, a possibilidade de os alunos formularem problemas, utilizando-se de regras de ação, bem simples ou mais complexas do que o esperado.

Levando-se em conta a mobilização de diversos conceitos, pelo que enseja as figuras propostas, supomos a ocorrência de dificuldades dos alunos, em relação a mobilização de invariantes operatórios (corretos ou errôneos) em distinguir o cálculo do volume do bebedouro de seu reservatório de água. Assim como a distinção do volume do fosso com ou sem a Fragata Pernambuco imersa neste. Pelo formato geométrico do bebedouro e do fosso no qual está a fragata, supomos também possíveis dificuldades dos alunos em operar com a fórmula do volume de um paralelepípedo.

4.3.2.2 A FRP a partir de "um problema dado, criar um parecido"

Neste tipo de atividade, consideramos o fato que muitas vezes, o professor propõe a FP querendo que o aluno faça um problema parecido no sentido que ele, professor, acha que deve ser parecido; contudo, "nem sempre os alunos têm essa mesma concepção, o que cria um impasse para ambos" (CHICA, 2001, p. 158). Diante disso, explicamos que ao propor esta atividade tomamos como referência um problema presente no livro didático do 2º ano do Ensino Médio (PAIVA, 2010), o qual adaptamos para uma situação do cotidiano marinheiro.

Figura 16 - Problema da coleção Matemática Paiva

Para calcular a capacidade de um jarro de forma irregular, Paulo retirou água de um aquário que tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo e encheu completamente o jarro.
Observando que o fundo do aquário tem 50 cm de comprimento por 30 cm de largura e que, após a retirada, o nível da superfície da água desceu 2 cm, o rapaz concluiu, corretamente, que a capacidade do jarro é:

a) 3 L
b) 0,3 L
c) 2 L
d) 2,8 L
e) 2,7 L

Fonte: Paiva (2010, p. 476).

A atividade que elaboramos, com base na Figura 16 foi a seguinte:

> Crie um problema parecido e resolva-o:
>
> Na Fragata Niterói existe um reservatório no formato de um paralelepípedo retângulo com 200 cm de comprimento por 150 cm de largura. Após um marinheiro retirar água desse reservatório, a altura da água desceu 0,5 cm. Quantos litros de água foram retirados pelo marinheiro?

Diante do exposto, consideramos essencial explicitar nossas expectativas sobre a FRP "a partir de um problema dado, criar um parecido", em relação às situações de volume e/ou capacidade. Como expectativas para a FRP de um problema parecido ao proposto, supomos que os alunos:

- Não se refiram apenas a um reservatório de um navio. Sendo assim, utilizem outros objetos presentes no cotidiano, como: piscina, caixa d'água etc.;
- Utilizem outras formas geométricas para o objeto: cúbica ou cilíndrica;
- Utilizem a ideia de acrescentar uma quantidade de líquido e perguntar sobre o aumento do nível do líquido no reservatório.

De modo geral, consideramos que a FRP a partir de um problema parecido, leve os alunos a contemplar uma situação de medição com transformação de unidades de medidas de volume para capacidade.

4.3.2.3 A FRP a partir de um início dado, continuar o problema

A atividade de FRP a partir de um início dado, continuar o problema foi proposta em torno de:

Continue o problema, formule uma pergunta e resolva-o: *No paiol de gêneros da EAM devem ser armazenadas 60 caixas cúbicas em pilhas no formato de paralelepípedos*...

No que diz respeito à atividade proposta, supramencionada, longe de esgotarmos todas as possibilidades, consideramos ser possível por parte do aluno a FRP de diversas situações de volume.

Em uma perspectiva de situação de produção - a possibilidade de o aluno não atribuir medidas à aresta de uma caixa cúbica e então continuar o problema com a seguinte pergunta: "No paiol de gêneros da EAM, devem ser armazenadas 60 caixas cúbicas em pilhas no formato de paralelepípedos. **Como podemos organizar as caixas?"** Algumas possíveis respostas para formar as pilhas seriam: (60 caixas x 1 caixa x 1 caixa); (20 caixas x 3 caixas x 1 caixa); (30 caixas x 2 caixas x 1 caixa); (5 caixas x 3 caixas x 4 caixas); (6 caixas x 5 caixas x 2 caixas); (10 caixas x 3 caixas x 2 caixas). Haja vista que não impomos condições para representações simbólicas, na FP ou na RP, os alunos poderiam também desenhar as caixas.

De outra forma, tendo em vista, uma situação de comparação, o aluno pode pensar em armazenar as caixas em dois ou três empilhamentos diferentes: "No paiol de gêneros da EAM devem ser armazenadas 60 caixas cúbicas em pilhas no formato de paralelepípedos. Foi armazenada uma pilha com 40 caixas e outra pilha com 20 caixas. Qual é o volume de cada pilha?

Outra possibilidade é a FRP com ênfase em uma situação de medição. O aluno pode atribuir, inicialmente, uma medida à aresta da caixa cúbica e lançar perguntas sobre o volume de cada caixa e/ou o volume das 60 caixas? "No paiol de gêneros da EAM devem ser armazenadas 60 caixas cúbicas em pilhas no formato de paralelepípedos. Cada caixa cúbica possui 10 cm de aresta. Qual o volume em cm^3 de cada caixa? Qual o volume das 60 caixas em cm^3?

4.3.2.4 A FRP a partir de uma pergunta

Para este tipo de atividade, levamos em conta que "a pergunta pode ser proposta segundo o objetivo do professor em querer ressaltar uma operação, destacar palavras específicas da linguagem matemática, propiciar o surgimento de problemas mais abertos etc." (CHICA, 2001, p. 164). Sendo assim, propomos:

"Crie um problema para a pergunta: Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga? E, resolva-o".

Destacamos que o objeto físico "jacubeira" faz parte do cotidiano dos alunos da EAM, nela é armazenado o suco que é servido nas refeições deles.

Na atividade proposta de FRP a partir de uma pergunta, temos em cena uma situação de comparação de medidas do volume/capacidade maior/menor das jacubeiras moderna e antiga. Esta nos remete a dois fatores essenciais na compreensão dos conceitos de volume e capacidade: a unidimensionalidade e a tridimensionalidade.

Com base em Melo (2018, p. 33) "a passagem de uma concepção unidimensional de volume para uma tridimensional está relacionada com a passagem do campo das estruturas aditivas para o campo das estruturas multiplicativas". Em uma perspectiva unidimensional, levando-se em conta o campo das estruturas aditivas, nas situações de comparação é possível comparar duas quantidades – denominadas referente e referido – existindo sempre uma relação entre elas (MAGINA *et al*., 2001). No nosso caso, a pergunta do problema fornecida ao aluno trata-se de uma situação de comparação positiva com a relação desconhecida. Pois, a medida da jacubeira moderna é apontada em relação à medida da jacubeira antiga (a jacubeira moderna fornece mais copos de suco do que a antiga). Assim, a medida da jacubeira antiga é a referência (o referente) para se obter a medida da jacubeira moderna que, neste caso, é o referido.

Figura 17 - Comparação das jacubeiras

Fonte: Autoria própria.

Em virtude do exposto na Figura 17, é possível na FRP, o aluno indicar a medida (quantidade de copos) da jacubeira antiga, a medida da jacubeira moderna (maior do que a antiga) para fazer jus à pergunta: Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?

Quantidade de copos da jacubeira antiga + "**?**" = quantidade de copos da jacubeira moderna.

Vale ressaltar que o copo pode ser compreendido como uma unidade de medida (não convencional). Nesta situação, não expomos nenhum tipo de medida do Sistema Métrico Decimal (SMD), deixando livre ao aluno apresentá-la. Podendo esse, atribuir medidas ao copo ou não. Para o objeto físico "copo" não foi indicado o seu formato.

Segundo Leão (2020), a diferença entre o volume e a capacidade em seus aspectos dimensionais pode ser de difícil compreensão pelos alunos. Ela explica:

> O tratamento da grandeza volume pode ser tridimensional, quando referente às três dimensões de certo objeto, como pode ser unidimensional ao tratar de líquidos ou de contagem linear. A capacidade pode ser vista linearmente também ao ser associada ao produto das arestas e unidimensional quando trata das unidades de medida lineares (LEÃO, 2020, p.83).

Ainda em uma perspectiva unidimensional, consideramos que o aluno pode por meio da atividade proposta para FRP indicar a medida (em l ou ml) da jacubeira antiga e da jacubeira moderna e a de um copo (em l ou ml). Neste caso, enfatizando situações de medição: transformação de unidades de operacionalização de medidas, seguir os passos:

1. Dividir a capacidade (em l ou ml) da jacubeira antiga pela capacidade (em l ou ml) do copo para obter a quantidade de copos fornecida por esta;
2. Dividir a capacidade (em l ou ml) da jacubeira moderna pela capacidade (em l ou ml) do copo para obter a quantidade de copos fornecida por esta;
3. Calcular a diferença da quantidade de copos fornecida pela jacubeira moderna e antiga.

Em uma perspectiva tridimensional, vale ressaltar que a jacubeira se refere ao objeto geométrico “paralelepípedo retângulo”. Nesta direção, o aluno na FRP pode atribuir medidas às dimensões das jacubeiras e se utilizar da fórmula do volume de um paralelepípedo para calcular a capacidade de cada uma. “Já que a capacidade também é volume em certa circunstância” (LEÃO, 2020, p. 83).

4.3.2.5 A FRP a partir de uma resposta

Neste tipo de atividade, concordamos com Chica (2001, p.166) ao afirmar que “é bastante diferente pensar em escrever um problema no qual a resposta seja um número ou toda uma frase”. Pois isto, depende da intencionalidade do professor. No nosso caso, propomos a FRP a partir da seguinte frase:

Formule e resolva um problema cuja resposta seja: O reservatório tem capacidade de 6.000 litros.

Na proposta desta atividade, levamos em conta algumas discussões sobre a grandeza capacidade (LEÃO, 2020; LIMA; BELLEMAIN, 2010), ao nos referirmos aos conceitos de volume e capacidade que são a mesma grandeza, em contextos diferentes. Realçamos no quadro geométrico "os recipientes". No quadro das grandezas, a classe de equivalência dos recipientes cuja capacidade é a mesma e no quadro numérico, o valor numérico pertencente ao conjunto dos reais positivos dado à capacidade de certo recipiente.

Do ponto de vista do quadro geométrico, salientamos que na atividade "Formule e resolva um problema cuja resposta seja: O reservatório tem capacidade de 6.000 litros" - consideramos que o reservatório pode ser relacionado a diferentes objetos físicos pelos alunos. Pois diferentes sólidos geométricos podem ter o mesmo volume, ou seja, podem ocupar "o mesmo tanto de espaço".

Segundo Melo (2018, p. 33) "a passagem de uma concepção unidimensional de volume para uma tridimensional está relacionada com a passagem do campo das estruturas aditivas para o campo das estruturas multiplicativas". Diante disso, compreendemos que os alunos poderiam, por exemplo, FRP a partir de uma resposta, em torno de uma situação de comparação, cuja pergunta fosse voltada para o cálculo da diferença da capacidade de um reservatório para outro a fim de obter a resposta "o reservatório tem capacidade de 6.000 litros".

De outra forma, a transição de uma concepção unidimensional para a concepção tridimensional ocorre, por exemplo, por meio da construção da fórmula do volume do paralelepípedo e da articulação das propriedades de outras grandezas (comprimento e área). Nesse caso, o aluno pode calcular o volume de um paralelepípedo e desenvolver uma situação de transformação de unidades para obter a resposta "o reservatório tem capacidade de 6.000 litros".

4.3.2.6 A FRP a partir de uma sentença matemática

Neste tipo de proposta de FP, vislumbramos além da elaboração do texto do problema, “verificar se os alunos compreendem as ideias matemáticas relacionadas à operação” (CHICA, 2001, p.168). No nosso caso, propomos a FRP a partir de uma sentença matemática em torno de uma situação de medição de volume - ou seja, com ênfase sobre a fórmula utilizada para o cálculo do volume de um paralelepípedo:

Formule e resolva um problema para a sentença: 10 m x 5 m x 2 m = 100 m^3.

Consideramos que ao propor a atividade “Formule e resolva um problema para a sentença: 10 m x 5 m x 2 m = 100 m^3”, pomos em evidência, inicialmente, a passagem do campo das grandezas para o geométrico. Pois o aluno deve identificar que o objeto geométrico é um paralelepípedo a partir do aspecto da tridimensionalidade de suas dimensões. Ademais, a medida "100 m^3", retrata a grandeza volume, cabendo ao aluno assim identificá-la. A medida 100 m^3 é o resultado de uma multiplicação de medidas, isto é, o aluno tem diante si uma situação de operacionalização de medidas.

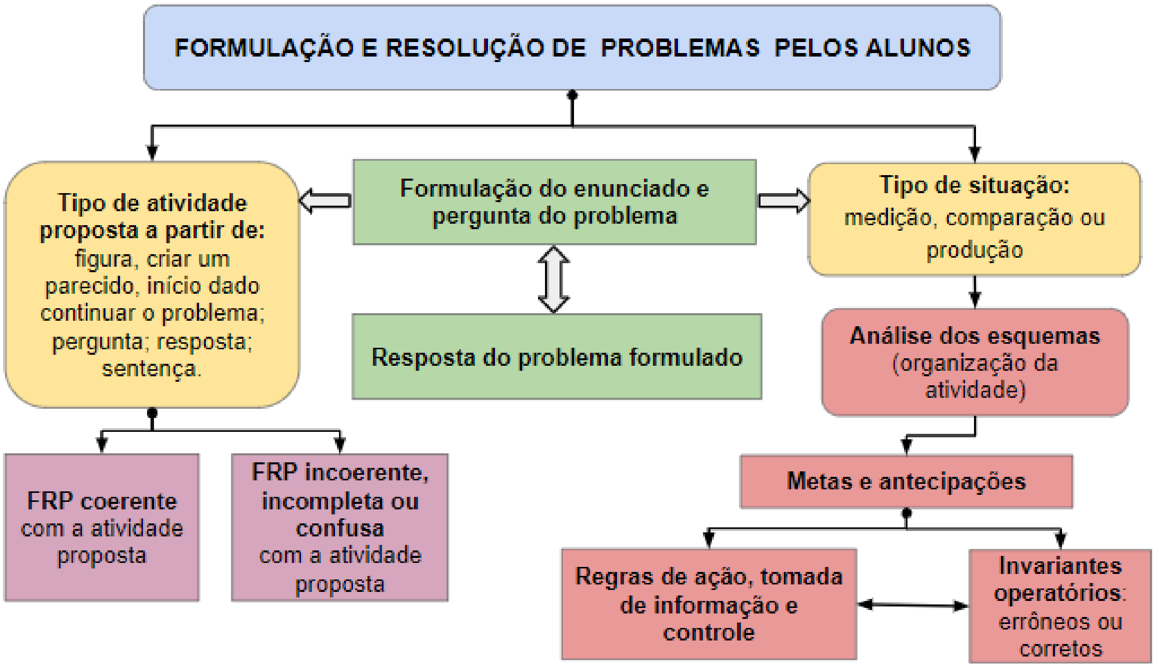
Além disso, consideramos alguns possíveis entraves na resolução dos problemas formulados pelos alunos a partir da sentença matemática, tais como: “uso inadequado de unidades ou ausência do uso de unidades, desconhecimento da fórmula, dificuldade na identificação das medidas a serem utilizadas no cálculo, dificuldades no cálculo numérico” (FIGUEIREDO, 2013, p.40).

Supomos assim, a ocorrência de respostas sem a unidade de medida ou com unidade de medida de área (m^2), ou de comprimento (m), indicando que não há passagem do quadro numérico para o quadro das grandezas. O aluno pode ter dificuldade em visualizar um paralelepípedo retângulo, o que mostra dificuldades em relação ao quadro geométrico. Desta forma, o aluno também não compreenderá volume como uma grandeza geométrica. Isto é, pode apresentar uma concepção de volume-número, como já foi dito, quando o volume é visto como um número obtido por uma fórmula, sem qualquer relação com a grandeza (ANWANDTER-CUELLAR, 2013).

4.4 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DOS DADOS

Na Figura 18, apresentamos um panorama de como procedemos a análise da FRP envolvendo os conceitos de volume e capacidade, levando em conta os tipos de atividades propostas e os elementos da TCC.

Figura 18 - Procedimentos de análise da FRP de volume e capacidade



Fonte: Autoria própria.

Após a leitura dos problemas, organizamos a FRP como coerente ou incoerente, incompleta ou confusa (Figura 18). Em particular, para os casos de FRP a partir de uma figura, um problema parecido, um início dado e sentença, observamos as seguintes questões: A pergunta elaborada pelo aluno está de acordo com os dados fornecidos no enunciado do problema? A resposta do problema está de acordo com a pergunta formulada pelo aluno?

Na **FRP a partir da figura** estabelecemos outros critérios como:

- Identificação e quantificação dos problemas formulados a partir da figura do bebedouro daqueles da figura da Fragata Pernambuco. Consideramos assim, a utilização no contexto do problema, menção à figura do bebedouro ou à Fragata Pernambuco;

- No caso da figura da fragata, em especial, consideramos a FRP em torno do conceito de imersão.

Para **FRP a partir de um problema dado, criar um parecido** - buscamos analisar, essencialmente, quais elementos do problema formulado foi parecido quanto ao problema dado; tais como: forma geométrica do objeto e ideia de acrescentar ou retirar uma quantidade de líquido e perguntar sobre o aumento ou diminuição do nível do líquido no reservatório.

Para **FRP a partir de um início dado, continuar o problema** - apresentamos uma parte inicial do texto do problema, cujo enunciado foi: *No paiol de gêneros da EAM devem ser armazenadas 60 caixas cúbicas em pilhas no formato de paralelepípedos*…E, analisamos outros dados acrescentados pelo aluno e a pergunta e a resposta apresentada por ele em coerência ou incoerência com o início proposto.

Sobre a FRP a partir da sentença - consideramos importante o aluno utilizar os dados “10 m x 5 m x 2 m = 100 m^3”. Isto é, propondo a resposta do problema igual a “100 m^3” ou que ele tenha utilizado parcialmente a sentença, formulando um problema em torno de descobrir uma das dimensões do paralelepípedo.

Em especial, para a **FRP a partir de uma resposta e a partir de uma pergunta,** voltamos nosso olhar para: O enunciado do problema e pergunta elaborada pelo aluno está de acordo com **a resposta fornecida** (o reservatório tem capacidade de 6.000 litros) pela pesquisadora? O aluno construiu o enunciado do problema e a resposta deste, coerente ou incoerente com **a pergunta fornecida** (Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?) pela pesquisadora?

No que diz respeito ao quadro teórico-metodológico da TCC, ressaltamos a advertência de Samurçay e Vergnaud (2000) acerca da identificação das classes de situações e das formas de organização da atividade (esquemas) que sejam bastante estáveis, para que seja possível circunscrever a análise destas.

> É impossível, salvo exceção, definir as classes de situações rigorosamente delimitadas, como também é impossível analisar os esquemas em todos os seus componentes. Também o mais importante parece que é de se interessar às características mais determinantes, aquelas que permitem de fazer a diferença entre uma classe de situações e uma outra, e entre um esquema e outro para a mesma classe de situações (SAMURÇAY; VERGNAUD, 2000, p. 59, tradução nossa)[20].

Assim, buscamos identificar, de modo geral, os elementos indispensáveis para caracterizar o conteúdo dos esquemas na FRP pelos alunos, a saber:

- **A identificação e análise dos tipos de situações**

A partir da análise prévia do tipo de atividade proposta para FRP e da leitura dos problemas formulados pelos alunos, buscamos identificar os tipos de situações de volume e capacidade presentes nestes. Para tanto, nos baseamos nas situações já identificadas na revisão de literatura: medição, comparação e/ou produção (FIGUEIREDO, 2013; MORAIS, 2013; MELO, 2018).

- **A identificação e análise das regras de ação, tomada de informação e controle.**

Após a leitura minuciosa de cada problema formulado, buscamos identificar a sequência dos dados apresentados no enunciado e na pergunta do problema referente ao tipo de situação de volume e capacidade. Recorremos à análise da resolução dos problemas a fim de identificarmos os elementos implícitos na FP. Por fim, distinguimos os elementos similares e diferentes nas regras de ação na FRP dos alunos e agrupamos aqueles mais frequentes.

A propósito dos casos particulares de FRP incoerente, incompleta ou confusa, detemo-nos a analisar apenas as dificuldades apresentadas pelos alunos em cada tipo de atividade proposta à FRP.

---

[20] Il est impossible, sauf exception, de définir des classes de situations rigoureusement délimitées, de même qu'il est impossible d'analyser les schèmes dans toutes leurs composantes. Aussi le plus important semble-t-il est de s'intéresser aux caractéristiques les plus déterminantes, celles qui permettent de faire la différence entre une classe de situations et une autre, et entre un schème et un autre pour la même classe de situations (SAMURÇAY; VERGNAUD, 2000, p. 59).

- **A identificação e análise dos invariantes operatórios**

Compreendemos que uma situação sempre envolve mais que um único conceito. E, que a confiabilidade do sujeito presente na mobilização do esquema está baseada no conhecimento que ele possui, explícito ou implícito e das características do problema a resolver. Diante disso, conduzimos uma leitura minuciosa de cada problema formulado, sendo alguns deles possíveis de identificar os conhecimentos mobilizados logo no enunciado do problema e outros na resolução dos problemas formulados. Neste processo, a identificação de teoremas em ação e conceitos em ação corretos ou errôneos referentes ao campo conceitual de volume e capacidade, foram tomados por base, para verificar a FRP coerente ou incoerente, incompleta ou confusa em cada tipo de atividade proposta. Assim como eventuais representações simbólicas utilizadas pelos alunos.

Na apresentação dos resultados, nos quadros descritivos dos tipos de FRP mais frequentes dos alunos, colocamos de forma sublinhada o que inferimos da resolução dos problemas por eles.

Diante do que apresentamos neste capítulo e naqueles precedentes, apresentamos a seguir os resultados obtidos nesta pesquisa com o objetivo de analisar a formulação e resolução de problemas sobre volume e capacidade, por alunos egressos do Ensino Médio, à luz da Teoria dos Campos Conceituais.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO SOBRE A FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE VOLUME E CAPACIDADE PELOS ALUNOS DA EAM

Apresentamos, neste capítulo, a análise e discussão sobre a Formulação e Resolução de Problemas (FRP) acerca dos conceitos de volume e capacidade elaborados pelos alunos da EAM.

Sequencialmente, explanamos sobre a FRP a partir de: uma figura; um problema dado, criar um parecido; um início dado, continuar o problema; uma pergunta; uma resposta e uma sentença matemática. Para cada proposta de atividade fizemos a análise em torno das questões: Quais são as similaridades e diferenças apresentadas pelos alunos na FRP de volume e/ou capacidade? Para quais tipos de atividades de FRP de volume e/ou capacidade os alunos apresentam maior ou menor dificuldade? Quais invariantes operatórios são mais recorrentes na FRP de volume e/ou capacidade?

5.1 A FRP A PARTIR DE UMA FIGURA

Relembramos que para a FRP a partir de uma figura propomos: ***Escolha uma das figuras, formule um problema sobre volume e/ou capacidade e resolva-o.*** Neste caso, os problemas foram formulados e resolvidos por 23 alunos (da turma B), 22 alunos (da turma C) e 20 alunos (da turma D). Na Figura 19, retomamos as imagens fornecidas aos alunos para FRP.

Figura 19 - FRP a partir das figuras do bebedouro e da fragata

Fonte: Protocolo da pesquisa.

De forma geral, dos 65 alunos que participaram desta atividade, 47 deles escolheram a figura do bebedouro e 18 a da fragata. Para nós, este resultado revela o quanto a escolha da figura, por parte do professor, pode influenciar na FRP pelos alunos. Nessa direção, concordamos com Lima e Bellemain (2010) ao afirmarem que no estudo da geometria e das grandezas geométricas é preciso

> Valorizar bastante as experiências de visualização e de manipulação de objetos do mundo físico como as atividades que envolvem desenhos ou imagens. Por meio dessas experiências e atividades, os alunos podem descobrir e compreender melhor as propriedades dos objetos físicos e as relações que existem entre eles (LIMA; BELLEMAIN, 2010, p.171).

No caso da figura do bebedouro, 40 dos 47 alunos, realizaram a FRP de forma correta ou razoavelmente aceitável (com alguns deslizes conceituais). Para figura da Fragata Pernambuco, este fato ocorreu apenas na FRP de 2 dos 18 alunos. Relembramos que as figuras do bebedouro e da fragata fazem parte do dia a dia dos alunos da EAM. Contudo, a FRP e a natureza das situações envolvendo o conceito de volume e/ ou capacidade apresentaram notadamente um grau de dificuldade maior de uma figura para a outra. Sobre isso, ponderamos que

> Para que qualquer campo conceitual seja dominado por um indivíduo, faz-se necessário a passagem e muitos anos, durante os quais é preciso que esse indivíduo interaja com inúmeras situações – por meio da aprendizagem escolar e pela sua própria experiência, fora do contexto escolar – as quais lhes permitirá o desenvolvimento de esquemas para lidar com essas situações (MAGINA *et al.*, 2001, p.18-19).

Embora não tenhamos à priori imaginado tal disparidade entre a FRP a partir das figuras propostas. Diante dos resultados, cremos ser possível que nas experiências vivenciadas pelos alunos, a imagem do bebedouro os remeta a situações de maior familiaridade, ou seja, relativas à resolução de problemas em outros contextos escolares. Sendo, aparentemente, mais viáveis à FRP por eles.

Para melhor compreensão sobre os desdobramentos da FRP a partir dessas figuras, refinamos a análise sobre a FRP com a imagem do bebedouro (tópico 5.1.1); as dificuldades diagnosticadas sobre esta (tópico 5.1.2) e posteriormente, a FRP com a figura da Fragata Pernambuco (tópico 5.1.3).

5.1.1 Análise e discussão da FRP a partir da figura do bebedouro

Sobre a FRP desta atividade, do total de 40 alunos que escolheram a figura do bebedouro, e formularam de maneira coerente, chamou-nos a atenção o fato de 33 dos 40 alunos não terem diferenciado o volume do bebedouro do seu reservatório interno. Além disso, considerando as medidas atribuídas às dimensões desses objetos, percebemos que 21 dos 40 alunos apresentaram distorções quanto ao seu tamanho real (ex.: 10 cm de largura) e 12 cometeram distorções quanto à medida da capacidade do objeto (ex.: 1 m^3), como apresentamos na Tabela 5.

Tabela 5 - Quantitativo de problemas formulados a partir da figura do bebedouro que atribuíram medidas às suas dimensões ou sua capacidade

Apresentação do objeto bebedouro	**Medidas atribuídas às dimensões do bebedouro**		**Medidas atribuídas a capacidade do bebedouro**	
	próximas das dimensões reais	**não próximas das dimensões reais**	**próximas da medida real**	**não próximas da medida real**
não diferencia o volume do bebedouro do seu reservatório interno	3	17	3	10
diferencia o volume do bebedouro do seu reservatório interno	1	4	0	2
Total	4	21	3	12

Fonte: Autoria própria.

Os dados apresentados na Tabela 5 revelam dificuldades dos alunos em formularem problemas com medidas próximas à real, embora o objeto bebedouro seja manipulado por eles no cotidiano, como foi comentado no capítulo anterior (item 4.3.2.1), pois fornece água potável para eles no dia a dia da EAM.

No Quadro 5, a seguir, expomos as metas, as RA e IO relacionados às Situações (S) apresentadas por 10 dos 40 alunos. Sendo estas, as de maior frequência quanto às similaridades identificadas na FRP a partir da figura do bebedouro (Apêndice A).

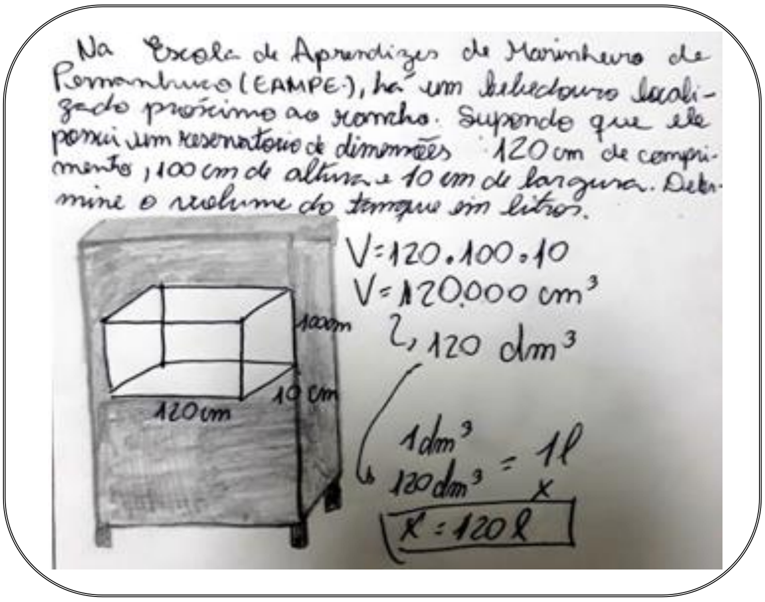
Quadro 5 - Componentes da organização invariante da FRP a partir da figura do bebedouro - 1º mais frequente (10 alunos)

Situações (S) Situação de medição - Situação de transformação de unidades.
Metas e antecipações: Formular e resolver um problema a partir da figura de um bebedouro.
Regras de ação (RA) Apresentação do objeto: bebedouro ou reservatório do bebedouro. Apresentação das dimensões do objeto em m, cm ou mm (para cálculo do volume e posterior conversão de unidades de medida para litros) ou da capacidade em litros (para posterior conversão de litros para m^3). **Pergunta:** Qual o volume em m^3 ou a capacidade em litros do bebedouro?
Invariantes operatórios (IO) Reconhecimento do bebedouro ou de seu reservatório como uma figura tridimensional: o paralelepípedo. Distinção (ou não) entre volume do reservatório interno e volume do bebedouro. Atribuição de medidas às dimensões do objeto (coerentes ou não com dados reais). Uso da fórmula para calcular o volume de um paralelepípedo. Conversão de unidades de medidas de volume para capacidade ou de capacidade para volume.

Fonte: Autoria própria.

Sobre o exposto no Quadro 5, exemplificamos a FRP do aluno C17. Ele enfatiza a partir do que desenha (Figura 20), o reservatório interno do bebedouro (identificado como tanque), mobilizando o teorema em ação: o volume do reservatório interno do bebedouro é diferente do volume do bebedouro.

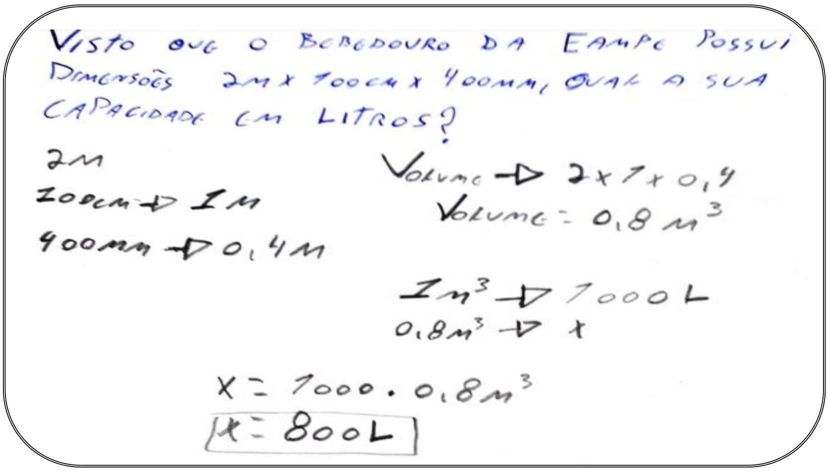
Figura 20 - FRP pelo C17 - A partir da figura do bebedouro



Fonte: Protocolo do aluno C17.

Diferentemente, o aluno B24 (Figura 21) mobilizou o teorema em ação: o volume do reservatório interno do bebedouro é idêntico ao volume do bebedouro, ao propor como pergunta do problema: Qual a capacidade em litros do bebedouro?

Figura 21 - FRP pelo B24 - A partir da figura do bebedouro


VISTO QUE O BEBEDOURO DA EAMPE POSSUI DIMENSÕES 2M X 100CM X 400MM, QUAL A SUA CAPACIDADE EM LITROS?

2M
100CM → 1M
400MM → 0,4M

VOLUME → 2 x 1 x 0,4
VOLUME = 0,8 m^3

1m^3 → 1000 L
0,8m^3 → x

x = 1000 . 0,8m^3
x = 800L

Fonte: Protocolo do aluno B24.

Nos exemplos apresentados sobre os alunos C17 e B24 destacamos a incoerência nas medidas atribuídas à largura do reservatório do bebedouro e de uma de suas dimensões quanto ao tamanho real, pois, dificilmente, temos a medida da largura desse objeto com 10 cm (Figura 20) ou uma das dimensões com medida 2 m (Figura 21). Particularmente, esta incoerência, quanto ao tamanho real dos objetos, ocorreu na FRP de 9, dos 10 alunos que apresentaram as RA e IO indicados no Quadro 5.

Diante do exposto, entendemos que convém um olhar atento para a FRP dos alunos, visto que embora eles possam apresentar uma boa articulação entre dados e pergunta do problema e não cometerem erros na resolução, alguns deslizes sobre os conceitos de volume e capacidade comprometem a qualidade e pertinência do problema formulado. Dizemos isto diante da sensação de uma manipulação de medidas aleatórias ou fictícias que se distanciam da realidade, como vimos, nos exemplos quanto às medidas das dimensões do reservatório ou do bebedouro apresentadas pelos alunos C17 e B24 (Figuras 20 e 21).

Outro fato diz respeito à diversidade de unidades de medidas apresentadas, em torno das situações de transformação de unidades. Assim, podemos observar as medidas atribuídas pelo aluno B24 (Figura 21) às dimensões do bebedouro: 2m x 100 cm x 400 mm, para serem convertidas em m, para posterior, conversão de m^3 para litros. Tal FRP suscita-nos uma reflexão em aberto, sobre o que leva um aluno a utilizar a medida da dimensão do objeto em mm. Sem pretensão de resposta a esta questão, seria por consequência de suas experiências na resolução de problemas, no contexto escolar? Por fim, realçamos a concepção de volume-número (ANWANDTER-CUELLAR, 2013), sobre os alunos operarem na RP com os números (ex.: 2 x 1 x 0.4 ou 120 x 100 x 10), desconsiderando as unidades de medidas.

De outra forma, no Quadro 6, apresentamos as metas, RA, IO e S na análise de outra organização da atividade de FRP a partir da figura do bebedouro. Esta atividade foi realizada por 8 dos 40 alunos, sendo o 2º caso mais frequente de FRP com características similares.

Quadro 6 - Componentes da organização invariante da FRP a partir da figura do bebedouro - 2º mais frequente (8 alunos)

Situações (S) Situações de medição - operacionalização de medidas e transformação de unidades.
Metas e antecipações: Formular e resolver um problema a partir da figura de um bebedouro.
Regras de ação (RA) Apresentação do objeto: bebedouro ou reservatório do bebedouro. Apresentação do volume do bebedouro em dm^3 ou da capacidade em litros. Apresentação de uma fração da capacidade total do bebedouro. Cálculo da quantidade de litros referente à fração. Subtração de uma fração de litros da capacidade total. **Pergunta**: Quantos litros ou mililitros correspondem (sobram ou faltam) à fração da capacidade total?
Invariantes operatórios (IO) Reconhecimento do bebedouro ou de seu reservatório como uma figura tridimensional: o paralelepípedo. Conversão de unidades de medidas de volume para capacidade. Tornar homogêneas as unidades de medidas de capacidade para subtrair uma medida de outra. Aplicação do significado de fração como operador multiplicativo.

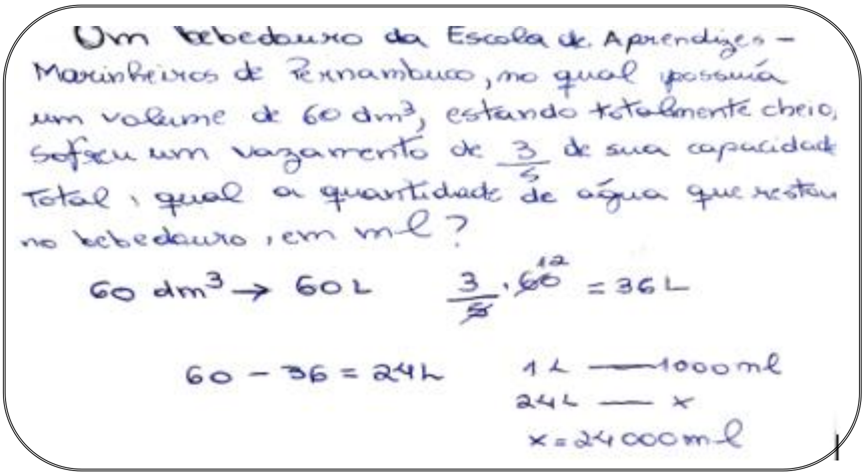
Fonte: Autoria própria.

O tipo de FRP (Quadro 6), sobretudo, é diferenciado em relação ao anterior (Quadro 5), devido ao enfoque dado ao conceito de fração como operador multiplicativo que tem por característica:

> O papel de transformação, isto é, a representação de uma ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor nesse processo. Conceber a fração como um operador multiplicativo é admitir que a fração a/b funciona em quantidades contínuas como uma máquina que reduz ou amplia essa quantidade no processo (MERLINI, 2005, p.31).

No caso da FRP pelo aluno D07 (Figura 22), podemos perceber como se fez marcante o uso do significado de fração como operador multiplicativo.

Figura 22 - FRP pelo D07 - A partir da figura do bebedouro


Um bebedouro da Escola de Aprendizes -
Marinheiros de Pernambuco, no qual possuía
um volume de 60 dm³, estando totalmente cheio,
sofreu um vazamento de $\frac{3}{5}$ de sua capacidade
total, qual a quantidade de água que restou
no bebedouro, em ml?

$60\ dm^3 \rightarrow 60\ L \qquad \frac{3}{\cancel{5}} \cdot \cancel{60}^{12} = 36\ L$

$60 - 36 = 24\ L \qquad 1\ L — 1000\ ml$

$24\ L — x$

$x = 24000\ ml$

Fonte: Protocolo do aluno D07.

No exemplo da Figura 22, o aluno D07 utiliza o teorema em ação: para calcular a quantidade de litros que sobrou é necessário inicialmente calcular a fração da quantidade de litros que vazou. Observamos que a fração 3/5 é o operador multiplicativo (escalar), que aplicado à quantidade total de litros (60 l) obtém o que vazou da capacidade (36 l). Sobre a situação de transformação de unidades em tela, sobre a FRP do aluno D07, sublinhamos o teorema em ação: 1 dm^3 é igual a 1l. Contudo, o aluno sente a necessidade de converter o resultado de litros para ml, representando tal conversão por meio do conceito de proporção. O que nos parece que a primeira conversão é mais usual para ele do que a segunda. Sobre a situação de operacionalização de medidas, observamos também em cena a concepção volume-número (60 - 36 e 3/5 x 60).

Na análise de outra organização da atividade de FRP a partir da figura do bebedouro (Quadro 7), constatamos um enfoque no conceito de porcentagem. Esta atividade foi realizada por 5 dos 40 alunos.

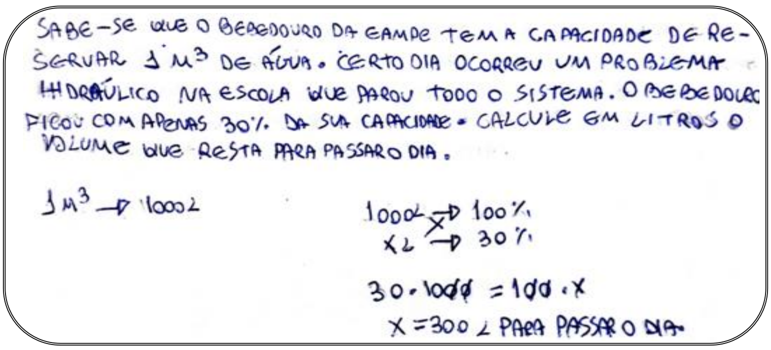
Quadro 7 - Componentes da organização invariante da FRP a partir da figura do bebedouro - 3º mais frequente (5 alunos)

Situações (S) Situações de medição - operacionalização de medidas e transformação de unidades.
Metas e antecipações: Formular e resolver um problema a partir da figura de um bebedouro.
Regras de ação (RA) Apresentação do objeto: bebedouro ou reservatório do bebedouro. Apresentação das dimensões do objeto em m, dm ou cm (para posterior cálculo do volume) ou apresentação do volume em m^3. Apresentação de uma porcentagem do volume total do bebedouro. Transformação de unidades de cm^3, dm^3 e m^3 para litros. Cálculo da quantidade de litros, mililitros ou dm^3 referente à porcentagem do volume total. Subtração da quantidade de um percentual de litros da capacidade total. **Pergunta**: Quantos litros, mL ou dm^3 correspondem à porcentagem de uma parte da capacidade total (resta ou falta)?
Invariantes operatórios (IO) Reconhecimento do bebedouro ou de seu reservatório como uma figura tridimensional: o paralelepípedo. Uso da fórmula para calcular o volume de um paralelepípedo. Conversão de unidades de medidas de volume para capacidade. Tornar homogêneas as unidades de medidas de capacidade para subtrair uma medida de outra. Cálculo de porcentagem (por regra de três ou por multiplicação seguida de divisão por 100).

Fonte: Autoria própria.

No Quadro 7, a introdução de cálculos de porcentagem na FRP de situações de volume implicou a emergência do teorema em ação: Para calcular a porcentagem é necessário usar regra de três relacionando a capacidade total do bebedouro a 100% e o valor da capacidade que se deseja encontrar (4ª proporcional) relacionada à porcentagem apresentada. Isto ocorreu na FRP de 3 dos 5 alunos que apresentaram as RA e IO indicados no Quadro 7 e encontra-se exemplificado na atividade do aluno B07, na figura abaixo.

Figura 23 - FRP pelo B07 - A partir da figura do bebedouro


SABE-SE QUE O BEBEDOURO DA EAMPE TEM A CAPACIDADE DE RESERVAR 1 M³ DE ÁGUA. CERTO DIA OCORREU UM PROBLEMA HIDRÁULICO NA ESCOLA QUE PAROU TODO O SISTEMA. O BEBEDOURO FICOU COM APENAS 30% DA SUA CAPACIDADE. CALCULE EM LITROS O VOLUME QUE RESTA PARA PASSAR O DIA.

$1 m^3 \rightarrow 1000 L$

$1000 L \rightarrow 100\%$

$X L \rightarrow 30\%$

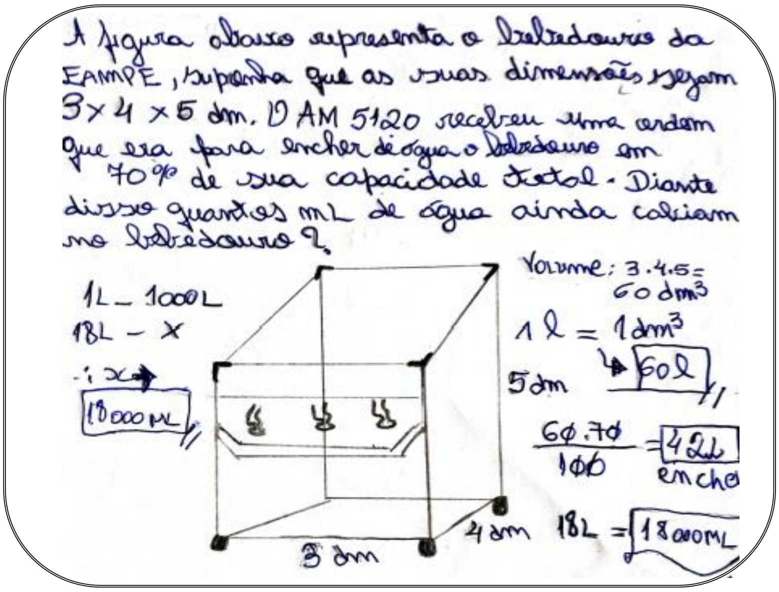
$30 \cdot 1000 = 100 \cdot X$

$X = 300 L$ PARA PASSAR O DIA.

Fonte: Protocolo do aluno B07.

Diferentemente, exemplificamos na Figura 24, como 2 de 5 alunos recorreram à correlação do teorema em ação (para calcular a porcentagem multiplicamos a quantidade total de litros pela porcentagem dada e, em seguida, dividimos o resultado por cem) à representação simbólica (sem aparente utilização de regra de três), ou seja, utilizando: 60.70/100 = 42 l. Esses mesmos alunos, recorreram a conceitos do campo aditivo. Pois, além de calcular a porcentagem de uma parte do volume total, acrescentaram uma situação do campo aditivo do tipo “composição”, que compreende os conceitos de parte e todo, informando o valor do todo e de uma parte e perguntando sobre o valor da outra parte (MAGINA et. al, 2001).

Figura 24 - FRP pelo C04 - A partir da figura do bebedouro



Fonte: Protocolo do aluno C04.

Destacamos, no exemplo do aluno C04 (Figura 24), a omissão de apresentar a unidade de medida “dm” em todas as dimensões do objeto (3 x 4 x 5 dm). Este é um aspecto que podemos constatar de forma mais recorrente na resolução dos problemas, contudo, parece assim, estender-se à formulação de problemas por alguns alunos.

Em relação à atividade de FRP, além do que apresentamos nos Quadros 5, 6 e 7, diagnosticamos outras 12 organizações da atividade de FRP, com similaridades menos frequentes ou como produções particulares que podem ser vistas no Apêndice A. Essencialmente, essas atividades versaram sobre as perguntas:

1. Quantos baldes/copos cabem dentro do bebedouro? (3 alunos)
2. Quanto tempo será necessário para encher ou esvaziar totalmente o

bebedouro? (3 alunos)

3. Quantas vezes os alunos podem encher os copos? (2 alunos)
4. Quantos litros de água sobraram no bebedouro após a retirada de uma quantidade de garrafas d'água? (1 aluno)
5. Qual a quantidade de água escoada no período em que algumas torneiras permaneceram abertas e qual a porcentagem que esse valor representa em relação ao volume total? (1 aluno)
6. Em quantos dias o bebedouro será esvaziado? (1 aluno)
7. Quantos ml foram consumidos por cada aluno? (1 aluno)
8. Quantos ml serão preparados e quanto faltará para completar a capacidade máxima da jacubeira em dm^3? (1 aluno)
9. Qual a altura do bebedouro? (1 aluno)
10. Qual a aresta do pote e quantos foram possíveis encher? (1 aluno)
11. Quanto vale em cm a aresta dessa jacubeira? (1 aluno)
12. Qual a porcentagem de água que restará no bebedouro após o enchimento de todas as garrafas? (1 aluno)

Além do que já apresentamos, no próximo tópico discutimos as FRP a partir da figura do bebedouro dos alunos que a construíram de maneira incoerente, incompleta, confusa e/ou com erros conceituais.

5.1.2 Dificuldades dos alunos na FRP a partir da figura do bebedouro

Na Tabela 6, refinamos as dificuldades identificadas em relação ao processo de FRP a partir da figura do bebedouro.

Tabela 6 - Características das dificuldades na FRP a partir da figura do bebedouro

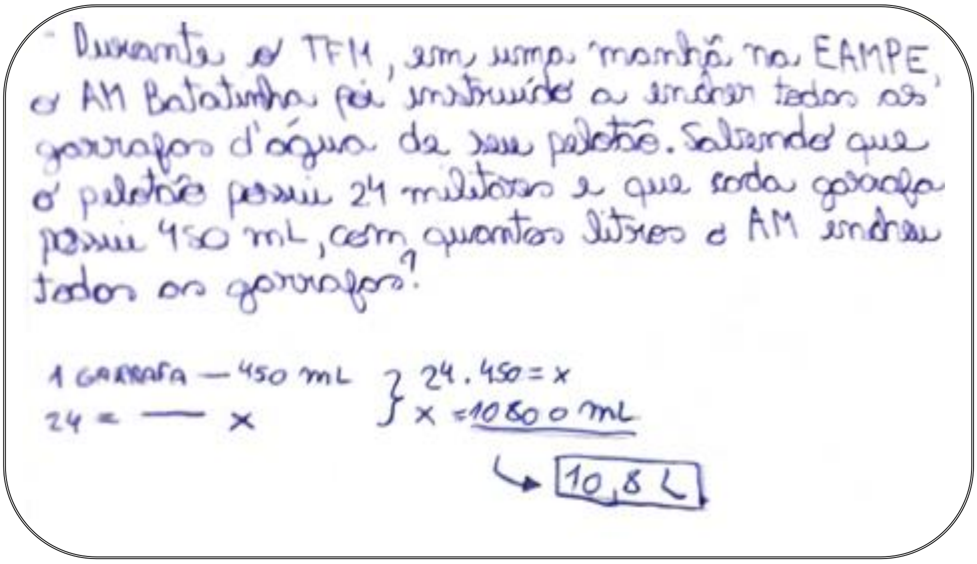
Quantidade de alunos	**Dificuldades identificadas**
3	Não relacionou o problema à figura do bebedouro.
1	Propõe uma pergunta que não condiz com os dados do enunciado do problema.

1	Propõe uma pergunta quando a resposta já se encontrava explícita na apresentação dos dados no enunciado do problema.
1	Propõe uma resposta diferente da esperada na pergunta do problema.
1	Apresentou erro de cálculo numérico na resolução do problema (7.680: 100 = 7,680).

Fonte: Autoria própria.

A ilustração seguinte (Figura 25) retrata o tipo de dificuldade mais incidente apresentada na FRP da figura bebedouro.

Figura 25 - FRP pelo B13 - A partir da figura do bebedouro


Durante o TFM, em uma manhã na EAMPE, o AM Batatinha foi instruído a encher todos os garrafas d'água do seu pelotão. Sabendo que o pelotão possui 24 militares e que cada garrafa possui 450 mL, com quantos litros o AM encheu todos os garrafas?

1 GARRAFA — 450 mL
24 — x

24 . 450 = x
x = 10800 mL

$\boxed{10,8\ L}$

Fonte: Protocolo do aluno B13.

Na FRP do aluno B13 (Figura 25), observamos que embora ele tenha apresentado uma situação relacionada à capacidade (quantidade de litros de água para encher as garrafas) ele não faz referência ao bebedouro na FRP.

De modo mais preciso, no próximo tópico apresentamos a análise em torno da figura da Fragata Pernambuco, que obteve um número maior de FRP incoerentes, incompletas ou confusas.

5.1.3 Análise e discussão da FRP a partir da figura da Fragata Pernambuco

Na FRP, a partir da figura da Fragata Pernambuco, apenas 2 alunos (B05 e B18) conseguiram realizá-la de maneira coerente com a tarefa proposta (Apêndice B). Cada um desses alunos desenvolveu diferentes RA e IO em relação a situações de volume. No Quadro 8, expomos o exemplo individual do B05.

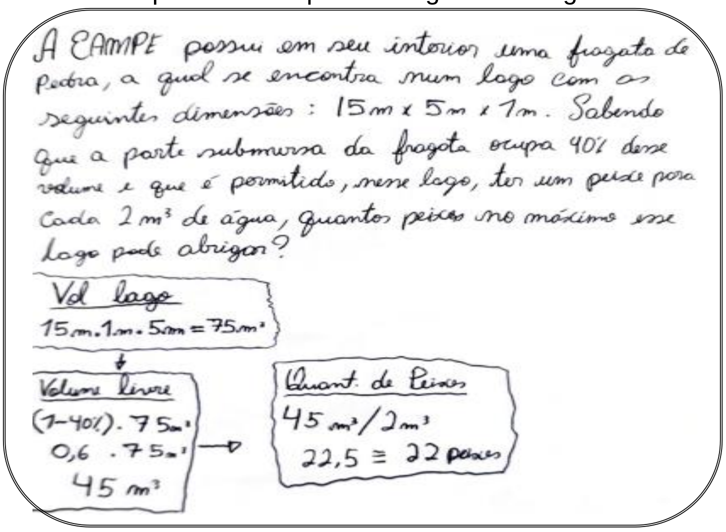
Quadro 8 - Componentes da organização invariante da FRP a partir da figura da Fragata Pernambuco - realizada pelo B05

Situações (S) Situações de medição - operacionalização de medidas e transformação de unidades.
Metas e antecipações: Formular e resolver um problema a partir da figura da Fragata Pernambuco imersa no fosso da EAM.
Regras de ação (RA) Apresentação dos objetos: lago e fragata. Apresentação das dimensões do objeto em m (para calcular o seu volume). Apresentação do percentual de ocupação do volume submerso da fragata no lago (para cálculo da porcentagem de ocupação em relação ao volume do lago). Apresentação da quantidade de peixes por m^3 do volume restante. Divisão do volume útil do lago pelo volume de água que será ocupado por um peixe. **Pergunta:** Quantos peixes no máximo o lago pode conter?
Invariantes operatórios (IO) Reconhecimento do lago como uma figura tridimensional: o paralelepípedo. Uso da fórmula para calcular o volume de um paralelepípedo. Reconhecimento da imersão de objeto sólido em meio líquido. Cálculo da porcentagem por subtração de um inteiro por fração centesimal. Conversão da representação simbólica de fração para número decimal.

Fonte: Autoria própria.

Na FRP apresentada pelo B05 (Figura 26), observamos que esse aluno traz à tona o teorema em ação: a parte imersa da fragata no lago ocupa um percentual do volume do fosso: De forma que os peixes poderiam ocupar apenas o volume restante? Também, chamou-nos a atenção como o B05, apresenta as representações simbólicas no cálculo da porcentagem ao utilizar a subtração de porcentagens indicando um valor na forma decimal e outro com o símbolo % (1 - 40%). Um caso bem particular em relação aos outros alunos.

Figura 26 - FRP pelo B05 - A partir da figura da Fragata Pernambuco


A EAMPE possui em seu interior uma fragata de Pedra, a qual se encontra num lago com as seguintes dimensões: 15m x 5m x 1m. Sabendo que a parte submersa da fragata ocupa 40% desse volume e que é permitido, nesse lago, ter um peixe para cada 2 m³ de água, quantos peixes no máximo esse lago pode abrigar?

Vol lago
15m.1m.5m = 75m³

Volume livre
(1-40%). 75m³
0,6 . 75m³
45 m³

Quant. de Peixes
45 m³/2m³
22,5 ≅ 22 peixes

Fonte: Protocolo do aluno B05.

De forma diferente, apresentamos no Quadro 9 como o aluno B18 buscou formular o problema em torno do conceito de fração.

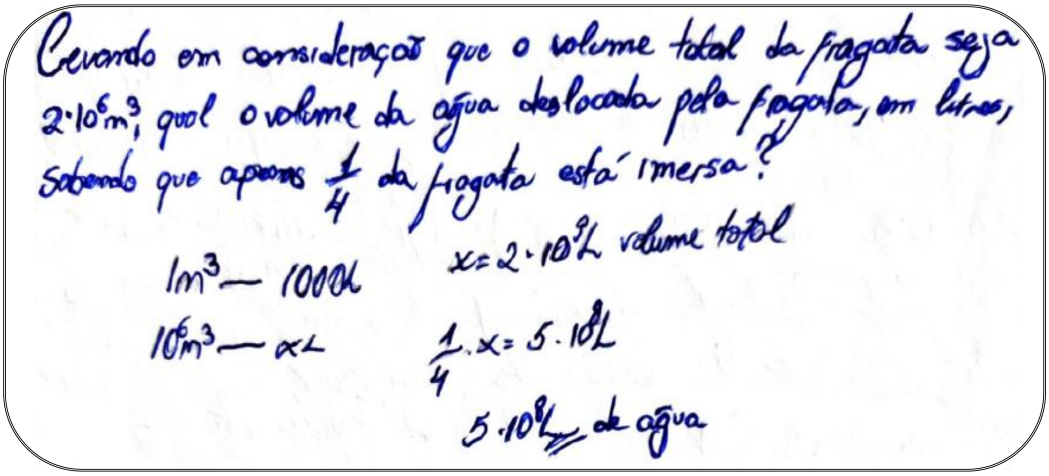
Quadro 9 - Componentes da organização invariante da FRP a partir da Fragata Pernambuco - realizada pelo B18

Situações (S) Situações de medição - operacionalização de medidas e transformação de unidades.
Metas e antecipações: Formular e resolver um problema a partir da figura da Fragata Pernambuco imersa no fosso da EAM.
Regras de ação (RA) Apresentação do objeto: Fragata. Apresentação do volume total do objeto em m^3. Apresentação da fração do volume do objeto que está imerso, para posterior cálculo do volume de água deslocado. Conversão de unidades de m^3 para litros. **Pergunta:** Qual o volume de água deslocado pela Fragata em litros?
Invariantes operatórios (IO) Aplicação da unidade de volume m^3. Reconhecimento da imersão de objeto sólido em meio líquido. Operações com notação científica. Fração com o significado de parte-todo.

Fonte: Autoria própria.

No exemplo do aluno B18, podemos inferir o teorema em ação: o volume de água deslocada pela fragata é igual ao volume da sua parte submersa. Em relação à representação simbólica da FRP do B18 (Figura 27), é notório como ele faz uso da notação científica tanto nos dados do problema (apresentação do volume da fragata) como na resolução (transformação de unidades de volume para capacidade, cálculo da fração e apresentação da resposta).

Figura 27 - FRP pelo B18 - A partir da figura da Fragata Pernambuco


Levando em consideraçaõ que o volume total da fragata seja $2 \cdot 10^6 m^3$, qual o volume da água deslocada pela fragata, em litros, sabendo que apenas $\frac{1}{4}$ da fragata está imersa?

$1m^3 — 1000L$

$10^6 m^3 — xL$

$x = 2 \cdot 10^9 L$ volume total

$\frac{1}{4} \cdot x = 5 \cdot 10^8 L$

$5 \cdot 10^8 L$ de água

Fonte: Protocolo do aluno B18.

Ainda em relação a RP apresentada pelo aluno B18 (Figura 27), compreendemos que no cálculo de 1/4 de 2.10^9, implicitamente, é possível ter sido efetuada a seguinte operação: $1/4 \times 2 \times 10 \times 10^8 = 1/4 \times 20 \times 10^8 = 5 \times 10^8$. Um caso diferenciado em relação às representações simbólicas dos demais alunos, de forma geral, que formularam problemas a partir da figura da fragata.

5.1.4 Dificuldades apresentadas pelos alunos na FRP a partir da figura da Fragata Pernambuco

Em relação ao processo de FRP sobre a figura da Fragata Pernambuco, identificamos que 16 alunos apresentaram as seguintes incoerências.

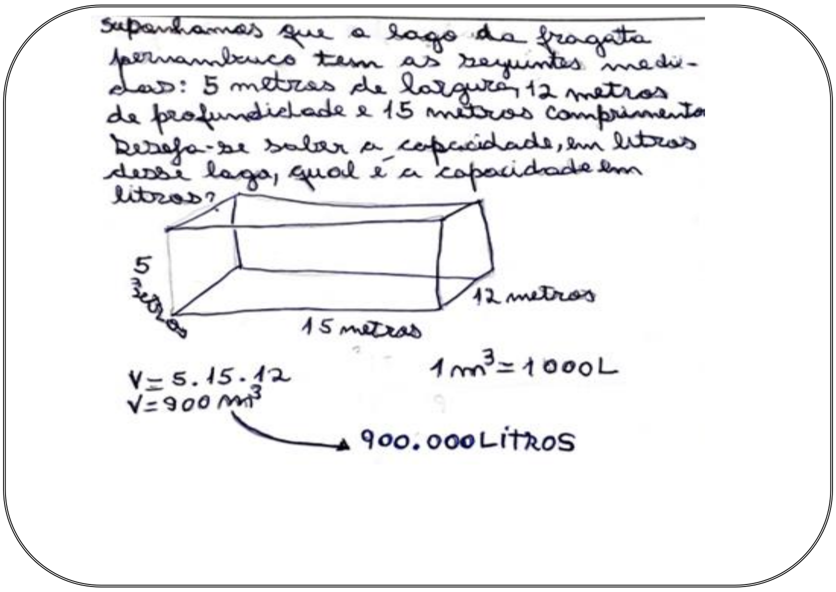
Tabela 7 - Características das dificuldades apresentadas na FRP a partir da figura da Fragata Pernambuco

Quantidade de alunos	Dificuldades identificadas
9	Formulou o problema sem relacionar a figura da fragata com o fosso (lago), em que ela está posta (envolveu apenas fragata, ou apenas fosso).
4	Formulou o problema apresentando erro conceitual (confusão entre o conceito de área e volume) e erro de conversão.
3	Formulou o problema com dados irreais ou texto de difícil compreensão.

Fonte: Autoria própria.

Sobre o exposto na Tabela 7, constatamos que a maioria dos alunos formulou o problema sem relacionar o objeto fragata com o lago. Na Figura 28, temos um exemplo desse tipo de incoerência.

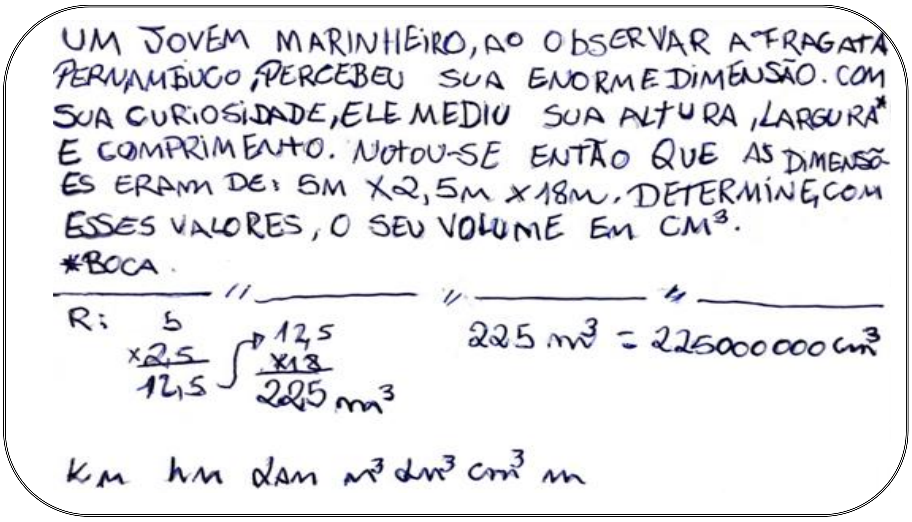
Figura 28 - FRP pelo C16 - A partir da figura da Fragata Pernambuco



Fonte: Protocolo do aluno C16.

Observamos na Figura 28, que o aluno C16 dá ênfase apenas ao lago (a fragata sequer é mencionada). Ele fornece no texto do problema as medidas das dimensões do lago com 5 m de largura, 12 m de profundidade e 15 m de comprimento, porém faz uso de uma representação simbólica contraditória aos dados apresentados, visto que nela atribui 12m à largura, e 5m à profundidade. Apesar dessas discrepâncias, calcula corretamente o volume do lago, utilizando a fórmula do volume de um paralelepípedo, assim também a conversão de unidade de medida de volume para capacidade. Ainda em relação a este mesmo tipo de dificuldade mais recorrente, apresentamos a FRP do aluno D14 (Figura 29).

Figura 29 - FRP pelo D14 - A partir da figura da Fragata Pernambuco

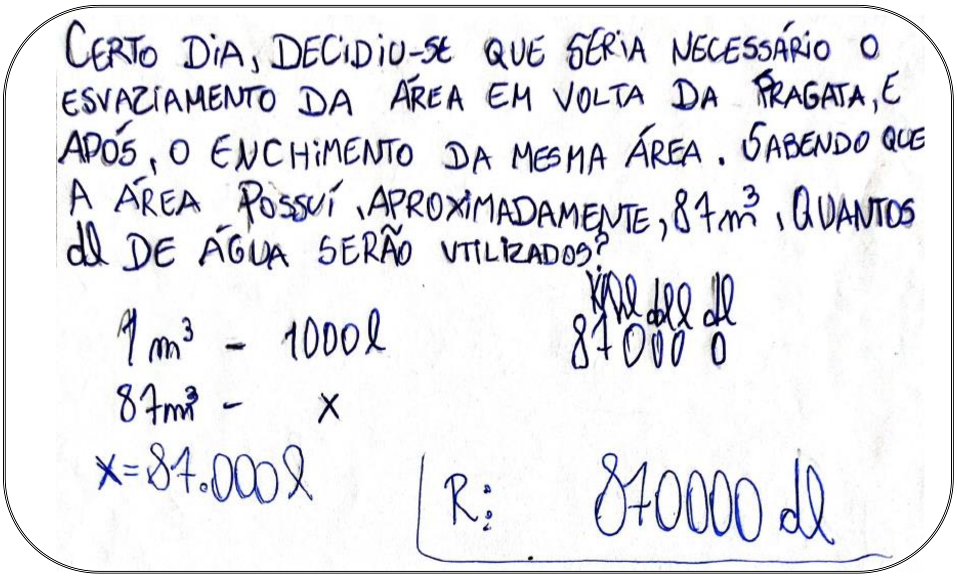


Fonte: Protocolo do aluno D14.

Diferentemente do aluno C16 (Figura 28) que mencionou apenas o lago, o aluno D14 (Figura 29) menciona apenas a fragata. Além disso, ele desconsidera a forma irregular do objeto fragata, tratando-a como se fosse um paralelepípedo, pois fornece as três dimensões e utiliza a fórmula do cálculo do volume de um paralelepípedo para encontrar seu volume. As representações simbólicas utilizadas pelo aluno revelam um domínio do campo multiplicativo, pois efetua as operações de forma implícita. Chamou-nos também a atenção o fato de o aluno D14 solicitar a medida do volume em cm^3 (unidade de medida não usual para um objeto com grandes dimensões), além de representar os múltiplos e submúltiplos das unidades de medidas de volume incompletas representando algumas delas como unidade de medida de comprimento.

Para o outro tipo de incoerência mais frequente, realizada por 4 alunos, no que se refere a erro conceitual, apresentamos como exemplo a FRP do aluno D34.

Figura 30 - FRP pelo D34 - A partir da figura da Fragata Pernambuco


CERTO DIA, DECIDIU-SE QUE SERIA NECESSÁRIO O ESVAZIAMENTO DA ÁREA EM VOLTA DA FRAGATA, E APÓS, O ENCHIMENTO DA MESMA ÁREA. SABENDO QUE A ÁREA POSSUÍ, APROXIMADAMENTE, 87m³, QUANTOS dl DE ÁGUA SERÃO UTILIZADOS?

1 m³ - 1000 l

87m³ - x

x=87.000 l

dal l dl

87000 0

R: 870000 dl

Fonte: Protocolo do aluno D34.

Através do texto produzido pelo aluno D34 (Figura 30), podemos observar que ele se refere a um espaço tridimensional como uma área, ao afirmar sobre o esvaziamento e enchimento da área em volta da fragata. Além disso, identificamos a apresentação da concepção de volume-área (ANWANDTER-CUELLAR, 2013), ao indicar que a referida área possui aproximadamente 87 m^3. Ademais, o D34 fornece uma medida de volume em m^3 e faz a pergunta referindo-se a uma unidade de medida de capacidade não usual em situações do cotidiano (dL). No que se refere aos teoremas em ação e suas respectivas representações simbólicas presentes na RP, observamos que ele faz uso de duas formas distintas de conversão de unidades: a regra de três (para conversão de unidade de medida de volume para capacidade) e a escala com múltiplos e submúltiplos da unidade de medida de capacidade. O que revela conhecimentos variados sobre as situações de transformação de unidades de medidas.

Sobre os alunos que formularam FRP com dados irreais ou texto de difícil compreensão, destacamos, por exemplo: a menção da dimensão do comprimento da fragata e da parte submersa com medidas desproporcionais e formato irreal (ex.: fosso com 15m de profundidade), bem como a medida do volume de líquido deslocado; uso de termos marinheiros sem deixar claro a que se referem, como: “calado mínimo/máximo”, “costado”, “popa”.

5.2 FRP A PARTIR DE UM PROBLEMA DADO, CRIAR UM PARECIDO

Relembramos que para essa atividade propomos: “Formule um problema parecido e resolva-o: *Na Fragata Niterói existe um reservatório no formato de um paralelepípedo retângulo com 200 cm de comprimento por 150 cm de largura. Após um marinheiro retirar água desse reservatório, a altura da água desceu 0,5 cm. Quantos litros de água foram retirados pelo marinheiro?”.*

5.2.1 Análise e discussão da FRP de um problema dado, criar um parecido

Participaram desta atividade 61 alunos das turmas A, F e G, respectivamente, com 23, 20 e 18 alunos (Apêndice C). Dos 61 alunos participantes da FRP, 34 realizaram a atividade de maneira satisfatória quanto aos critérios previstos pela pesquisadora (Capítulo 4).

Nos Quadros 10, 11 e 12, refinamos a análise sobre os 3 casos mais frequentes e com elementos similares neste tipo de FRP realizados, respectivamente por 5 alunos (Quadro 10) e 4 alunos (Quadros 11 e 12).

Quadro 10 - Componentes da organização invariante da FRP a partir de um problema dado, criar um parecido - 1º mais frequente (5 alunos)

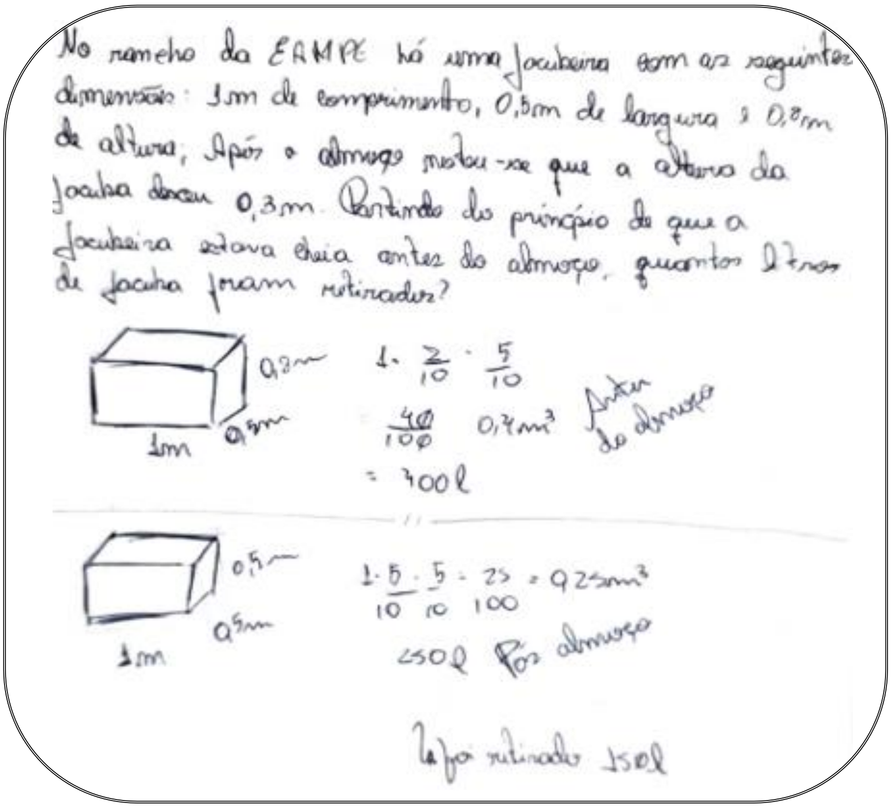
Situações (S) Situação de medição - operacionalização de medidas e transformação de unidades.
Metas e antecipações: Formular e resolver um problema parecido com: Na Fragata Niterói existe um reservatório no formato de um paralelepípedo retângulo com 200 cm de comprimento por 150 cm de largura. Após um marinheiro retirar água desse reservatório, a altura da água desceu 0,5 cm. Quantos litros de água foram retirados pelo marinheiro?
Regras de ação (RA) Apresentação dos objetos: reservatório cúbico ou no formato de paralelepípedo, jacubeira, caixa d'água ou piscina. Apresentação das dimensões do objeto (comprimento, largura e altura) em cm ou m (<u>para calcular o seu volume).</u> Apresentação da medida da altura que diminuiu do objeto em m ou cm. <u>Cálculo do volume total do objeto.</u> <u>Cálculo do volume final (após diminuição).</u> <u>Subtração do volume que diminuiu do volume total.</u> <u>Transformação de unidades de volume para capacidade.</u> **Pergunta:** Quantos litros de água foram retirados do objeto?
Invariantes operatórios (IO) Reconhecimento do objeto como uma figura tridimensional: paralelepípedo ou cubo. Uso da fórmula para calcular o volume de um paralelepípedo. Tornar homogêneas as unidades de medidas de capacidade para subtrair uma medida de outra.

Fonte: Autoria própria.

Sobre o exposto no Quadro 10, dentre 5 alunos, 4 deles apresentaram as dimensões do objeto na forma de paralelepípedo e 1 (um) na forma de um cubo. Sendo que 2 deles se referiram ao reservatório de um navio pertencente à esquadra da Marinha do Brasil, conforme modelo do problema. E 3 alunos se referiram, respectivamente, a uma piscina, uma jacubeira do rancho e a uma caixa d'água. Em nosso entendimento, esse resultado revela aspectos da compreensão dos alunos sobre o que é "criar um problema parecido" em relação à mudança do objeto físico de referência (reservatório), cabendo ao professor considerá-lo se está de acordo ou não com a atividade proposta. No nosso caso, consideramos que sim.

Na Figura 31, expomos como o aluno G08, formulou e resolveu seu problema em consonância com os indicadores do Quadro 10.

Figura 31 - FRP pelo G08 - A partir de um problema dado, criar um parecido



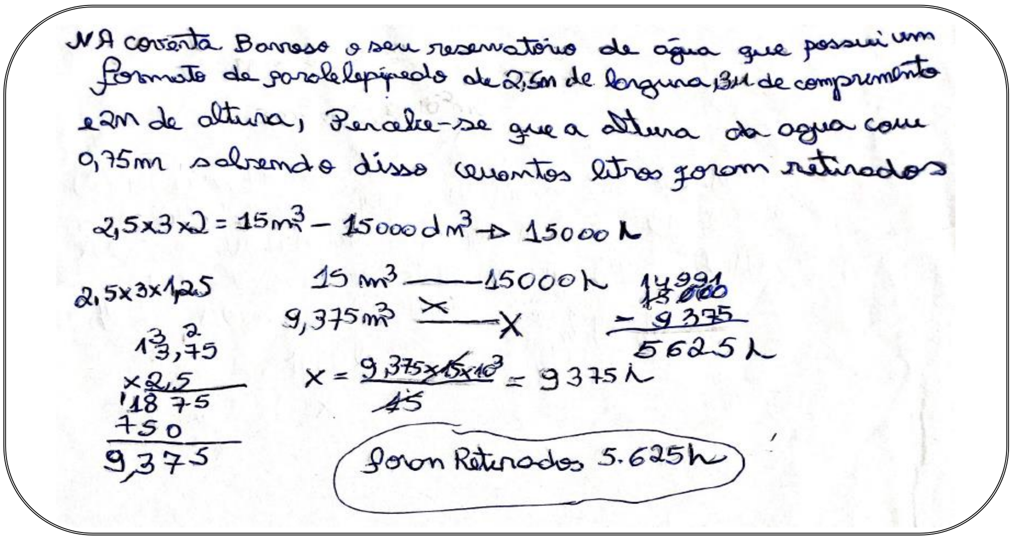
Fonte: Protocolo do aluno G08.

Analisando a FRP do aluno G08 (Figura 31), podemos constatar que ele diversificou as RA e IO do problema dado como referência (ver Capítulo 4), ao propor o cálculo do volume inicial (antes do almoço) para subtraí-lo do volume final (depois do almoço), a exemplo de outros 4 alunos. Ou seja, foi gerada uma situação de operacionalização de medidas, *a priori*, não prevista pela pesquisadora. Este fato, não distante de outros, traz à tona a criatividade dos alunos na formulação dos problemas que superam as expectativas do professor.

A respeito desta atividade, as diferentes representações simbólicas, utilizadas na RP, refletem o quanto essas são essenciais para analisar a formação dos conhecimentos dos alunos na FP. Neste sentido, Moreira (2002) discute que representações podem ser: “corretas ou erradas, vagas ou precisas, explícitas ou totalmente implícitas; em qualquer caso, elas funcionam como substitutos computáveis da realidade e, portanto, são feitas de teoremas-em-ação, proposições tidas como verdadeiras” (MOREIRA, 2002, p.24). Assim, compreendemos que um professor ao propor um problema para a resolução dos alunos, eles podem resolvê-lo de diferentes formas. No caso da FP pelos próprios alunos, com RA e IO similares, eles também podem apresentar diferentes tipos de resolução.

Em particular, sobre as representações simbólicas, no exemplo que expomos acima, da FRP do G08 (Figura 31), percebemos em cena o **teorema em ação**: faz-se necessária a conversão de números da representação decimal para fracionária a fim de multiplicar as medidas do paralelepípedo e obter o seu volume. De outra forma, o aluno F30 (Figura 32, abaixo), recorre ao uso do algoritmo da multiplicação explicitamente, mesmo não havendo restrição, na resolução, do uso de calculadora.

Figura 32 - FRP pelo F30 - A partir de um problema dado, criar um parecido



Fonte: Protocolo do aluno F30.

Na RP do aluno F30 (Figura 32), a conversão das medidas do volume inicial e final (de m^3 para litros) incide sobre o conceito de proporcionalidade entre as grandezas, além de fazer uso da simplificação de números, diferentemente do G08 (Figura 31), que faz a conversão implicitamente de $1m^3$ = 1.000l, ao apresentar a medida 0,4 m^3 = 400l. Diante disso, reforçamos nossa ideia sobre a articulação da FP à RP. Pois, a forma como os alunos resolvem os problemas formulados por eles nos revelam vários de seus conhecimentos.

No Quadro 11, temos a estrutura apresentada por 4 dos 34 alunos que formularam uma pergunta em torno da medida da altura do paralelepípedo (reservatório), diferentemente do problema proposto que tinha por pergunta: quantos litros foram retirados do reservatório?

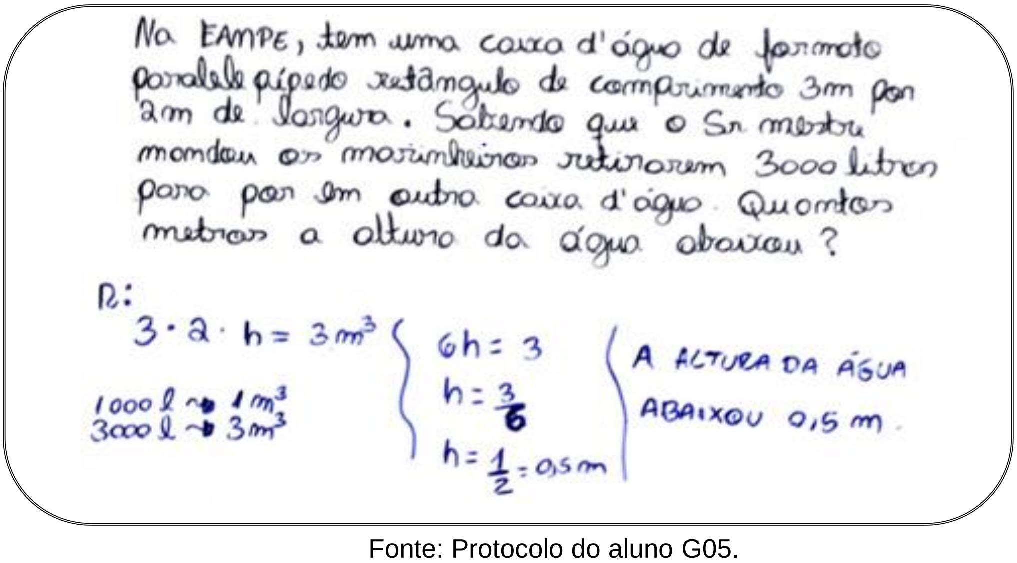
Quadro 11 - Componentes da organização invariante da FRP a partir de um problema dado, criar um parecido - 2ºA mais frequente (4 alunos)

Situações (S) Situação de medição - transformação de unidades.
Metas e antecipações: Formular e resolver um problema parecido com: Na Fragata Niterói existe um reservatório no formato de um paralelepípedo retângulo com 200 cm de comprimento por 150 cm de largura. Após um marinheiro retirar água desse reservatório, a altura da água desceu 0,5 cm. Quantos litros de água foram retirados pelo marinheiro?
Regras de ação (RA) Apresentação dos objetos: compartimento, caixa-d'água, piscina ou jacubeira. Apresentação das medidas do comprimento e largura do objeto em m ou cm. Apresentação da quantidade em litros que foi adicionada ou retirada do objeto (Transformação de litros para m^3 ou dm^3). Resolução de uma equação, usando a fórmula do volume de um paralelepípedo para encontrar a altura final após adição/retirada de litros. **Pergunta:** Quantos cm ou m a altura da água aumentou/baixou em relação à altura anterior?
Invariantes operatórios (IO) Reconhecimento do objeto como uma figura tridimensional: o paralelepípedo. Uso da fórmula para calcular o volume de um paralelepípedo. Transformação de unidades de capacidade para volume.

Fonte: Autoria própria.

Observamos que cada um dos 4 alunos (Quadro 11) apresenta objeto distinto na FP. Porém todos fornecem o volume em litros e fazem a conversão de litros para m^3 de maneira implícita, além de aplicar a fórmula do volume para obter a altura desconhecida. Os alunos que forneceram as medidas do comprimento e largura em metros (3 alunos), apresentaram também a medida da altura em metros. Apenas 1 (um) aluno apresentou a medida em decímetros. A propósito disso, nas figuras seguintes, apresentamos, como exemplos, a FRP dos alunos G05 (Figura 33) e G18 (Figura 34).

Figura 33 - FRP pelo G05 - A partir de um problema dado, criar um parecido


Na EAMPE, tem uma caixa d'água de formato paralelepípedo retângulo de comprimento 3m por 2m de largura. Sabendo que o Sr mestre mandou os marinheiros retirarem 3000 litros para por em outra caixa d'água. Quantos metros a altura da água abaixou?

R:

$3 \cdot 2 \cdot h = 3m^3$

$1000\,l \to 1m^3$

$3000\,l \to 3m^3$

$6h = 3$

$h = \frac{3}{6}$

$h = \frac{1}{2} = 0{,}5m$

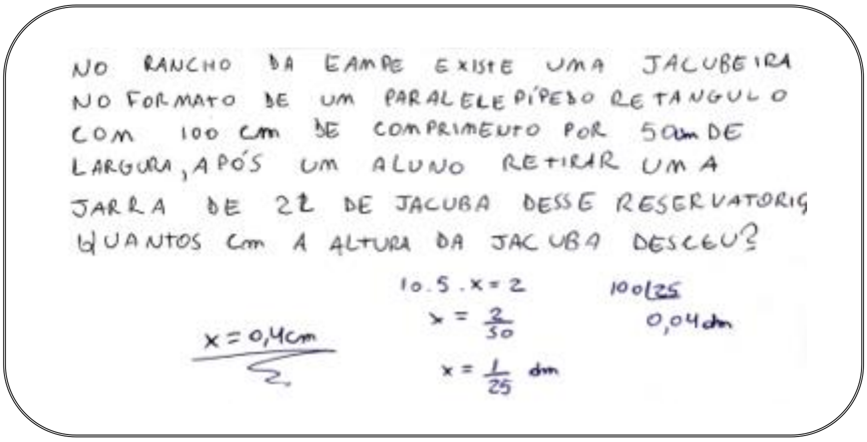
A ALTURA DA ÁGUA ABAIXOU 0,5 m.

Fonte: Protocolo do aluno G05.

Na FRP do aluno G05 (Figura 33), podemos constatar como se faz marcante o uso da fórmula do volume do paralelepípedo. Além disso, ele faz uso correto do teorema em ação: é necessário converter a medida fornecida no problema em litros para metros cúbicos, antes da resolução da equação. A representação simbólica presente na RP desse aluno evidencia o uso do conceito de fração, simplificação de fração e a conversão do número na forma fracionária para decimal, além da apresentação da unidade de medida metro para indicar a altura desconhecida.

Analisando a FRP do aluno G18 (Figura 34), observamos que, diferentemente do aluno G05 (Figura 33), ele converte o valor do volume fornecido em litros para decímetros cúbicos implicitamente, bem como as medidas do comprimento e largura (de cm para dm e vice-versa) para usar a fórmula do volume do paralelepípedo.

Figura 34 - FRP pelo G18 - A partir de um problema dado, criar um parecido


NO RANCHO DA EAMPE EXISTE UMA JACUBEIRA NO FORMATO DE UM PARALELEPÍPEDO RETANGULO COM 100 cm DE COMPRIMENTO POR 50cm DE LARGURA, APÓS UM ALUNO RETIRAR UMA JARRA DE 2ℓ DE JACUBA DESSE RESERVATORIO QUANTOS cm A ALTURA DA JACUBA DESCEU?

$10.5.x = 2$

$x = \frac{2}{50}$

$x = \frac{1}{25}$ dm

100|25

0,04dm

$x = 0{,}4$cm

Fonte: Protocolo do aluno G18.

Notamos também que de maneira análoga ao aluno G08, o aluno G18 faz uso da fórmula do volume e resolve a equação para descobrir a medida da altura (em dm e posteriormente em cm). Na representação simbólica do número na forma de fração ele apresenta explicitamente a conversão do número em forma de fração para decimal através do algoritmo da divisão.

Por fim, no Quadro 12 temos a organização invariante da FRP dos alunos que seguiram mais fielmente o modelo proposto. Para este caso, 4 dos 34 alunos modificam apenas as medidas apresentadas no problema dado, para criar um parecido - ou poucas informações do texto do problema dado

.

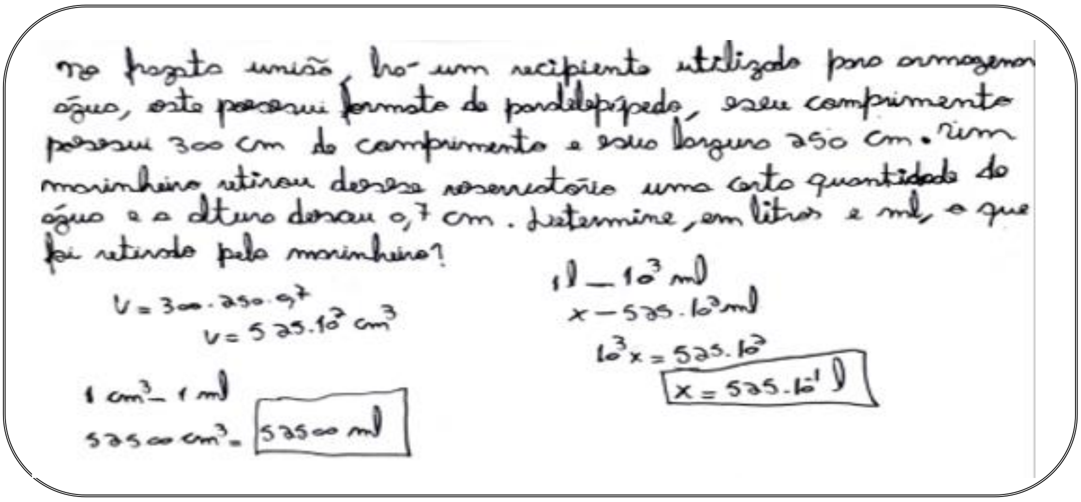
Quadro 12 - Componentes da organização invariante da FRP a partir de um problema dado, criar um parecido - 2ºB mais frequente (4 alunos)

Situações (S) Situação de medição- transformação de unidades.
Metas e antecipações: Formular e resolver um problema parecido com: Na Fragata Niterói existe um reservatório no formato de um paralelepípedo retângulo com 200 cm de comprimento por 150 cm de largura. Após um marinheiro retirar água desse reservatório, a altura da água desceu 0,5 cm. Quantos litros de água foram retirados pelo marinheiro?
Regras de ação (RA) Apresentação do objeto: um reservatório. Apresentação das medidas do comprimento e largura do objeto em cm. Apresentação da medida da altura que diminuiu do objeto. <u>Cálculo do volume que diminuiu, considerando as medidas fornecidas no texto do problema.</u> <u>Transformação de cm^3 para litros.</u> **Pergunta:** Quantos litros de água foram retirados do objeto?
Invariantes operatórios (IO) Reconhecimento do objeto na forma de paralelepípedo. Reconhecimento de que a largura e o comprimento do reservatório são fixos. Para calcular o volume que diminuiu, não se faz necessário saber o volume total ou de uma determinada quantidade de litros dentro do objeto. Uso da fórmula para calcular o volume de um paralelepípedo. Conversão de unidades de volume para capacidade.

Fonte: Autoria própria.

A título de exemplo, ilustramos na Figura 35, a FRP do aluno G07, que utiliza a configuração do texto apresentado, modificando alguns elementos como: o nome da fragata (de Niterói para União) e o nome do objeto (de reservatório para recipiente). Ou seja, percebemos adaptações em relação ao contexto do problema, no entanto, mantém-se a estrutura (RA e IO) desse. Sobre as medidas atribuídas às dimensões do objeto, o G07 troca apenas os números, mantendo a unidade de medida (cm). Contudo, além de apresentar a pergunta “quantos litros”, o aluno solicita essa mesma medida em ml.

Figura 35 - FRP pelo G07 - A partir de um problema dado, criar um parecido


no hospital união, há um recipiente utilizado para armazenar água, este possui formato de paralelepípedo, e seu comprimento possui 300 cm de comprimento e sua largura 250 cm. Um marinheiro retirou desse reservatório uma certa quantidade de água e a altura desceu 0,7 cm. Determine, em litros e ml, o que foi retirado pelo marinheiro?

$V = 300 \cdot 250 \cdot 0{,}7$

$V = 525 \cdot 10^3 \, cm^3$

$1 \, cm^3 — 1 \, ml$

$52500 \, cm^3 = \boxed{52500 \, ml}$

$1 \, l — 10^3 \, ml$

$x — 525 \cdot 10^3 \, ml$

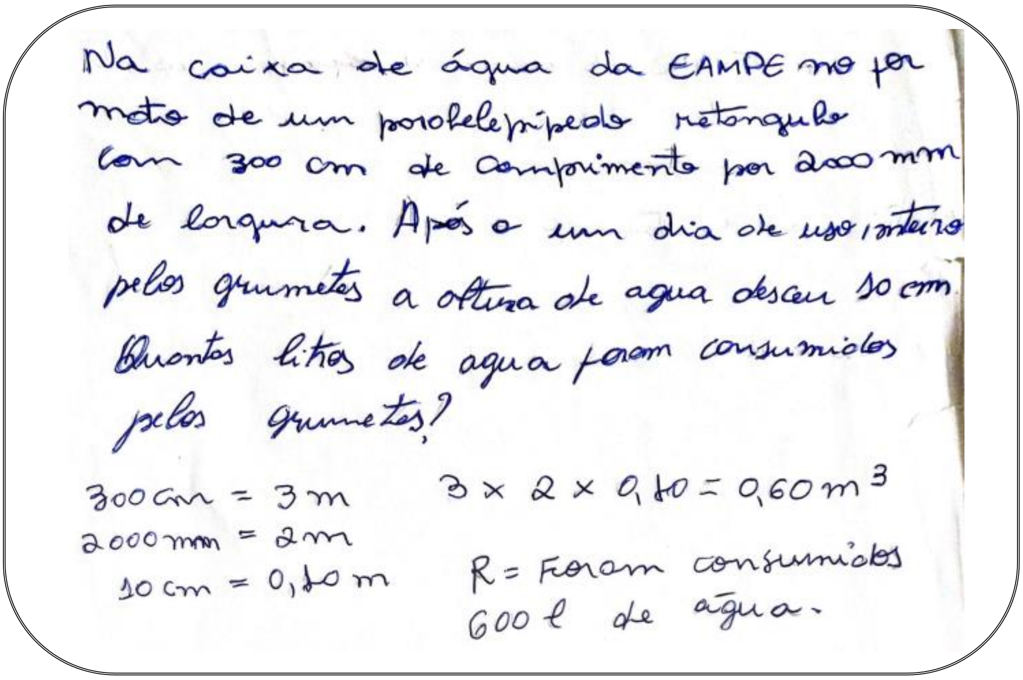
$10^3 x = 525 \cdot 10^3$

$\boxed{x = 525 \cdot 10^1 \, l}$

Fonte: Protocolo do aluno G07.

A propósito da resolução do problema, formulado pelo G07 (Figura 35), fica evidente a necessidade de expressar o passo a passo, ao efetuar as transformações das unidades de medidas de cm^3 para ml e em seguida de ml para l. Vale salientar que os demais alunos que utilizaram as mesmas RA para FP apresentaram, na resolução, a explicitação de menos representações simbólicas, como no caso da FRP do, ilustrada na figura abaixo.

Figura 36 - FRP pelo F16 - A partir de um problema dado, criar um parecido


Na caixa de água da EAMPE no formato de um paralelepípedo retângulo com 300 cm de comprimento por 2000 mm de largura. Após o um dia de uso inteiro pelos grumetes a altura de agua desceu 10 cm. Quantos litros de agua foram consumidos pelos grumetes?

300 cm = 3 m

2000 mm = 2 m

10 cm = 0,10 m

$3 \times 2 \times 0{,}10 = 0{,}60 \, m^3$

R = Foram consumidos 600 ℓ de água.

Fonte: Protocolo do aluno F16.

Observamos que o aluno F16 (Figura 36), diferentemente do aluno G07 (Figura 35) apresenta as medidas das dimensões da caixa d'água da EAM em cm e mm, e posteriormente as transforma em metros para expressar a medida do volume em m^3. Por fim, converte essa medida implicitamente para litros. Tais aspectos, em nosso entendimento, ocorrem por parte desses alunos, não distante de outros casos, um forte apelo a situações de transformação de unidades de medida na FRP de volume e capacidade.

Sobre a FRP a partir de um problema dado, criar um parecido - além do que apresentamos nos Quadros 10, 11 e 12, diagnosticamos outras 17 formas de FRP, desenvolvidas por 21 alunos, cujas regras de ação, bem distintas entre si, podem ser consultadas no Apêndice C. Estas formas se diferem em relação ao problema proposto para criar um parecido quanto à (ao):

1. Troca do objeto da forma de paralelepípedo para cilindro (cálculo de: porcentagem ou fração de litros que perdeu; altura que baixou; diferença da altura de dois tanques cilíndricos; e quantidade de litros que resta em dois diferentes tanques cilíndricos) (5 alunos);
2. Cálculo de porcentagem relativo a uma parte da quantidade de litros da capacidade de um objeto em forma de paralelepípedo (4 alunos);
3. Cálculo da quantidade de litros que sobrou de um objeto em forma de paralelepípedo (2 alunos);
4. Cálculo de fração relativo a uma parte da quantidade de litros da capacidade de um objeto em forma de paralelepípedo ou cubo (2 alunos);
5. Subtração das alturas do volume inicial e do que diminuiu após a retirada de água cálculo do volume restante (2 alunos);
6. Cálculo do volume, em litros, de um recipiente no formato de paralelepípedo (2 alunos);
7. Cálculo de fração (inicial) e porcentagem (final) da capacidade de um objeto em forma de paralelepípedo (1 aluno);
8. Cálculo do valor monetário gasto para abastecer um reservatório em forma de paralelepípedo (1 aluno);

9. Cálculo da diferença do nível de líquido num recipiente após a retirada da imersão de um objeto sólido (1 aluno);
10. Cálculo do volume parcial de um recipiente de acordo com o nível de líquido que ele se encontra (1 aluno).

Em todos os casos mencionados, os alunos conseguiram formular os problemas e resolvê-los; diferentemente daqueles que apresentamos no próximo tópico (5.2.2), no qual analisamos e refinamos as dificuldades diagnosticadas em relação a este tipo de FRP.

5.2.2 Dificuldades apresentadas pelos alunos na FRP a partir de um problema dado criar um parecido

Na Tabela 8, indicamos as incoerências identificadas em relação ao processo de FRP a partir de um problema dado para criar um parecido. Vale ressaltar que este fato ocorreu com 27 dos 61 alunos, resultando num alto índice de dificuldade para este tipo de atividade.

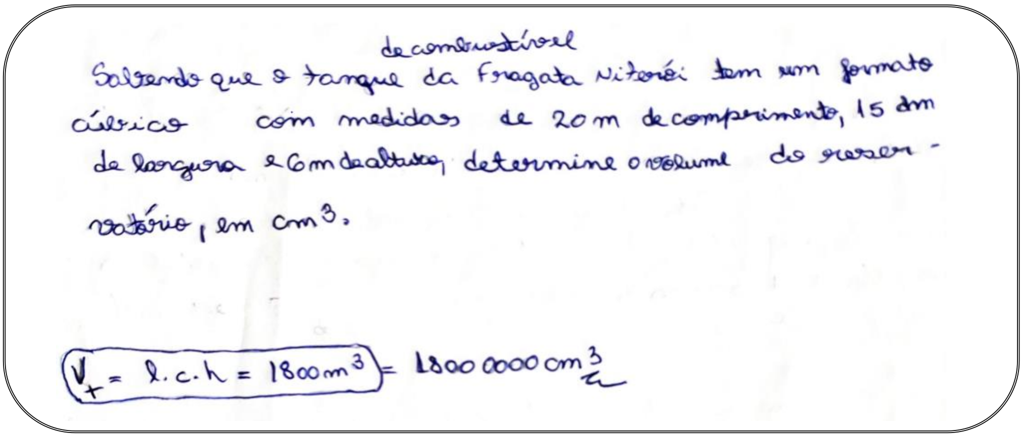
Tabela 8 - Características das dificuldades na FRP a partir de um problema dado, criar um parecido

Quantidade de alunos	Dificuldades identificadas
8	Apresentou uma ideia bem diferente do problema proposto.
10	Apresentou erro conceitual: Confusão de medida de área com volume (1 caso) e medida de comprimento com volume (1 caso) Apresentou um paralelepípedo com formato retangular (1 caso) Cubo com arestas diferentes (2 casos) Cubo com formato quadrado (2 casos) Erro de conversão (1 m^3 = 1L) Erro de conversão (1L = 1.000 m^3) Erro de conversão (1 dm^3 = 1000 L)
5	Apresentou texto de difícil compreensão.
2	Apresentou uma ideia parecida ao problema proposto, mas não o resolveu.
1	Apresentou dados irreais para a atividade proposta (um reservatório no formato cúbico com 9 cm de aresta).
1	Erro de cálculo numérico (0,5 x 1.000 = 5.000 L.

Fonte: Autoria própria.

Consideramos a FRP com uma ideia bem diferente do problema proposto (Tabela 7), aquelas dos 9 alunos que não apresentaram situação de medição com transformação de unidades - associada à conversão de unidades de medidas de volume para capacidade. Além de não a relacionar com a diminuição ou aumento de volume. Um desses casos (Figura 37), encontra-se indicado na FRP do aluno A11.

Figura 37 - FRP pelo A11 - A partir de um problema dado, criar um parecido


Sabendo que o tanque de combustível da Fragata Niterói tem um formato cúbico com medidas de 20 m de comprimento, 15 dm de largura e 6 m de altura, determine o volume do reservatório, em cm³.

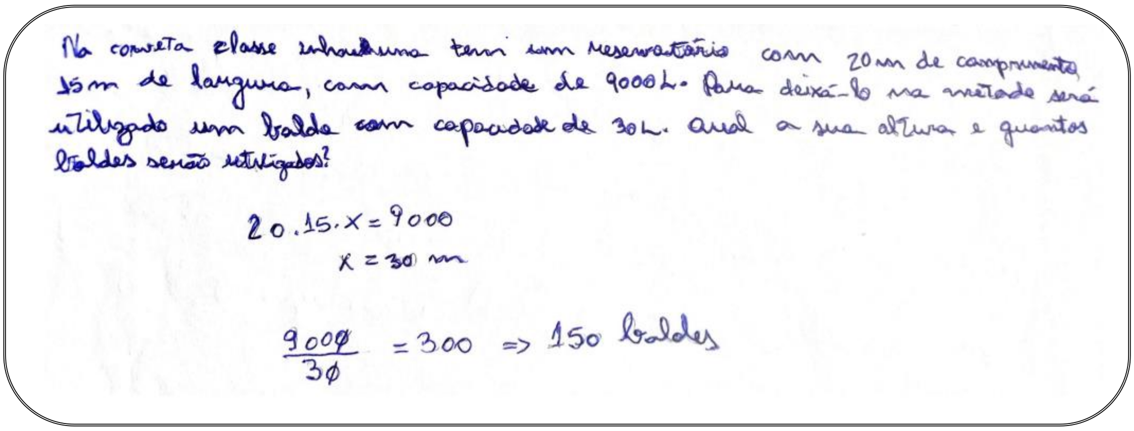
$\boxed{V_t = l.c.h = 1800 m^3} = 1800\,0000 \text{ cm}^3$

Fonte: Protocolo do aluno A11.

O problema formulado pelo aluno A11 (Figura 37) difere do problema proposto por apresentar as medidas das três dimensões do reservatório e solicitar apenas o cálculo do volume em cm^3, sem relacionar volume com capacidade. Além disso, percebemos que o aluno anuncia que o tanque tem formato cúbico e atribui medidas diferentes às suas três dimensões. O volume é calculado de maneira implícita, mas apresenta um erro na resolução, pois 20 m x 1,5 m x 6 m = 180 m^3. Quanto à conversão de unidades de medidas de volume, é utilizado o teorema em ação errado: o valor de 1 m^3 equivale a 10.000 cm^3.

A respeito do 2º tipo de incoerência mais presente (11 alunos) na FRP (Tabela 7), destacamos aquelas em que os alunos apresentaram erro de cálculo numérico e/ou conceitual. Como exemplo, na Figura 38, indicamos a FRP do aluno F04.

Figura 38 – FRP pelo F04 - A partir de um problema dado, criar um parecido


Na corveta classe inhaúma tem um reservatório com 20 m de comprimento, 15 m de largura, com capacidade de 9000 L. Para deixá-lo na metade será utilizado um balde com capacidade de 30 L. Qual a sua altura e quantos baldes serão utilizados?

$20 \cdot 15 \cdot x = 9000$

$x = 30$ m

$\frac{900\cancel{0}}{3\cancel{0}} = 300 \Rightarrow 150$ baldes

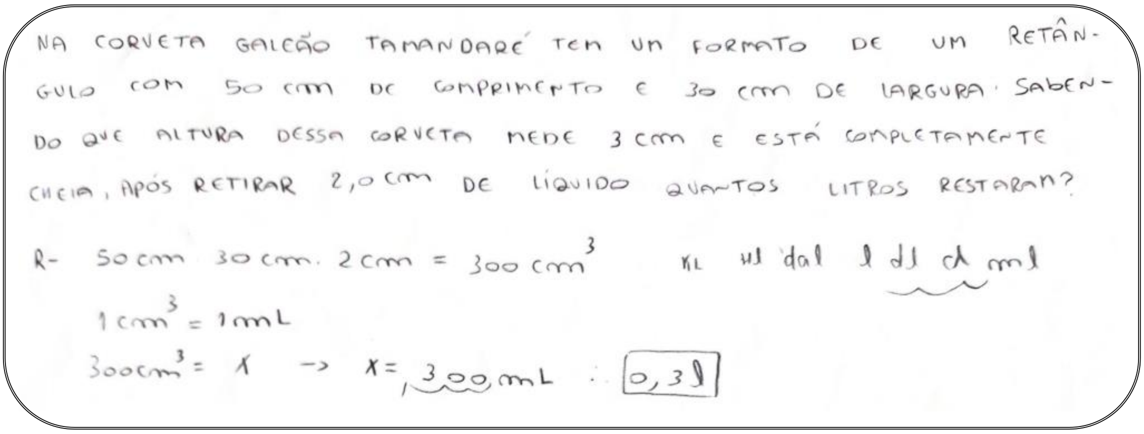
Fonte: Protocolo do aluno F04.

Por meio da RP podemos constatar que o aluno faz uso da fórmula do volume para determinar a altura do reservatório, no entanto utiliza o teorema em ação errôneo: a medida de 9000 litros equivale a um volume de 9.000 m^3. Esse erro resulta numa medida de 30 m, diferente da correta que seria 0,03 m.

Por outro lado, a medida da capacidade fornecida nos dados do problema (9.000 ll), converge para uma situação irreal, pois teríamos um reservatório com 20 metros de comprimento, 15 m de largura e uma altura igual a 3 cm.

Em relação aos problemas formulados com dados irreais ou de difícil compreensão (7 casos), apresentamos como exemplo a FRP do aluno F17 (Figura 39).

Figura 39 - FRP pelo F17 - A partir de um problema dado, criar um parecido


NA CORVETA GALCÃO TAMANDARÉ TEM UM FORMATO DE UM RETÂNGULO COM 50 cm DE COMPRIMENTO E 30 cm DE LARGURA. SABENDO QUE ALTURA DESSA CORVETA MEDE 3 cm E ESTÁ COMPLETAMENTE CHEIA, APÓS RETIRAR 2,0 cm DE LÍQUIDO QUANTOS LITROS RESTARAM?

R- $50\ cm \cdot 30\ cm \cdot 2\ cm = 300\ cm^3$ kl hl dal l dl cl ml

$1\ cm^3 = 1\ mL$

$300\ cm^3 = x \rightarrow x = 300\ mL \therefore \boxed{0,3\ l}$

Fonte: Protocolo do aluno F17.

No texto formulado pelo aluno F17, observamos que além de dados irreais identificamos outras incoerências como:

- a apresentação de um objeto tridimensional como bidimensional ao descrever a Corveta Galeão Tamandaré com um formato retangular;
- as medidas irreais atribuídas a esse objeto: 50 cm de comprimento, 30 cm de largura e 3 cm de altura;
- A informação de que foi retirado 2,0 cm de líquido e que a Corveta está completamente cheia, associando a figura da Corveta a um reservatório que não é mencionado no problema.

Apesar das dificuldades apresentadas no texto do aluno F17, observamos através da representação simbólica utilizada por ele na RP, que o cálculo do volume em cm^3 e a conversão das medidas de volume para capacidade são efetuadas corretamente. Este fato é inquietante, em virtude do nível de conhecimento do aluno sobre conversão de unidades, contudo, distante de aplicações reais. Fato também percebido na FRP de outros alunos.

5.3 A FRP A PARTIR DE UM INÍCIO DADO, CONTINUAR O PROBLEMA

Na atividade de FRP a partir de um início dado, continuar o problema", relembramos que nem todos os dados estão disponíveis na parte inicial do texto do problema; sendo assim, o aluno precisa colocar outros dados e finalizá-lo com uma pergunta. Desta forma, levamos em consideração que "quando o aluno cria seus próprios textos de problemas, ele precisa organizar tudo que sabe e elaborar o texto, dando-lhe sentido e estrutura adequados para que possa comunicar o que pretende" (CHICA, 2001, p.151).

Sublinhamos que nesta atividade propomos "Continue o problema, formule uma pergunta e resolva-o: *No paiol de gêneros da EAM, devem ser armazenadas 60 caixas cúbicas em pilhas no formato de paralelepípedos*…"

5.3.1 Análise e discussão da FRP a partir de um início dado, continuar o problema

A presente atividade foi aplicada aos alunos das turmas B, C e D, respectivamente, com 13, 16 e 11 alunos, totalizando 40 participantes (Apêndice D). Desses 40 alunos, 17 realizaram a atividade sem ocorrência de erros conceituais ou outros aspectos incoerentes, como aqueles discutidos adiante no tópico (5.3.2).

Neste tipo de atividade ocorreram poucos casos de FRP similares. No Quadro 13, expomos a organização da FRP de 3 dos 17 alunos que optaram por continuar o problema em torno de situações de medição e de comparação.

Quadro 13 - Componentes da organização invariante da FRP a partir de um início dado, continuar o problema - 1ºA mais frequente (3 alunos)

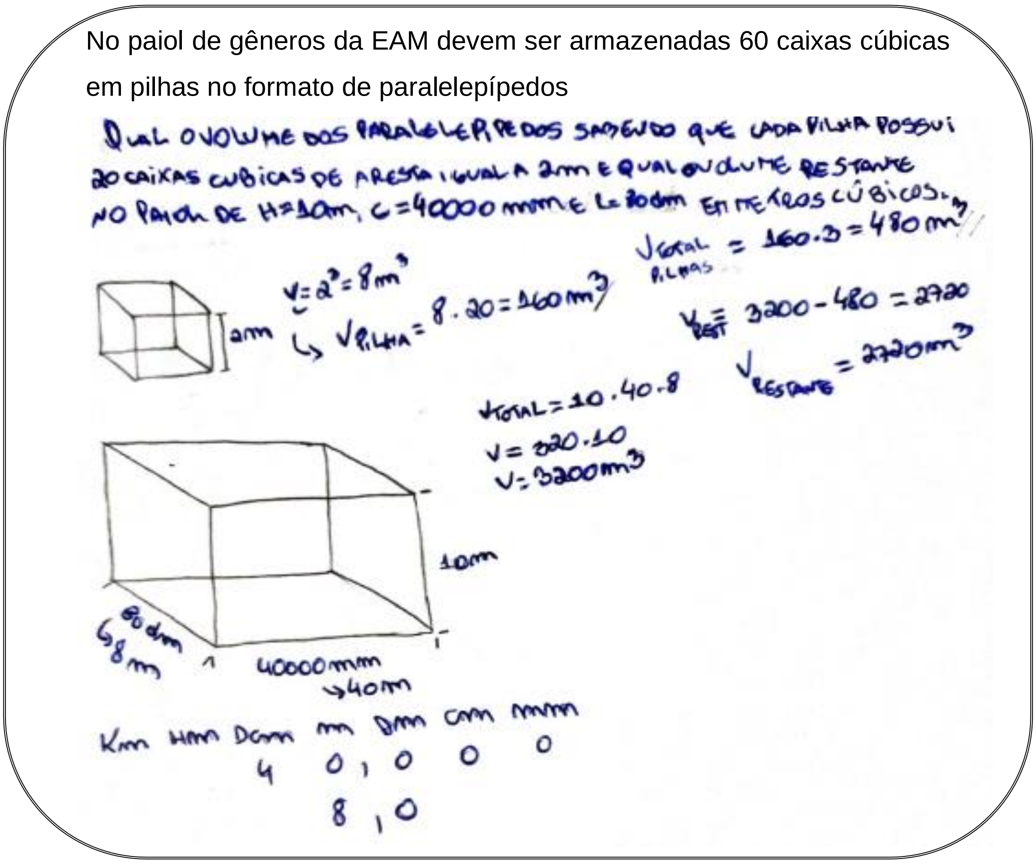
Situações (S) Situação de medição: transformação de unidades e operacionalização de medidas. Situação de comparação.
Metas e antecipações (MA): Continuar o problema, formular uma pergunta e resolvê-lo: No paiol de gêneros da EAM devem ser armazenadas 60 caixas cúbicas em pilhas no formato de paralelepípedos…
Regras de ação (RA) Apresentação das dimensões da aresta de uma caixa cúbica em m e do paiol em m, mm e dm (<u>transformação de unidades de mm ou dm para m)</u> para cálculo do volume em m^3(da caixa cúbica e do paiol). Apresentação da quantidade de caixas da pilha para determinar o volume de cada pilha em m^3. <u>Subtração do volume do paiol do volume das pilhas de caixas.</u> <u>Comparação entre o volume das caixas e o do paiol.</u> **Pergunta:** Quanto da capacidade (volume interno) do paiol sobrou ou foi ocupada?
Invariantes operatórios (IO): Reconhecimento de objetos na forma de cubo e paralelepípedo. Uso da fórmula para calcular o volume de um cubo ou de um paralelepípedo. Tornar homogêneas as unidades de medidas de capacidade para subtrair uma medida de outra. Um objeto terá maior volume que outro se este couber no interior do objeto de maior volume.

Fonte: Autoria própria.

Sobre o exposto no Quadro 13, destacamos que os alunos propõem a subtração do volume das 60 caixas do volume do paiol. Tendo assim, ocorrido a apresentação das dimensões do paiol e de uma caixa para o cálculo dos seus volumes. Assim, constatamos como na FP, por parte dos alunos, faz-se marcante o uso da fórmula para cálculo do paralelepípedo e/ou do cubo.

Como exemplo do exposto no Quadro 14, expomos a FRP pelo aluno B20 (Figura 40), que traz à tona o teorema em ação: o volume das 60 caixas deve ser menor do que a capacidade do paiol. Neste caso, temos indícios de uma situação de comparação por inclusão. Como afirma Figueiredo (2013, p. 37-38) “na inclusão, os alunos podem observar se um objeto terá maior volume que outro se este couber no interior do objeto de maior volume. Neste caso, pelo menos um dos sólidos deverá ser oco”.

Figura 40 - FRP pelo B20 - A partir de um início dado, continuar o problema



Fonte: Protocolo do aluno B20.

Observamos na FRP do aluno B20 (Figura 40) a indicação da altura do paiol com 10m, o que revela, mais uma vez, a dificuldade dos alunos em estimar medidas para as dimensões de objetos físicos.

Quanto à situação de transformação de medidas, destacamos como o aluno A20, propõe a largura do objeto em 40.000 mm para depois converter esta medida em metros. Em particular, ele representa o teorema em ação: para converter mm em m, é necessário reduzir sequencialmente um zero a cada unidade de medida à esquerda.

Sobre a situação de medição - operacionalização *de medidas*, identificamos por meio das representações simbólicas, explicitamente, o uso das fórmulas para o cálculo do volume do cubo e do paralelepípedo; a multiplicação de um escalar pela medida do volume de uma caixa a fim de obter o volume das pilhas formadas; e, por fim, a subtração entre os volumes do paiol e das pilhas para determinar o volume restante do paiol.

Diferentemente, no Quadro 14, apresentamos a organização da FRP de 3 dos 17 alunos que optaram por continuar o problema essencialmente em torno de uma situação de medição para calcular o volume das 60 caixas.

Quadro 14 - Componentes da organização invariante da FRP a partir de um início dado, continuar o problema - 1º B mais frequente (3 alunos)

Situações (S) Situação de medição - situação de transformação de unidades e operacionalização de medidas.
Metas e antecipações: Continuar o problema, formular uma pergunta e resolvê-lo: No paiol de gêneros da EAM devem ser armazenadas 60 caixas cúbicas em pilhas no formato de paralelepípedos…
Apresentação das medidas das arestas do cubo em m a fim de ser calculado o volume de uma caixa. Multiplicação do volume de uma caixa pela quantidade de caixas (60). **Pergunta:** Qual o volume das 60 caixas?
Invariantes operatórios (IO) Reconhecimento do objeto na forma de cubo. Uso da fórmula para calcular o volume de um cubo. Multiplicação de um escalar por uma medida.

Fonte: Autoria própria.

Em relação aos alunos que formularam os problemas segundo as RA e IO do Quadro 15, todos forneceram a medida da aresta do cubo para ser calculado o seu volume e fizeram uma pergunta em torno do volume das 60 caixas. Como podemos observar na FRP do C31 (Figura 41), não há referência à formação de pilhas nem às medidas do paiol.

Figura 41 - FRP pelo C31 - A partir de um início dado, continuar o problema

No paiol de gêneros da EAM devem ser armazenadas 60 caixas cúbicas em pilhas no formato de paralelepípedos...

SABENDO que CADA CAIXA TEM 0,5M comprimento, 0,5M, e 0,5M altura quanto de espaços vão ocupar TODAS AS CAIXAS NO PAIOL ?

0,5M X 0,5M X 0,5M

$\frac{5}{10} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{125}{1000} = 0,125\ M^3$

0,125 X60

$\frac{125}{100\cancel{0}} \times 6\cancel{0} = \frac{75\cancel{0}}{10\cancel{0}} = 7,5\ M^3$

$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ 6 \\ \hline 750 \end{array}$

Fonte: Protocolo do aluno C31.

As demais análises sobre a FRP a partir de um início dado, continuar o problema, revela a ocorrência de uma diversidade de 11 casos particulares (Apêndice D). Ou seja, com RA e IO diferentes entre si em torno das situações de volume e/ou capacidade e que não apresentaram erros conceituais. Em virtude de nossas expectativas para a FRP a partir deste tipo de atividade, como expomos no capítulo da metodologia, discorremos os resultados em torno de cada tipo de situação.

Para **situações de medição**, identificamos o uso do conceito de porcentagem, por **1 (um)** aluno para ser calculada a quantidade de caixas correspondente a um dado percentual de ocupação do paiol, e **1 (um)** aluno propôs o cálculo do percentual de ocupação do paiol.

Para **situações de produção**, envolvendo situações de medição - identificamos a FRP nas quais os alunos envolveram a arrumação das caixas em diferentes formatos de pilhas. Assim: identificamos **1(um)** aluno que propôs a distribuição das 60 caixas em 10 pilhas e sugere o cálculo do volume de cada pilha; **1 (um)** aluno indica a medida da aresta de uma caixa e informa o volume da pilha para determinar o número de pilhas formadas com as 60 caixas; **1 (um)** aluno informou que as caixas seriam colocadas em 5 colunas (pilhas) e pergunta a quantidade de caixas por colunas; **1 (um)** aluno distribuiu as caixas em 5 pilhas, contudo, acrescentou que as caixas teriam ovos e então a pergunta central do problema foi: “Qual a massa total das 60 caixas de ovos?”. Tivemos **1 (um)** aluno que propôs a distribuição das caixas em 10 pilhas e informa a altura da pilha a fim de obter a altura de cada caixa. Em outro caso, **1 (um)** aluno informou a quantidade de caixas que terá o comprimento e largura da pilha e propôs a pergunta “quantas caixas serão colocadas na altura da pilha?”. Por fim, **1 (um)** aluno informa que as caixas serão empilhadas em paletes (cada um com 12 caixas) e pergunta a quantidade de paletes que serão utilizados. Com uma ideia de decomposição/recomposição, pela qual, “tenta-se decompor um dos objetos para formar (recompor) um objeto conhecido, ou parecido com o outro objeto a ser comparado” (FIGUEIREDO, 2013, p.38).

Para **situações de comparação**, identificamos que **1 (um)** aluno formulou o problema indicando o volume do paiol e o das 60 caixas, em torno da pergunta se essas caixas caberiam dentro do paiol e **1(um)** aluno usou a ideia de quantas caixas seriam necessárias para completar um caminhão, além das caixas do paiol.

A seguir refinamos as dificuldades diagnosticadas em relação a este tipo de FRP.

5.3.2 Dificuldades apresentadas pelos alunos na FRP a partir de um início dado, continuar o problema

Para a atividade de FRP: "Continue o problema, formule uma pergunta e resolva-o: *No paiol de gêneros da EAM devem ser armazenadas 60 caixas cúbicas em pilhas no formato de paralelepípedos*…", constatamos que 23 dos 40 alunos (Tabela 9) apresentaram dificuldades específicas para concluí-la.

Tabela 9 - Características das dificuldades na FRP a partir de um início dado, continuar o problema

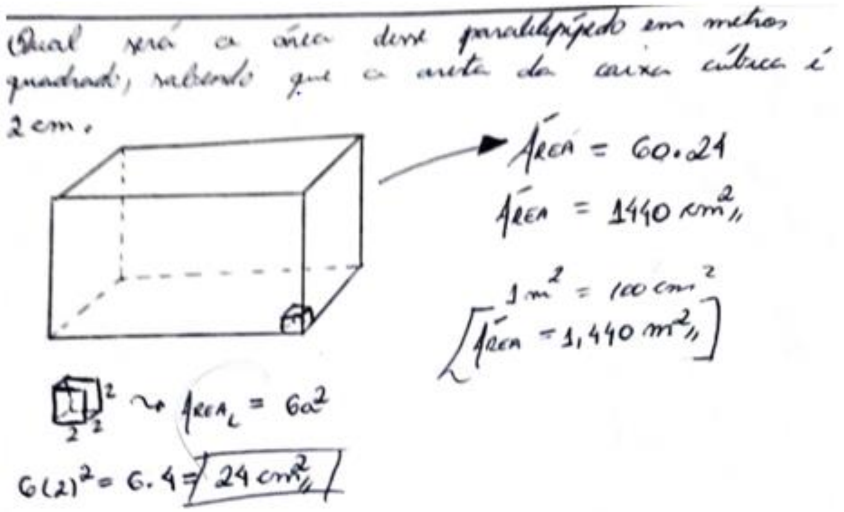
Quantidade de alunos	Dificuldades identificadas
6	Considerou o cubo com as medidas de suas arestas diferentes.
5	Formulou um problema de volume com erro conceitual (confundiu medida de volume com medida linear, as medidas de volume em m^2, a capacidade em m ou dimensão linear em m^2.
4	Apresentou dados incoerentes quanto à forma dos objetos físicos (caixa retangular, recipiente retangular, lado da caixa).
4	Apresentou dados irreais quanto às medidas do objeto físico (paiol ou caixa).
2	Erro na resolução do problema (numérico e na conversão de unidades: 1cm3 = 1.000l).
1	Não fez referência a conceitos de volume e/ou capacidade.
1	Texto de difícil compreensão.

Fonte: Autoria própria.

Pelo exemplo da FRP do aluno D31 (Figura 42), percebemos a representação simbólica da figura do paralelepípedo com uma caixa cúbica dentro dele. Sendo assim, supomos que este aluno põe em cena, com equívoco, o teorema em ação: "*o espaço interno do paralelepípedo é preenchido pela área da superfície total das 60 caixas cúbicas*". Isto é, o aluno apresenta uma concepção de "volume-área: o volume é confundido com a área" (MELO, 2018; ANWANDTER-CUELLAR, 2013).

Figura 42 - FRP pelo D31 - A partir de um início dado, continuar o problema

No paiol de gêneros da EAM devem ser armazenadas 60 caixas cúbicas em pilhas no formato de paralelepípedos...



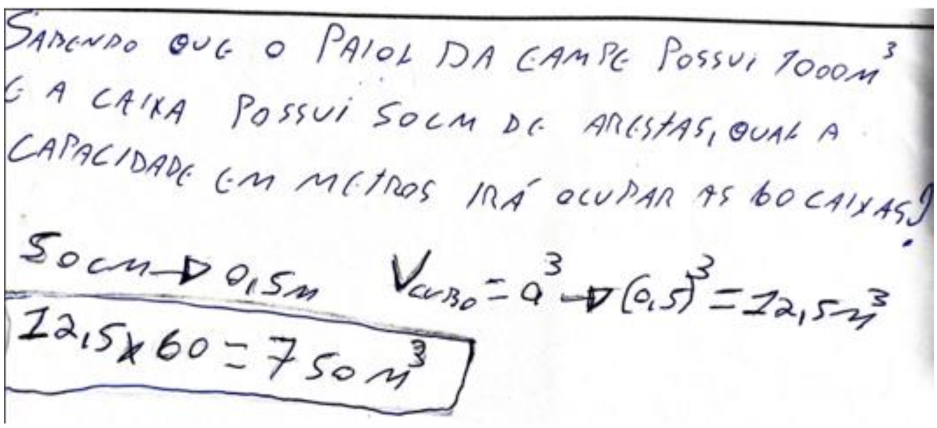
Fonte: Protocolo do aluno D31.

Em relação às representações na RP (Figura 42), compreendemos que o aluno D31 atribui ao valor da área total do paralelepípedo a área da superfície das 60 caixas cúbicas, desconsiderando o fato de que, ao agrupar as caixas cúbicas, a superfície de uma caixa se sobrepõe a outra.

No caso do aluno B24 (Figura 43), ele também apresenta um **teorema em ação** errôneo, a saber: "*o metro é uma unidade de medida de capacidade*".

Figura 43 - FRP pelo B24 - A partir de um início dado, continuar o problema

No paiol de gêneros da EAM devem ser armazenadas 60 caixas cúbicas em pilhas no formato de paralelepípedos...



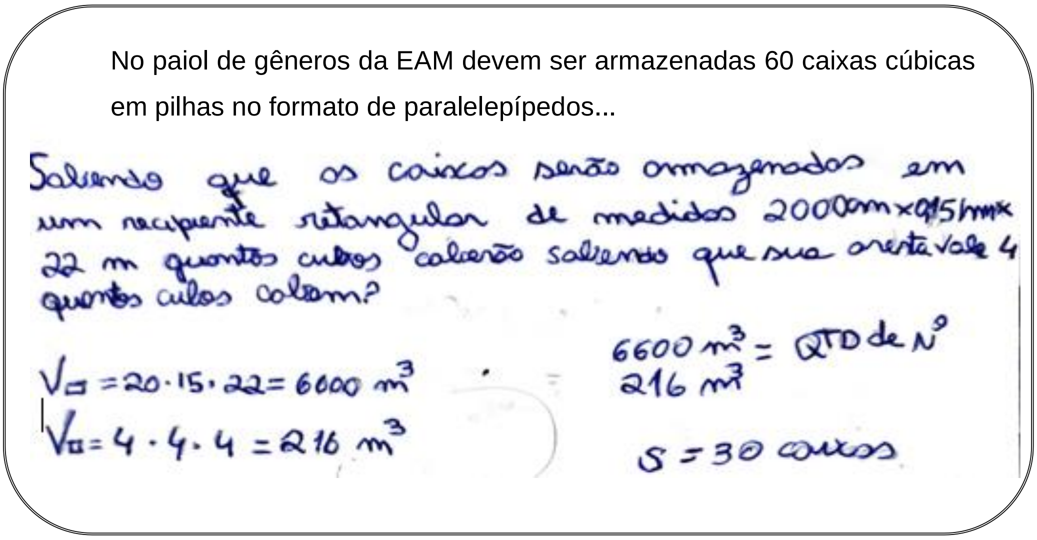
Fonte: Protocolo do aluno B24.

Consideramos que o uso pelo aluno B24 de “capacidade em metros” revela de um lado, uma forma coloquial de redução “no dia a dia” da expressão “capacidade em metros cúbicos”. Por outro lado, a confusão que se faz entre as unidades de medida de capacidade e as de volume ou as relações de equivalências entre elas. Além disso, por meio deste exemplo, verificamos dificuldades relacionadas à multiplicação de números decimais, ao aluno apresentar o resultado 12,5 m^3, quando o correto seria: $(0,5\ m)^3 = 0.5\ m \times 0.5\ m \times 0.5\ m = 0,125\ m^3$.

A propósito da FRP do aluno C06 (Figura 44), evidenciamos no texto a menção de “um recipiente retangular”. O que caracteriza uma dificuldade no campo geométrico de distinção entre as figuras do paralelepípedo e do retângulo. Figueiredo (2013), explica que

> Para a compreensão de volume como grandeza, diante de uma situação de comparação de volume entre sólidos constituídos por cubinhos idênticos (situação), a estratégia eleita para o cálculo de volume, bem como os conceitos mobilizados para a resolução (invariantes operatórios) dependerão da compreensão do sólido como uma figura espacial, tridimensional (a representação simbólica) (FIGUEIREDO, 2013, p. 27-28).

Figura 44 - FRP pelo C06 - A partir de um início dado, continuar o problema


No paiol de gêneros da EAM devem ser armazenadas 60 caixas cúbicas em pilhas no formato de paralelepípedos...

Sabendo que as caixas serão armazenadas em um recipiente retangular de medidas 2000cm x 0,15km x 22 m quantos cubos caberão sabendo que sua aresta vale 4 quantos cubos cabem?

$V_{\square} = 20 \cdot 15 \cdot 22 = 6600\ m^3$

$V_{\square} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 216\ m^3$

$\frac{6600\ m^3}{216\ m^3} =$ QTD de Nº

S = 30 caixas

Fonte: Protocolo do aluno C06.

Observamos também no texto do problema formulado, que o aluno atribui o número “4” à medida da aresta do cubo sem fazer referência à unidade de medida utilizada. De acordo com a resolução, percebemos que a medida da aresta é 4 m e ele se confunde ao calcular a medida do volume da caixa cúbica ao apresentar valor igual a 216 m^3, quando o correto seria $4\ m \times 4\ m \times 4\ m = 64\ m^3$. Ao dividir o volume do paralelepípedo pelo volume de uma caixa o aluno C06 apresenta o seguinte **teorema em ação** errôneo**:** um objeto sólido preenche completamente um espaço tridimensional. De acordo com as dimensões atribuídas ao paralelepípedo (20 m x 15 m x 22 m) e a aresta da caixa cúbica (4 m), teríamos uma pilha com no máximo 5 caixas no comprimento, 3 caixas na largura e 5 caixas na altura, totalizando 75 caixas. Diante de tal FRP, sentimo-nos impulsionados a rememorar aspectos sobre o conceito de volume, tais como:

> Volume é o espaço que ocupa um corpo em relação a outros objetos, ou a quantidade de unidades que formam o corpo, ou o espaço ocupado ao submergir um objeto em um líquido. Também pode ser definido como a quantidade de espaço que ocupa ou pode ser ocupado por qualquer entidade 'mensurável', seja sólida, líquida, gasosa, quântica ou de vácuo; geralmente medido em metros cúbicos (m^3) e litros (l) (RIGHI, 2018, p. 8).

Por meio de outro exemplo, podemos observar no problema formulado pelo aluno B23 (Figura 45), que ele atribuiu 20 cm x 10 cm x 5 cm às arestas do cubo, sendo latente o **teorema em ação** errôneo que o cubo possui arestas com medidas diferentes.

Figura 45 - FRP pelo B23 - A partir de um início dado, continuar o problema

No paiol de gêneros da EAM devem ser armazenadas 60 caixas cúbicas em pilhas no formato de paralelepípedos...

Sabendo que cada caixa possui dimensões de 20cm x 10cm x 5cm, defina qual a Volume de caixas no paiol em dm^3

$\bullet\ 20 . 10 , 5 = 1000\ cm^3$

$1000 cm^3 = 1 dm^3$

K H d m d c m

Fonte: Protocolo do aluno B23.

Na Figura 45, podemos perceber como o aluno B23, representa as unidades de medidas para fazer a conversão de cm^3 para dm^3, utilizando apenas a primeira letra de cada unidade de medida. Não sendo explícita a diferenciação entre a unidade dam^3 e dm^3, bem como m^3 e mm^3. Compreendemos que a representação simbólica das medidas de volume é um fato que merece atenção. Como adverte Morais (2013), em sua análise de livros didáticos:

> No caso de volume, considerando, por exemplo, um bloco retangular cuja largura, altura e profundidade medem 2 m, 3 m, e 5m, respectivamente, algumas coleções podem calcular o volume como V = 2 x 3 x 5 = 30 m^3, o que é inadequado, uma vez que de um lado se tem um número e de outro um volume (MORAIS, 2013, p.42).

Estes aspectos de omissão das unidades de medidas, bem presentes na FRP, no nosso entendimento, reflete como o aluno ao ser solicitado para formular um problema vai se utilizar de seu conhecimento em relação às diferentes situações já vivenciadas por ele na resolução de problemas envolvendo os conceitos de volume e capacidade, ao longo de sua escolaridade. E, isto pode ser fruto de certas práticas docentes ou por influência de livros didáticos. Haja vista que "quando se defronta com uma nova situação, o estudante usa o conhecimento desenvolvido em sua experiência de situações anteriores e tenta adaptá-lo à nova situação" (MAGINA *et al*. 2001, p. 5).

5.4 A FRP A PARTIR DE UMA PERGUNTA

Para FRP a partir de uma pergunta, propomos: ***Crie um problema para a pergunta: Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga? E, resolva-o***.

5.4.1 Análise e discussão da FRP a partir de uma pergunta

Nesta atividade, os problemas foram formulados e resolvidos por 20 alunos (da turma A), 23 alunos (da turma B) e 18 alunos (da turma D). Iniciamos a análise e discussão sobre a FRP de 48 dos 61 alunos que realizaram a atividade, antes de expormos as dificuldades identificadas na FRP por 13 dos 61 alunos, no tópico 5.4.2.

No Quadro 15, apresentamos o que identificamos, com maior frequência (17 dos 48 alunos), quanto às similaridades identificadas na FRP a partir de uma pergunta, versando sobre situações de transformação de unidades, operacionalização de medidas e comparação de volumes. Ressaltamos que apesar da jacubeira ser um objeto do cotidiano da EAM, pois os alunos costumam utilizá-la na hora de suas refeições, identificamos incoerências nas medidas atribuídas à capacidade das jacubeiras (ex. 500 L, 4m^3, 5m^3) em 7 de 17 dessas FRP.

Quadro 15 - Componentes da organização invariante da FRP a partir de uma pergunta dada - 1º mais frequente (17 alunos)

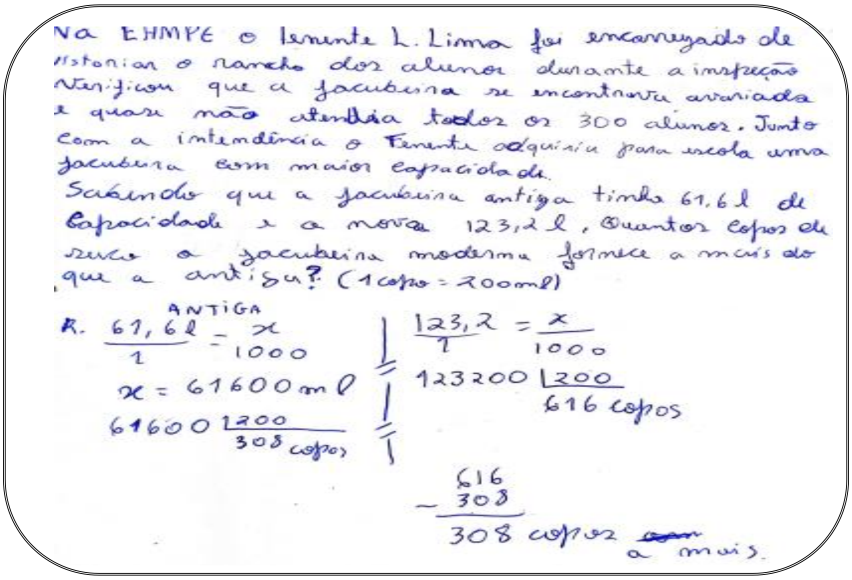
Situações (S) Situação de medição - transformações de unidades e operacionalização de medidas. Situação de comparação.
Metas e antecipações (MA): Formular e resolver um problema a partir da pergunta: Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?
Regras de ação (RA) Apresentação da capacidade em litros, kL, cL, mL ou do volume em cm^3, dm^3 ou m^3, da jacubeira antiga e da jacubeira moderna (para posterior transformação de litro para mL). Apresentação da capacidade de um copo em mL. Divisão da capacidade de cada jacubeira (mL) pela capacidade do copo (mL) a fim de obter a quantidade de copos de cada uma. Subtração da quantidade de copos fornecidos pela jacubeira moderna da quantidade da antiga. Indicação do volume maior que o outro. **Pergunta dada:** Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?
Invariantes operatórios (IO) Tornar homogêneas as unidades de medida para serem divididas e subtraídas as medidas de capacidade (jacubeira em ml e copo em mL). • Razão e proporção - Uso de regra de três para converter unidades de medidas ou, • Uso de divisões por 10, 100 ou 1.000 para converter unidades de medidas. Divisão e subtração de medidas. Comparação de medidas (para mais e para menos).

Fonte: Autoria própria.

Sobre a organização na FRP (Quadro 15), destacamos nas situações de transformação de unidades, por parte de alguns alunos, o uso de representações simbólicas diferenciadas quanto ao quadro numérico e o das grandezas volume e capacidade, além do uso de técnicas de conversão de unidades bem diversificadas. Resta-nos em aberto a reflexão sobre a necessidade que alguns alunos sentem em formular problemas com unidades de medidas pouco utilizadas no dia a dia para depois convertê-las em litros (ex.: kL, cL para L) ou o uso de números decimais e em notação científica. Seria por imaginar que isto valoriza o problema formulado por eles?

Por exemplo, no caso do aluno E18 (Figura 46), ele usa números decimais para indicar a capacidade de uma jacubeira (123,2 L ou 61,6 L). Essas medidas destoam da realidade comercial, pois um bebedouro industrial (jacubeira) é vendido comumente com uma medida em números inteiros (ex. :50L, 100 L, 200 L).

Figura 46 - FRP pelo E18 - A partir de uma pergunta



Na EHMPE o Tenente L. Lima foi encarregado de vistoriar o rancho dos alunos durante a inspeção. Verificou que a jacubeira se encontrava avariada e quase não atendia todos os 300 alunos. Junto com a intendência o Tenente adquiria para escola uma jacubeira com maior capacidade.

Sabendo que a jacubeira antiga tinha 61,6 l de capacidade e a nova 123,2 l, Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a antiga? (1 copo = 200ml)

R. ANTIGA $\frac{61,6\,l}{1} = \frac{x}{1000}$

$x = 61600\,ml$

$61600 \div 200 = 308$ copos

$\frac{123,2}{1} = \frac{x}{1000}$

$123200 \div 200 = 616$ copos

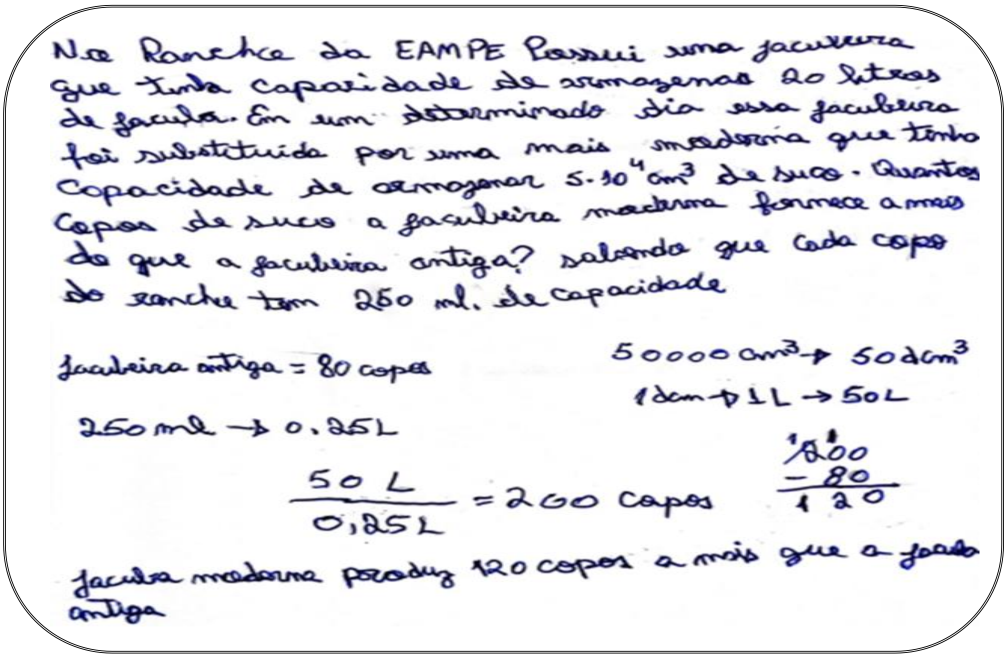
$616 - 308 = 308$ copos ~~com~~ a mais.

Fonte: Protocolo do aluno E18.

No exemplo da FRP do aluno E18 (Figura 46), podemos inferir que ele se utiliza dos conceitos de razão e proporção, mobilizando implicitamente o teorema em ação: “duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando/diminuindo o valor de cada uma delas um certo número de vezes, o valor correspondente da outra também aumenta/diminui o mesmo número de vezes.” Este aluno explicita na resolução do problema, o uso da regra de três para converter litros em ml (técnica empregada também por mais 2 alunos). Em seguida, ele realiza uma situação de operacionalização de medidas, dividindo a capacidade de cada jacubeira pela capacidade de um copo, a fim de obter a quantidade de copos fornecidos por cada uma delas e depois compará-las.

No caso do aluno E02 (Figura 47), ele apresenta no texto do problema um número representado em notação científica (5.10^4) e a unidade de medida cm^3 para expressar a capacidade de uma das jacubeiras. Neste sentido, destacamos as considerações de Leão (2020, p. 83) ao afirmar que “entende-se também que a capacidade de certo recipiente pode ser dada em cm^3, se esta for o volume interno do recipiente”. Este aluno apresenta uma medida mais coerente em relação à capacidade das jacubeiras (50L e 20L). Diferentemente, de alunos que chegam a atribuir 1 m^3 à capacidade de uma das jacubeiras, como exposto no item 5.4.1.

Figura 47 - FRP pelo E02 - A partir de uma pergunta


No Rancho da EAMPE Possui uma jacubeira que tinha capacidade de armazenar 20 litros de jacuba. Em um determinado dia essa jacubeira foi substituida por uma mais moderna que tinha capacidade de armazenar $5 \cdot 10^4$ cm³ de suco. Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga? sabendo que cada copo do rancho tem 250 ml. de capacidade

jacubeira antiga = 80 copos

$50000\ cm^3 \rightarrow 50\ dm^3$

$1\ dm \rightarrow 1L \rightarrow 50L$

$250\ ml \rightarrow 0{,}25L$

$\frac{50\ L}{0{,}25L} = 200$ copos

$200 - 80 = 120$

jacuba moderna produz 120 copos a mais que a jacuba antiga

Fonte: Protocolo do aluno E02.

O aluno E02 utiliza implicitamente o teorema em ação: para converter as unidades de medidas de volume (cm³ para dm³) é preciso dividir por 1.000. Ele não utilizou regra de três como fez o aluno 18. Tais FRP, remete-nos ao fato de que

> É uma tarefa essencial, teórica e empírica, dos pesquisadores entender por que uma certa representação simbólica particular pode ser útil, e sob quais condições, e quando e por que pode ser proveitosamente substituída por outra mais abstrata e geral (VERGNAUD, 1994, p. 43).

Assim, diante da formulação de um problema por um aluno e o desafio dele mesmo resolvê-lo, consideramos que é provável que ele possa se sentir mais à vontade em apresentar sua própria forma de resolução. Sobre este fato, recordamos que as regras de ação, segundo Vergnaud (1999), agregam-se à tomada de informações e controle da situação. Assim, à medida que o aluno formula seu problema, ele já está pensando como pode resolvê-lo.

No Quadro 16, em relação à FRP, essa se diferencia, essencialmente, pela apresentação das dimensões de cada jacubeira, para cálculo dos seus volumes, sendo necessário o uso da fórmula do paralelepípedo. Este foi o segundo tipo mais frequente (11 dos 48 alunos), quanto às similaridades na FRP a partir de uma pergunta.

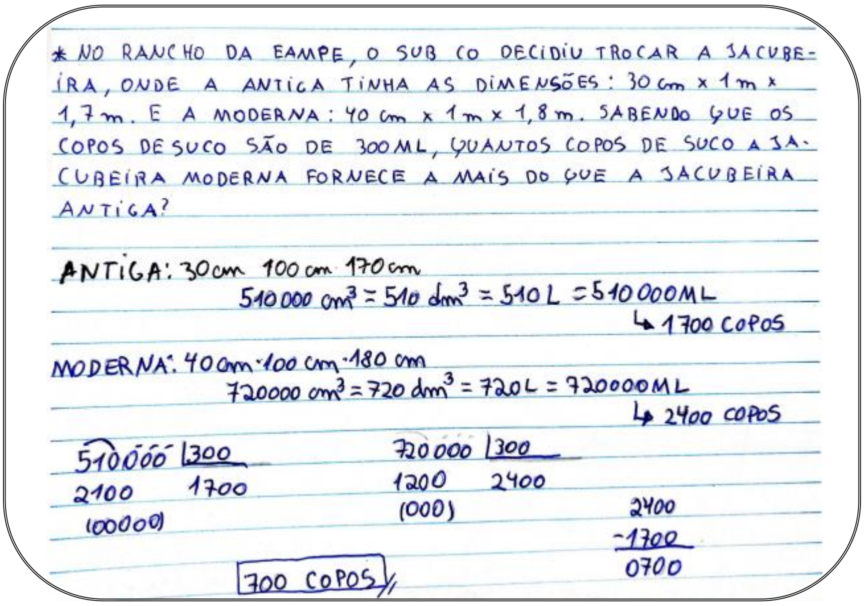
Quadro 16 - Componentes da organização invariante da FRP a partir de uma pergunta - 2º mais frequente (11 alunos)

Situações (S) Situação de medição: transformações de unidades de medidas e operacionalização de medidas. Situação de comparação de medidas de volume.
Metas e antecipações (MA): Formular e resolver um problema a partir da pergunta: Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?
Regras de ação (RA) Apresentação das dimensões da jacubeira antiga e da jacubeira moderna para cálculo do volume de cada uma ou de uma delas (para posterior transformação de, cm^3, dm^3 ou m^3 para litro e depois para mL). Apresentação da capacidade de um copo em mL ou cm^3. Divisão da capacidade de cada jacubeira (mL) pela capacidade do copo (mL) a fim de obter a quantidade de copos de cada uma. Subtração da quantidade de copos fornecidos pela jacubeira moderna da quantidade da jacubeira antiga. Indicação de duas medidas de volumes para definição de qual é o maior. ***Pergunta dada:*** Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?
Invariantes operatórios (IO) Reconhecimento da jacubeira como uma figura tridimensional: o paralelepípedo. Aplicar a fórmula para calcular o volume de um paralelepípedo. Tornar homogêneas as unidades de medida para serem divididas e subtraídas as medidas de capacidade (jacubeira em mL / copo em mL). Tornar homogêneas as unidades de medidas de capacidade para poder dividir: capacidade da jacubeira em mL / capacidade do copo em ml. Divisão e subtração de números naturais. Comparação de medidas de capacidade (para mais e para menos).

Fonte: Autoria própria.

Para este tipo de FRP, constatamos que 7 dos 11 alunos apresentaram, novamente, as medidas atribuídas às dimensões das jacubeiras com incoerências que resultaram em medidas de capacidade muito grandes ou muito pequenas (Ex: 2m x 1,7m x 1m = 3,3m^3). No exemplo da Figura 48, podemos verificar como o aluno B01, colocou no texto do problema as dimensões da jacubeira antiga medindo 30 cm x 1 m x 1,7 m e da moderna, 40 cm x 1m x 1,8 m. Isto é, resultando em medidas de capacidades irreais, 510 litros e 720 litros, respectivamente.

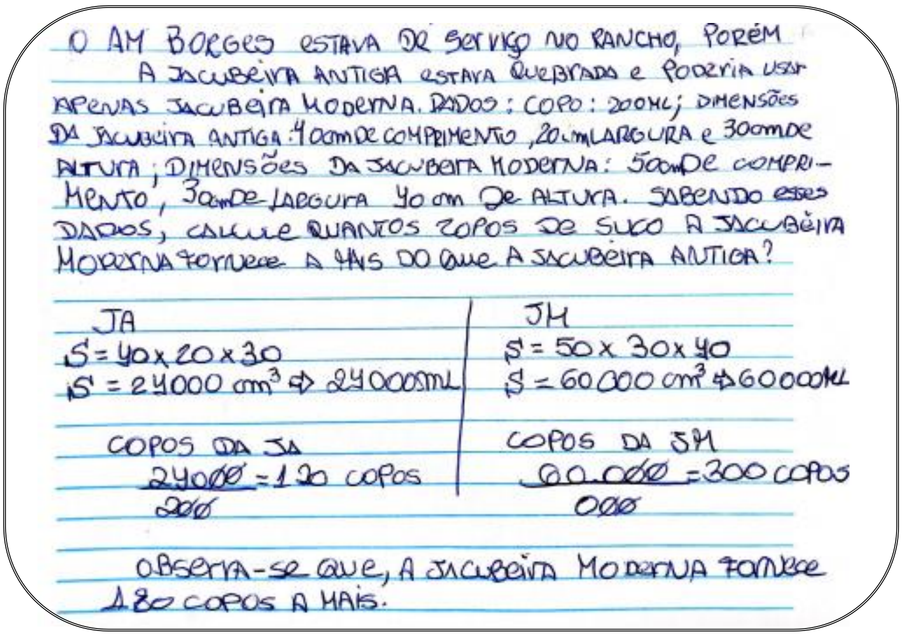
Figura 48 - FRP pelo B01 - A partir de uma pergunta



Fonte: Protocolo da pesquisa do B01.

Chamamos a atenção também sobre a forma como o aluno B01 (Figura 48), representa sucessivas conversões de unidades de medida de volume para capacidade (de cm^3 para dm^3, de dm^3 para L e de L para mL). De maneira diferente o B06 (Figura 49) propôs no texto as dimensões da jacubeira em cm e mobilizou para transformação de unidades de volume para capacidade, implicitamente, o teorema em ação: “1 cm^3 é igual a 1 mL”, reduzindo as etapas de conversão.

Figura 49 - FRP pelo B06 - A partir de uma pergunta



Fonte: Protocolo do aluno B06.

Na resolução do problema formulado pelo aluno B06 (Figura 49), observamos que ele pôs em prática o teorema em ação "quando divisor e dividendo são números terminados em zero, simplificamos a divisão, eliminando no dividendo a mesma quantidade de zeros eliminada no divisor”. Um procedimento bem diferente utilizado na resolução, em relação ao aluno B01 (Figura 48) que executou a divisão dos números múltiplos de 10, utilizando o algoritmo da divisão. De certa forma, compreendemos que a apresentação das dimensões da jacubeira em múltiplos de 10, e/ou na mesma unidade de medida (cm) no enunciado do problema de alguma forma pode facilitar os cálculos efetuados.

No que se refere às demais análises sobre a FRP a partir da pergunta dada: ***Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?*** além do exposto nos quadros (15 e 16), identificamos mais 13 tipos de FRP diferentes, apresentadas por 20 dos 48 alunos (Apêndice E). Os dados fornecidos no enunciado dos problemas formulados versaram sobre:

1. Indicação da quantidade de copos fornecidos por uma das jacubeiras e a medida da capacidade da outra jacubeira (3 alunos);
2. Indicação da medida da capacidade da jacubeira antiga e o dobro, ou triplo dessa medida, para obter a capacidade da jacubeira moderna (2 alunos);
3. Atribuição da medida da capacidade da jacubeira antiga e um percentual de litros a mais dessa medida para obter a capacidade da jacubeira moderna (2 alunos);
4. Apresentação das dimensões da jacubeira moderna ou antiga e um percentual da capacidade a mais/menos dessa medida para obter a jacubeira moderna ou antiga (2 alunos);
5. Atribuição da medida da capacidade da jacubeira antiga e uma fração a mais dessa medida para obter a capacidade da jacubeira moderna (2 alunos);
6. Apresentação da capacidade em litros das duas jacubeiras e efetuaram uma subtração entre essas medidas para determinar a quantidade de copos a mais que a jacubeira moderna fornece em relação à antiga (2 alunos);
7. Apresentação da quantidade de copos que a jacubeira antiga fornecia, para determinar sua capacidade e calcular a capacidade da jacubeira moderna a

partir de uma fração a mais da jacubeira antiga (1 aluno);

8. Apresentação da quantidade de litros a menos que a jacubeira antiga possui em relação à moderna para determinar a capacidade da jacubeira moderna à partir dessa informação (1 aluno);
9. Apresentação do consumo individual, em litros de suco, de cada aluno e indicou o percentual a mais da capacidade da jacubeira moderna em relação à antiga (1 aluno);
10. Apresentação da quantidade e a capacidade de copos que a jacubeira antiga fornece e a quantidade de litros que a jacubeira moderna tem a mais que a antiga (1 aluno);
11. Apresentação da capacidade em litros da jacubeira antiga e a quantidade de litros que sobravam da jacubeira moderna tomando como referência o consumo dos alunos com a jacubeira antiga (1 aluno);
12. Apresentação da quantidade e capacidade de copos que a jacubeira antiga fornece e a capacidade em litros da jacubeira moderna (1 aluno);
13. Apresentação da vazão em litros/min da torneira das jacubeiras antiga e moderna e o tempo de abertura dessas torneiras para fazer a comparação entre a quantidade de copos que cada uma fornece (1 aluno).

No próximo tópico, refinamos casos mais particulares em que os alunos apresentaram dificuldades mais específicas para a FRP a partir de uma pergunta.

5.4.2 Dificuldades apresentadas pelos alunos na FRP a partir de uma pergunta

A propósito da FRP a partir de uma pergunta: ***Crie um problema para a pergunta: Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga? E, resolva-o,*** consideramos importante o aluno apresentar no texto do problema dados coerentes com a pergunta dada. Além disso, apresentar uma resposta adequada para esta pergunta. Na Tabela 10, expomos as dificuldades identificadas na FRP de 13 dos 61 alunos que realizaram a atividade. Explicamos que nesses casos eles não apresentaram as mesmas regras de ação na organização da FRP, mas sim, erros comuns.

Tabela 10 - Características das dificuldades na FRP a partir de uma pergunta

Quantidade de alunos	Dificuldades identificadas
6	Usou uma pergunta diferente da proposta na atividade e resolveu corretamente.
3	Propôs dados irreais sobre o volume ou capacidade do copo e da jacubeira (1 copo = 3 cm^3 = 3 mL, 1 copo = 10 mL ou jacubeira com 4.928 litros).
2	Formulou o problema sem apresentar dados coerentes e/ou suficientes para pergunta dada.
1	Formulou com pergunta diferente e/ou com erro na resolução.
1	Formulou o problema usando a pergunta da atividade, mas cometeu erro de conversão de medida (1 m^3 = 10 L).

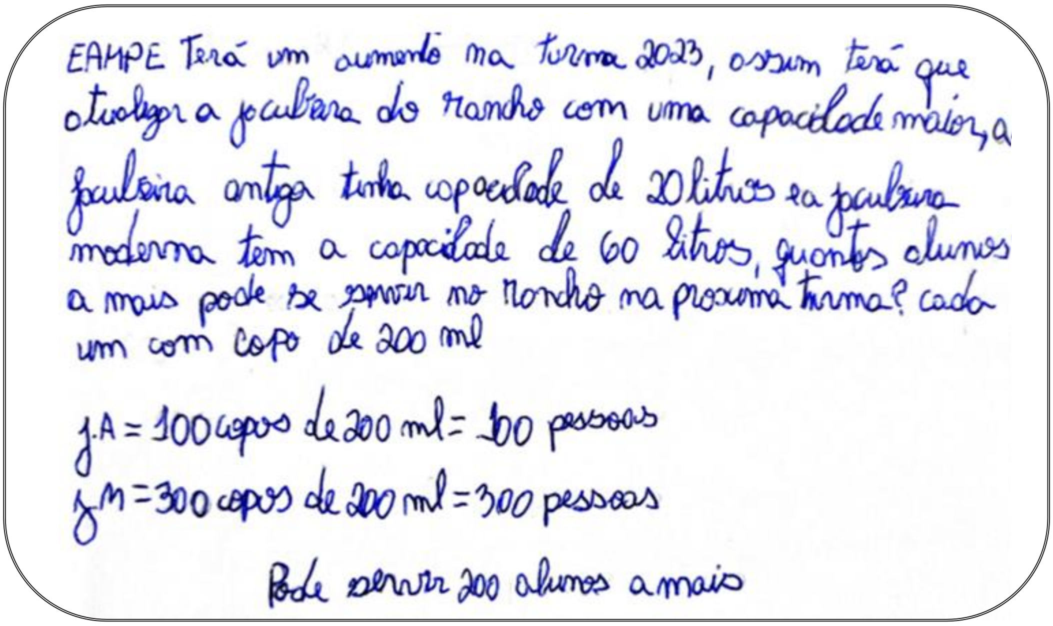
Fonte: Autoria própria.

Na Tabela 10, podemos perceber as dificuldades na FRP a partir de uma pergunta. O caso mais frequente se refere àquelas em que os alunos apresentaram perguntas diferentes em relação à atividade proposta, porém não apresentaram erro na resolução. Estas perguntas versaram sobre:

1. Quantos alunos a mais podem se servir no rancho na próxima turma?
2. Quantos copos irão servir uma jarra de 4 litros?
3. Quantos copos de jacuba poderão ser servidos?
4. Quantos copos de suco a jacubeira antiga produz em relação à antiga em 21 horas?
5. Quantos litros tinha a nova jacubeira?
6. Quantos litros a nova jacubeira suporta e quantos copos de 200 ml poderá encher?

Chamamos a atenção que quando sugerimos a FRP a partir de uma pergunta dada, pode ocorrer do aluno modificá-la, adicionando alguma informação sem destoar integralmente da ideia da pergunta original. Como ocorreu na FRP do aluno A10 (Figura 50) que propôs a pergunta: Quantos alunos a mais podem se servir no rancho na próxima turma? Neste exemplo, podemos constatar que ele recorre ao teorema em ação: a quantidade de copos é igual à quantidade de pessoas.

Figura 50 – FRP pelo A10 - A partir de uma pergunta


EAMPE Terá um aumento na turma 2023, assim terá que atualizar a jacubeira do rancho com uma capacidade maior, a jacubeira antiga tinha capacidade de 20 litros e a jacubeira moderna tem a capacidade de 60 litros, quantos alunos a mais pode se servir no rancho na proxima turma? cada um com copo de 200 ml

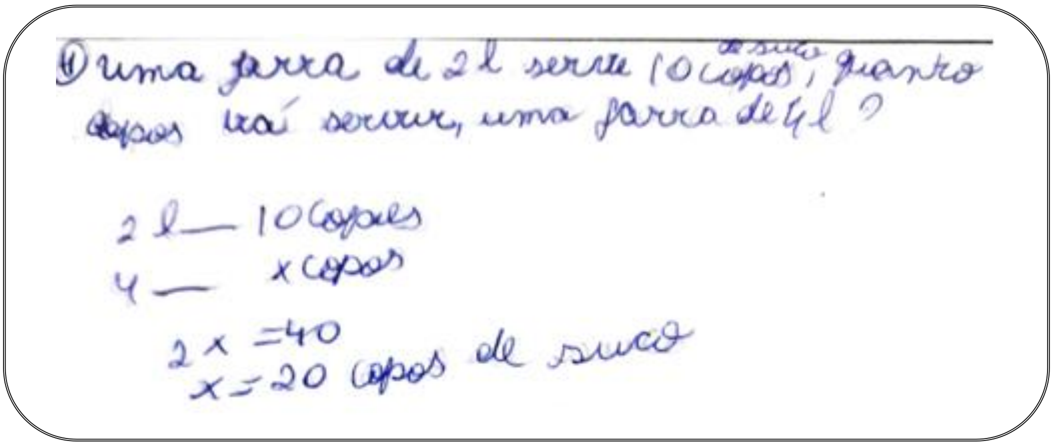
J.A = 100 copos de 200 ml = 100 pessoas
J.M = 300 copos de 200 ml = 300 pessoas

Pode servir 200 alunos a mais

Fonte: Protocolo do aluno A10.

De outra forma, percebemos na FRP a partir de uma pergunta dada que os alunos realizam modificações na pergunta original; sobretudo, quando, no processo de escrita do texto, as RA se diversificam, de forma mais acentuada. No exemplo do aluno E15 (Figura 51), temos a substituição da jacubeira por uma jarra e a finalização do problema com a pergunta "Quantos copos irá servir uma jarra de 4 litros?". Mobilizando IO sobre os conceitos de razão e proporção, consideramos, neste caso, que o aluno destoa na proposta de sua pergunta em relação à pergunta original, ao "não" propor ***Quantos copos de suco a jarra com 4L fornece a mais do a jarra de 2L?***

Figura 51 - FRP pelo E15 - A partir de uma pergunta


① uma jarra de 2 l serve 10 copos de suco, quantos copos irá servir, uma jarra de 4 l ?

2 l — 10 copos
4 — x copos

2x = 40
x = 20 copos de suco

Fonte: Protocolo do aluno E15.

As FRP pelos alunos A10 e E15 nos pareceram inquietantes, pois podemos perceber que eles formulam e resolvem os problemas sem erros conceituais e com certa coerência na articulação entre dados e pergunta, entretanto fogem da “pergunta” proposta (*Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?*). Esse fato suscita uma melhor reflexão, por parte dos professores, que pretendam utilizar este tipo de atividade quanto aos critérios avaliativos.

Sobre as FRP com dados irreais (Tabela 10), essas dizem respeito ao volume ou capacidade do copo: 1 copo = 3 cm^3 = 3 mL ou 1 copo = 10 mL. A propósito da FP com pergunta diferente daquela proposta e com erro na resolução - identificamos 1 (um) aluno que propôs: “Qual a razão entre os tempos de enchimento de um copo da jacubeira nova e da velha?” Neste caso, ele errou, pois calculou $1 \diagup 3$ ao invés de multiplicar por 3. Além disso, outro aluno propôs a pergunta: “Quantos copos de jacuba poderão ser servidos?”. Neste caso, ele errou, pois dividiu a capacidade da jacubeira moderna pela capacidade da antiga e, em seguida, dividiu o resultado pela capacidade de um copo.

Quanto às FRP apresentadas com dados incoerentes e/ou insuficientes para a pergunta dada, identificamos 1(um) aluno que apresentou as dimensões da jacubeira (1,5 m x 0,5 m x 0,25 m) e sua capacidade (150 L), porém essas medidas não fornecem capacidades equivalentes. No caso do outro aluno, ele não apresentou a capacidade dos copos, mas concluiu que, ao dobrar as dimensões de uma das jacubeira, ela fornece 8 (oito) vezes mais copos do que a outra.

Por fim, registramos a ocorrência de um caso em que 1 (um) aluno formulou o problema com pergunta igual àquela proposta e com erros conceituais. Este efetuou a conversão de m^3 para litros mobilizando erroneamente o teorema em ação: 1 m^3 é igual a 10 litros.

5.5 A FRP A PARTIR DE UMA RESPOSTA

Em nosso entendimento, a FRP a partir de uma resposta dada permite uma forte articulação entre a formulação e a resolução de um problema. No nosso caso, propomos a FRP com uma resposta expressa em uma frase: “O reservatório tem capacidade de 6.000 litros”, de forma que esperamos, especialmente, o aluno orientar a pergunta do problema, formulado por ele, coerente com a resposta solicitada.

5.5.1 Análise e discussão da FRP a partir de uma resposta dada

Nesta atividade, participaram 19 alunos (da turma E), 20 alunos (da turma F) e 14 alunos (da turma G). De 53 alunos, 30 conseguiram realizar esta atividade conforme apresentamos no Apêndice F. A seguir, refinamos os componentes da organização invariante dos dois tipos de FRP a partir de uma resposta, mais frequentes, sendo o primeiro realizado por 16 alunos e o segundo por 5 alunos. Na sequência, expomos as dificuldades identificadas na FRP desses alunos, no tópico 5.5.2.

Na FRP a partir da resposta “o reservatório tem capacidade de 6.000 litros”, os 16 alunos desenvolveram uma concepção tridimensional (multiplicando as medidas das três arestas) de um paralelepípedo, ou seja, eles apelaram para o uso da fórmula do cálculo do volume. Tal fato, remete-nos às seguintes considerações:

> Capacidade e volume são conceitos que possuem muita relação e a diferenciação entre esses conceitos é delicada, no entanto consideramos que a distinção entre volume e capacidade depende dos contextos que esses conceitos estão inseridos, isto é, depende do que se quer medir (MELO, 2018, p.42).

Assim, os alunos, como apresentamos no Quadro 17, enfatizam sobre a situação de transformação de unidades - a relação que existe entre as unidades de volume e capacidade. Metade deles apresentaram as medidas do objeto explicitando a equivalência entre as medidas “1 dm^3 é igual a 1 litro” e a outra metade “1 m^3 é igual a 1.000 litros”.

Quadro 17- Componentes da organização invariante da FRP a partir de uma resposta - 1º mais frequente (16 alunos)

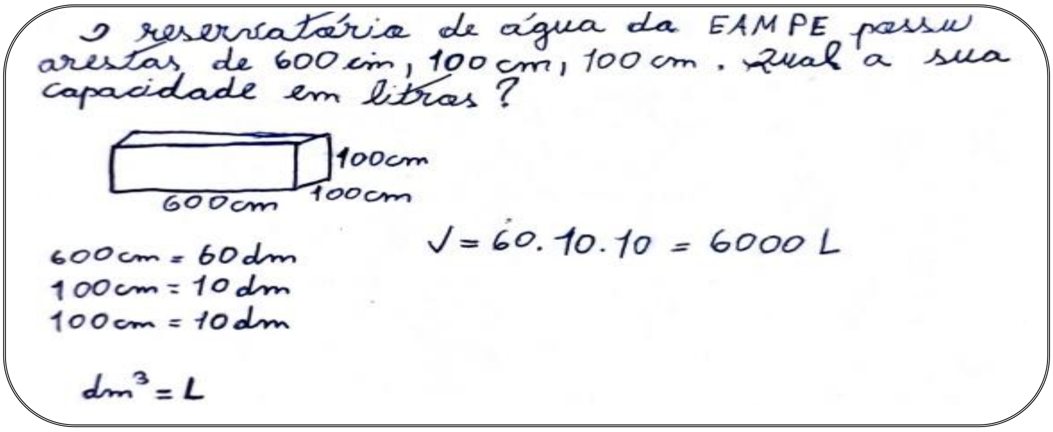
Situações (S) Situação de medição - Transformações de unidades de medidas.
Metas e antecipações (MA): Formular e resolver um problema cuja resposta seja: “O reservatório tem capacidade de 6.000 litros”.
Regras de ação (RA): Apresentação do objeto: reservatório no formato de paralelepípedo, tanque de combustível ou caixa d’água. Apresentação das dimensões do objeto em dm, cm ou m. Cálculo do volume do objeto em dm^3, cm^3 ou m^3. Transformação de unidades de medidas de dm^3, cm^3 ou m^3 para litro). **Pergunta:** Qual é a capacidade do reservatório em litros?
Invariantes operatórios (IO):

Reconhecimento de um objeto físico como tridimensional: o paralelepípedo. Aplicação da fórmula para calcular o volume de um paralelepípedo. Conversão de unidades de volume para capacidade.

Fonte: Autoria própria.

Dentre as FRP com a organização (Quadro 17), selecionamos a do aluno F20 (Figura 52). Na FP construída por ele, observamos no texto as dimensões do reservatório em cm e, através da representação simbólica que utiliza na resolução, podemos constatar que ele faz a transformação de unidades das medidas das dimensões (de cm para dm) e em seguida indica a relação de equivalência: $dm^3 = L$.

Figura 52 - FRP pelo F20 - A partir de uma resposta



Fonte: Protocolo do aluno F20.

O aluno F20 (Figura 52), usa a relação $dm^3 = L$, quando efetua o produto das dimensões (sem mencionar que estão em dm), o que resultaria no volume de 6.000 dm^3 apresentando imediatamente, como resultado, 6.000 L. Este é um fato que nos parece interessante do ponto de vista da necessidade do aluno em finalizar a atividade com a resposta 6.000 L. Temos em cena uma concepção de volume-número (60.10.10). Contudo, ocorre todo um processo de transformação de cm para dm, o que nos leva a concluir que ele realiza isto de forma consciente.

Em relação ao Quadro 18, a organização da FRP diferencia-se pela inserção do conceito de porcentagem.

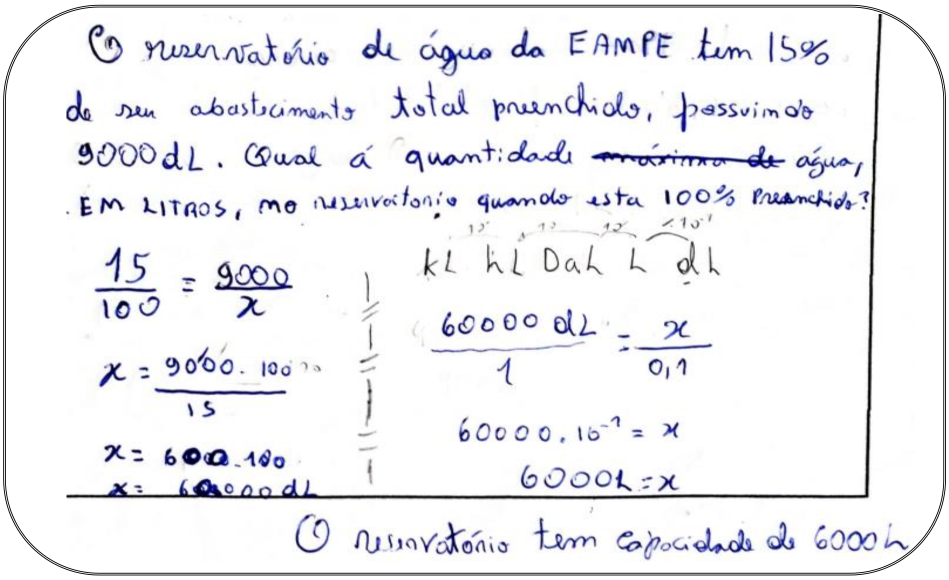
Quadro 18 - Componentes da organização invariante da FRP a partir de uma resposta - 2º mais frequente (5 alunos)

Situações (S): Situação de medição - transformação de unidades - Operacionalização de medidas
Metas e antecipações (MA): Formular e resolver um problema cuja resposta seja: “O reservatório tem capacidade de 6.000 litros”.
Regras de ação (RA): Apresentação do objeto: reservatório, recipiente. Apresentação da capacidade do objeto em L, hL, dL ou volume em m^3. Apresentação da porcentagem de uma parte da capacidade total de um reservatório e o correspondente a quantidade de litros. **Pergunta:** Qual é a capacidade total do reservatório em litros?
Invariantes operatórios (IO): Cálculo de porcentagem (por regra de três) Conversão de unidades de capacidade para volume.

Fonte: Autoria própria.

Expomos aqui, dois exemplos (alunos E18 e G05) em cujo texto do problema havia uma parte da capacidade em porcentagem e um questionamento sobre a capacidade total do reservatório. Entretanto, na situação de transformação de unidades de capacidade para volume, encontramos no caso do aluno E18 (Figura 53), o uso da unidade decilitro, pouco utilizada no dia a dia.

Figura 53 - FRP pelo E18 - A partir de uma resposta


O reservatório de água da EAMPE tem 15% do seu abastecimento total preenchido, possuindo 9000dL. Qual á quantidade ~~máxima de~~ água, EM LITROS, no reservatório quando esta 100% Preenchido?

$$\frac{15}{100} = \frac{9000}{x}$$
$$x = \frac{9000 \cdot 100}{15}$$
$$x = 600 \cdot 100$$
$$x = 60000\,dL$$

kL hL DaL L dL

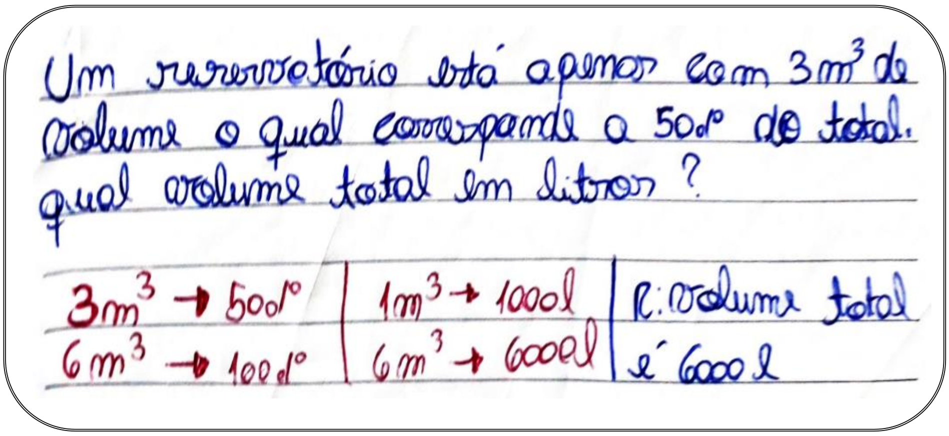
$$\frac{60000\,dL}{1} = \frac{x}{0,1}$$
$$60000 \cdot 10^{-1} = x$$
$$6000L = x$$

O reservatório tem capacidade de 6000L

Fonte: Protocolo do aluno E18.

No exemplo da FRP do aluno G05 (Figura 54), percebemos que ele opera a conversão de medidas, relacionando m^3 a litros. Bem diferente do aluno E18 (figura 53), que utilizou a escala de conversão das unidades de medidas.

Figura 54 - FRP pelo G05 - A partir de uma resposta



Fonte: Protocolo do aluno G05.

Além disso, sobre o cálculo da porcentagem total, o aluno G05 (Figura 54), apresentou “50%”, o que tornou a resolução do problema formulado por ele bem mais fácil, em torno do teorema em ação: 50% correspondem à metade do total. Diferente do aluno E18 (Figura 53) que recorreu ao teorema em ação: 15% significam 15 em 100, mobilizando o conceito de proporção para obter a porcentagem (100%) que equivale a capacidade total.

Em relação à atividade de FRP, além do que apresentamos nos Quadros 17 e 18, diagnosticamos outras 6 organizações da atividade de FRP, com similaridades menos frequentes ou com produções particulares que podem ser vistas no Apêndice F. Todas conduziram à resposta “O reservatório tem capacidade 6.000 litros” e versaram sobre:

1. Apresentação do volume total em m^3 para conversão em litros (2 alunos);
2. Apresentação de uma capacidade inicial e da capacidade que completa a total (2 alunos);
3. Apresentação de uma quantidade de objetos (baldes, tanque) com suas respectivas quantidades para serem multiplicadas de modo a obter a capacidade total (2 alunos);
4. Apresentação de uma fração da capacidade para calcular a capacidade total (1 aluno);
5. Apresentação do tempo de enchimento de uma fração da capacidade total para obter a total (1 aluno);

6. Apresentação da quantidade de alunos e do consumo diário individual deles para obter a capacidade total (1 aluno).

Na sequência, apresentaremos e discutiremos algumas incoerências/dificuldades mais frequentes, apresentadas pelos alunos para essa proposta de FRP, com organizações da atividade diversificadas.

5.5.2 Dificuldades apresentadas pelos alunos na FRP a partir de uma resposta

Para Chica (2001, p. 167) "o texto da resposta traz restrições que o aluno deve considerar na elaboração do texto do problema, especialmente na pergunta que deve ser orientada pela resposta solicitada". Além disso, faz-se necessário levar "os alunos a perceberem que um problema pode ter ou não dados numéricos ou suficientes, que relação existe entre os dados numéricos e outros elementos do texto, e principalmente nesse tipo de proposta, se a resposta é coerente com o problema". Diante disso, expomos na Tabela 11, o panorama da FRP que consideramos não atender tais critérios.

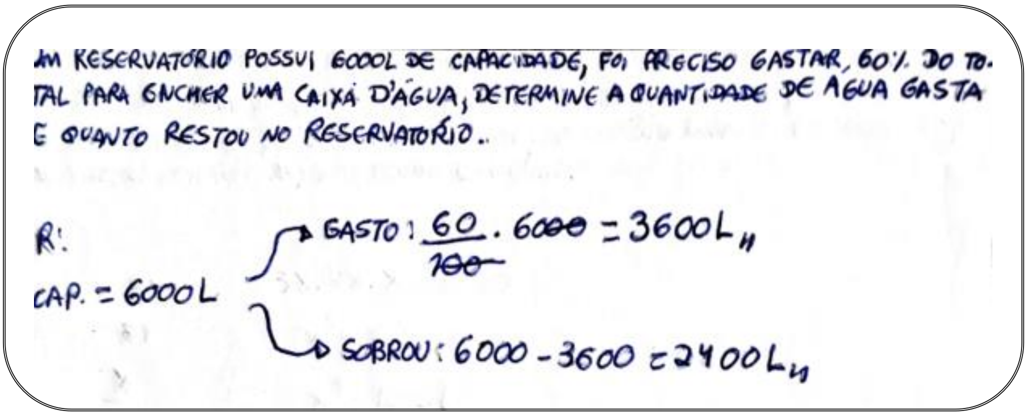
Tabela 11 - Características das dificuldades na FRP a partir de uma resposta

Quantidade de alunos	Dificuldades identificadas
8	Formulou o problema colocando a resposta: 6.000 litros, no seu enunciado.
7	Formulou o problema usando a resposta proposta e com erro de cálculo numérico (2) e/ou conceitual (5).
4	Formulou um problema com uma pergunta que destoa da resposta proposta: "o reservatório tem capacidade de 6.000 litros".
3	Formulou o problema usando a resposta proposta, mas não explicitou a resolução.
1	Formulou um problema sem usar a resposta proposta e com erros conceituais.

Fonte: Autoria própria.

Sobre os alunos que formularam e resolveram o problema usando a capacidade de 6.000 litros como dado no enunciado do problema, indicamos como exemplos a FRP dos alunos E11 (figura 55) e E12 (figura 56). Vale salientar que não identificamos erros na produção de ambos, porém eles não atentaram que a proposta dessa atividade seria formular e resolver um problema com a resposta: "o reservatório tem capacidade de 6.000 litros”.

Figura 55 - FRP pelo E11 - A partir de uma resposta


UM RESERVATÓRIO POSSUI 6000L DE CAPACIDADE, FOI PRECISO GASTAR 60% DO TOTAL PARA ENCHER UMA CAIXA D'ÁGUA, DETERMINE A QUANTIDADE DE ÁGUA GASTA E QUANTO RESTOU NO RESERVATÓRIO.

R:
CAP. = 6000L

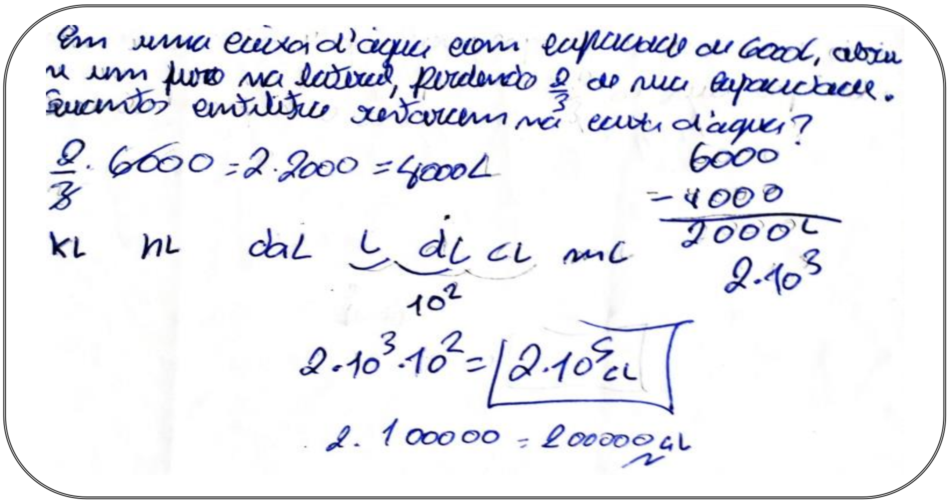
GASTO: $\frac{60}{100} \cdot 6000 = 3600L$

SOBROU: $6000 - 3600 = 2400L$

Fonte: Protocolo do aluno E11.

O aluno E11 (Figura 55) utilizou o conceito de porcentagem na FRP, enquanto o aluno E12 (Figura 56) faz uso do conceito de fração. Ambos desenvolveram situações de medição com operacionalização de medidas, entretanto as perguntas formuladas não correspondem à resposta proposta na atividade.

Figura 56 - FRP pelo E12 - A partir de uma resposta


Em uma caixa d'água com capacidade de 6000L, abriu-se um furo na lateral, perdendo $\frac{2}{3}$ de sua capacidade. Quantos centilitros restaram na caixa d'água?

$\frac{2}{3} \cdot 6000 = 2 \cdot 2000 = 4000L$

$6000 - 4000 = 2000L$

$2 \cdot 10^3$

kL hL daL $\underbrace{L \quad dL \quad cL}_{10^2}$ mL

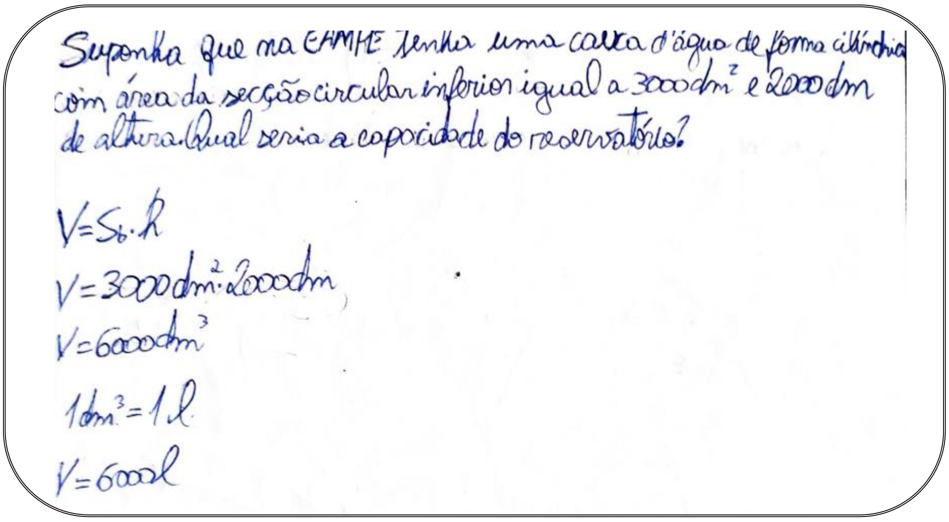
$2 \cdot 10^3 \cdot 10^2 = \boxed{2 \cdot 10^5 cL}$

$2 \cdot 100000 = 200000 cL$

Fonte: Protocolo do aluno E12.

No exemplo seguinte (Figura 57), explicitamos a FRP do aluno F10 que formulou o problema, diferentemente dos exemplos anteriores, utilizando um reservatório no formato cilíndrico. Além disso, observamos nos dados do problema que ele atribuiu medidas à área da seção circular (3.000 dm^3) e à altura (2.000 dm) de maneira equivocada, não atentando para o erro de cálculo numérico ao multiplicar 3.000 x 2.000 resultando em 6.000 dm^3.

Figura 57 - FRP pelo F10 - A partir de uma resposta


Suponha que na CAMHE tenha uma caixa d'água de forma cilíndrica com área da secção circular inferior igual a 3000dm² e 2000dm de altura. Qual seria a capacidade do reservatório?

$V=S_b \cdot h$

$V=3000dm^2 \cdot 2000dm$

$V=6000dm^3$

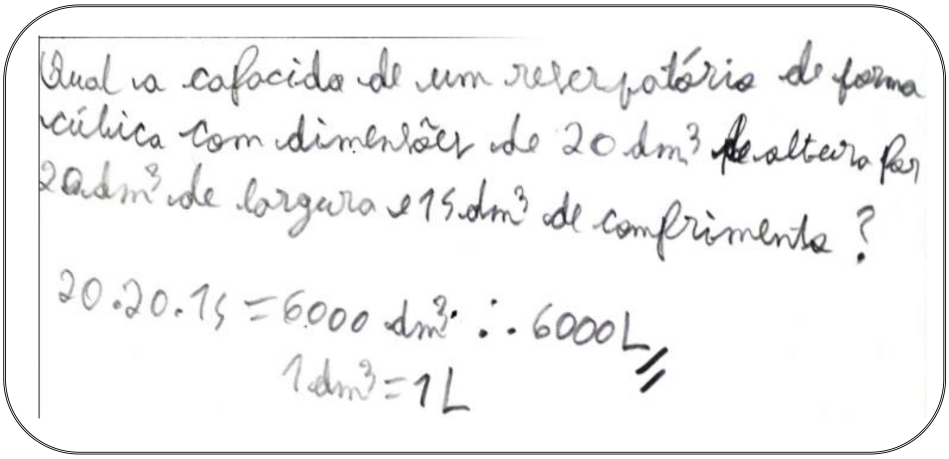
$1dm^3=1l$

$V=6000l$

Fonte: Protocolo do aluno F10.

Já no exemplo da FRP do aluno F12 (Figura 58), percebemos como ele apresenta o teorema em ação errôneo: O cubo possui arestas com medidas diferentes: 20 dm^3 de altura, 20 dm^3 de largura e 15 dm^3 de comprimento. Além de atribuir uma unidade de volume (dm^3) às dimensões altura, largura e comprimento do cubo, onde o correto seria uma medida de comprimento (dm) por se tratar de uma medida linear.

Figura 58 - FRP pelo F12 - A partir de uma resposta


Qual a capacidade de um reservatório de forma cúbica com dimensões de 20 dm³ de altura por 20 dm³ de largura e 15 dm³ de comprimento?

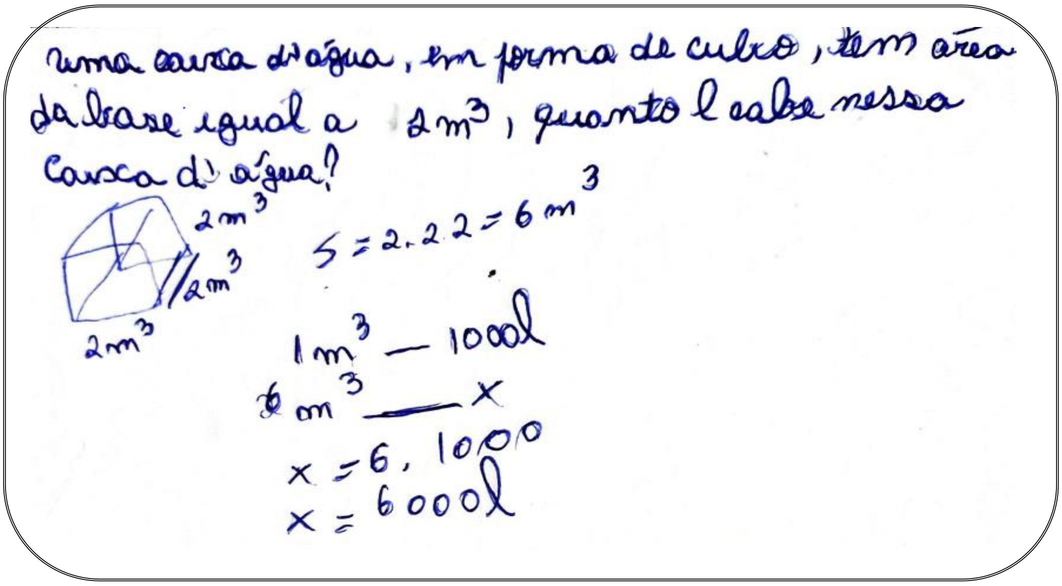
$20 \cdot 20 \cdot 15 = 6000\ dm^3 \therefore 6000L$

$1dm^3=1L$

Fonte: Protocolo do aluno F12.

No caso do aluno E15 (Figura 59), ele apresenta uma concepção de volume-área (ANWANDTER-CUELLAR, 2013), ou seja, ele confunde as grandezas volume e área. O aluno faz apelo aos teoremas em ação errôneos: A área da base de um cubo é considerada a aresta do cubo; a medida da aresta do cubo é indicada em m^3; o produto de 2 x 2 x 2 é igual a $6m^3$.

Figura 59 - FRP pelo E15 - A partir de uma resposta



uma caixa d'água, em forma de cubo, tem área da base igual a 2m³, quanto l cabe nessa Caixa d' água?

2m³

2m³

2m³

$S = 2.2.2 = 6\,m^3$

$1\,m^3 — 1000\,l$

$6\,m^3 — x$

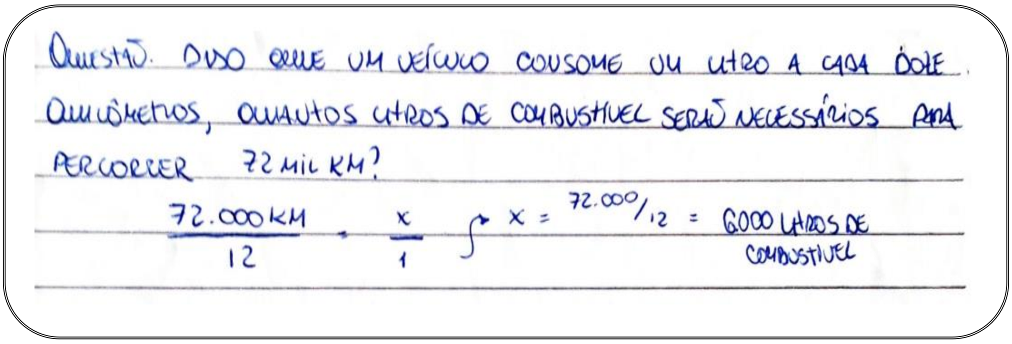
$x = 6 . 1000$

$x = 6000\,l$

Fonte: Protocolo do aluno E15.

Ainda em relação às incoerências identificadas pelos alunos que realizaram essa atividade, apresentamos o exemplo da FRP do aluno G16 que retrata o caso em que a pergunta formulada no problema do aluno destoa da resposta: “O reservatório tem capacidade de 6.000 litros”.

Figura 60 - FRP pelo G16 - A partir de uma resposta



QUESTÃO: DADO QUE UM VEÍCULO CONSOME UM LITRO A CADA DOZE QUILÔMETROS, QUANTOS LITROS DE COMBUSTÍVEL SERÃO NECESSÁRIOS PARA PERCORRER 72 MIL KM?

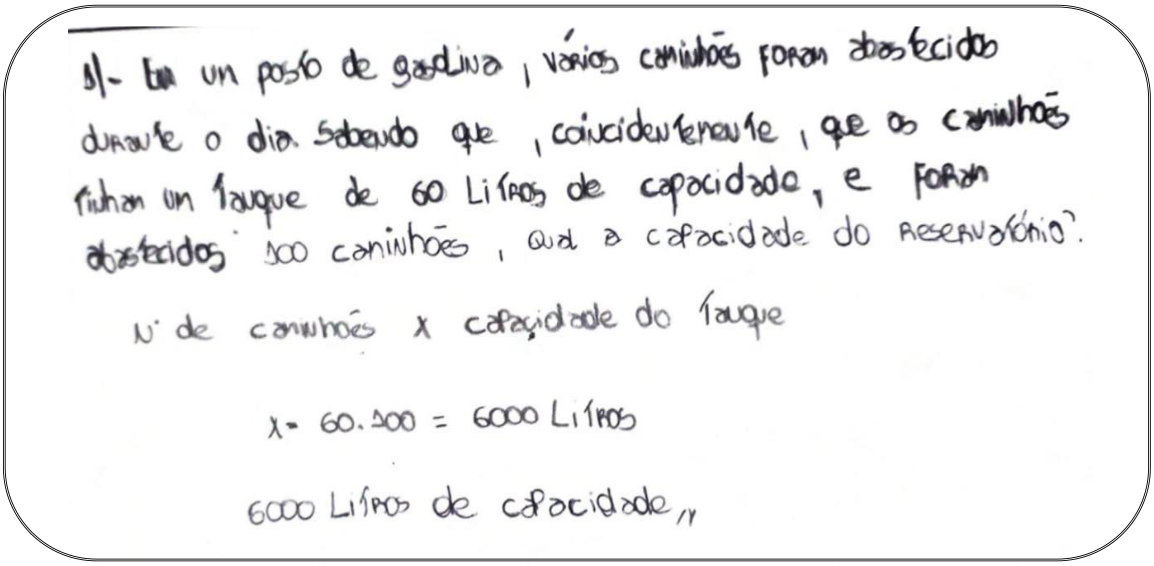
$\frac{72.000\,KM}{12} = \frac{x}{1} \rightarrow x = 72.000/12 =$ 6000 LITROS DE COMBUSTÍVEL

Fonte: Protocolo do aluno G16.

Como podemos observar, na Figura 60, o aluno elabora a pergunta do problema em torno do consumo de combustível de um veículo para percorrer uma dada distância.

De outra forma, identificamos esse tipo de incoerência na FRP do aluno E07 (Figura 61).

Figura 61 - FRP pelo E07 - A partir de uma resposta


1)- Em um posto de gasolina, vários caminhões foram abastecidos durante o dia. Sabendo que, coincidentemente, que os caminhões tinham um tanque de 60 Litros de capacidade, e foram abastecidos 100 caminhões, qual a capacidade do reservatório?

N° de caminhões x capacidade do tanque

x = 60.100 = 6000 Litros

6000 Litros de capacidade,

Fonte: Protocolo do aluno E07.

Observamos no exemplo do aluno E07 que ele, ao formular a pergunta do problema “qual a capacidade do reservatório?", não estabelece uma conexão com os dados apresentados no enunciado do problema. Neste caso, 6.000 L correspondem ao volume total de todos os tanques dos caminhões, cujo teorema em ação é: Se um tanque de um caminhão tem 60 L, 100 tanques de caminhões possuem 6.000 L.

Como finalização da análise e discussão sobre a FRP, apresentamos a seguir a proposta de realizá-la a partir de uma sentença.

5.6 A FRP A PARTIR DE UMA SENTENÇA MATEMÁTICA

Para esta atividade propomos: “Elabore um problema para a sentença: 10 m x 5 m x 2 m = 100 m^3 e resolva.”, a qual envolveu a fórmula do paralelepípedo: 10 m x 5 m x 2 m = 100 m^3. De acordo com Lima e Bellemain (2010, p.187) “as fórmulas têm um papel importante na resolução de problemas matemáticos, mas, para que cumpram esse papel a contento, é preciso que os alunos sejam capazes de utilizá-las com compreensão”. Para nós, a compreensão das fórmulas pelos alunos é também importante na formulação de problemas, de forma que buscamos verificar junto aos alunos o uso da fórmula do paralelepípedo tanto na formulação quanto na resolução dos problemas.

5.6.1 Análise e discussão da FRP a partir de uma sentença matemática

Nesta atividade, os problemas foram formulados e resolvidos por 23 alunos (da turma A), 13 alunos (da turma D) e 17 alunos (da turma G). Iniciamos a análise e discussão sobre a FRP de 33 dos 53 alunos, antes de expormos as dificuldades identificadas na FRP por 20 dos 53 alunos, no tópico 5.6.2.

Na sequência, apresentamos as similaridades identificadas na FRP a partir de uma sentença, mais frequentes (quadros 19, 20, 21 e 22). Sendo o primeiro tipo realizado por 10 alunos, o segundo e o terceiro por 5 alunos e o quarto por 4 alunos, cada.

No Quadro 19, podemos observar os resultados similares referentes à FRP de 10 alunos. Neste tipo de FRP, essencialmente, os alunos propõem no enunciado do problema os dados (10 m x 5 m x 2 m) e apresentam a resposta 100 m^3.

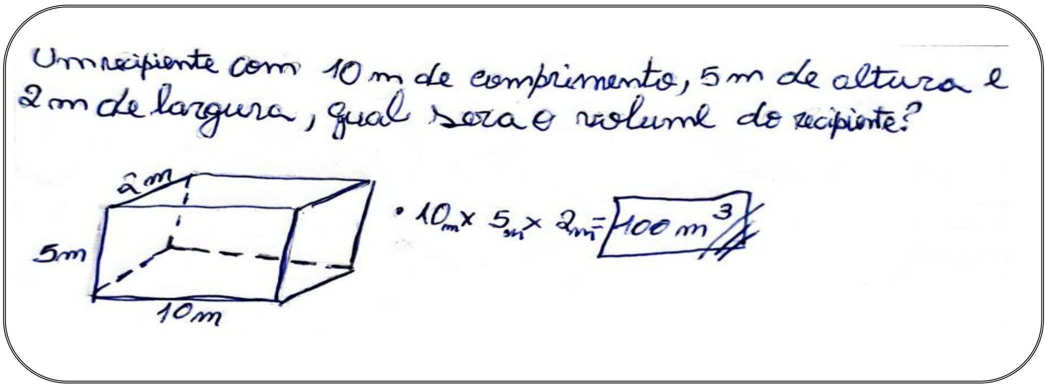
Quadro 19 - Componentes da organização invariante da FRP a partir de uma sentença - 1º mais frequente (10 alunos)

Situações (S): Situação de medição.
Metas e antecipações (MA): Formular e resolver um problema a partir da sentença: 10m x 5m x 2m = 100 m^3.
Regras de Ação (RA): Apresentação dos objetos: reservatório, banheiro, sala, aquário, piscina, recipiente ou paralelepípedo. Uso dos dados (10m x 5m x 2m) no texto <u>para obter a resposta 100 m</u>^{3}. **Pergunta:** Qual é o volume do objeto (<u>em m</u>^{3})?
Invariantes operatórios (IO): Reconhecimento do objeto tridimensional: paralelepípedo. Aplicar a fórmula para calcular o volume de um paralelepípedo.

Fonte: Autoria própria.

Identificamos que 4 dentre os 10 alunos que desenvolveram a FRP, conforme o que expomos no Quadro19, apresentaram certas distorções entre as medidas das dimensões do objeto, como podemos ver no exemplo da FRP do A03 (Figura 62) sobre a altura de um recipiente igual a 5 m, o que ficou evidente na RP ao usar a representação simbólica da figura do paralelepípedo com essa dimensão.

Figura 62 - FRP pelo A03 - A partir de uma sentença

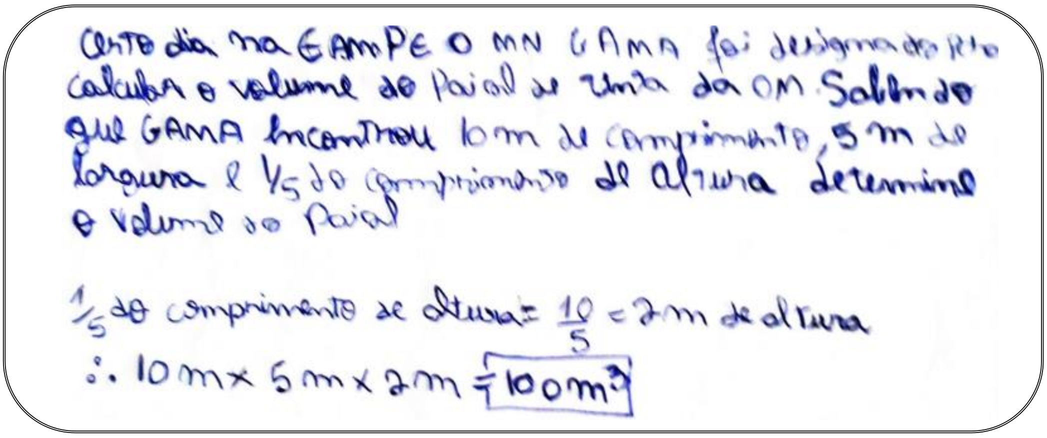

Um recipiente com 10 m de comprimento, 5 m de altura e 2 m de largura, qual será o volume do recipiente?

• $10_m \times 5_m \times 2_m = \boxed{100\ m^3}$

Fonte: Protocolo do aluno A03.

No próximo exemplo, da FRP do aluno G09 (Figura 63), chamou-nos a atenção o fato de ele usar no texto “1/5 do comprimento da altura” do paralelepípedo. Isso pode revelar a necessidade de “incrementar” o texto do problema formulado, visto que a expressão 10 m x 5 m x 2 m = 100 m^3 pode ter sido interpretada por ele como uma “simples” aplicação da fórmula do cálculo do volume de um paralelepípedo.

Figura 63 - FRP pelo G09 - A partir de uma sentença


Certo dia na GAMPE o MN GAMA foi designado p/o calcular o volume do Paiol de uma da OM. Sabendo que GAMA encontrou 10m de comprimento, 5m de largura e $1/5$ do comprimento de altura determine o volume do Paiol

$\frac{1}{5}$ do comprimento de altura $= \frac{10}{5} = 2$m de altura

$\therefore 10m \times 5m \times 2m = \boxed{100m^3}$

Fonte: Protocolo do aluno G09.

De outra forma, no Quadro 20, podemos observar os resultados referentes à FRP, essencialmente, diferentes daquela do Quadro 19, em virtude de, além do cálculo do volume do objeto, termos a inserção de situações de transformação de unidades de medida.

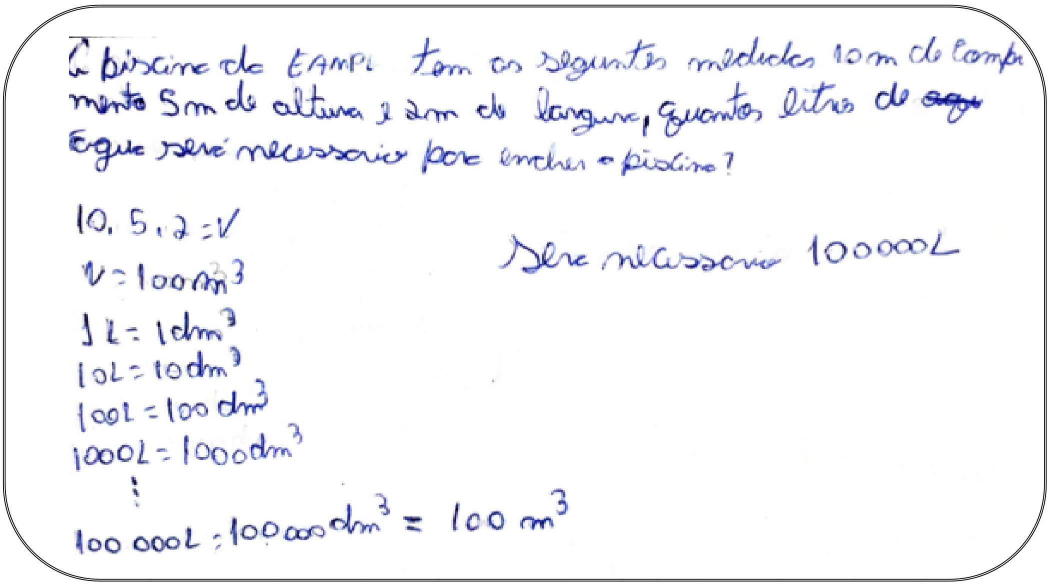
Quadro 20 - Componentes da organização invariante da FRP a partir de uma sentença – 2º mais frequente (5 alunos)

Situações (S): Situação de medição - transformação de unidades de medidas.
Metas e antecipações (MA): Formular e resolver um problema a partir da sentença: 10m x 5m x 2m = 100 m^3.
Regras de Ação (RA): Apresentação dos objetos: piscina ou tanque. Uso dos dados (10m x 5m x 2m), no texto, para atribuir medidas às dimensões do objeto e obter o volume 100m^3. <u>Conversão de m^3 em litros</u>. **Pergunta:** Quantos litros tem o objeto?
Invariantes operatórios (IO): Reconhecimento do objeto tridimensional: paralelepípedo. Aplicar a fórmula para calcular o volume de um paralelepípedo. Conversão de unidades de medida de volume para capacidade.

Fonte: Autoria própria.

Verificamos, no exemplo do aluno G30 (Figura 64), que ele também apresentou o equívoco do aluno A03 (Figura 62) ao indicar a altura da piscina igual a 5m.

Figura 64 - FRP pelo G30 - A partir de uma sentença


A piscina do EAMPL tem as seguintes medidas 10m de comprimento 5m de altura e 2m de largura, quantos litros de ~~agu~~ água será necessário para encher a piscina?

$10 . 5 . 2 = V$

$V = 100m^3$

$1L = 1dm^3$

$10L = 10dm^3$

$100L = 100dm^3$

$1000L = 1000dm^3$

⋮

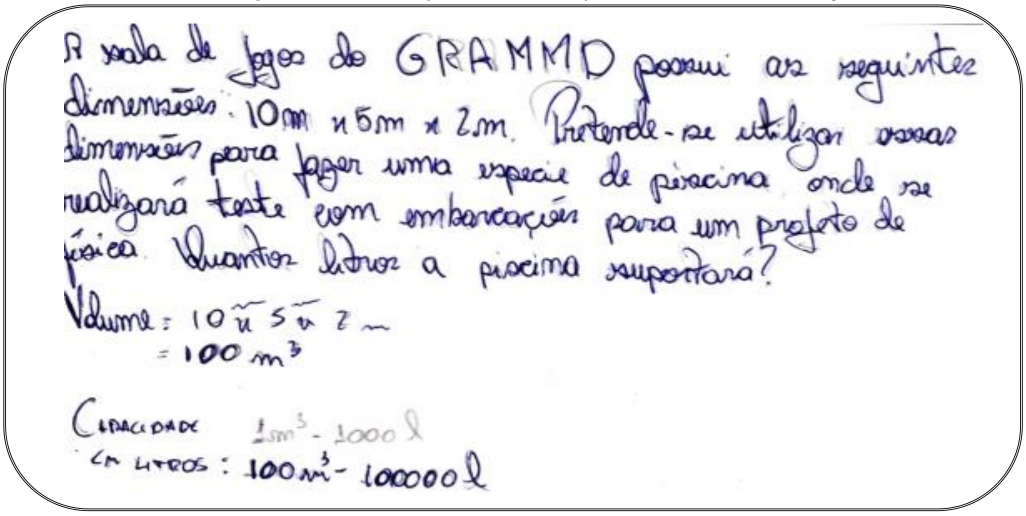
$100\,000L = 100\,000dm^3 = 100\,m^3$

Será necessário 100000L

Fonte: Protocolo do aluno G30.

No exemplo da FRP do aluno G30 (Figura 64), na situação de transformação de unidades de medida, ele mobiliza o teorema em ação: para converter 100m^3 para litros se faz necessário partir da relação 1L é igual a 1 dm^3 e realizar sucessivas multiplicações por 10, até obter 100.000 L = 100.000 dm^3 = 100 m^3. Diferentemente, o G08 (Figura 65) utiliza implicitamente o conceito de proporção, pelo teorema em ação: 1 m^3 é igual a 1000 L, então 100 m^3 é igual a 100.000 L.

Figura 65 - FRP pelo G08 - A partir de uma sentença


A sala de jogos do GRAMMD possui as seguintes dimensões: 10m x 5m x 2m. Pretende-se utilizar essas dimensões para fazer uma especie de piscina onde se realizará teste com embarcações para um projeto de física. Quantos litros a piscina suportará?

Volume: 10m x 5m x 2m
= 100 m^3

Capacidade em litros: 1m^3 - 1000 l
100m^3 - 100000 l

Fonte: Protocolo do aluno G08.

Na sequência apresentamos o Quadro 21, que se refere à FRP dos alunos que reconhecem a fórmula do volume na sentença (10 m x 5 m x 2 m = 100 m^3). Entretanto, no texto do problema, atribuem ao objeto a medida do volume fornecida (100 m^3) e duas medidas das dimensões do objeto contidas na sentença a fim de ser calculada a que falta.

Quadro 21 - Componentes da organização invariante da FRP a partir de uma sentença - 2ºB mais frequente (5 alunos)

Situações (S): Situação de medição.
Objetivo: Formular e resolver um problema a partir da sentença: 10 m x 5 m x 2 m = 100 m^3.
Regras de Ação (RA): Apresentação do objeto físico: piscina, compartimento, tanque. Apresentação do volume do objeto em m^3 ou dam^3. Apresentação das medidas de duas dimensões: largura e comprimento (em m), ou largura e profundidade (em m) (<u>para posterior cálculo da dimensão desconhecida</u>) **Pergunta:** Qual é a altura ou comprimento do objeto (em m)?
Invariantes operatórios (IO) Reconhecimento do objeto tridimensional: paralelepípedo. Aplicar a fórmula do volume de um paralelepípedo para calcular uma de suas dimensões.

Fonte: Autoria própria.

No exemplo do aluno A08 (Figura 66), podemos observar como este aluno utilizou a fórmula do paralelepípedo para calcular a altura (profundidade) da piscina.

Figura 66 - FRP pelo A08 - A partir de uma sentença

Fonte: Protocolo do aluno A08.

No próximo quadro (Quadro 22), apresentamos outros casos similares de FRP dos alunos. Sendo esse, aqueles em que os alunos desenvolvem a ideia de volume interior. Neste sentido, é comum o sentido de "capacidade", como explica Figueiredo (2013, p. 31), “a quantidade de matéria, no sentido físico, de que é constituído o objeto, tanto nos objetos sólidos como na quantidade de material para preencher uma caixa, por exemplo”.

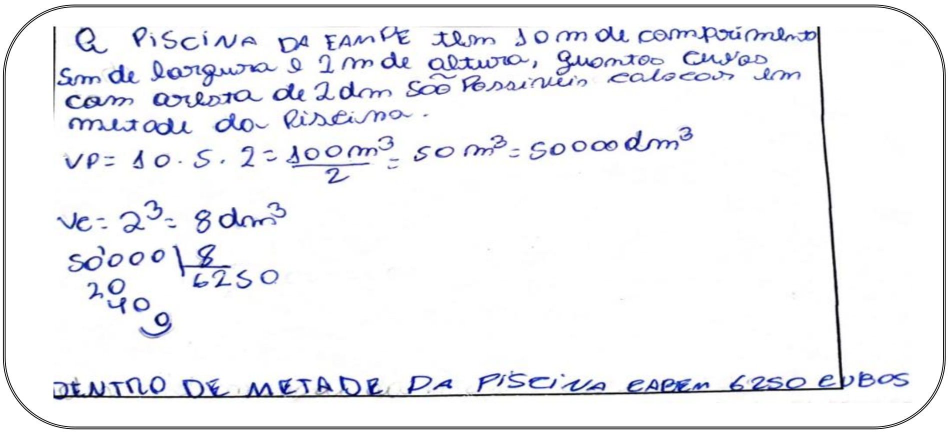
Quadro 22 - Componentes da organização invariante da FRP a partir de uma sentença - 3º mais frequente (4 alunos)

Situações (S): Situação de medição - transformação de unidades e operacionalização de medidas.
Metas e (MA): Formular e resolver um problema a partir da sentença: 10 m x 5 m x 2 m = 100 m³.
Regras de Ação (RA): Apresentação dos objetos maiores: paralelepípedo, piscina. Uso das dimensões 10 m x 5 m x 2 m para o objeto maior (para calcular o seu volume) Apresentação do objeto menor: cubo, potes ou balde. Apresentação da medida da aresta do cubo (para calcular o seu volume). Divisão do volume maior pelo volume do menor. **Pergunta:** Quantos objetos menores cabem dentro do objeto maior?
Invariantes operatórios (IO): Reconhecimento do objeto tridimensional: paralelepípedo ou cubo. Aplicar a fórmula para calcular o volume de um paralelepípedo. Aplicar a fórmula para calcular o volume do cubo. Homogeneizar as unidades de medida de volume para ser dividida uma medida por outra.

Fonte: Autoria própria.

Sobre o exposto no Quadro 22, apresentamos como exemplo a FRP do aluno D06 (Figura 67), embora, em particular, este tenha usado a metade do volume indicado.

Figura 67 - FRP pelo D06 - A partir de uma sentença


A piscina da EAMPE tem 10 m de comprimento 5m de largura e 2m de altura, quantos cubos com aresta de 2dm são possíveis colocar em metade da piscina.

$VP = 10 \cdot 5 \cdot 2 = \frac{100m^3}{2} = 50 m^3 = 50000 dm^3$

$Ve = 2^3 = 8 dm^3$

$50000 \div 8 = 6250$

DENTRO DE METADE DA PISCINA CABEM 6250 CUBOS

Fonte: Protocolo do aluno D06.

De forma geral, aparentemente, o D06, assim como outros alunos, leva em conta o fato que a mudança de unidade de volume provoca mudança na medida do volume (o número), mas não no volume enquanto grandeza. Contudo, o par número/unidade, como uma maneira de expressar o volume como grandeza, podemos perceber que é escasso, na maioria das vezes, nas representações simbólicas dos alunos.

Para além do que analisamos a respeito da FRP a partir de uma sentença, exibidas nos quadros 19, 20, 21 e 22, identificamos outras 6 (seis) formas distintas, apresentadas por 9 (nove) dos 33 alunos (ver Apêndice G). Esses alunos utilizaram as medidas fornecidas pela sentença, com o acréscimo de outros dados que resultaram nas seguintes questões:

1. Determine uma fração do volume 100 m^3 (2 alunos);
2. Qual tempo em minutos será necessário para encher completamente uma piscina, dada a vazão de uma torneira ou bomba? (2 alunos);
3. Qual a área de toda parte interna de uma piscina, ou do seu piso? (2 alunos);
4. Quantos pisos serão necessários para revestir a parte interna de uma piscina? (1 aluno);
5. Qual a quantidade de água falta para encher um tanque? (1 aluno);
6. Quanto gastaram para construir 12 pilastras, dado o valor cobrado para cada 100 m^3 de volume de concreto. (1 aluno).

No próximo tópico, refinamos casos da FRP em que os alunos apresentaram erros comuns com elaborações bem particulares.

5.6.2 Dificuldades apresentadas pelos alunos na FRP a partir de uma sentença matemática

A propósito da FRP a partir de uma sentença, como 10 m x 5 m x 2 m = 100 m^3, consideramos importante o aluno apresentar no texto do problema as referidas medidas de comprimento e a resposta como 100 m^3, bem como o uso da fórmula do paralelepípedo. Na Tabela 12, expomos as dificuldades identificadas na FRP de 20 dos 53 alunos. Explicamos que nesses casos eles não apresentaram as mesmas RA e IO na organização da FRP, mas sim, erros comuns.

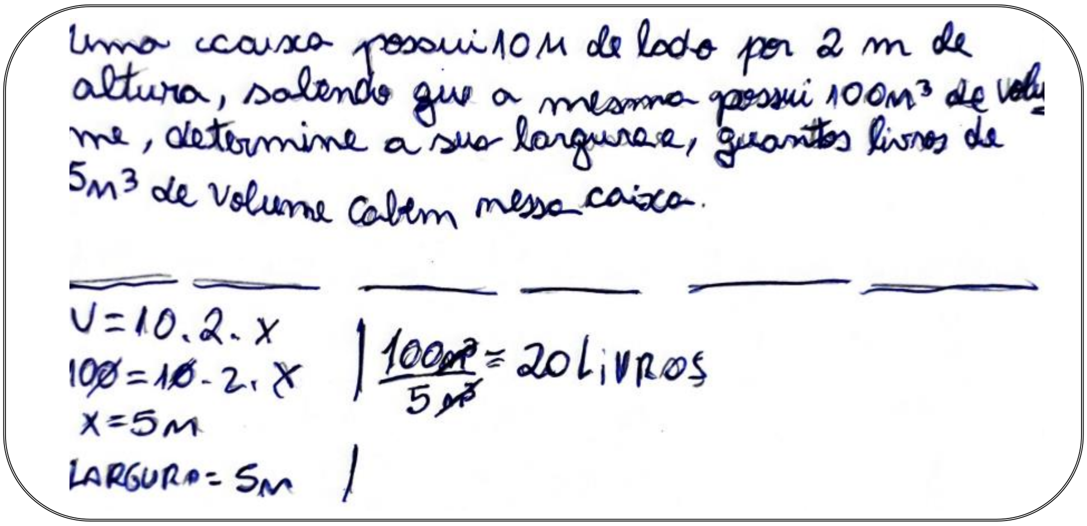
Tabela 12 - Características das dificuldades na FRP a partir de uma sentença matemática (20 alunos)

Quantidade de alunos	**Dificuldades identificadas**
8	Formulou um problema com dados irreais (em relação às dimensões dos objetos).
6	Formulou o problema usando valores da sentença, mas cometeu erro conceitual (de área e/ou de volume).
2	Formulou o problema usando valores da sentença, mas cometeu erro de cálculo numérico.
1	Formulou o problema sem usar os valores da sentença.
1	Formulou o problema, mas não indicou as unidades de medidas utilizadas na resolução.
1	Formulou um problema de difícil compreensão.
1	Formulou o problema usando valores da sentença, mas não resolveu.

Fonte: Autoria própria.

Destacamos, a seguir, alguns exemplos sobre os casos mais frequentes (Tabela 12), sobre os alunos que formularam um problema envolvendo objetos com medidas e/ou volumes irreais e exemplificamos o caso do D14 (Figura 68), que apresenta uma caixa com 10 m de lado e os livros com 5m³.

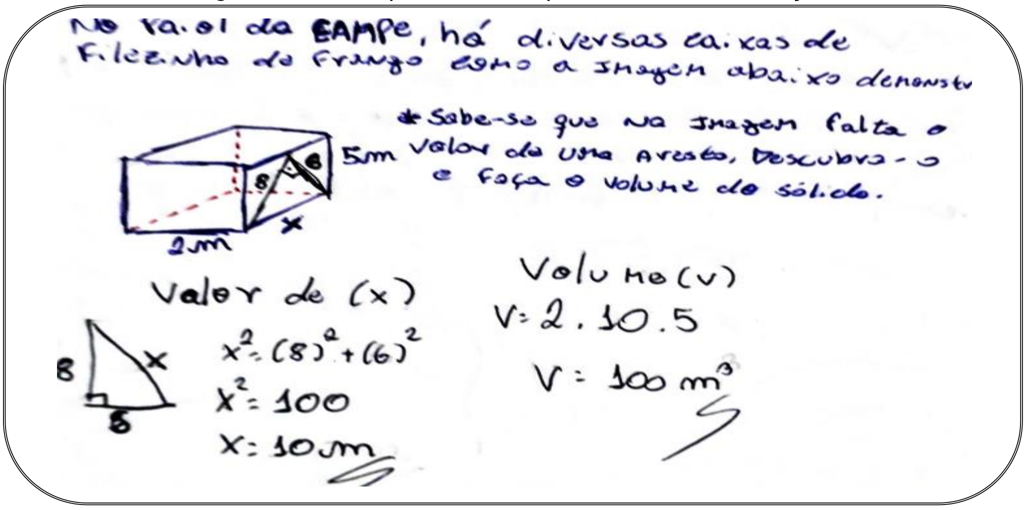
Figura 68 - FRP pelo D14 - A partir de uma sentença



Fonte: Protocolo do aluno D14.

No próximo exemplo, podemos também verificar como a FRP do aluno G20 (Figura 69) apresenta dados com medidas irreais. Ele se refere ao sólido como caixas de filezinho de frango (situação irreal), atribuindo 5 m à altura e 2 m à largura. Através das representações simbólicas que utiliza (a figura do sólido), ele fornece as medidas de dois catetos (6 e 8), do triângulo retângulo, sem indicar a unidade de medida. Além disso, aplica o Teorema de Pitágoras para determinar a hipotenusa, que corresponde ao comprimento da caixa (10 m). Embora tenha utilizado as medidas indicadas na sentença, ele determina o volume das caixas de filezinho igual a 100 m³.

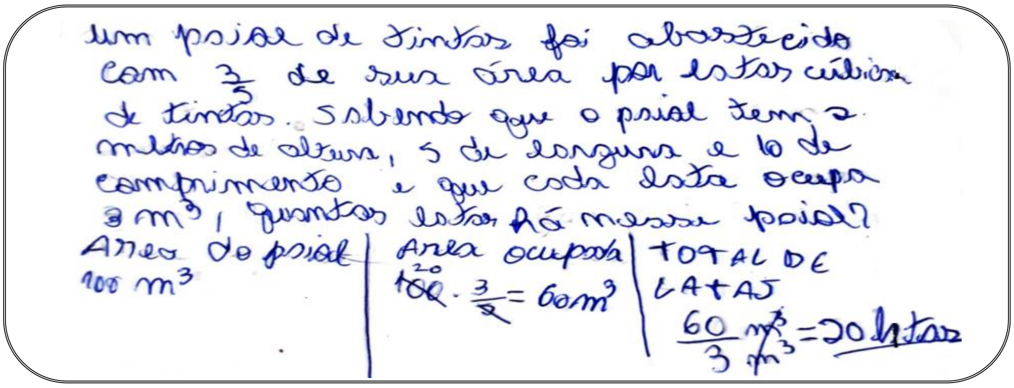
Figura 69 - FRP pelo G20 - A partir de uma sentença



Fonte: Protocolo do aluno G20.

Sobre os alunos que formularam o problema usando valores da sentença, mas cometeram erros conceituais (de área e/ou de volume), apresentamos a FRP dos alunos G12 (Figura 70) e D07 (Figura 71).

Figura 70 - FRP pelo G12 - A partir de uma sentença



Um paiol de tintas foi abastecido com $\frac{3}{5}$ de sua área por latas cúbicas de tintas. Sabendo que o paiol tem 2 metros de altura, 5 de largura e 10 de comprimento e que cada lata ocupa 3 m³, quantas latas há nesse paiol?

Area do paiol	Area ocupada	TOTAL DE LATAS
$100\ m^3$	$\cancel{100}^{20} \cdot \frac{3}{\cancel{5}} = 60\ m^3$	$\frac{60\ \cancel{m^3}}{3\ \cancel{m^3}} = 20$ latas

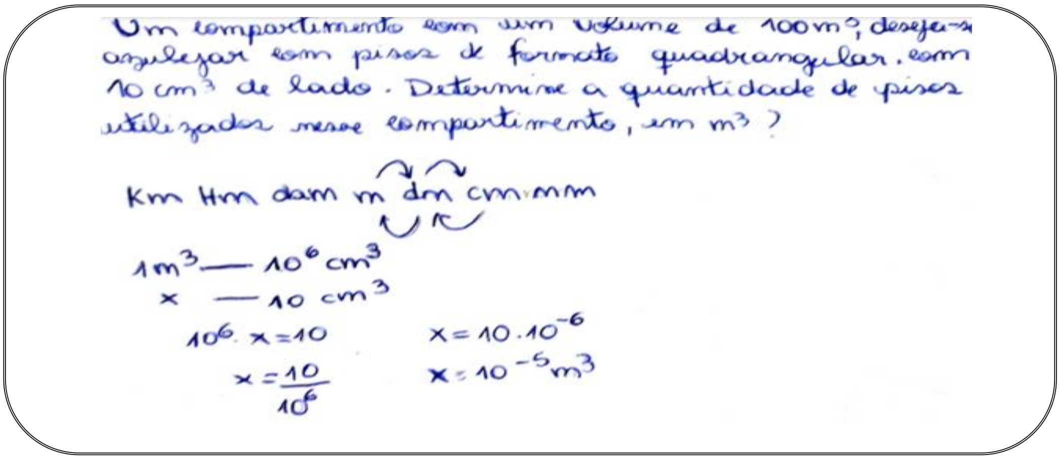
Fonte: Protocolo do aluno G12.

Observando a FRP do aluno G12 (Figura 70), identificamos as seguintes incoerências:

a) No texto do problema, o aluno indica que um paiol foi abastecido com 3/5 de sua área por caixas cúbicas de tinta;
b) Na RP, ele atribui a medida de 100 m^3 à área do paiol e se refere à área ocupada com o valor de 60 m^3;
c) Percebemos na FRP desse aluno que ele compreende o volume como uma área ocupada e não um espaço ocupado pelo objeto.

No exemplo seguinte, realizado pelo aluno D07 (Figura 71), apresentamos outra incoerência quanto aos conceitos de volume e área.

Figura 71 - FRP pelo D07 - A partir de uma sentença



Um compartimento com um volume de 100 m³, deseja-se azulejar com pisos de formato quadrangular, com 10 cm³ de lado. Determine a quantidade de pisos utilizados nesse compartimento, em m³?

Km Hm dam m dm cm mm

$1 m^3 — 10^6 cm^3$

$x — 10 cm^3$

$10^6 \cdot x = 10$ $\quad x = 10 \cdot 10^{-6}$

$x = \frac{10}{10^6}$ $\quad x = 10^{-5} m^3$

Fonte: Protocolo do aluno D07.

Analisando a FRP do aluno D07, observamos que ele utiliza o resultado da sentença proposta (100 m^3), inicialmente se referindo a um volume, mas reconhece essa medida como de superfície, pois o problema formulado se apresenta em torno da ideia de azulejar o compartimento com pisos (azulejos) quadrangulares com 10 cm^3 de lados. Isso evidencia mais uma incoerência cometida, pois apresenta uma medida de volume como uma medida linear (o lado de um quadrado). Na regra de três que utiliza para encontrar a quantidade de pisos, é notório observar essa incoerência, pois relaciona a medida de 1 m^3 equivalente a 10^6 cm^3 para encontrar o valor correspondente à medida de 10 cm^3. Por fim, apresenta a quantidade de pisos igual a 10^{-5} m^3.

Nas atividades analisadas que apresentaram erros na resolução, identificamos 1 (um) aluno que cometeu erro de multiplicação (3×10 m $\times$ 5 m $\times$ 2 m = 3000 m^3), e outro (1 aluno), na divisão (100.000 m^3: 0,027 m^3 = 373). Esses erros resultaram em respostas incoerentes com as esperadas para os problemas formulados. Por fim, identificamos 1 (um) aluno que não utilizou os valores indicados na sentença proposta, 1 (um) aluno que não indicou as unidades de medidas utilizadas na resolução do problema e 1(um) aluno que formulou o problema utilizando os valores contidos na sentença, mas não o resolveu.

5.7 SÍNTESE SOBRE AS SIMILARIDADES E DIFERENÇAS ACERCA DA FRP SOBRE VOLUME E CAPACIDADE PELOS ALUNOS

Ao adotarmos a TCC para a análise da FRP, buscamos dar relevo à dialética entre situações e esquemas (as formas de organização invariante da atividade em situação). No nosso caso, a organização invariante da atividade de FRP. Consideramos que são as situações que dão sentido aos conceitos, ou seja, elas são responsáveis pelo sentido atribuído ao conceito. Assim, buscamos discutir uma variedade de situações formuladas pelos próprios alunos acerca dos conceitos e cálculo de volume e capacidade. Sem perder de vista o fato de que uma situação é diferente da outra, quando os componentes dos esquemas relacionados a ela são diferentes.

O esquema como uma organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações nos leva a buscar identificar os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória. Vale ressaltar, que o conceito de situação empregado na TCC é o de tarefa. Diante disto, na nossa pesquisa, os alunos foram confrontados a diferentes tarefas - situações de FRP, a partir de: uma figura; um problema dado, criar um parecido; um início dado, continuar o problema; uma pergunta; uma resposta e uma sentença.

A propósito das regras de ação, "que constituem a parte verdadeiramente geradora do esquema, aquela que permite a geração e a continuidade da sequência de ações do sujeito" (MOREIRA, 2002, p. 12), relacionadas aos invariantes operatórios e metas, lançamos nosso olhar sobre as diferentes e similares FRP, particularmente, em torno dos problemas formulados, considerados coerentes com os tipos de atividades propostas (204 das 333 atividades). Ou seja, não realizamos esses procedimentos para as 129 das 333 atividades que os alunos formularam e resolveram de forma inconsistente ou incoerente com a proposta apresentada.

Tendo em vista a questão: Quais são as diferenças e similaridades apresentadas pelos alunos na FRP de volume e/ou capacidade? vale ressaltar que dentro das FRP diferentes ocorreu uma diversificação quanto a:

- alunos que formularam e resolveram problemas de forma particularizada - isto é, a organização da FRP foi individualizada, não apresentando semelhanças nas RA e IO em relação à FRP de outros alunos;
- alunos que formularam e resolveram problemas com similaridades nas RA e IO em relação à FRP de outros alunos.

Sobre as diferentes formas de FRP apresentadas pelos alunos, sendo aquelas de forma particularizada ou de forma similar, expomos na Tabela 13 o panorama por cada atividade proposta.

Tabela 13 - Panorama das RA apresentadas pelos alunos na FRP

Atividade proposta para FRP		**Total de FRP diferentes**	**FRP particulares**	**FRP com similaridades**
A partir de um problema dado, criar um parecido		20	13/20	7/20
A partir de uma figura	**Bebedouro**	15	9/15	6/15
	Fragata	2	2/2	0
A partir de uma pergunta dada		15	7/15	8/15

A partir de um início dado, continuar o problema	13	11/13	2/13
A partir de uma sentença	10	3/10	7/10
A partir de uma resposta	8	3/8	5/8
Total	83	48/83	35/83

Fonte: Autoria própria.

Constatamos que os alunos apresentaram um repertório maior de criatividade e diversidade na FRP a partir de um problema dado, criar um parecido (13 formas particulares). Em contrapartida, as FRP que se apresentaram com menos casos particulares foram: a partir de uma resposta (O reservatório tem capacidade de 6.000 litros) e da sentença (10 m x 5 m x 2 m = 100 m^3). Resta-nos em aberto, em que medida a resposta proposta e a sentença dada limitou a FRP pelos alunos. E, outras atividades propostas ofereceram margem para eles serem mais criativos.

No Quadro 23, expomos como, embora os alunos de turmas diferentes tenham realizado as atividades de FRP, individualmente, essas apresentaram similaridades quanto aos tipos de situações e às RA e IO, o que nos remete à questão: Quais regras de ação e invariantes operatórios foram mais recorrentes na FRP de volume e/ou capacidade?

Quadro 23 - Panorama das situações, RA e IO similares nas FRP mais frequentes

SITUAÇÃO DE MEDIÇÃO - USO DA FÓRMULA						
Regras de Ação (RA) e Invariantes operatórios (IO)	**FRP A PARTIR DE**					
	Uma Figura	Criar um Parecido	Continuar Problema	Uma Pergunta	Uma Resposta	Uma Sentença
RA: Calcular o volume do objeto, dadas as medidas de suas dimensões. **IO**: Uso da fórmula para cálculo do **volume do paralelepípedo**.	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**
RA: Calcular o volume do objeto, dadas as medidas de suas dimensões. **IO**: Uso da fórmula para cálculo do **volume do cubo**.			**X**			**X**
SITUAÇÃO DE MEDIÇÃO - TRANSFORMAÇÃO DE UNIDADES DE MEDIDAS						
RA: Apresentação do volume do objeto em m^3 ou dm^3. **IO**: Conversão de medidas de volume para capacidade.	**X**	**X**				

RA: Apresentação da capacidade do objeto em litros. **IO**: Conversão de medida de capacidade para volume.	X					X
RA: Apresentação da capacidade do objeto em litros, kL, cL, mL ou do volume em cm^3, dm^3 ou m^3 para posterior transformação de litro para mL. **IO:** Razão e proporção - Uso de regra de três para converter unidades de medidas. Uso de divisões por 10, 100 ou 1.000 para converter unidades de medidas.				X		X
RA: Apresentação do volume do objeto em dm^3. **IO**: 1 dm^3 é 1 litro.	X				X	
RA: Apresentação do volume do objeto em m^3. **IO**: 1 m^3 são 1000 litros.	X				X	
RA: Apresentação das dimensões da aresta de um objeto em mm ou dm. **IO**: Transformação de unidades de comprimento de mm ou dm para m.		X	X			
RA: Apresentação de unidades de medidas diferentes. **IO:** Tornar homogêneas as unidades de medidas de capacidade para subtrair e dividir uma medida de outra.				X		
SITUAÇÃO DE MEDIÇÃO - OPERACIONALIZAÇÃO DE MEDIDAS						
RA: Apresentação de uma **fração** da capacidade total do objeto. Cálculo da quantidade de litros referente a fração. Subtração de uma fração de litros da capacidade total. **IO**: Aplicação do significado de fração como operador multiplicativo.	X			X		
RA: Subtração de medidas de volume ou capacidade. **IO**: Subtração de volumes com a mesma unidade de medida.	X	X		X		
RA: Apresentação de uma **porcentagem** do volume total do objeto. Cálculo da quantidade de litros, mililitros ou dm^3 referente à porcentagem do volume total. Subtração da quantidade de um percentual de litros da capacidade total. **IO:** Cálculo de porcentagem (por regra de três ou por multiplicação seguida de divisão por 100).	X			X	X	X
RA: Divisão da capacidade de um objeto em ml pela capacidade de outro em ml. **IO**: Divisão de volumes com a mesma unidade de medida.				X		
RA: Multiplicação do volume de um objeto pela quantidade total de objetos. **IO**: Multiplicação de um escalar por uma medida.			X			

SITUAÇÃO DE COMPARAÇÃO						
RA: Comparação da inclusão de um objeto dentro do outro. **IO:** Um objeto terá maior volume que outro se este couber no interior do objeto de maior volume.			X			
RA: Indicação de duas medidas de volumes para definição de qual é o maior. **IO:** Comparação de medidas de volume (para mais e para menos).				X		

Fonte: Autoria própria.

Os dados apresentados no Quadro 23, apontam que as situações de medições estiveram presentes em todos os problemas formulados pelos alunos, sobretudo com o uso da fórmula para cálculo do volume do paralelepípedo e/ ou do cubo.

Quanto às situações de transformação de unidades de medidas, encontramos uma maior diversidade de RA e IO. Porém a maioria versou sobre conversões entre unidades de medidas de volume para capacidade e vice-versa. Também identificamos, em menor frequência, RA e IO associados à transformação de unidades de medidas de comprimento das arestas dos sólidos envolvidos nos problemas.

Nas situações de medição com operacionalização de medidas, identificamos que as RA que envolvem subtração de medidas e cálculos de porcentagem foram as mais frequentes. Observamos que a presença de operacionalização de medidas, ocorre sempre em consonância com as propostas das atividades, visto que as operações de multiplicação de uma medida por um escalar e a divisão entre medidas foram as menos incidentes.

No Quadro 23, ainda podemos identificar que as RA e IO relacionadas a situações de comparação, apenas ocorreram em FRP a partir de um início dado, continuar um problema e a partir de uma resposta. Este fato evidencia o que já havíamos comentado, a respeito da escassez deste tipo de situação nas formulações dos alunos.

As situações de produção não foram contempladas no Quadro 23, por não termos identificado similaridades nas RA e IO nas atividades de FRP. Alguns casos particulares que ocorreram, em relação a esse tipo de situação, foram mencionados nos resultados da FRP a partir de um início dado, continuar o problema (Tópico 5.3).

De maneira geral, a regularidade percebida na FP, nas condições ocorridas nesta pesquisa, de forma individual/particular por alunos da EAM de turmas diferentes, leva-nos a refletir sobre determinadas influências mais marcantes na trajetória (escolar ou extraescolar) da relação dos alunos com os conceitos de volume e capacidade.

5.8 PANORAMA DAS DIFICULDADES DOS ALUNOS NA FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta pesquisa buscamos responder à questão: Quais aspectos considerar na formulação e resolução de problemas das grandezas volume e capacidade, a partir da Teoria dos Campos Conceituais?

Na visão de Moreira (2002), “Vergnaud destaca que é preciso dar toda atenção aos aspectos conceituais dos esquemas e à análise conceitual das situações nas quais os aprendizes desenvolvem seus esquemas na escola ou na realidade”. Vale ressaltar que o conceito de situação empregado na TCC é o de tarefa, sendo que toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, para as quais é importante conhecer suas naturezas e dificuldades próprias. A dificuldade de uma tarefa não é nem a soma nem o produto das diferentes subtarefas envolvidas, mas é claro que o desempenho em cada subtarefa afeta o desempenho global (VERGNAUD, 1990, p. 146; 1993, p. 9).

Na Tabela 14, podemos perceber com exceção da FRP “a partir de um início dado, continuar o problema”, um percentual acima de 50% de problemas formulados e resolvidos de forma coerente com os tipos de atividades propostas.

Tabela 14 - Panorama dos resultados/dificuldades dos alunos na FRP

Tipo de atividade	**FRP coerentes**	**FRP coerentes (%)**	**FRP incompleta, confusa e/ou com erros conceituais**	**FRP incompleta, confusa e/ou com erros conceituais (%)**
A partir de uma figura (Turmas B, C e D)	42	64,6%	23	35,4%
A partir de um problema dado, criar um parecido (Turmas A, F e G)	34	55,7%	27	44,3%

A partir de um início dado, continuar o problema (Turmas B, C e D)	17	42,5%	23	57,5%
A partir de uma pergunta dada (Turmas A, B e E)	48	78,7%	13	21,3%
A partir de uma resposta dada (Turmas E, F e G)	30	56,6%	23	43,4%
A partir de uma sentença (Turmas A, D e G)	33	62,3%	20	37,7%
Total	**204**	**61,3%**	**129**	**38,7%**

Fonte: Autoria própria.

Por meio da Tabela 14, podemos também constatar que o desempenho dos alunos variou de acordo com as atividades propostas, sendo a que apresentou melhor desempenho (correspondeu aos critérios estabelecidos) foi a FRP “a partir de uma pergunta” e a de menor desempenho foi “a partir de um início dado continuar o problema”. Em relação a esta atividade, buscamos refletir se o problema a continuar não foi claro para os alunos ou se isto ocorreu devido à falta de familiaridade com o tipo de situação: “*No paiol de gêneros da EAM devem ser armazenadas 60 caixas cúbicas em pilhas no formato de paralelepípedos*…”.

De modo geral, na Tabela 15, buscamos refinar as dificuldades mais recorrentes apresentadas pelos alunos relacionadas ao tipo de atividade proposta (conforme já discutidas nas tabelas 5, 6, 7, 8, 9 e 10).

Tabela 15 - Panorama das dificuldades específicas mais frequentes para o tipo de atividade de FRP

Proposta de FRP	Dificuldades em relação ao tipo de atividade proposta	Total de atividades	Quantitativo de dificuldades	%
A partir de uma figura	Formulou o problema sem relacionar a figura do bebedouro ou da fragata com o fosso (lago), em que ela está posta.	65	12	18,5
A partir de uma resposta	Formulou o problema colocando a resposta “6.000 litros” no seu enunciado.	53	8	15
A partir de um problema	Apresentou uma ideia bem diferente do problema proposto.	61	8	13

dado, criar um parecido				
A partir de uma pergunta	Usou uma pergunta diferente da proposta na atividade e resolveu corretamente.	61	6	10

Fonte: Autoria própria.

Na Tabela 15, podemos perceber que as dificuldades específicas sobre a FRP, do ponto de vista do tipo da atividade, não foi um fator de grande impacto, haja vista os baixos valores indicados. No que concerne à FRP a partir de um início dado, continuar um problema e na FRP a partir de uma sentença não chegamos a identificá-las. Para estas duas últimas estratégias, as dificuldades identificadas ocorreram também nas demais.

Observamos que as dificuldades apresentadas pelos alunos dizem respeito, sobretudo, a erros conceituais de volume e capacidade. A respeito desses tipos de dificuldades, fizemos um mapeamento (Tabela 16) no sentido de identificar os Teoremas em Ação Errôneos (TAE) mobilizados pelos alunos de forma mais recorrente em todos os tipos de atividades de FRP.

Tabela 16 - Panorama dos Teoremas em Ação Errôneos (TAE) mais frequentes nas FRP

TAE mais frequentes	FRP A PARTIR DE						Total
	F	CPa	CPr	P	R	Se	
Confusão entre área e volume Ex.: TAE: a área de um reservatório tem as dimensões de 50 m x 15 m x 40 cm; TAE: A área de um objeto submerso ocupa 98 m³. TAE: Um cubo tem 50 cm³ de área.	4	1	2	0	1	5	13
Dados irreais sobre as dimensões dos objetos Ex.: TAE: O fosso tem 15m de profundidade. TAE: Um livro com volume de 5 m³.	1	1	2	0	0	8	12
O cubo com medidas de arestas diferentes Ex.: TAE: Um cubo tem dimensões 1,5 m x 1,5 m x 2m.	0	2	6	0	0	0	8
Conversões de unidades de medidas errôneas Ex.: TAE: 1 m³ é igual a 10.000cm³. TAE: 1 m³ é igual a um litro. TAE: 1 dm³ é igual a 1.000 litros. TAE: 1 litro é igual a 1.000 m³.	0	3	1	1	3	0	8
Dados irreais sobre o volume ou capacidade dos objetos Ex.: TAE: o volume do reservatório é igual a 2.10^6 m³. TAE: um copo com volume de 3 cm³. TAE: um copo com capacidade de 3 mL.	2	0	2	3	0	0	7

Erro de cálculo numérico na RP Ex.*:* TAE: 7.680: 100 = 7,680; TAE: 0,5 x 1.000 = 5.000. TAE: 3.000 x 2.000= 6.000. TAE: 3 x (10 x 5 x 2) = 3.000.	1	1	1	0	1	2	6
Uso de medida de comprimento para expressar medida de volume ou capacidade Ex.: TAE: A capacidade do recipiente em metros. TAE: A altura de um objeto em m^3.	0	1	2	0	1	1	5
O cubo como objeto bidimensional E*x.:* TAE: Um cubo no formato quadrado; TAE: Uma caixa d'água no formato quadrado.	0	2	2	0	0	0	4
O paralelepípedo como objeto bidimensional *Ex.:* TAE: O paralelepípedo no formato de um retângulo; TAE: uma caixa retangular.	0	1	2	0	0	0	3
Uso de medida de área para uma das dimensões do paralelepípedo Ex.: TAE: A altura é igual a 2 m^2.	0	0	1	0	0	0	1
Uso de unidades de medida de volume para as dimensões do cubo Ex.: TAE: O cubo tem arestas iguais a 20 dm^3 x 20 dm^3x 15 dm^3.	0	0	0	0	1	0	1
Total	8	12	21	4	7	16	68

Legenda: Formulação a partir de: uma Figura (F), um problema dado Criar um Parecido (CPa), um início dado, Continuar o Problema (CPr), uma Pergunta (P), uma Resposta (R) e uma Sentença (Se).

Fonte: Autoria própria.

Chamamos a atenção para o fato de que, embora as estratégias de formulação tenham sido distintas, há convergência em determinados tipos de dificuldades apresentadas na Tabela 16. A respeito dos TAE identificados, observamos que os mais recorrentes versaram sobre erros conceituais (confusão entre conceitos de comprimento, área, volume e capacidade), dados irreais em relação às dimensões dos objetos, seguidos dos TAE que evidenciaram as dificuldades em reconhecer um objeto de formato cúbico, além daqueles que indicaram erros nas conversões de unidades de medidas.

Esse resultado corrobora com as afirmações de Figueiredo, Bellemain e Teles (2014) no que se refere às dificuldades mais comuns apresentadas pelos alunos na aprendizagem de grandezas e medidas. Para essas autoras, as dificuldades residem em estabelecer relações entre as unidades de medidas de um mesmo sistema, e escolher a melhor unidade para medir determinadas grandezas, além de não terem clareza quanto à diferença entre medidas lineares, de superfície, de volume e capacidade. Vale ressaltar que a maioria dessas dificuldades não foram apenas identificadas nas formulações, mas sobretudo na resolução dos problemas, o que reforça a importância de as atividades de formulação estarem associadas à resolução, conforme afirmamos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve o objetivo de analisar a Formulação e Resolução de Problemas (FRP) sobre volume e capacidade, por alunos egressos do Ensino Médio, de um curso de formação militar, à luz da Teoria dos Campos Conceituais.

No processo de construção do quadro teórico, buscamos compreender como poderíamos utilizar a formulação de problemas no estudo dos conceitos de volume e capacidade de modo a favorecer a aprendizagem dos alunos. Vale ressaltar que antes de realizarmos esta pesquisa, em nossa prática docente, não tínhamos uma leitura das estratégias que poderíamos utilizar, nem dos elementos que poderíamos analisar nas formulações e resoluções de problemas realizadas pelos alunos. Eles eram convidados a formular e resolver problemas sem fazer uso das estratégias propostas nas atividades, as quais foram delineadas neste estudo.

Verificamos que as recomendações sobre a elaboração de problemas, presentes na BNCC, nos instigou a buscar, em trabalhos acadêmicos, elementos que pudessem nortear nosso trabalho, haja vista não encontramos, neste documento oficial, elementos suficientes para nos auxiliar na construção das propostas de atividades de FP para os alunos.

Ao adotarmos as estratégias propostas por Chica (2001), Boavida *et al.* (2008), Stayonova e Ellerton (1996), reconhecemos que eram as que, a princípio, tivemos acesso e, desde então, nos debruçamos a refletir como seriam adaptadas para a FRP sobre volume e capacidade por alunos de um curso de formação militar. Entretanto, observamos que cada vez mais, outras ideias têm surgido por parte de professores e pesquisadores, por exemplo, utilizando planilhas eletrônicas, *softwares* para história em quadrinhos, sorteios de temas, dentre outros.

Tomamos por norte a articulação entre a formulação e a resolução de problemas, como foi validada por outros pesquisadores. Consideramos, de uma parte, que um olhar voltado apenas para a formulação reduz a compreensão sobre os processos cognitivos dos alunos, neste tipo de atividade, ou seja, os conhecimentos dos alunos ficam mais evidentes em cada questão formulada e resolvida por eles.

Compreendemos que ao propor a resolução de problemas, geralmente, o professor considera se a resposta do aluno está certa ou errada. Porém, os elementos a serem tomados como critérios de avaliação na formulação dos problemas pelos alunos é uma questão em aberto e um campo de pesquisa fértil.

No presente trabalho, não buscamos nos concentrar sobre os aspectos das contextualizações do dia a dia presentes nos problemas formulados pelos alunos. Voltamo-nos, sobretudo, à análise dos tipos de situações e aos componentes dos esquemas em torno dos conceitos de volume e/ou de capacidade na FRP, por compreendermos ser necessário um olhar sobre o processo da atividade de FRP e não apenas do produto (problema formulado pelo aluno). Ou seja, correto ou errado quanto à questão formulada e a resposta encontrada.

Em particular, ao propormos a FRP sobre os conceitos de volume e capacidade, sentimos a necessidade de aprofundar nosso entendimento sobre os tipos de problemas propostos para resolução dos alunos e as dificuldades apresentadas por eles. Nesse sentido, consideramos que a Teoria dos Campos Conceituais tem sido utilizada em diversas pesquisas para a análise da resolução de problemas pelos alunos. O uso desta teoria para análise da formulação de problemas pelos alunos, à primeira vista, levou-nos a refletir se seria suficiente a análise do tripé: tipos de situações, invariantes operatórios (conceitos em ação e teoremas em ação) e representações simbólicas dos conceitos de volume e capacidade. Consideramos que seria necessário algo mais, no nosso caso, por isso optamos pela noção de esquema e seus componentes: metas e antecipações, regras de ação e invariantes operatórios, com exceção das inferências, por motivos de limitação metodológica.

Outro aspecto que observamos como limitação no nosso trabalho é o fato de não termos dado um *feedback* aos alunos sobre as suas formulações e resoluções. Isso poderia levá-los a refletir sobre as fragilidades presentes nos conhecimentos que eles, por ora, acreditavam ter, e que não poderíamos identificar apenas nas atividades de resolução de problemas. Além disso, poderíamos oferecer a eles a oportunidade de reconstruir os conceitos errôneos que tinham a respeito de volume e capacidade. O motivo para que essa ação não fosse realizada se deu pelo fato de o C-FMN ser realizado com algumas restrições de carga horária para algumas disciplinas, como Matemática I, o que inviabilizou a aplicação de atividades por um período mais longo. Isto nos trouxe uma inquietação sobre a necessidade de refletirmos a respeito de caminhos metodológicos para se trabalhar, em sala de aula, a formulação de problemas pelos alunos. Também nos fez lembrar as discussões de Schroeder e

Lester (1989) no que concerne à resolução de problemas: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar para resolução de problemas, ensinar via resolução de problemas. Seria o caso de levarmos também essas discussões para investigações a respeito de como: ensinar sobre formulação de problemas, ensinar para formulação de problemas e ensinar via formulações de problemas.

Sobre os resultados da pesquisa, do ponto de vista da **FRP a partir de uma figura**, ficou evidente a importância da escolha da figura pelo professor, pois esta pode desencadear uma formulação de problema com um grau de dificuldade maior ou menor para os alunos. Como vimos nos enunciados dos problemas, na FP a partir das figuras do bebedouro (confusão entre volume do reservatório interno do bebedouro e volume do bebedouro) e da Fragata Pernambuco (confusão entre volume do fosso com ou sem a imersão da fragata). Além disso, podemos perceber que o fato de as imagens apresentadas aos alunos não trazerem informações relativas às dimensões dos objetos exigiu deles uma melhor compreensão sobre estimativa de medidas.

Sobre a **FRP a partir de um problema, criar um parecido,** percebemos que os alunos modificaram vários elementos do texto (modelo) apresentado pela pesquisadora. Como supõe Chica (2001), este tipo de atividade pode ser considerado dentro do leque de estratégias iniciais para o professor começar a propor a FP aos alunos. Porém, pelos resultados obtidos em nossa pesquisa, observamos que as formulações foram construídas de acordo com o entendimento que o aluno tinha a respeito do que seria um problema parecido.

A princípio, cogitamos que os alunos poderiam mudar apenas as medidas das dimensões do objeto físico (reservatório), mantendo o formato de paralelepípedo e usando a mesma ideia de retirada de líquido. No entanto, surgiram outros enunciados e perguntas diferentes do problema proposto que tinha por pergunta: quantos litros foram retirados do reservatório? Como exemplo, recordamos as formulações de 4/34 dos alunos que elaboraram um problema com uma pergunta em torno da medida da altura do reservatório. Por outro lado, reconhecemos que essa estratégia possibilitou ao aluno dar uma versão própria para a sua formulação. Isso nos serviu de alerta para a importância do que o professor deve considerar sobre o que é formular um problema parecido.

No que se refere à **FRP a partir de um início dado, continuar o problema,** constatamos que foi o tipo de atividade que apresentou o maior índice 57,5% de FRP incoerentes ou com erros conceituais. Possivelmente isso se deu, não pelo tipo de atividade proposta em si, mas pela situação relacionada ao conceito de volume que ela inspirava, no caso: uma situação de produção. Haja vista que diversas pesquisas apontam este tipo de situação: ser pouco explorada em atividades de resolução de problemas.

Por outro lado, a **FRP a partir de uma pergunta** apresentou maior índice de formulações coerentes (78,7%) de acordo com os critérios estabelecidos. Apesar disso, ainda pudemos identificar medidas das dimensões da jacubeira incoerentes com a realidade (Ex. 2 m x 1,7 m x 1 m) o que levou a uma medida de volume muito grande para este tipo de objeto. Vimos que essas incoerências foram recorrentes em outras propostas de formulações, a exemplo da figura do bebedouro, o que revela a dificuldade de os alunos em estimarem medidas de comprimento, de capacidade e de volume. Também nos chamou a atenção o fato de alunos que usaram uma pergunta diferente da proposta na atividade e resolveram corretamente o problema formulado por eles. No nosso caso, embora tenhamos considerado como uma incoerência, chamamos a atenção para um aspecto que nos parece verdadeiramente um desafio para os professores: estabelecer e deixar claro os critérios de avaliação para os problemas formulados pelos alunos.

Para a **FRP a partir de uma resposta,** observamos que essa proposta foi a que apresentou uma menor quantidade de FRP distintas: apenas 8 (oito). Além disso, uma delas, apresentada por 16 dos 30 alunos que realizaram a atividade, teve como característica marcante problemas formulados em torno da atribuição das dimensões do objeto, uso da fórmula para o cálculo do volume e a transformação de unidades de medidas de volume para capacidade, ou seja, convergiram para situações de medição. Esse aspecto nos fez refletir se a resposta de “6.000 litros” foi tendenciosa para os alunos, que apenas reproduziu problemas que já estavam habituados a resolver a respeito da relação entre as unidades de volume e capacidade. Os resultados evidenciaram também a dificuldade de alguns alunos em formular um problema, apresentando dados que possibilitem utilizar a resposta proposta, visto que alguns alunos utilizaram a resposta “o reservatório tem 6.000 litros” como um dado do problema.

No que concerne à **FRP a partir de uma sentença,** os resultados indicaram que a maioria dos alunos associou a sentença ao uso da fórmula para calcular o volume de um objeto. Porém, evidenciamos em algumas formulações que eles não ficaram atentos às dimensões atribuídas ao objeto, gerando incoerência que resultou em situações irreais, por exemplo, o volume de um livro igual a 5 m^3. Outra dificuldade identificada nesta atividade foram as conceituais, em que os alunos demonstraram confusões entre os conceitos de área e volume.

Consideramos que os tipos de situações de volume (produção, comparação e medição) podem ser desencadeados, de forma individual, por diferentes propostas de atividades (a partir de uma figura, de um problema dado, criar um parecido, de um início dado continuar o problema, dentre outras). Neste trabalho, não conseguimos desenvolver todas essas propostas para cada situação.

Sobre a questão: Quais são as diferenças e similaridades apresentadas pelos alunos na FRP de volume e/ou capacidade? cabe uma reflexão se as atividades de FRP que favoreceram a ocorrência de um maior ou menor número de formas particulares, sendo a FRP, a partir de um problema dado criar um parecido, a maior, e a FRP, a partir de uma resposta e de uma sentença, a menor. Seriam por essas últimas atividades citadas terem uma possibilidade de FRP mais aberta? Estariam os alunos mais habituados ou menos habituados com o tipo de situação formulada por eles? Isso se refere ao fato de que eles deveriam resolver os problemas formulados, o que os leva a possivelmente escolher situações, para eles, com certo domínio de conhecimentos.

Um questionamento que surgiu ao analisar os problemas formulados pelos alunos foi: o que leva alunos de turmas distintas sem nenhum contato entre eles a formular problemas que apresentam esquemas (organizações invariantes da atividade) semelhantes? Esse é um aspecto que consideramos retratar as experiências marcantes dos alunos em sua trajetória escolar de resolução de problemas envolvendo capacidade e volume.

Vale ressaltar que o percentual de formulações consideradas coerentes, de acordo com os critérios estabelecidos, foi de 61,3%. Mas o percentual de 38,7% de erros nos leva a pensar sobre as dificuldades relativas aos conceitos de volume e capacidade, visto que são alunos egressos do Ensino Médio e que foram submetidos a um concurso público de nível nacional. Esse fato também nos convidou a refletir sobre como seria a FRP aplicada para alunos do Ensino Fundamental e Médio de escolas da Rede Pública de ensino, visto que reconhecemos as dificuldades apresentadas pelos alunos no aprendizado dos conceitos de volume e capacidade, as quais são discutidas em pesquisas anteriores à nossa.

Quanto à questão: Quais regras de ação e invariantes operatórios foram mais recorrentes na FRP de volume e/ou capacidade? Identificamos que, em todas as atividades FRP, ocorreu o uso da fórmula para cálculo do volume do paralelepípedo e/ou do cubo. Observamos também uma grande incidência de RA associadas à transformação de unidades, bem como operacionalização de medidas, cujas operações mais frequentes foram as do cálculo de frações e porcentagem (multiplicação de um escalar por uma medida), além das subtrações entre medidas.

Apontamos como limitação metodológica o fato de não termos realizado entrevistas com os alunos. Por consequência, não pudemos analisar um componente importante dos seus esquemas na FRP: as inferências. Dizemos isso, diante de dúvidas que foram surgindo na análise dos problemas, tais como: O que leva um aluno a apresentar uma formulação tão complicada para ele mesmo resolver? Seria para impressionar o professor? Seria por competição com seus colegas? O que leva um aluno a apresentar situações de transformação de medidas complexas, usando unidades de medidas não usuais como decilitros ou centilitros ou medidas como $5.10^4\ cm^3$?

Não recorremos à utilização de filmagens no momento da FRP pelos alunos, pois compreendemos que isto poderia causar desconforto neles, devido as atividades terem sido aplicadas individualmente e interferir no tempo que foi destinado à construção e resolução dos problemas formulados.

Um fato que nos chamou a atenção foi o engajamento dos alunos na produção das atividades de FRP. Talvez esse envolvimento dos alunos se deu por eles reconhecerem que a atividade seria um exercício, ou preparo para que eles pudessem formular os problemas da atividade avaliativa, do C-FMN, de maneira satisfatória.

De uma forma geral, este trabalho nos trouxe reflexões no sentido de que precisamos melhorar o roteiro com as orientações dadas aos alunos da EAM, visto que a FRP, para eles, no C-FMN tem caráter avaliativo.

Outro aspecto que consideramos importante para práticas futuras é aprofundar nosso entendimento em relação a identificar quais critérios podem ser definidos para considerar quando um problema formulado tem nível de dificuldade fácil, médio ou difícil. Por isso, também sugerimos para investigações futuras que:

- a FRP se estenda a outros conceitos do campo das Grandezas e Medidas;
- a FRP seja também inserida nos processos de formação docente, visto que o professor, para ensinar por meio da formulação de problemas, precisa se apropriar de estratégias de formulação para aplicar atividades adequadas aos seus objetivos de ensino;
- as atividades de FRP sejam realizadas em duplas ou mesmo em grupos, e, ao final, que haja troca dessas produções entre seus pares. Nesse sentido, os alunos teriam a oportunidade de ler e responder a problemas formulados por outros grupos;
- seja realizada a análise dos quatro componentes dos esquemas (metas e antecipações, regras de ação, invariantes operatórios e inferências), pois acreditamos que a análise das inferências, que não foi possível realizar na nossa pesquisa, favoreça a compreensão a respeito das motivações implícitas que o aluno possui sobre o campo que está sendo estudado.

Ademais, esperamos que nosso trabalho possa contribuir na inspiração de outras pesquisas sobre a Formulação e Resolução de Problemas envolvendo Grandezas e Medidas, bem como outros campos conceituais.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, P. C. **Formulação de problemas:** um estudo com alunos dos 3º e 4º anos**.** 2018. 228f. Tese (Doutorado) - Instituto Universitário de Ciências Psicológicas, Sociais e da Vida. - Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Portugal.

ALTOÉ, R. O. **Formulação de problemas do campo conceitual multiplicativo no ensino fundamental:** uma prática inserida na metodologia de resolução de problemas. 2017. 227f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática - Instituto Federal do Espírito Santo, Espírito Santo.

ANDREATTA, C. G; ALLEVATO, N. S. G. Aprendizagem matemática através da elaboração de problemas em uma escola comunitária rural. **Revista Educação Matemática em Debate**. v.4, n.10, 2020. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/1083. Acesso em: 15 jan. 2022.

ANWANDTER-CUELLAR, N. Conceptions d'élèves de collège. **Petit x**, Grenoble, IREM de Grenoble, n. 93, p. 53-74, 2013. Disponível em: https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/93x4_1560761463705-pdf Acesso em: 10 abr. 2023

BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surface planes:** une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no Ensino Fundamental**. In: FOSSA, J. A. (Org.) Natal: SBHMat, 2002.

BOAVIDA, A. M. R. *et al.* A Experiência Matemática no Ensino Básico. In: **Programa de formação contínua em matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico**. Lisboa/PT, p. 27-30, 2008. Disponível em: https://comum.rcaap.pt/bitstream/10400.26/5566/1/A_experiencia_matematica no_ens_basico.pdf Acesso em: 10 dez. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 30 mar. 2023.

_______. Marinha do Brasil: Diretoria de Ensino da Marinha (DEnsm). **Curso de Formação de Marinheiros (C-FMN).** Anexo do Of no 10-53/2021, da DEnsM, Rio de Janeiro – RJ, 2021.

CAMPOS, M. S; SILVA, L. S. F. da; ALTOÉ, R. O. Formulação de Problemas no ensino de Função Afim: preferências, saberes e vivências dos estudantes do Ensino Médio, **REMAT: Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 18, p.1-18, 2021. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/531/255 Acesso em: 29 mar. 2023.

CARVALHO, A. T. **Relações entre criatividade, desempenho escolar e clima para criatividade nas aulas de Matemática de estudantes do 5º ano do Ensino**

Fundamental. 2015. 133f. Dissertação (Mestrado em Educação) — Faculdade de Educação. Universidade de Brasília, Brasília.

CHICA, C. H. Por que formular problemas? In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender Matemática. 1. ed. reimp. São Paulo: Artmed, 2001, p. 151-173.

CHRISTOU, C., MOUSOULIDES, N., PITTALIS, M., PITTA-PANTAZI, D., & SRIRAMAN, B. (2005). **An empirical taxonomy of problem posing processes**. ZDM The International Journal on Mathematics Education, 37(3), 149–158.

COULET, J-C. l Le concept de schème dans la description et l'analyse des compétences professionnelles : formalisation des pratiques, variabilité des conduites et régulation de l'activité. In: MERRI, M. (Ed.). **Activité humaine et conceptualisation:** Questions à Gérard Vergnaud. Toulouse: Presses Universitaires du Mirail, 2007. p. 297-306.

DOUADY, R; PERRIN-GLORIAN, M. J. Um processus d'apprentissage du concpt d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands. 1989. v.20, n.4, pp. 387- 424.

FIGUEIREDO, A. P. N. B. **Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do ensino médio:** um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. 2013. 184f. Dissertação (mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

FIGUEIREDO, A. P. N. B.; BELLEMAIN, P. M. B.; TELES, R. A. M. Grandeza Volume: um estudo exploratório sobre como alunos do ensino médio lidam com situações de comparação. **Boletim de Educação Matemática - Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, nº 50, p. 1172 -1192, 2014. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/9s8qPzBz3PLjNRz6v3rVTtq/?lang=pt Acesso em: 10 nov. 2021

FURLAN, M. **MATIDA**: tempo e espaço de atenção no olhar-experiência de uma professora. 2011. 119f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

GATTI, B. A. Estudos quantitativos em educação. **Educação e Pesquisa.** v.30, n.1, p. 11-30, jan./abr. 2004.
Disponível em: https://www.scielo.br/j/ep/a/XBpXkMkBSsbBCrCLWjzyWyB/ Acesso em: 15 jan. 2023.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (Org.) **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GONTIJO, C. H. Estratégias para o desenvolvimento da criatividade em matemática. **Linhas Críticas**, Brasília, v. 12, n. 23, p. 229-244, jul./dez. 2006. Disponível em: https://periodicos.unb.br/index.php/linhascriticas/article/view/3321/3007. Acesso em: 20 set. 2021

HOUAISS, A; VILLAR, M S; FRANCO, F. M. M. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa.** Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

JÚNIOR, G.; RUY, J.; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática**. v.6. São Paulo: FTD, 2018.

JURADO, U. M. Creación de problemas. Avances y desafíos en la educación matemática. **REMATEC**, v. 11, n. 21, p. 79-90, 8 nov, 2016a.

LEÃO, K. W. M. **Abordagem de volume e capacidade em uma coleção de livros didáticos:** uma análise à luz da teoria antropológica do didático.2020. 170f. Dissertação (mestrado). Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica - Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

LIMA, P. F.; BELLEMAIN, P. M. B. Grandezas e Medidas. In: CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes. (Org.). **Matemática:** Ensino Fundamental (Série Explorando o ensino). Brasília: Ministério da Educação: Secretaria da Educação. Básica, v. 17, p. 167-200, 2010.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. **Repensando adição e subtração:** contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2001

MARTINS, B.; VISEU, F.; MENEZES, L. Formulação de problemas matemáticos na aprendizagem de números racionais por alunos do 4.º ano de escolaridade. **Revista Educação Matemática em Foco**, v. 8, p. 79-105., 2019. Disponível em: https://revista.uepb.edu.br/REM/article/view/1205. Acesso em: 23 mar 2023.

MELO, L. V. **Conhecimentos mobilizados por estudantes do ensino médio em situações que envolvem volume do paralelepípedo retângulo:** um estudo sob a ótica das imbricações entre campos conceituais. 2018. 154f. Dissertação (mestrado). Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica - Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados:** um estudo diagnóstico com alunos da 5ª e 6ª série do ensino fundamental. 2005. 226f, Dissertação (mestrado). Programa de pós-graduação em Educação Matemática - Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise textual discursiva**. 3. ed. Ijuí: Unijuí, 2016.

MORAIS, L. B. **Análise da abordagem da grandeza volume em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio.** 2013. 132f. Dissertação (mestrado). Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica - Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. Porto Alegre: **Investigações em Ensino de Ciências.** 2002.(UFRGS), Porto Alegre, vol. 7, n.1, p. 1- 23.
Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf Acesso em: 15 jan. 2022.

OLIVEIRA, G. R. F de. **Investigação do papel das grandezas físicas na construção do conceito de volume.** 2007. 169 f, Tese (Doutorado). Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.** 2. Ed. Belo Horizonte**:** Autêntica, 2002.

PAIVA, M. R. **Matemática: Paiva**. v. 2, 2 Ed. São Paulo: Moderna, 2010.

POSSAMAI, J. P.; ALLEVATO, N. S. Elaboração/Formulação/Proposição de Problemas em Matemática: percepções a partir de pesquisas envolvendo práticas de ensino. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros (MG),v. 6, n. 12, p. 1-28, 2022. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/4726/5133. Acesso em: 27 out. 2022.

REIS FILHO, M. W; MARIN, D. Trabalhando a formulação de problemas na forma/ação inicial do professor de matemática, **REVEMAT**, Florianópolis, v. 17, p. 01-20, jan./dez., 2022. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/359609622 Acesso em: 29 mar. 2023.

RIGHI, F. de L. **Esquemas em ação para aprendizagem significativa da grandeza volume:** Implicações para a formação inicial. 2018. 141f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física). Universidade Federal de Santa Maria- RS, Santa Maria. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/16577/DIS_PPGEMEF_2018_RIGHI_FABIANE.pdf?sequence=1&isAllowed=y Acesso em: 17 abr. 2023.

RIGHI, F. de L.; SANTAROSA, M. C. P; MATHIAS, C.L. Análise dos esquemas em ação da grandeza volume no ensino superior. **Revista Eletrônica VYDIA,** Santa Maria, v. 39, n. 1, p. 179-194, jan./jun., 2019. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/2479/2322. Acesso em: 24 abr. 2023.

SAMURÇAY R., VERGNAUD G. Que peut apporter l'analyse de l'activité à la formation des enseignants, ***Carrefours de l'éducation***, v 10, p. 49-63, 2000.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F.K., JR. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. O. (Eds.). **New directions for elementary school mathematics.** Reston: NCTM, 1989, p. 31-42.

SILVA, L. M. da. **Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas**. 2013. 306f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) — Centro de Ciências e Tecnologia. Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

SILVA, S. V. P. da. **Ideias/significados da multiplicação e divisão**: o processo de aprendizagem via Resolução, Exploração e Proposição de Problemas por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. 2016. 170 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Centro de Ciências e Tecnologia. Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

SILVEIRA, A. A. da. **Análise Combinatória em sala de aula:** uma proposta de ensino-aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas. 2016. 234f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Centro de Ciências e Tecnologia. Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande. Disponível em: http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/2699 Acesso em: 20 mar. 2023.

SILVEIRA, A. A. da; ANDRADE, S. de. Proposição de problema de Análise Combinatória como ponto de partida: episódios de sala de aula. **Revista de Educação Matemática (REMat)**, São Paulo, v.19, n.01, p. 01-23, 2022. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/615/498. Acesso em: 23 mar. 2023.

SILVER, E. A. On mathematical problem posing. **For the Learning of Mathematics**, Edmonton, v. 14, p.19-28, 1994.

SINGER, F. M; ELLERTON, N. F.; CAI, J. Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. **Educational Sudies in Mathematics an International Journal**. New York, v. 82, n. 3, p. 1-7, mar. 2013.

SMOLE, K. S. Por que formular problemas? In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). ***Ler, escrever e resolver problemas*****:** habilidades básicas para aprender Matemática**.** 1. ed. reimp. São Paulo: Artmed, 2001, p. p. 29-68.

SOUZA, S. A. de. **A formulação e resolução de problemas geométricos com base em sólidos geométricos**. 2016. 154f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Centro de Ciências e Tecnologia. Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande.

SOUZA, L. T. C de. **Estratégias para elaboração de problemas matemáticos para o ensino médio.** 2016. 84f. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal da Bahia, Salvador. Disponível em: https://repositorio.ufba.br/bitstream/ri/23310/1/Disserta%c3%a7%c3%a3o%20Ligia.pdf Acesso em: 20 dez. 2022

SPINILLO, G. A; LAUTERT, S.L; BORBA, R. E. S. R; SANTOS, E. M; SILVA, J. F. G. 2017. Formulação de Problemas Matemáticos de Estrutura Multiplicativa por Professores do Ensino Fundamental. **Boletim de Educação Matemática – Bolema**, Rio Claro (SP), v.31, nº 59, p. 928-946.
Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/3xhJw53dwsVyk7wv6Hd84Cc/?format=pdf&lang=pt Acesso em: 10 jan. 2022

STOYANOVA, E., & ELLERTON, N. F. **A framework for research into students' problem posing in school mathematics**. In CLARKSON, P. C. (Ed.), Technology in mathematics education. Melbourne, Victoria: Mathematics Education Research Group of Australia, 1996, p. 18-525.

TEIXEIRA, C. J. **A Proposição de Problemas como estratégia de aprendizagem da Matemática:** uma ênfase sobre efetividade, colaboração e criatividade. 2019. 189f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Brasília, Brasília - DF, 2019.

TEIXEIRA, C. J.; MOREIRA, G. E. Ensino-Aprendizagem da Matemática por meio da Proposição de Problemas: uma proposta metodológica. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática- RIDEMA**, Juiz de Fora, v. 6, n. 1, p. 1-20. 2022. Disponível em: https://periodicos.ufjf.br/index.php/ridema/article/view/38476/25002. Acesso em: 19 mai. 2023.

TELES, R. A. M. **A Influência de Imbricações entre Campos Conceituais na Matemática escolar:** um estudo sobre fórmulas de área de figuras geométricas planas. 2007. 297f. Tese (Doutorado em Educação) -Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

VAN DER MER, I. A. S. **Aprendizagem do conceito de volume:** uma proposta didática compartilhada com licenciandos da matemática. 2017. 102f. Dissertação (mestrado profissional) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/19712. Acesso em: 10 abr. 2023.

VERGNAUD, G. *et al.* Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12 a 13 ans). **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, n. 4, v.1, p. 71-120. Disponível em: https://revue-rdm.com/1983/une-experience-didactique-sur-le-concept-de-volume-en-classe-de-cinquieme-12-a-13-ans/. Acesso em: 10 jan. 2023.

VERGNAUD, G. Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. **Psychologie Française**, Issy les Moulineaux, n. 30, p. 245-252, 1985. Tradução de Maria Lucia Faria Moro, com revisão de Luca Rischbieter e Maria Tereza Carneiro Soares. Disponível em: www.vergnaudbrasil.com; Acesso em: 15 mar. 2023.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, Lisboa, v.1, 1986, p. 75-90.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 10, n. 2, 3. p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, I., 1993, Rio de Janeiro. **Anais [...].** Rio de Janeiro: UFRJ, 1993, p. 1-26.

VERGNAUD, G. Piaget visité la didactique. **Intellectica**, Compiègne, n. 33, p. 107-123, 2002a. Tradução de Camila Rassi, com revisão de Luca Rischbieter, Maria Lucia Faria Moro e Maria Tereza Carneiro Soares Disponível em: www.vergnaudbrasil.com. Acesso em: 20 mar. 2023.

VERGNAUD, G. **Qu'est-ce qu'apprendre?** Conférence introductive.Colloque International de l'IUFM de l'Académie de Créteil. Créteil: IUFM, 2002b. Disponível em:https://www.gerard-vergnaud.org/texts/gvergnaud_2002_qu-est-ce-qu-apprendre_colloque-iufm-creteil.pdf. Acesso em: 15 mar. 2023

VERGNAUD, G. Repères pour une théorie psychologique de la connaissance. In MERCIER A.; MARGOLINAS, C. (ed). **Balises pour la didactique des mathématiques**. Actes de la XIIe école d'été de didactique des mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2005. p. 123-136.

VERGNAUD G. La conceptualisation clef de voûte des rapports entre pratique et théorie. In: **Analyse de pratiques et professionnalité des enseignants**. Actes de la DESCO. CRDP de l'Académie de Versailles, p 48-57. Suivi de Table ronde p 49-57, 2003.

VERGNAUD, G. La prise en compte de l'enseignant dans la théorie des champs conceptuels. In BESSOT, A. (Ed.). **Formation des enseignants et Étude Didactique de l'Enseignan**t. Actes de la journée scientifique en l'honneur de Claude Comiti, pp.3-19. Grenoble: CNRS/ INPG/UJF**,** 2002.

APÊNDICE A – Resultados sobre a FRP a partir da figura do bebedouro

Aluno	Regras de ação	Fq
B02, B06 B11, B24 C14, C17, C21, C31 D10, D11	Apresentação do objeto: bebedouro ou reservatório do bebedouro. Apresentação das dimensões do objeto em m, cm ou mm (para cálculo do volume e posterior conversão de unidades de medida para litros) ou da capacidade em litros (para posterior conversão de litros para m^3). **Pergunta:** Qual o volume em m^3 ou a capacidade em litros do bebedouro?	10
B04, B30 C09, C19 C22, C24 C30, D07	Apresentação do objeto: bebedouro ou reservatório do bebedouro. Apresentação do volume do bebedouro em dm^3 ou da capacidade em litros. Apresentação de uma fração da capacidade total do bebedouro. Cálculo da quantidade de litros referente a fração. Subtração de uma fração de litros da capacidade total. **Pergunta**: Quantos litros ou mililitros correspondem (sobram ou faltam) à fração da capacidade total?	08
B01, B07 B22, C04 D06,	Apresentação do objeto: bebedouro ou reservatório do bebedouro. Apresentação das dimensões do objeto em m, dm ou cm (para posterior cálculo do volume) ou apresentação do volume em m^3. Apresentação de uma porcentagem do volume total do bebedouro. Transformação de unidades de cm^3, dm^3 e m^3 para litros. Cálculo da quantidade de litros, mililitros ou dm^3 referente à porcentagem do volume total. Subtração da quantidade de um percentual de litros da capacidade total. **Pergunta**: Quantos litros, mL ou dm^3 correspondem à porcentagem de uma parte da capacidade total (resta ou falta)?	05
B23 C20 C11	Apresentação do objeto: bebedouro Apresentação das dimensões do bebedouro em cm ou m (para calcular o seu volume). Apresentação da capacidade de um recipiente em ml (copo) ou l (balde). Divisão da capacidade do bebedouro pela capacidade do recipiente. **Pergunta:** Quantos baldes/copos cabem dentro do bebedouro?	03
D20 D30 B19	Apresentação do objeto: bebedouro Apresentação das dimensões do objeto em cm (para calcular o seu volume em cm^3) ou da capacidade em litros. Transformação de unidades de cm^3 para dm^3 ou m^3 para posteriormente transformar para litros. Apresentação do tempo de enchimento em L/seg ou L/min. **Pergunta:** Quanto tempo será necessário para encher ou esvaziar totalmente o bebedouro?	03
B14 C06	Apresentação da capacidade do bebedouro em litros (para posterior transformação de L em mL). Apresentação da capacidade (em mL) de um copo. Apresentação da quantidade de alunos. Apresentação de uma fração da capacidade do bebedouro que será utilizada para encher os copos. Multiplicação da quantidade de alunos pela capacidade do copo. Divisão da capacidade (ou fração da capacidade) do bebedouro pela capacidade do copo. **Pergunta:** Quantas vezes os alunos podem encher os copos?	02
D19	Apresentação da capacidade do bebedouro em litros (para posterior transformação de L em mL). Apresentação da capacidade (em mL) de um recipiente (garrafa).	01

	Apresentação da quantidade de alunos. Multiplicação da quantidade de alunos pela capacidade do recipiente. Subtração da capacidade do recipiente daquela do bebedouro. **Pergunta:** Quantos litros de água sobraram no bebedouro?	
D15	Apresentação da capacidade do bebedouro em litros Apresentação da vazão de uma das torneiras do bebedouro (litros por minutos) Apresentação da quantidade de torneiras utilizadas para esvaziamento do bebedouro. Apresentação do tempo de permanência de duas torneiras abertas. Cálculo da quantidade de água escoada no período que as torneiras permaneceram abertas. Cálculo do percentual de água escoada em relação ao volume total do bebedouro. **Pergunta:** Qual a quantidade de água escoada no período e qual a porcentagem que esse valor representa em relação ao volume total?	01
D03	Apresentação das dimensões do bebedouro em cm (para calcular o seu volume). Apresentação da quantidade de litros de água perdidos por dia. Cálculo da proporção entre a capacidade total do bebedouro e a quantidade de litros perdidos por dia. **Pergunta:** Em quantos dias o bebedouro será esvaziado?	01
D05	Apresentação da capacidade do bebedouro em litros (para posterior transformação de L em mL). Apresentação da quantidade de alunos. Divisão da capacidade do bebedouro pela quantidade de alunos. **Pengunta:** Quantos ml foram consumidos por cada aluno?	01
C15	Apresentação do objeto: jacubeira. Apresentação das dimensões da jacubeira. Apresentação do consumo individual de cada um dos 154 AM (200 mL) Cálculo da capacidade do bebedouro jacubeira em dm^3 e posteriror transformação para litros e mililitros Cálculo do consumo dos 154 alunos em mL. Subtração entre a capacidade da jacubeira e a capacidade de mililitros consumidos. **Pergunta:** Quantos ml serão preparados e quanto faltará para completar a capacidade máxima da jacubeira em dm^3?	01
D13	Apresentação do objeto: bebedouro. Apresentação do comprimento e largura do bebedouro em m. Apresentação da capacidade do bebedouro em litros. Resolução de uma equação, usando a fórmula do volume de um paralelepípedo para encontrar a altura do objeto. **Pergunta:** Qual a altura do bebedouro?	01
B16	Apresentação da capacidade do bebedouro e de um pote em litros. Conversão da capacidade do pote em litros para m^3 (para posterior cálculo da aresta do pote em metros) Cálculo da quantidade de potes que podem ser enchidos com o volume do bebedouro. **Pergunta:** Qual a aresta do pote e quantos foram possíveis encher?	01
B09	Apresentação do objeto: jacubeira no formato cúbico. Apresentação da capacidade da jacubeira em litros (para posterior transformação de L em mL). Resolução de uma equação, usando a fórmula do volume de um cubo para encontrar a medida da aresta da jacubeira.	01

	Pergunta: Quanto vale em cm a aresta dessa jacubeira?	
B08	Apresentação do objeto: bebedouro e garrafa. Apresentação da capacidade do bebedouro em litros. Apresentação da capacidade da garrafa em mililitros. Apresentação da quantidade de garrafas que serão enchidas. Conversão de unidades de litros para mililitros (Capacidade do reservatório) Multiplicação da capacidade de uma garrafa em mL pela quantidade total de garrafas. Subtração da quantidade de mililitros do total de garrafas da capacidade do bebedouro. Cálculo da porcentagem da capacidade que restou após o enchimento das garrafas. **Pergunta:** Qual a porcentagem de água restará no bebedouro após o enchimento de todas as garrafas?	01
B13, B21 C01, D09 D12, D17 D33,	Formulação do problema incompleta e/ou incoerente com o tipo de atividade proposta.	7
	Total	47

APÊNDICE B - Resultados sobre a FRP a partir da figura da fragata

Aluno	Regras de ação	Fq
B05	Apresentação dos objetos: lago e fragata. Apresentação das dimensões do objeto em m (para calcular o seu volume). Apresentação do percentual de ocupação do volume submerso da fragata no lago (para cálculo da porcentagem de ocupação em relação ao volume do lago). Apresentação da quantidade de peixes por m^3 do volume restante. Divisão do volume útil do lago pelo volume de água que será ocupado por um peixe. Pergunta: Quantos peixes no máximo o lago pode conter?	**01**
B18	Regras de ação (RA) Apresentação do objeto: Fragata. Apresentação do volume total do objeto em m^3. Apresentação da fração do volume do objeto que está imerso, para posterior cálculo do volume de água deslocado. Conversão de unidades de m^3 para litros. Pergunta: Qual o volume de água deslocado pela Fragata em litros?	**01**
B03, B10, B17, B20, C02, C05, C08, C10, C12, C16, C23, D14, D16, D31, D32, D34.	Formulação do problema incompleta e/ou incoerente com o tipo de atividade proposta.	**16**
	Total:	**18**

APÊNDICE C - Resultados sobre a FRP a partir de um problema dado, criar um parecido

Alunos	Regras de ação	Fq
A01 F05 F30 G08 G14	Apresentação dos objetos: reservatório cúbico ou no formato de paralelepípedo, jacubeira, caixa d'água ou piscina. Apresentação das dimensões do objeto (comprimento, largura e altura) em cm ou m (para calcular o seu volume). Apresentação da medida da altura que diminuiu do objeto em m ou cm. Cálculo do volume total do objeto. Cálculo do volume final (após diminuição). Subtração do volume que diminuiu do volume total. Transformação de unidades de volume para capacidade. **Pergunta:** Quantos litros de água foram retirados do objeto?	05
G30 G05 G18 G13	Apresentação dos objetos: compartimento, caixa-d'água, piscina ou jacubeira. Apresentação das medidas do comprimento e largura do objeto em m ou cm. Apresentação da quantidade em litros que foi adicionada ou retirada do objeto (Transformação de litros para m^3 ou dm^3. Resolução de uma equação, usando a fórmula do volume de um paralelepípedo para encontrar a altura final após adição/retirada de litros. **Pergunta:** Quantos cm ou m a altura da água aumentou/baixou em relação à altura anterior?	04
A05 A10 F16 G07	Apresentação do objeto: um reservatório. Apresentação das medidas do comprimento e largura do objeto em cm. Apresentação da medida da altura que diminuiu do objeto. Cálculo do volume que diminuiu, considerando as medidas fornecidas no texto do problema. Transformação de cm^3 para litros. **Pergunta:** Quantos litros de água foram retirados do objeto?	04
A17 F10	Apresentação do objeto: reservatório no formato de um paralelepípedo. Apresentação das 3 dimensões do objeto em cm (para calcular o seu volume). Apresentação do volume que foi gasto em litros ou em dm^3. Subtração da capacidade total da quantidade de litros retirados. **Pergunta:** Qual o volume de água restou em litros?	02
A23 F07	Apresentação dos objetos: reservatório no formato de paralelepípedo. Apresentação das dimensões do objeto (comprimento, largura e altura) em m ou cm. Apresentação da medida da altura que diminuiu do objeto em m ou cm, após a retirada do líquido. Subtração da altura que diminuiu da altura do objeto. Cálculo do volume do objeto com a nova altura (após diminuição). Transformação de unidades de volume para capacidade. **Pergunta:** Quantos litros de água sobraram, após a retirada?	02
A35 F08	Apresentação do objeto: reservatório no formato de um paralelepípedo, aquário. Apresentação das 3 dimensões do objeto em cm (para calcular o seu volume). Transformação de unidades de volume para capacidade. **Pergunta:** Qual o volume do reservatório/aquário em litros?	02
G02 G20	Apresentação do objeto: reservatório cilíndrico. Apresentação das dimensões do diâmetro e altura do objeto em dm, m e cm. Apresentação de porcentagem ou fração (para posterior cálculo da capacidade que perdeu). Transformação de unidades de volume para capacidade. Subtração da quantidade de litros inicial e final.	02

	Pergunta: Quantos litros de água restaram no reservatório cilíndrico?	
G16	Apresentação do objeto: copo no formato cilíndrico. Apresentação das dimensões do diâmetro e raio do objeto em cm. (Para posterior cálculo do volume) Apresentação do volume retirado do objeto em mL. Transformação de unidades de volume para capacidade. Resolução de uma equação, usando a formula do volume do cilindro para encontrar a altura desconhecida. **Pergunta:** Quantos centímetros da altura a água baixou?	01
A08	Apresentação do objeto: dois tanques no formato de cilindro. Apresentação das dimensões do diâmetro da base dos tanques cilíndricos em m. Apresentação do volume dos tanques em m^3. Resolução de uma equação, usando a formula do volume do cilindro para encontrar a altura desconhecida de cada tanque, Subtração das duas alturas. **Pergunta:** Calcule a diferença da altura do novo tanque em relação ao antigo.	01
A12	Apresentação do objeto: tanques no formato de cilindro. Apresentação da dimensão da altura e comprimento da base em cm de dois tanques. Apresentação da porcentagem de litros que foi retirada de um dos tanques. Resolução de uma equação, usando a formula do comprimento da circunferência para encontrar a medida do raio da base do cilindro. Cálculo do volume dos cilindros. Transformação de unidades de volume para capacidade. Cálculo da quantidade de líquido que foi retirada de um dos tanques. Subtração do volume retirado do volume inicial. Adição do volume restante em um dos tanques com o volume do outro. **Pergunta:** Quantos litros ainda resta de combustível nos dois tanques?	01
A14	Apresentação do objeto: Reservatório no formato de paralelepípedo e galão. Apresentação das 3 dimensões do objeto em cm (para cálculo do volume). Transformação de unidades de volume para capacidade. Apresentação do preço de um galão de 100 L. **Pergunta:** Quanto se gastará para abastecer o reservatório?	01
A24	Apresentação do objeto: jacubeira no formato de paralelepípedo. Apresentação das 3 dimensões do objeto em m (para calcular seu volume). Apresentação da porcentagem da capacidade do objeto que se quer completar com suco. Apresentação da quantidade de litros produzidos de suco por saco. Transformação de unidades de volume para capacidade. **Pergunta:** Quantos sacos de suco foram colocados no objeto?	01
F09	Apresentação do objeto: reservatório. Apresentação das 3 dimensões do objeto em m (para calcular seu volume) Apresentação de uma fração da capacidade em que o objeto se encontra inicialmente. Apresentação de uma porcentagem da capacidade do objeto que se deseja ter no final. Cálculo do volume do objeto em m^3. **Pergunta:** Quanto falta para atingir a capacidade desejada?	01

F18	Apresentação do objeto: cisterna no formato cúbico. Apresentação da dimensão do objeto em cm (para calcular seu volume) Apresentação de uma fração da capacidade do objeto que se encontra inicialmente Apresentação de uma fração da capacidade do objeto que será adicionado. Transformação de unidades de volume para capacidade **Pergunta:** Quantos litros terá no final?	01
F20	Apresentação do objeto: reservatório na forma de paralelepípedo. Apresentação das 3 dimensões do objeto em dm. (para calcular seu volume) Apresentação de fração (para posterior cálculo da capacidade que restou) Transformação de unidades de volume (dm^3 p/ m^3) **Pergunta:** Quantos m^3 de água restou no reservatório?	01
A03	Apresentação do objeto: Bacia no formato de um paralelepípedo retângulo e um objeto sólido (equipamento). Apresentação das 3 dimensões do objeto. (para calcular o seu volume). do volume do objeto sólido que será retirado de dentro da bacia em m^3. Resolução de uma equação, usando a formula do volume de um paralelepípedo para encontrar a altura do líquido após a retirada do equipamento. **Pergunta:** Qual será a altura do líquido quando o equipamento for retirado?	01
G11	Apresentação do objeto: lago no formato de um paralelepípedo Apresentação das medidas do comprimento e largura do objeto em m. Apresentação da altura máxima. Apresentação do percentual antes do lago atingir altura máxima Cálculo do volume de água do lago (usando o comprimento, largura e percentual da altura máxima). Transformação de unidade de medida de volume para capacidade. **Pergunta:** Quantos litros de água o lago subiu?	01
A21	Apresentação do objeto: piscina. Apresentação das dimensões do objeto em metros. Apresentação de porcentagem (para posterior cálculo do volume que perdeu) Transformação de unidades de volume para capacidade (m^3 p/ L). **Pergunta:** Quantos litros de água restaram na piscina?	01
A06	Apresentação dos objetos: tanques no formato de paralelepípedo e no formato de esfera. Apresentação das 3 dimensões do objeto paralelepípedo em cm (para calcular seu volume). Apresentação do raio do objeto no formato esférico em cm. (para calcular seu volume). Apresentação da porcentagem da capacidade do objeto que diminuiu. Transformação de unidades de medida de comprimento. Transformação de unidades de volume para capacidade. Divisão do volume do tanque que se deseja completar pelo volume do tanque esférico. **Pergunta:** Quantas viagens o caminhão terá que dar para completar a faina?	01
A30	Apresentação do objeto: aquário no formato de um paralelepípedo. Apresentação do comprimento e largura do objeto em m. Apresentação da medida do nível da água que se encontra o aquário. Cálculo do volume de água que se encontra no aquário em m^3. Transformação de unidades de volume para capacidade (m^3 para L). **Pergunta:** Calcule o volume de água.	01
A11, A13 A15, A18	Formulação do problema incompleta e/ou com dados incoerentes com o tipo de atividade proposta e/ou resolução errada ou incompleta.	27

A19, A20 A22, A32 A34, F02 F03, F04 F06, F11 F13, F14 F15, F17 F21, F22 G06, G12 G15, G21 G22, G31 G32,		
		61

APÊNDICE D - Resultados sobre a FRP a partir de um início dado continuar o problema

Aluno	Regras de ação	Fq
B20 B30 B18	Apresentação das dimensões da aresta de uma caixa cúbica em m e do paiol em m, mm e dm (transformação de unidades de mm ou dm para m) para cálculo do volume em m^3 (da caixa cúbica e do paiol). Apresentação da quantidade de caixas da pilha para determinar o volume de cada pilha em m^3. Subtração do volume do paiol do volume das pilhas de caixas. Comparação entre o volume das caixas e o do paiol. **Pergunta:** Quanto da capacidade (volume interno) do paiol sobrou ou foi ocupada?	03
C31 C30 C12	Apresentação das medidas das arestas do cubo em m a fim de ser calculado o volume de uma caixa. Multiplicação do volume de uma caixa pela quantidade de caixas (60). **Pergunta:** Qual o volume das 60 caixas?	03
C10	Apresentação das dimensões de uma caixa (para cálculo do seu volume e transformação de unidades de m^3 para litros). Apresentação das dimensões do paiol (para cálculo do seu volume e transformação de unidades de m^3 para litros). Subtração do volume do paiol do volume das caixas. Cálculo do percentual que corresponde à diferença do volume. **Pergunta:** Qual a porcentagem da capacidade (volume interno) do paiol foi ocupada?	01
B08	Apresentação da quantidade de caixas existentes no paiol. Apresentação da porcentagem do espaço disponível para armazenamento após as 60 caixas. Cálculo da quantidade de caixas que podem ocupar o espaço disponível. **Pergunta:** Quantas caixas cabem no paiol?	01
B01	Apresentação das medidas das arestas do cubo a fim de ser calculado o volume de uma caixa. Apresentação da quantidade de caixas por pilhas. Multiplicação do volume de uma caixa pela quantidade de caixas em cada pilha (10). **Pergunta:** Qual o volume de cada pilha?	01
D03	Apresentação do volume de uma caixa. Multiplicação do volume de uma caixa pela quantidade de caixas. Apresentação das dimensões do paiol (para cálculo do seu volume). Comparação das medidas para saber se a menor cabe dentro da maior. **Pergunta:** Todas as caixas caberiam no compartimento (paiol)?	01
B16	Apresentação das dimensões de uma caçamba. Apresentação das dimensões de uma caixa cúbica. Cálculo da quantidade de caixas que cabem em cada dimensão da caçamba. Cálculo do total de caixas que cabem na caçamba. Subtração da quantidade de caixas que cabem na caçamba da quantidade de caixas existentes no paiol. **Pergunta:** Quantas caixas serão necessárias para completar o caminhão além das caixas do paiol?	01

C17	Apresentação das dimensões de uma caixa cúbica. Apresentação das dimensões da região retangular da base da pilha (paletes). Apresentação da quantidade de caixas por pilha. Representação por figura da distribuição de 6 caixas (de 0,5 m) em uma área de uma região retangular de 1 m por 1,5 m. Divisão da quantidade caixas pela quantidade máxima de caixas em cada pilha (12) a fim de obter a quantidade de pilhas. **Pergunta:** Quantas pilhas (paletes) serão formadas?	01
B03	Apresentação das dimensões de uma caixa cúbica em cm (para ser calculado o seu volume). Apresentação do volume de cada pilha em m^3. Divisão do volume da pilha pelo volume de cada caixa cúbica. (para determinar a quantidade de caixas por pilha). Divisão da quantidade total de caixas pela quantidade de caixas por pilhas. **Pergunta:** Quantas pilhas foram formadas?	01
C02	Apresentação das dimensões de uma caixa. Apresentação da quantidade de caixas dispostas na região retangular da base da pilha. Representação por figura da distribuição de 12 caixas (3 x 4) na área de uma região retangular da base da pilha. Cálculo da área da região retangular. Cálculo da área de uma face da caixa para posterior cálculo da área de uma face das 60 caixas. Divisão da área ocupada por uma face das 60 caixas pela área da base da pilha para determinar a quantidade de caixas que ficarão dispostas na altura da pilha. **Pergunta:** Qual a quantidade de caixas na altura da pilha?	01
C19	Apresentação do número de colunas (5) para distribuição das 60 caixas. Divisão do número de caixas pelo número de colunas. **Pergunta:** Qual a quantidade de caixas em cada coluna?	01
C22	Apresentou a quantidade de pilhas (10). Apresentou a dimensão da altura da pilha para posterior cálculo da dimensão de uma caixa. Divisão da quantidade caixas pela quantidade de pilhas para obter a quantidade de caixas por pilha. Divisão da altura da pilha pela quantidade de caixas por pilha para obter a medida da aresta da caixa. **Pergunta:** Qual a altura de uma caixa?	01
D16	Apresentação da quantidade de caixas por pilhas (5). Apresentação da quantidade de ovos em cada caixa (40). Multiplicação da quantidade de ovos (40) pela quantidade de caixas (60). Divisão das 60 caixas pela quantidade de caixas por pilha (5). Apresentação da massa de um ovo. Multiplicação da quantidade de ovos (40) pela massa de um ovo (5g). **Pergunta:** Quantas pilhas podem ser montadas? **Pergunta:** Qual a massa total dos ovos em kg?	01
B02, B07 B13, B22 B23, B24 C03, C04 C05, C06 C11, C18 C21, C23 D05, D10	Formulação do problema incompleta e/ou incoerente com o tipo de atividade proposta.	23

D12, D13 D14, D15 D30, D31 D32.		
	Total	**40**

APÊNDICE E - Resultados sobre a FRP a partir de uma pergunta

Alunos	Regras de ação	Fq
A03, B13 A08, B07 A22, E17 A23, E02 B17, B19 A09, B20 A34, B23 E10, E18 A14	Apresentação da capacidade em litros, kL, cL, mL ou do volume em cm^3, dm^3 ou m^3, da jacubeira antiga e da jacubeira moderna (para posterior transformação de litro para mL). Apresentação da capacidade de um copo em mL. Divisão da capacidade de cada jacubeira (ml) pela capacidade do copo (ml) a fim de obter a quantidade de copos de cada uma. Subtração da quantidade de copos fornecidos pela jacubeira moderna da quantidade da antiga. Indicação do volume maior que o outro. **Pergunta dada:** Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?	17
B01, E19 B11, B06 B30, A18 E01, B09 B03, B10	Apresentação das dimensões da jacubeira antiga e da jacubeira moderna para cálculo do volume de cada uma ou de uma delas (para posterior transformação de cm^3, dm^3 ou m^3 para litro e depois para mL). Apresentação da capacidade de um copo em mL ou cm^3. Divisão da capacidade de cada jacubeira (mL) pela capacidade do copo (mL) a fim de obter a quantidade de copos de cada uma. Subtração da quantidade de copos fornecidos pela jacubeira moderna da quantidade da jacubeira antiga. Indicação de duas medidas de volumes para definição de qual é o maior. ***Pergunta dada:*** Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?	11
A05, B24 A32	Apresentação da quantidade de copos fornecidos pela jacubeira antiga ou moderna. Apresentação da capacidade de um copo em mL. Apresentação da capacidade em litros da jacubeira moderna ou antiga. Divisão da capacidade de jacubeira moderna (mL) pela capacidade do copo (mL) a fim de obter a quantidade de copos dela. Subtração da quantidade de copos fornecidos pela jacubeira moderna da quantidade da jacubeira antiga. ***Pergunta dada:*** Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?	03
B14, A24	Apresentação da capacidade em litros da jacubeira antiga Apresentação do percentual de litros a mais da jacubeira moderna em relação à antiga (para posterior cálculo do quanto tem a mais). Transformação da capacidade de cada jacubeira (de litro para mL). Apresentação da capacidade de um copo em mL. Divisão da capacidade de cada jacubeira (em mL) pela capacidade do copo (mL) a fim de obter a quantidade copos de cada uma. Subtração da quantidade de copos fornecidos pela jacubeira moderna da quantidade da jacubeira antiga. ***Pergunta dada:*** Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?	02

A19 E03	Apresentação da capacidade em litros da jacubeira antiga Apresentação do dobro, triplo de litros a mais da jacubeira moderna em relação à antiga (para posterior cálculo do quanto tem a mais). Transformação da capacidade de cada jacubeira (de litro para mL). Apresentação da capacidade de um copo em mL. Divisão da capacidade de cada jacubeira (em mL) pela capacidade do copo (em ml) a fim de obter a quantidade copos de cada uma. Subtração da quantidade de copos fornecidos pela jacubeira moderna da quantidade da jacubeira antiga. ***Pergunta dada:*** Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?	02
E16 E30	Apresentação da capacidade em litros da jacubeira antiga Apresentação de fração da capacidade de litros a mais da jacubeira moderna em relação à antiga (para posterior cálculo do quanto tem a mais). Apresentação da capacidade de um copo em mL. Divisão da capacidade de cada jacubeira (L ou mL) pela capacidade do copo (em L ou L) a fim de obter a quantidade copos de cada uma. Subtração da quantidade de copos fornecidos pela jacubeira moderna da quantidade da jacubeira antiga. ***Pergunta dada:*** Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?	02
B16 E04	Apresentação das dimensões da jacubeira moderna ou antiga para cálculo do seu volume (posterior transformação de m^3 para litro). Apresentação do percentual da capacidade a mais/menos da jacubeira moderna/antiga (para posterior cálculo do quanto tem a mais/menos). Apresentação da capacidade de um copo em mL ou m^3. Divisão da capacidade de cada jacubeira (L ou mL) pela capacidade do copo (em L ou mL) a fim de obter a quantidade copos de cada uma. Subtração da quantidade de copos fornecidos pela jacubeira moderna da quantidade da jacubeira antiga. ***Pergunta dada:*** Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?	02
A35, B02	Apresentação da capacidade em litros da jacubeira antiga e da jacubeira moderna (para posterior transformação de litro para mL). Apresentação da capacidade de um copo em mL. Subtração da capacidade da jacubeira antiga da capacidade da jacubeira moderna. Divisão do resultado da diferença da capacidade das duas jacubeiras em mL pela capacidade do copo em mL. ***Pergunta dada:*** Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?	02
B08	Apresentação da quantidade de copos fornecidos pela jacubeira antiga. Apresentação da fração a mais da jacubeira moderna em relação à antiga (para posterior cálculo da capacidade da jacubeira moderna). Apresentação da capacidade de um copo em mL. Multiplicação da quantidade de copos pela capacidade de um copo a fim de obter a capacidade da jacubeira antiga. Divisão implícita da capacidade da jacubeira (L ou mL) pela capacidade do copo (em L ou mL) a fim de obter a quantidade de copos de cada uma. Subtração da quantidade de copos fornecidos pela jacubeira moderna da quantidade da jacubeira antiga. ***Pergunta dada:*** Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?	01

B21	Apresentação da quantidade de litros a menos que a jacubeira antiga possui em relação à moderna. Apresentação da capacidade de um copo em mL. Divisão da capacidade de jacubeira antiga (mL) pela capacidade do copo (mL) a fim de obter a sua quantidade de copos. Soma da capacidade da jacubeira antiga + a quantidade que ela tem a menos para obter a capacidade da jacubeira moderna. Divisão da capacidade da jacubeira moderna (em mL) pela capacidade do copo (mL); Subtração da quantidade de copos das jacubeiras. ***Pergunta dada:*** Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?	01
B05	Apresentação do consumo de litros de suco por cada aluno. Apresentação da capacidade de um copo em mL. Apresentação do percentual de litros a mais da jacubeira moderna em relação à antiga (para posterior transformação de litro para mL). Divisão da quantidade de litros de suco consumidos pelos alunos pela capacidade do copo a fim de encontrar a quantidade de copos consumidos por dia na jacubeira antiga. Cálculo da porcentagem a mais do número de copo. ***Pergunta dada:*** Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?	01
E14	Apresentação da quantidade e capacidade (em mL) de copos da jacubeira antiga. Apresentação da quantidade de litros a mais da jacubeira moderna em relação à antiga (para posterior transformação de litro para mL), tendo a mesma medida do copo em mL. Multiplicação da quantidade de copos pela capacidade de cada copo (em mL) da jacubeira antiga a fim de obter a capacidade total dela (posterior transformação de mL para litro). Soma da capacidade da jacubeira antiga com a quantidade de litros a mais que a jacubeira moderna possui. (posterior transformação de litro para mL). Divisão da capacidade da jacubeira moderna (em mL) pela capacidade do copo (mL); Subtração da quantidade de copos das jacubeiras. ***Pergunta dada:*** Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?	01
B18	Apresentação da capacidade em litros da jacubeira antiga (para posterior transformação de litro para mL). Apresentação da capacidade de um copo em mL. Apresentação da quantidade de alunos. Apresentação da sobra de litros de suco da jacubeira moderna em relação ao consumo dos alunos da mesma quantidade de copos de suco da jacubeira antiga. ***Pergunta dada:*** Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?	01
A30	Apresentação da quantidade de copos fornecidos pela jacubeira antiga. Apresentação da capacidade de um copo em mL. Apresentação da capacidade em litros da jacubeira moderna. Apresentação da quantidade de pessoas e consumo de dl de suco por pessoa. Multiplicação da quantidade de copos pela capacidade de um copo a fim de obter a capacidade da jacubeira antiga. Divisão da capacidade da jacubeira moderna (L ou mL) pela capacidade do copo (em L ou mL) a fim de obter a quantidade de copos. Subtração da quantidade de copos fornecidos pela jacubeira moderna da quantidade da jacubeira antiga. Pergunta: Qual o consumo dos convidados em mL. ***Pergunta dada:*** Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?	01

E11	Apresentação da vazão das torneiras em litros por minutos da jacubeira antiga e da jacubeira moderna (para posterior cálculo da quantidade de litros que cada uma fornece em 5 min) Apresentação da capacidade de um copo em mL. Divisão da quantidade de litros que cada uma fornece em 5minutos pela capacidade de cada copo. Subtração da quantidade de copos fornecidos pela jacubeira antiga e da jacubeira moderna ***Pergunta dada:*** Quantos copos de suco a jacubeira moderna fornece a mais do que a jacubeira antiga?	01
A10, A11 A12, A13 A20, A21 B15, B22 E07, E08 E09, E13 E15	Formulação do problema incompleta e/ou incoerente com o tipo de atividade proposta.	13
	Total	61

APÊNDICE F - Resultados sobre a FRP a partir de uma resposta dada

Aluno	Regras de ação	Fq
E06, E03, E09, E10, E13, E08, E19, E16, F06, F05. F20, F09, F22, F17, G08, G07,	Apresentação do objeto: reservatório no formato de paralelepípedo, tanque de combustível ou caixa d'água. Apresentação das dimensões do objeto em dm, cm ou m. Cálculo do volume do objeto em dm^3, cm^3 ou m^3. Transformação de unidades de medidas de dm^3, cm^3ou m^3 para litro). **Pergunta:** Qual é a capacidade do reservatório em litros?	16
E18, F11 F14, G05, G14,	Apresentação do objeto: reservatório, recipiente. Apresentação da capacidade do objeto em L, hL, dL ou volume em m^3. Apresentação da porcentagem de uma parte da capacidade total de um reservatório e o correspondente a quantidade de litros. **Pergunta:** Qual é a capacidade total do reservatório em litros?	05
G13, G15	Apresentação do objeto: reservatório, caixa d'água. Apresentação do volume do objeto em m^3. Transformação de m^3 em litros para obter a resposta 6.000 L). **Pergunta:** Qual é a capacidade do reservatório em litros?	02
E02, F18	Formato do reservatório não definido. Apresentação de uma capacidade inicial (em kL) Apresentação de outra capacidade para completar a capacidade total (em dL e daL). Transformação de unidades de medidas de capacidade. Soma das duas capacidades para obter a capacidade total. (para obter a resposta 6.000 L). **Pergunta:** Qual é a capacidade total do reservatório em litros?	02
E07, E14	Apresentação do objeto: tanque de um caminhão, balde. Apresentação da capacidade de um reservatório (tanque de um caminhão, balde) em litros. Quantidade do objeto (tanques de caminhões, baldes) Multiplicação da quantidade de caminhões pela capacidade de cada um. (para obter a resposta 6.000 L). **Pergunta:** Qual é a capacidade total do reservatório em litros?	02
E04	Apresentação do objeto: piscina. Apresentação da fração da capacidade de um reservatório e o correspondente a quantidade de litros nela contida (para obter a quantidade que falta). **Pergunta:** Qual é a capacidade total do reservatório em litros?	01
G12	Apresentação do objeto: torneira. Apresentação da quantidade de litros e do tempo que a torneira leva para encher uma fração do reservatório. **Pergunta**: Determine sua capacidade em litros	01

G20	Apresentação do objeto: reservatório. Apresentação da quantidade de alunos. Apresentação do consumo diário (em litros) por cada aluno. Apresentação da quantidade de dias que o reservatório consegue suprir o consumo diário de todos os alunos Multiplicação da quantidade de alunos pelo consumo diário individual Multiplicação da quantidade de litros consumidos por dia pela quantidade de dias de consumo (para obter a resposta 6.000 L). **Pergunta:** Qual é a capacidade do reservatório?	01
F02, E17, E12, E11, E01, G02, G22, F30, G32, G31, F03. E15, G16, F15, F08, F04, F21, G09, F10, F12, F16, F07 E30	Formulação do problema incompleta e/ou incoerente com o tipo de atividade proposta.	23
	Total	53

APÊNDICE G - Resultados sobre a FRP a partir de uma sentença matemática

Alunos	**Regras de ação**	**Fq**
A03, A06, A10, A11, A12, A23, A34, D32, G07, G09.	Apresentação dos objetos: reservatório, banheiro, sala, aquário, piscina, recipiente ou paralelepípedo. Uso dos dados (10 m x 5 m x 2 m) no texto para obter a resposta 100 m^3. **Pergunta:** Qual é o volume do objeto (em m^3)?	**10**
A15 D13 G30 G32 G08	Apresentação dos objetos: piscina ou tanque. Uso dos dados (10m x 5m x 2m), no texto, para atribuir medidas às dimensões do objeto e obter o volume 100 m^3. Conversão de m^3 em litros. **Pergunta:** Quantos litros tem o objeto?	**05**
A08 A13 A30 A19 A17	Apresentação do objeto físico: piscina, compartimento, tanque. Apresentação do volume do objeto em m^3 ou da m^3. Apresentação das medidas de duas dimensões: largura e comprimento (em m), ou largura e profundidade (em m) (para posterior cálculo da dimensão desconhecida) **Pergunta:** Qual é a altura ou comprimento do objeto (em m)?	05
D10 D05 D06 A20	Apresentação dos objetos maiores: paralelepípedo, piscina. Uso das dimensões 10 m x 5 m x 2 m para o objeto maior (para calcular o seu volume) Apresentação do objeto menor: cubo, potes ou balde. Apresentação da medida da aresta do cubo (para calcular o seu volume). Divisão do volume maior pelo volume do menor. **Pergunta:** Quantos objetos menores cabem dentro do objeto maior?	04
G15 G31	Apresentação dos objetos: paiol ou piscina. Uso dos dados (10 m x 5 m x 2 m) no texto para obter a resposta 100 m^3. Apresentação de uma fração ou metade (para cálculo em relação a 100 m^3). **Pergunta:** Qual o volume correspondente à fração, à metade ou ao triplo?	02
D16 D15	Apresentação dos objetos: bomba, torneira, piscina. Uso dos dados (10m x 5m x 2m) no texto para obter a resposta 100 m^3. Apresentação da vazão em m^3/s, L/min da bomba ou torneira. **Pergunta:** Qual é o tempo para encher a piscina?	02
G16 A14	Apresentação do objeto: piscina. Apresentação das medidas no texto: 10 m x 5 m x 2 m. **Pergunta:** Qual a área interna da piscina para ser revestida ou apenas do seu piso?	02
A24	Apresentação do objeto: piscina. Apresentação das medidas do comprimento (em m), da largura (em m) e da altura (em m) da piscina. Apresentação de uma peça de piso com 50 cm de lado. **Pergunta:** Quantas peças de piso são necessárias para revestir a piscina?	01
A01	Apresentação do objeto: tanque. Uso dos dados (10 m x 5 m x 2 m) no texto para obter a resposta 100 m^3. Apresentação da fração do volume do tanque já ocupado. **Pergunta:** Quantos m^3 falta para encher o tanque ou a piscina?	01
G06	Apresentação do objeto físico: pilastra. Apresentação das medidas do comprimento (em m), da largura (em m) e da altura (em m).	01

	Apresentação do preço por m^3 de 1 pilastra. Pergunta: Qual o preço de 12 pilastras?	
A05, A09 A18, A21 A22, A35 D07, D12 D14, D17 D19, D20 G02, G11 G12, G13 G14, G18 G19, G20	Formulação do problema incompleta e/ou incoerente com o tipo de atividade proposta.	20
	Total	53

ANEXO A - Apresentação da pesquisadora pelo programa de pós-graduação à escola onde foi desenvolvida a pesquisa

UFRPE

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO - UFRPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO - PRPG
ROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS - PP

PPGEC

Recife, 22 de junho de 2022.

Ao: Comandante da Escola de Aprendizes Marinheiros de Pernambuco (EAMPE)
A/C Ilmo Sr. Rogério Alves Ribeiro - Capitão de Fragata

De: Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensinos das Ciências (PPGEC) da Universidade Federal Rural de Pernambuco(UFRPE)

ASSUNTO: **Solicitação de Autorização para Pesquisa do Projeto de Mestrado, do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências da UFRPE – Campus Recife.**

Senhor Comandante;

Vimos por meio deste documento apresentar **MARIA SOLANGE DOS SANTOS GAMA,** aluna regular do curso de Mestrado em Ensino das Ciências, orientada pela Professora, Dra. **ELISÂNGELA BASTOS DE MÉLO ESPINDOLA**, credenciada em nosso Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências – PPGEC da Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE. Ela desenvolve o Projeto de Pesquisa intitulado: **"FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE VOLUME E CAPACIDADE POR ALUNOS DE UM CURSO DE FORMAÇÃO MILITAR, SOB A ÓTICA DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS.** A pesquisa pretende constatar possíveis abordagens metodológicas que possam viabilizar o ensino de volume e capacidade, a partir de estratégias de Formulação de Problemas, tendo como público-alvo, os alunos do Curso de Formação de Marinheiros da Marinha do Brasil.
Por esse motivo, solicito à V. Sa. Autorização para a realização da referida pesquisa nos espaços escolares da EAMPE no período de agosto a setembro de 2022.
Aproveitamos a oportunidade para renovar nossos votos de elevada estima e consideração, bem como nos colocarmos à disposição para quaisquer esclarecimentos a esse respeito.

Atenciosamente,

Monica Folena

Coordenadora do PPGEC

Monica Lopes Folena Araújo
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências
SIAPE: 2171949
UFRPE

ANEXO B - Carta de Anuência emitida pela direção da escola onde foi desenvolvida a pesquisa

MARINHA DO BRASIL

ESCOLA DE APRENDIZES-MARINHEIROS DE PERNAMBUCO

CARTA DE ANUÊNCIA

Declaramos para os devidos fins, que aceitaremos a pesquisadora Maria Solange dos Santos Gama, a desenvolver o seu projeto de pesquisa Formulação de problemas sobre volume e capacidade por alunos de um curso de formação militar, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, que está sob a orientação da Profª Drª Elisângela Bastos de Melo Espíndola cujo objetivo é investigar como alunos de um curso de formação militar formulam e resolvem problemas sobre volume e capacidade, sob a ótica da Teoria dos campos conceituais, na Escola de Aprendizes-Marinheiros de Pernambuco.

Esta autorização está condicionada ao cumprimento da pesquisadora aos requisitos das Resoluções do Conselho Nacional de Saúde e suas complementares, comprometendo-se utilizar os dados pessoais dos participantes da pesquisa, exclusivamente para os fins científicos, mantendo o sigilo e garantindo a não utilização das informações em prejuízo das pessoas e/ou das comunidades.

Antes de iniciar a coleta de dados o/a pesquisador/a deverá apresentar a esta Instituição o Parecer Consubstanciado devidamente aprovado, emitido por Comitê de Ética em Pesquisa, credenciado ao Sistema CEP/CONEP.

Olinda, em 25 / 07 / 2022

ROGÉRIO ALVES RIBEIRO
Capitão de Fragata
Comandante

Capitão de Fragata ROGÉRIO ALVES RIBEIRO
Nome/assinatura e **carimbo** do responsável onde a pesquisa será realizada

ANEXO C - Termo de Compromisso e Confidencialidade

TERMO DE COMPROMISSO E CONFIDENCIALIDADE

Título do projeto: Formulação de problemas sobre volume e capacidade por alunos de um curso de formação militar, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais.
Pesquisador responsável: Maria Solange dos Santos Gama.
Instituição/Departamento de origem do pesquisador: UFRPE/Departamento de Educação (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências – PPGEC).
Telefone para contato: (81) 998537884.
E-mail: educsolsantos@gmail.com.

O pesquisador do projeto supramencionado assume o compromisso de:

- Garantir que a pesquisa só será iniciada após a avaliação e aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa – CEP/UFRPE e que os dados coletados serão armazenados pelo período mínimo de 05 anos após o término da pesquisa;
- Preservar o sigilo e a privacidade dos voluntários cujos dados serão estudados e divulgados apenas em eventos ou publicações científicas, de forma anônima, não sendo usadas iniciais ou quaisquer outras indicações que possam identificá-los;
- Garantir o sigilo relativo às propriedades intelectuais e patentes industriais, além do devido respeito à dignidade humana;
- Garantir que os benefícios resultantes do projeto retornem aos participantes da pesquisa, seja em termos de retorno social, acesso aos procedimentos, produtos ou agentes da pesquisa;
- Assegurar que os resultados da pesquisa serão anexados na Plataforma Brasil, sob a forma de Relatório Final da pesquisa;

Recife, 06 de setembro de 2022.

Maria Solange dos Santos Gama
Assinatura Pesquisador Responsável

ANEXO D - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) para maiores de 18 anos

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO - UFRPE

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO - PRPG

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS - PPGEC

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

(PARA MAIORES DE 18 ANOS OU EMANCIPADOS)

Convidamos o Sr. ____ para participar como voluntário (a) da pesquisa Formulação de problemas sobre volume e capacidade por alunos de um curso de formação militar, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, que está sob a responsabilidade da pesquisadora **Maria Solange dos Santos Gama,** [redacted] (inclusive ligações a cobrar). E está sob a orientação da Professora Dra. Elisângela Melo de Bastos Espíndola, telefone para contato: [redacted]

Todas as suas dúvidas podem ser esclarecidas com o responsável por esta pesquisa. Uma via lhe será entregue e a outra ficará com o pesquisador responsável.

Você estará livre para decidir participar ou recusar-se. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema, desistir é um direito seu, bem como será possível retirar o consentimento em qualquer fase da pesquisa, também sem nenhuma penalidade.

Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar o Comitê de Ética em Pesquisa – CEP/UFRPE no endereço: Rua

Manoel de Medeiros, S/N Dois Irmãos – CEP: 52171-900 Telefone: (81) 3320.6638 / e-mail: cep@ufrpe.br (1º andar do Prédio Central da Reitoria da UFRPE, ao lado da Secretaria Geral dos Conselhos Superiores). Site: www.cep.ufrpe.br .

____

(assinatura do pesquisador)

CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO DA PESSOA COMO VOLUNTÁRIO (A)

Eu, ____, CPF _____________________, abaixo assinado pela pessoa por mim designada, após a leitura (ou a escuta da leitura) deste documento e de ter tido a oportunidade de conversar e ter esclarecido as minhas dúvidas com o pesquisador responsável, concordo em participar do estudo **“Formulação de problemas sobre volume e capacidade por alunos de um curso de formação militar, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais”** como voluntário (a). Fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação. Foi-me garantido que posso retirar o meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade.

Olinda, ______ de _____________________ de 20___.

____

Assinatura do participante/responsável legal

Presenciamos a solicitação de consentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e o aceite do voluntário em participar. (02 testemunhas não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura: