UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS

SIMONE FERREIRA DA SILVA

PENSAMENTO ALGÉBRICO, RELAÇÕES DE IGUALDADE E SIMPLIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES EM UM PROCESSO FORMATIVO COM PROFESSORAS DOS ANOS INICIAIS À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

RECIFE-PE
FEVEREIRO 2024

SIMONE FERREIRA DA SILVA

PENSAMENTO ALGÉBRICO, RELAÇÕES DE IGUALDADE E SIMPLIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES EM UM PROCESSO FORMATIVO COM PROFESSORAS DOS ANOS INICIAIS À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

Dissertação apresentada ao curso de Pós-graduação em Ensino das Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino das Ciências.

Linha de pesquisa: Formação e Prática Pedagógica de Professores de Ciências e Matemática.

Orientador: Profº Drº Jadilson Ramos de Almeida
Coorientadora: Profª Drª Juliana Martins

RECIFE – PE
FEVEREIRO 2024

SIMONE FERREIRA DA SILVA

PENSAMENTO ALGÉBRICO, RELAÇÕES DE IGUALDADE E SIMPLIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES EM UM PROCESSO FORMATIVO COM PROFESSORAS DOS ANOS INICIAIS À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

Dissertação apresentada ao curso de Pós-graduação em Ensino das Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino das Ciências.

Aprovado em 23 de fevereiro de 2024

BANCA EXAMINADORA

____

Profº. Drº Jadilson Ramos de Almeida (Presidente)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

____

Profª . Drª Anna Paula de Avelar Brito (Examinador Interno ao Programa)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

____

Profº . Drº José Dilson Beserra Cavalcanti (Examinador Externo ao Programa)
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profª . Drª Maria Alves Azeredo (Examinador Externo ao Programa)
Universidade Federal da Paraíba

RECIFE – PE

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586p Silva, Simone
Pensamento algébrico, relações de igualdade e simplificação de equações em um processo formativo com professoras dos anos iniciais à luz da teoria da objetivação / Simone Silva. - 2024.
133 f. : il.

Orientador: Jadilson Ramos de Almeida.
Coorientador: Juliana Martins.
Inclui referências.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Recife, 2024.

1. Pensamento algébrico. 2. Teoria da Objetivação. 3. Equações e processo formativo. I. Almeida, Jadilson Ramos de, orient. II. Martins, Juliana, coorient. III. Título

CDD 507

AGRADECIMENTOS

É com a poesia de Gonzaguinha que inicio os meus agradecimentos.

**"E aprendi que se depende sempre
De tanta, muita, diferente gente
Toda pessoa sempre é as marcas
Das lições diárias de outras tantas pessoas**

**E é tão bonito quando a gente entende
Que a gente é tanta gente onde quer que a gente vá
É tão bonito quando a gente sente
Que nunca está sozinho por mais que pense estar**

**É tão bonito quando a gente pisa firme
Nessas linhas que estão nas palmas de nossas mãos
É tão bonito quando a gente vai à vida
Nos caminhos onde bate, bem mais forte o coração"**

De fato, eu sou exatamente as marcas de tantas pessoas que passaram e estão na minha vida. E aprendi que se depende sempre de tanta, muita, diferente gente, e a elas devo minha chegada até aqui!

E para começar a falar dessas tantas pessoas, duas mulheres incríveis me deram a mão para que eu pudesse voltar a academia e realizar meu tão sonhado mestrado; aliás, uma me deu o corpo todo e a outra um livro. Cleide Oliveira e Anna Paula Avelar, sem palavras para agradecer o quanto vocês acreditaram em mim, quando nem eu mesma acreditava.

Professor Jadilson, o orientador dos sonhos, homem de poucas palavras e de coração gigante, proporcional a seu tamanho de corpo e de generosidade. Como sou abençoada por ter como orientador um ser humano de verdade, que sabe fazer as pontuações necessárias com palavras doces. Ele disse a meus colegas que eu ainda iria reclamar dele; no entanto, esse dia não chegou! Só gratidão!

Ainda pegando carona na poesia de Gonzaguinha, quando diz que a gente vai à vida nos caminhos onde bate bem mais forte o coração, e de fato, meu coração bateu ao lado de Ludmila Martins, que me ajudou no momento mais difícil dessa trajetória, quando perdida era meu nome e ela, felicidade em pessoa e com sua irreverência marcante, ajudou-me imensuravelmente em diversos aspectos e situações. Amiga linda, Obrigada!!!

Seguindo o mesmo raciocínio, agradeço aos amigos do PPGEC que se tornaram minha família, Marcelo (Meu primeiro filho do coração), Klebson (Meu segundo filho do coração), Adriana, sua generosidade encanta nossas almas, e Geany e Vitória, obrigada por tanta generosidade em tantos momentos de ajuda, Kassiely, um anjo na minha vida, Jailton, Manoel Neto, Letícia e Hemily, a vocês, pessoas queridas e amadas, obrigada por serem presentes de Deus em minha vida tanto acadêmica como pessoal.

Agradeço às minhas amigas do coração, Elayne, Berê, Hilda, Karla e Verinha por tanta generosidade, sempre me socorreram nos diferentes problemas, cada uma com seu jeito de ajudar e de me apoiar durante o período do mestrado, em que tive que me dividir em ser aluna e professora ao mesmo tempo.

Aos queridos colegas do Grupo de Pesquisa em História, Epistemologia e Didática da Álgebra, do qual amo participar, muito obrigada; e, em especial, a minha coorientadora Juliana Martins, sua doçura e competência foram fundamentais no desenvolver da pesquisa.

E no pisar firme nas linhas que estão nas palmas de nossas mãos, agradeço as minhas princesas (Nomes fictícios para os sujeitos da pesquisa), Branca de Neve, Bela, Cinderela, Merida, Moana e Rapunzel por participarem comigo na atividade de ensino-aprendizagem. Vocês contribuíram demais e sempre com muito empenho, dedicação e alegria. Nossos encontros foram alegres, leves e agradáveis.

Agradeço de coração a gestão das escolas Sítio do Berardo e Maria da Glória, Micheline, Etiene, Ediane, Suely, Neíde, Adriana Reis, Emanoel, Renata, por além de compreenderem meu momento de pagar as cadeiras do mestrado e trabalhar três turnos simultaneamente, ajudaram-me muito em diferentes aspectos. E a todos os colegas do Colégio Exímius que, em momentos de aflição, como apresentar um trabalho dentro do banheiro, foram companheiros comigo!

E é muito bonito quando não estamos sozinhos por mais que pensamos estar. Jacilene minha amiga e irmã; Solange amiga de tantos anos, sua voz suave sempre me acalmou; Verônica sua fortaleza reverbera em mim; Karina (amiga e irmã), Janaína e Raphaella, vizinhas queridas que muito me ajudaram com dicas, correções e até uso de computador; Ursula, Kátia e Ariádine, professoras dedicadas que participaram comigo no estudo-piloto; Ana Cristina, Cynthia e Andrea, coordenadoras maravilhosas que nunca soltaram minha mão. Muito obrigada!

A meu pai, que ficaria muito feliz em ver meu sonho realizado; a minha mãe que me deu a vida e a minha sogra que me coloca sempre em suas orações; aos meus irmãos por me fazerem crescer como ser humano; a meu filho, Luiz Eduardo, que a cada dia me ensina o que é amor incondicional, e a meu companheiro André Gustavo, por aguentar meus estresses e me proporcionar viver novas experiências, tipo micareta e jogo de futebol, ajudando-me a não enlouquecer.

À banca examinadora, Professora Anna Paula Avelar, Professor Dilson Cavalcanti, Professora Maria Azeredo, pelas preciosas sugestões, leitura atenciosa, cuidado, tempo e atenção disponibilizados à minha pesquisa. Muito obrigada!

A Deus e à Nossa Senhora sou eternamente grata por me protegerem de tanta coisa, dando-me saúde, sabedoria, disposição e me ajudando com suas infinitas bondades; misericordiosamente, eu sou só gratidão!

Agradeço de coração aos meus alunos, que mesmo crianças, muitas vezes entendiam minhas angústias em relação a tantos trabalhos, textos para ler, seminários e a qualificação. Nossas preocupações de vida de estudante eram semelhantes e, eles diziam: “Tia, vou rezar por você!” palavras sinceras que sempre acalentaram meu coração.

E assim, com tantas marcas, com tantas lições diárias, eu sou um pouco de cada uma dessas pessoas que descrevi e, obviamente, sem vocês este sonho não seria possível de acontecer!

RESUMO

A presente pesquisa assume uma abordagem qualitativa, emergindo da necessidade de conduzir estudos abrangentes sobre a integração da álgebra como uma unidade temática no currículo de matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esta necessidade foi acentuada pela publicação da Base Nacional Comum Curricular em 2017. O objetivo geral da pesquisa é analisar o pensamento algébrico, as relações de igualdade e a simplificação de equações no âmbito de um processo formativo com professoras dos anos iniciais à luz da Teoria da Objetivação. Teoria que é ancorada por concepções hegelianas, dialéticas, dinâmicas e constitutivas de sujeitos e culturas. De acordo com as ideias de Radford, o pensamento algébrico é caracterizado por meio de três vetores: senso de indeterminação, denotação e analiticidade. Adotamos também os pressupostos metodológicos da Teoria da Objetivação na produção dos dados, seguindo a configuração proposta nas atividades de ensino-aprendizagem. Os dados foram produzidos em quatro encontros formativos, sendo os três primeiros com duração de 2 horas cada um e o último com 4 horas de duração. Participaram seis professoras com formação inicial em pedagogia, integrantes de uma escola municipal em Recife - PE. Os encontros formativos foram registrados por meio de videogravações. As análises foram realizadas a partir de um sistema multimodal, utilizando dois sistemas semióticos: o Sistema Semiótico Icônico e o Sistema Semiótico Alfanumérico. Foram analisados gestos, desenhos, falas e registros escritos, revelando formas algébricas de pensamento nas relações de igualdade e na simplificação de equações. Os diálogos, imagens e registros escritos indicaram que as professoras entenderam o sinal de igualdade de maneira relacional, simplificando equações por meio da generalização de regras algébricas. Observamos também que elementos do pensamento algébrico, como indeterminação, denotação e analiticidade, emergiram e foram gradualmente refinados ao longo das atividades formativas, evidenciando indícios do pensamento algébrico na resolução dos problemas realizados pelas professoras e pela pesquisadora-formadora.

Palavras - chave: Pensamento algébrico, Teoria da Objetivação, Equações e processo formativo

ABSTRACT

This research takes a qualitative approach, emerging from the need to conduct comprehensive studies on the integration of algebra as a thematic unit in the mathematics curriculum of the early years of elementary school. This need was accentuated by the publication of the National Common Core Curriculum in 2017. The general aim of the research is to investigate algebraic thinking, equality relations and the simplification of equations in the context of a training process for primary school teachers in the light of Objectivation Theory. This theory is anchored in Hegelian, dialectical, dynamic and constitutive conceptions of subjects and cultures. According to Radford's ideas, algebraic thinking is characterized by three vectors: sense of indeterminacy, denotation and analyticity. We also adopted the methodological assumptions of Objectivation Theory in the production of the data, following the configuration proposed in the teaching-learning activities. The data was produced in four training meetings, the first three lasting 2 hours each and the last 4 hours. The participants were six teachers with initial training in pedagogy from a municipal school in Recife - PE. The training meetings were videotaped. The analysis was based on a multimodal system, using two semiotic systems: the Iconic Semiotic System and the Alphanumeric Semiotic System. Gestures, drawings, speech and written records were analyzed, revealing algebraic ways of thinking about equality relations and simplifying equations. The dialogues, images and written records indicated that the teachers understood the equal sign in a relational way, simplifying equations by generalizing algebraic rules. We also observed that elements of algebraic thinking, such as indeterminacy, denotation and analyticity, emerged and were gradually refined throughout the training activities, showing signs of algebraic thinking in the problem-solving carried out by the teachers and the researcher-trainer.

Keywords: Algebraic thinking, Objectification theory, Equations and training process

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AEA	Atividade de ensino-aprendizagem
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BNC - Formação	Base Nacional Comum Formação
GPHEDA - Al Jabr	Grupo de Pesquisa em História, Epistemologia e Didática da Álgebra - Al Jabr
PCN	Parâmetros Curriculares Nacional
PDF	Projeto Didático de Formação
PNAIC	Programa Nacional de Alfabetização na Idade Certa
PNE	Plano Nacional de Educação
TO	Teoria da Objetivação
UFRPE	Universidade Federal Rural de Pernambuco
SSC	Sistema Semiótico Concreto
SSI	Sistema semiótico Icônico
SSA	Sistema semiótico alfanumérico

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O interesse em pesquisar álgebra está presente na prática profissional da pesquisadora-formadora, que, mesmo sendo graduada em Licenciatura em Matemática, percorreu os níveis fundamental, médio e superior como professora, no entanto, optou por ensinar nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Essa função vem sendo desempenhada há duas décadas nas redes pública e privada de ensino.

Ao longo desse percurso, em contato direto com colegas, a maioria delas pedagogas, sempre a procurava para esclarecer dúvidas referentes a conteúdos de matemática, principalmente álgebra. Com a inserção da álgebra na BNCC (Base Nacional Comum Curricular) em 2017, como unidade temática a ser trabalhada nos anos iniciais, a vontade de explorar esse conteúdo cresceu. A partir de buscas por leituras, surgiu o interesse em pesquisar o ensino-aprendizagem de professoras que ensinam matemática nos anos iniciais em relação ao pensamento algébrico.

A princípio, verifica-se que pesquisas referentes a conceitos algébricos nos anos iniciais têm ganhado espaços significativos no meio acadêmico. Por exemplo, nas pesquisas de Rojas e Vergel (2018), esses autores destacam a importância de realizar trabalhos nos anos iniciais a partir de tarefas no âmbito de atividades orientadas na busca de generalizações de padrões algébricos, realizando experiências significativas com números e suas propriedades, estabelecendo bases para um trabalho posterior e abrangente com símbolos literais e expressões algébricas.

A partir desse contexto, dá-se início a essa pesquisa, a partir de consultas de documentos oficiais brasileiros sobre o trabalho com a álgebra nos anos iniciais. Nos documentos curriculares visitados, foi encontrado nos PCN's (Brasil, 1998) apenas uma indicação de uma pré-álgebra a ser desenvolvida nas séries iniciais do Ensino Fundamental, sem aprofundamento nas discussões necessárias para direcionar adequadamente o ensino e a aprendizagem da álgebra nesse nível de escolaridade, deixando para os anos finais o trabalho com as diferentes funções da álgebra. Nesse documento, também não há um bloco de conteúdo específico para a álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Por outro lado, os "Elementos Conceituais e Metodológicos para a Definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização" (Brasil, 2012), que orientaram o PNAIC (Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa), foram inovadores em relação aos PCN's com a introdução do eixo temático pensamento algébrico do 1º ao 3º ano do Ensino Fundamental

Em 2017, foi aprovada da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que destinou um eixo específico com orientações curriculares para o ensino da álgebra, sobretudo uma unidade temática tratando da abordagem do pensamento algébrico do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, assim a BNCC (Brasil, 2017) nos diz que:

> A álgebra tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento, o pensamento algébrico, essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos (Brasil, 2017, p. 272).

Em outras palavras, a BNCC (2017) explicita que o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais é essencial na compreensão de modelos matemáticos, no qual se quer representar e analisar situações problema, relações quantitativas de grandezas e estruturas matemáticas usando diferentes símbolos de representação.

Nesse contexto, são destacadas as relações de igualdade, no âmbito de conteúdo dos anos iniciais, que ainda não atraíram o interesse que merecem na álgebra inicial, assim como há ainda muito que se aprender nesse campo de estudo (Radford, 2021). Muitas vezes as relações de igualdade das equações são tratadas de forma mecânica, com a simples identificação do termo desconhecido, em que há uma redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica, pois, ao se tomar como ponto de partida a existência de uma álgebra simbólica já constituída, reduzem-se os processos de ensino-aprendizagem da álgebra ao transformismo algébrico (Ribeiro, 2015).

A BNCC (Brasil, 2017) destaca para os anos iniciais do Ensino Fundamental, que os professores devem possibilitar estratégias para incentivar os alunos a criarem, interpretarem e transitarem entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas com compreensão dos procedimentos utilizados. No entanto, não se refere ao uso do sistema alfa numérico, por mais simples que seja, nas séries iniciais. É aconselhado um trabalho com a relação de igualdade, ou seja, na resolução de problemas em que o aluno perceba que o sinal de igual não seja apenas para representar o resultado de uma operação, mas para designar uma relação de equivalência na resolução da equação "Ax + B = Cx + D", por exemplo, Radford (2021).

Mesmo com as recomendações sobre a álgebra na BNCC, percebemos que essas orientações não estão sendo realmente implementadas nas salas de aula. Segundo Radford e Moretti (2021), é um desafio significativo para muitos professores do Ensino Fundamental ensinarem conceitos de álgebra, porque existe uma grande diferença entre o que está no currículo oficial e o que realmente é ensinado. Isso acontece porque as aulas muitas vezes refletem as crenças, conhecimentos e experiências pessoais dos professores desse nível de ensino.

Outro desafio a considerar, segundo Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2016) e Santos e Moreira (2016), é que os professores dos anos iniciais não possuem uma formação adequada que os possibilitem a implementar ou elaborar tarefas voltadas a um trabalho em sala de aula com o pensamento algébrico. Nas pesquisas de Vergel (2018) discute-se o problema da incorporação da álgebra desde os primeiros anos escolares. Ele defende essa incorporação não como disciplina, mas como alternativa de pensar e decidir a partir de objetos, relações, estruturas e situações matemáticas. Dessa maneira há possibilidade que se estabeleça condições do professor realizar um trabalho com compreensão e significados no contexto da álgebra.

Dessa forma, reconhece Freire (2011) que é fundamental o investimento nas práticas de ensino dos professores de matemática do Ensino Fundamental para que haja "a compreensão de conceitos algébricos de forma aprofundada e entender quais tarefas podem facilitar a consolidação desses conceitos pelos alunos" (Freire, 2011, p. 18). Baldin (2018) afirma que trabalhos que visam contribuir com a compreensão dos professores dos anos iniciais sobre o tema pensamento algébrico são fundamentais para ampliar o que os alunos precisam saber. Nesse sentido, Nacarato, Mengali e Passos (2009) dizem que, geralmente, os professores que ensinam nos anos iniciais têm formação nos cursos de Licenciatura em Pedagogia e que, embora algumas reformas nos currículos desses cursos tenham contribuído para seu melhoramento, ainda se faz necessário maior investimento na qualificação dos currículos da formação inicial e em formações continuadas desses profissionais no que diz respeito à Matemática.

No campo da álgebra, o qual é um sistema de processos constituído histórica e culturalmente, pensados a partir de situações que envolvem relações entre grandezas, variações, generalizações e cálculos com valores desconhecidos, ou melhor, segundo Radford (2010), é uma forma particularizada de pensar. Sendo assim, é necessário, em relação à álgebra, entender que para o professor trabalhar de forma colaborativa com seus alunos o pensamento algébrico, ele também precisa compreender esse tipo de pensamento, seja por formações continuadas ou no próprio curso de pedagogia (Romeiro; Moretti, 2021).

Diante das ideias apresentadas, acredita-se que a aprendizagem se dá através do processo dialético entre a objetivação e a subjetivação no âmbito da atividade em que acontece a produção de uma obra comum, na qual o professor não é aquele que transmite o conhecimento a seus alunos, considerados sujeitos passivos ou meros receptores desse conhecimento, pois na atividade tanto os alunos como os professores são considerados subjetividades em formação.

Nessa perspectiva, os processos formativos que foram realizados com os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, que desempenham o ensino da matemática, consistiram uma atividade de ensino-aprendizagem, na qual foi a categoria metodológica de análise (Radford, 2021). Nesse cenário pedagógico, foi procurado responder à seguinte questão de pesquisa: Como o pensamento algébrico, as relações de igualdade e a simplificação de equações podem refinar ações e gerar reflexões em professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, no contexto de um processo formativo, utilizando as ideias da Teoria da Objetivação (TO)? A pesquisa é de cunho qualitativo, baseada na compreensão do pensamento algébrico a partir da Teoria da Objetivação, em que os sujeitos envolvidos se posicionam criticamente nas práticas desenvolvidas durante o processo formativo. Para Radford (2017), o saber algébrico já está culturalmente instituído, pois é um saber histórico e não é um saber puramente interno do sujeito, e pode ser desenvolvido com práticas coletivas e interativas no âmbito das atividades de ensino-aprendizagem.

O método de análise dos dados foi multimodal, uma vez que compreende o desenvolvimento do pensamento algébrico como um processo pelo qual os sujeitos generalizam ideias matemáticas por meio de um discurso argumentativo, e que este pensamento pode ser demonstrado por linguagens diferenciadas e não apenas a linguagem simbólica formal, mas também pela linguagem natural, gestual, oral e pictórica (Radford, 2020).

Para responder à questão da pesquisa, foi estabelecido o objetivo geral de analisar o pensamento algébrico, as relações de igualdade e a simplificação de equações no âmbito de um processo formativo com professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental à luz da Teoria da Objetivação, e como objetivos específicos tem-se:

- Reconhecer os meios semióticos que as professoras apresentam para objetivar suas ideias mediante as atividades do processo formativo;

- Identificar os vetores que caracterizam o pensamento algébrico (indeterminação, analiticidade e denotação) que emergem nas interações entre professoras envolvidas em uma atividade de ensino-aprendizagem referentes às relações de igualdade.

Entendendo a importância do ensino-aprendizagem da álgebra nos anos iniciais, conforme os Documentos Oficiais, este trabalho visa contribuir com práticas de ensino e a aprendizagem de professores que participaram das atividades conjuntas. A intenção é que, nesse contexto colaborativo, os professores possam adotar abordagens que promovam o pensamento algébrico, especialmente nas relações de igualdades e na simplificação de equações.

Este trabalho está estruturado em sete capítulos: no primeiro capítulo, a introdução, é apresentado um panorama sobre a pesquisa e abordagens teóricas e metodológicas. No segundo capítulo fizemos uma busca nos documentos oficiais direcionando um percurso histórico, indicando como a legislação tratou e trata a formação continuada dos professores dos anos iniciais em relação à matemática. A partir de quatro pesquisas, foi possível avaliar como é tratada a formação continuada de professores dos anos iniciais que ensinam matemática em relação à álgebra.

No terceiro capítulo, foi realizada a abordagem da parte teórica explicitando as bases epistemológicas da Teoria da Objetivação, apresentando-a enquanto uma teoria histórico-cultural e sua concepção de aprendizagem mediante o estabelecimento de processos de objetivação e subjetivação, visto que, envolve professores e alunos numa ética comunitária, no âmbito de uma atividade de ensino-aprendizagem, em que seres humanos se colocam no devir, considerados seres inacabados, em constante fluxo, sendo produtos de nós mesmos com os outros, nos limites apresentados pela cultura (Radford, 2017).

No quarto capítulo, a álgebra e o pensamento algébrico foi abordada nos documentos oficiais que regem a educação básica. Também foi discutido, em conjunto, o pensamento algébrico na perspectiva da Teoria da Objetivação, considerando os vetores que constituem a caracterização desse pensamento e, por último, o foco esteve no pensamento algébrico, sobretudo no domínio das equações.

No quinto capítulo, houve a descrição do percurso metodológico que subsidiou a pesquisa, explicitando e argumentando a natureza metodológica, o cenário e os sujeitos da pesquisa, as formas de registros dos dados, os procedimentos para a produção desses dados, a organização estrutural para as análises dos dados e por fim, mas não menos importante, as questões éticas da pesquisa, regidas pelas normas da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE).

No sexto capítulo, estão as análises dos dados que foram realizadas por um sistema multimodal, demonstradas a partir de linguagens diferenciadas e não apenas a linguagem simbólica formal, mas também pela linguagem natural, gestual, oral e pictórica. O capítulo foi dividido em subseções, em que estão explicitadas as formas de organização das análises dos dados produzidos mediante os 4 dias do processo formativo.

No sétimo capítulo, estão dispostas as considerações finais, em que foram explicitadas as conclusões referentes aos resultados obtidos através das análises dessa investigação, utilizando as bases metodológicas e teóricas da Teoria da Objetivação.

2. FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES

No presente capítulo, serão tratadas as diretrizes legais para a formação continuada dos professores, refletindo a partir de documentos oficiais que expõe as intensificações dessas formações no âmbito do poder público na educação básica a partir da década de noventa. Também haverá discussões referentes a pesquisas realizadas por autores que analisam o conhecimento algébrico de professores dos anos iniciais em propostas de formação, corroborando com a importância dessas formações continuadas para os professores na carreira docente e a sua relevância para o ensino da álgebra.

2.1 DIRETRIZES LEGAIS PARA A FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES

É entendido que o saber é dinâmico e contínuo, e de acordo com Radford (2017) *apud* Moretti e Cedro (2017) é considerado a partir de formas de ação humana constituída histórica e culturalmente sintetizados, sobretudo é transformado na prática, em que nasce e renasce no processo de movimento contínuo. No capítulo seguinte, será realizada uma discussão mais aprofundada sobre o saber, e o presente capítulo, estará apoiado na ideia do saber em movimento e transformado na prática a partir da atividade humana realizadas nas formações continuadas envolvendo processos de ensino e aprendizagem dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental que ensinam matemática.

Considerando essas observações, Gatti (2008) sugere que é proveitoso examinar a trajetória legislativa desde 1996. Essa análise nos permite refletir sobre os contextos nos quais a importância dos processos de formação continuada é ampliada. Essa ampliação, notadamente presente nas legislações resultantes de negociações sociais e políticas, não apenas abre espaço para iniciativas nesse sentido, mas também estabelece limites para tais formações.

Nesse contexto, Gatti (2008) afirma que a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN, lei n. 9.394/96) provocou, no âmbito dos poderes públicos, reflexões e debates referentes às questões da importância da formação continuada e trata dessa importância no decorrer da lei em seus artigos:

- No artigo 67, estabelece que os sistemas de ensino deverão promover a valorização dos profissionais da educação, trazendo em seu inciso II "que os sistemas de ensino deverão promover aperfeiçoamento profissional continuado, inclusive com licenciamento periódico remunerado para esse fim"
- No artigo 87, §3º, inciso III, fica evidente que cada município tem o dever de "realizar programas de capacitação para todos os professores em exercício, utilizando também, para isto, os recursos da educação a distância". Referente à educação profissional de modo geral, a lei coloca a educação continuada como uma das estratégias em benefício para a formação do trabalho (art. 40).

Adentrando o caminho das normatizações, avalia-se em Brasil (2005) a criação de políticas públicas visando aprimorar o profissional docente, e assim foi criado a Rede Nacional de Formação Continuada de Professores da Educação Básica, que em conjunto com as universidades do país criaram programas de formação continuada para professores das redes municipais e estaduais da educação básica.

> A Rede é formada pelo MEC, Sistemas de Ensino e os Centros de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação, que são parceiros no desenvolvimento e oferta de programas de formação continuada, bem como na implementação de novas tecnologias de ensino e gestão em unidades escolares e sistemas estaduais e municipais (Brasil, 2005, p. 09).

Sendo assim, a Rede Nacional de Formação Continuada objetiva contribuir na formação continuada dos professores no âmbito municipal e estadual e em conjunto com as universidades e outras instituições de ensino, em que visa a ampliação dos saberes e a produção de materiais instrucionais e orientação para cursos à distância e semipresenciais, atuando em rede para atender as necessidades e demandas dos sistemas de ensino, em destaque dessas contribuições temos a integração de iniciativas como o Pró-letramento que é um programa de formação continuada para professores da educação básica.

Em direção a outras legislações, é apresentado o Plano Nacional de Educação (PNE) para o Decênio 2014/2024, instituído pela Lei nº 13.005/2014, esse documento definiu 10 diretrizes que devem guiar a educação brasileira neste período e estabelece 20 metas a serem cumpridas na vigência, em consonância com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Estabelece que a União, os Estados, o Distrito Federal e os Municípios deverão se unir para alcançar as metas propostas pelo PNE. Os gestores federais, estaduais, municipais e do Distrito Federal ficam na responsabilidade de implementar as estratégias das ações objetivando a obtenção das metas.

Em relação às metas (3, 4, 5, 7, 10, 15 e 16) estabelecidas pelo PNE, a formação continuada de professores encontra-se contemplada na meta 16 e aparece como estratégia no alcance das demais e estabelece que é necessário:

> Formar, em nível de pós-graduação, 50% (cinquenta por cento) dos professores da educação básica, até o último ano de vigência deste PNE, e garantir a todos(as) os(as) profissionais da educação básica formação continuada em sua área de atuação, considerando as necessidades, demandas e contextualizações dos sistemas de ensino (Brasil, 2014, p. 51).

Nesse contexto, pode ser observada a obrigatoriedade em lei e a importância das formações continuadas no decorrer das atuações profissionais do professor, e conforme Brasil (2014) "às mudanças científico-tecnológicas requerem aperfeiçoamento permanente dos professores da educação básica no que tange ao conhecimento de sua área de atuação e aos avanços do campo educacional (p. 51)."

Outro aspecto relevante diz respeito às demandas educacionais, que estão acontecendo mediante as proposições da BNCC, que buscam tornarem efetivas as aprendizagens essenciais previstas nos currículos da Educação Básica. Nesse cenário, os professores terão que desenvolver um conjunto de competências profissionais que os qualifiquem para atender tais demandas.

Em resposta a essa realidade, a resolução CNE/CP Nº 2, de 20 de dezembro de 2019, que define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica, em seu o artigo 6, do capítulo II, que trata dos fundamentos e institui a política da formação docente da Base Nacional Comum de Formação (BNC-Formação) (Brasil, 2019), afirma que deve haver uma política de formação para esses professores que correspondam com os marcos regulatórios da BNCC. No artigo sexto do capítulo II, por exemplo, encontramos alguns parágrafos que se referem as orientações de implementação de formação continuada para os professores que ensinam na educação básica:

> VIII - A formação continuada que deve ser entendida como componente essencial para a profissionalização docente, devendo integrar-se ao cotidiano da instituição educativa e considerar os diferentes saberes e a experiência docente, bem como o projeto pedagógico da instituição de Educação Básica na qual atua o docente.
>
> IX - A compreensão dos docentes como agentes formadores de conhecimento e cultura e, como tal, da necessidade de seu acesso permanente a conhecimentos, informações, vivência e atualização cultural.
>
> X - A liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar a cultura, o pensamento, a arte, o saber e o pluralismo de ideias e de concepções pedagógicas (Brasil, 2019, p. 3).

Dessa forma, é possível observar que há legislações que impulsionam a formação continuada dos professores das redes públicas brasileiras, subsidiando o direcionamento que as redes estaduais e municipais devem seguir para assegurar o acesso a tais formações, ressignificando práticas, sobretudo, oportunizado pelo desenvolvimento de políticas de formação que estejam em consonância com a realidade docente.

Assim, o foco dessa pesquisa esteve nos professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, com ênfase no ensino da álgebra, que, atualmente, é uma unidade temática abordada nesse nível de ensino. Nessa abordagem, torna-se essencial examinar as formações continuadas específicas destinadas ao pensamento algébrico. No próximo tópico, serão apresentados alguns resultados de pesquisas realizadas com professores sobre essa temática.

2.2 ENSINO DA ÁLGEBRA: PESQUISAS RELACIONADAS À FORMAÇÃO CONTINUADA

Em pesquisas realizadas por Moretti (2007), referente à formação de professores de matemática em atividade de ensino, é possível verificar o sentido atribuído pelo professor aos diferentes aspectos do trabalho (instrumentos, mediação, organização das ações, etc.) os quais constituem em sua própria atividade docente. Dessa maneira, segundo Moretti (2007) o fazer do professor está constituído em unidade dialética com a sua atividade teórica, fazendo com que o caráter social do processo de aprendizagem do professor seja articulado com sua prática pedagógica.

A formação continuada em relação à álgebra para os professores dos anos iniciais é considerada necessária, pois de acordo com Ponte e Branco (2013), é primordial que os professores tenham cautela quanto aos aspectos matemáticos e didáticos relativos ao ensino da álgebra, de forma que tenham condições de preparar e concretizar situações de aprendizagem que viabilizem esse desenvolvimento. Eles também relatam que tais formações devem contemplar experiências que proporcionem o desenvolvimento de diferentes aspectos do pensamento algébrico e conhecimento necessário para esse desempenho.

A pesquisa de Ponte e Branco (2013) foi realizada no decorrer de um semestre, no âmbito de uma disciplina do 3º ano da licenciatura em educação básica, em que os professores podem ensinar da pré-escola até o 2º ano do segundo ciclo, sendo equivalente à educação infantil e aos anos iniciais do Ensino Fundamental, desenvolvida numa abordagem exploratória, abrangendo os formandos no desenvolvimento das tarefas e dando relevância aos momentos de discussão referentes à sistematização da álgebra e seu ensino.

A formação contemplou tópicos como: o estudo das relações, regularidades e sequências, funções e modelação matemática abordados em sete tarefas, visando levar os 20 participantes da formação a desenvolverem o pensamento algébrico e a refletirem sobre situações concretas de trabalho a serem realizadas por seus alunos. Porém, para a análise da pesquisa foram utilizados os dados de apenas 3 dos 20 participantes, em relação à análise de sequências pictóricas (determinação de termos próximos e distantes e de um termo geral) em três momentos, antes da experiência de formação, durante a experiência de formação e depois da experiência de formação.

O estudo realizado pelos autores supracitados, evidencia que o trabalho desenvolvido contribuiu para que os participantes das formações compreendessem diferentes modos de obter generalizações com base na identificação de regularidades, em que a maioria expressa simbolicamente por meio de relações diretas. No final da experiência de formação, o autor afirma que as três participantes expressaram as generalizações em linguagem algébrica para usar as expressões algébricas no cálculo do termo distante.

Freire (2011), traz em seu trabalho, um panorama sobre uma das participantes, que antes da formação não conseguia determinar o termo distante e nem o termo geral de uma sequência, e também observa que o trabalho traz relevância no que diz respeito à compreensão da utilização da simbologia algébrica e do significado da variável, que segundo o autor é um conhecimento importante para o professor dos primeiros anos, ou seja, dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Para Freire (2011), sua investigação diz respeito a como professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental, conseguem desenvolver conceitos algébricos como equações, inequações, relações entre quantidades desconhecidas, equivalência, pensamento relacional e o uso de incógnitas, como também, incorporá-los em suas práticas pedagógicas. Sua pesquisa partiu de encontros com as professoras envolvidas, nos quais aconteceram discussões referente a forma como trabalhavam os conceitos supracitados, e nas realizações de tarefas utilizando recursos digitais e manipulativos.

Para realização de sua pesquisa, Freire (2011) utilizou na metodologia o paradigma interpretativo por se tratar de um estudo exploratório, descrevendo as situações e acontecimentos e, foi realizada em duas etapas, com 11 professoras dos anos iniciais, numa escola pública de Fortaleza com uma carga horária de 8 h, onde foram discutidas propostas para o ensino de conceitos algébricos nos anos iniciais. Os encontros realizados em três dias tiveram como objetivos: identificar as funções da educação algébrica no ensino básico; diferenciar o pensamento aritmético do pensamento algébrico; refletir a forma mecânica do ensino e como isso pode prejudicar o pensamento aritmético e o pensamento algébrico e discutir sobre o ensino para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Depois da realização dos encontros denominados de oficina de formação, a autora selecionou uma das participantes para planejar e utilizar as tarefas em sua sala de aula, obtendo os dados a partir de observações e registros durante a oficina, como também entrevista e observação com a professora selecionada. As análises foram realizadas mediante duas categorias, a primeira relativa à compreensão conceitual acerca do pensamento algébrico e o papel do professor como mediador da aprendizagem e a segunda categoria diz respeito ao conhecimento do conteúdo.

As conclusões de Freire (2021), dizem respeito a compreensão conceitual para o pensamento algébrico, destacando o papel do professor inserido nesse processo, quando ocorrem mudanças significativas em sua prática docente, como, por exemplo, no caso de uma das professoras participante da pesquisa, em que aspectos do desenvolvimento do pensamento algébrico foram visíveis no seu trabalho com os alunos dos anos iniciais em tarefas de comparação, sentido de equações e inequações, pensamento relacional e generalização.

Jungbluth (2020) propõe em sua pesquisa referente à formação docente no que diz respeito aos conceitos algébricos, que "a primeira tarefa de responsabilidade direta da União será a revisão da formação inicial e continuada dos professores para alinhá-las à BNCC (Brasil, 2017, p. 21)". No entanto, do período de lançamento da lei até a sua pesquisa ainda não aconteceu formações contemplando o tema junto aos professores. A autora relata que poucos professores afirmam ter algum tipo de formação envolvendo o ensino com conceitos algébricos nos anos iniciais, além de não acharem essas formações suficientes.

Conforme os resultados obtidos nos questionários realizados com os professores que ensinam matemática nos anos iniciais, Jungbluth (2020) aponta a ausência de formação específica para o ensino da álgebra relatada por 74,5% dos professores, os quais dizem não se sentirem preparados para planejar e desenvolver tarefas para seus alunos.

A pesquisa foi realizada com 6 professores que trabalham do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental da RMEF (Rede Municipal de Ensino de Florianópolis), os professores responderam a vários questionários, os quais foram analisados por um software, que organiza a decodificação das respostas. Com o auxílio de todas as codificações e análise de redes elaboradas interligando códigos foram criadas as seguintes categorias: formação para trabalhar a unidade temática álgebra; implementação de atividades que promovem o desenvolvimento do pensamento algébrico e conhecimento de professores sobre álgebra e seu ensino.

Em suas conclusões, Jungbluth (2020) compreende que há a necessidade de formação para que os professores se sintam preparados acerca de seus conhecimentos para ensinar álgebra. A autora afirma que parte dos professores envolvidos em sua pesquisa, tem conhecimentos relativos à álgebra, vindos de seus estudos na Educação Básica, baseados apenas em decorar regras e símbolos, não havendo preocupação com o desenvolvimento do pensamento algébrico. Jungbluth (2020), aponta a necessidade de ampliar o saber dos docentes em relação à álgebra para poder ser trabalhado de forma significativa para os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

As contribuições advindas dessas três pesquisas, que se referem as formações continuadas a professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental em relação à álgebra, foram de grande significado, pois através delas foi possível identificar as limitações apresentadas pelos professores no que diz respeito ao ensino da álgebra e sua compreensão conceitual para o desenvolvimento do pensamento algébrico, quando inseridos no processo de ensino e aprendizagem. As pesquisas também nos mostraram a necessidade de mais formações continuadas envolvendo a álgebra, visto que é uma unidade temática a ser trabalhada nos anos iniciais conforme os marcos regulatórios da BNCC (Brasil, 2017).

Entretanto, outros aspectos não foram demonstrados, como, por exemplo, o estudo envolvendo o trabalho conjunto dos professores em busca de um resultado comum, como também a abordagem de conceitos algébricos tendo como base uma teoria que priorize a relação de ensino-aprendizagem, como na pesquisa de Oliveira (2022) que buscou identificar indícios de processos de objetivação vivenciados por docentes que ensinam álgebra nos anos iniciais, num contexto remoto de uma formação continuada.

O trabalho de Oliveira (2022) se assemelha ao que foi trabalhado nessa pesquisa, uma vez que ambos são ancorados pela mesma teoria, a Teoria da Objetivação, num contexto de formação continuada de professores que ensinam matemática. A autora buscou compreender os processos de objetivação realizando suas análises a partir das ideias acerca da álgebra e do pensamento algébrico reveladas pelas professoras por meio de questionário eletrônico aplicado no momento da pré-formação, como também da observação participante dos encontros, que eram realizados via plataforma Google.

A formação continuada contou com a participação de professores e pesquisadores que integravam o grupo de pesquisa em história, epistemologia e didática da álgebra (GPHEDA -Al Jabr), na elaboração e execução do Projeto didático da formação (PDF). A estrutura da formação contou com 10 encontros realizados com o grande grupo e 9 encontros destinados aos pequenos grupos, totalizando 60h de formação.

Em seu estudo de Oliveira (2022) realizou análises a partir de um pequeno grupo, formado pela autora e por mais 3 professoras, que em *Labor Conjunto* desenvolveram as dimensões dos processos de objetivação e subjetivação e foram adotadas para o estudo a análise semiótica. Assim, os encontros foram observados, analisados e ancorados na metodologia abordada na Teoria da Objetivação. Diante da escolha dos episódios salientes, os quais foram analisados a partir de dois momentos: análise do questionário pré-formação e observação do engajamento das professoras mediante as tarefas, de caráter algébrico, no âmbito dos pequenos grupos.

Os resultados apresentados na pesquisa de Oliveira (2022), apontam que duas professoras investigadas, revelaram em alguns aspectos, avanços quando contrastados os dados iniciais da pré-formação, com dados finais revelados nos encontros do pequeno grupo, porém as professoras também apresentaram contradições e equívocos quanto ao desenvolvimento de raciocínio diante dos padrões em sequências.

Na pesquisa de Oliveira (2022), verificam-se, tanto na primeira etapa quanto na segunda etapa, algumas dificuldades apresentadas pelas professoras, sobretudo na resolução e na aplicação de tarefas que favoreçam o desenvolvimento do pensamento algébrico em relação às sequências, principalmente quando apontaram que as tarefas envolvendo a generalização de padrões são muito avançadas aos alunos do 1º ano, deduzindo assim, para a pesquisadora-formadora que as professoras podem estar indicando aspectos das próprias dificuldades no lidar com tais problemas.

Em caráter conclusivo, Oliveira (2022), afirma que a formação continuada deu oportunidade das professoras dos anos iniciais de se aproximarem com as ideias da álgebra e, consequentemente, do pensamento algébrico nas lentes da Teoria da Objetivação, quanto aos processos de objetivação e subjetivação. Inspiradas no *Labor Conjunto*, as professoras tiveram a oportunidade de fortalecer suas subjetividades, suas reflexões e o envolvimento numa ética comunitária.

Oliveira (2022) indica a importância da continuidade de formações continuadas em álgebra, sejam remotas ou não, aos professores dos anos iniciais que ensinam matemática, para poderem explorar aspectos da prática de ensino-aprendizagem, fundamentadas não apenas no percurso em direção ao saber, mas em favorecer atividades que assumam um caráter colaborativo, o que é compreendido na Teoria da Objetivação por *Labor Conjunto*.

Dessa forma, corroborando com as ideias de Oliveira (2022), a presente pesquisa também buscou compreender num processo formativo de professores dos anos iniciais, o pensamento algébrico, porém com foco nas relações de igualdade e simplificação de equações, para isso abordaremos no próximo capítulo os pressupostos teóricos dessa pesquisa, discutindo as ideias da Teoria da Objetivação e suas especificidades conceituais.

3. APRENDIZAGEM NA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO (TO) E O LABOR CONJUNTO

Nesse capítulo, em sua primeira parte, tratará das concepções que irão subsidiar a presente pesquisa ancoradas no conteúdo teórico da Teoria da Objetivação (TO), inspirados nas reflexões de Luiz Radford. A abordagem será feita de forma concisa, explicitando as ideias do teórico supracitado, no que diz respeito à educação, envolvendo a antropologia do humano, do *saber* e do *conhecimento*. Na segunda parte, também de forma sucinta, serão abordados conceitos referentes à aprendizagem, envolvidos nos processos de objetivação e subjetivação e o *Labor Conjunto* como uma das principais categorias da Teoria da Objetivação.

3.1 ELEMENTOS FUNDAMENTAIS DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO (TO)

Na primeira metade da década de 1990, iniciaram-se estudos relacionados a uma teoria intencionada em oferecer uma abordagem histórico-cultural não individualista de ensino-aprendizagem. Essa teoria é inspirada no materialismo dialético de Karl Marx, na escola de pensamento de Vygotsky e nos sábios conceitos de Paulo Freire (Radford, 2021).

O professor Luis Radford, seguiu um caminho contrário às concepções que reduziam o ensino e aprendizagem à transmissão de técnicas e conceitos matemáticos, como também da ideia de que o sujeito aprende a partir do seu próprio potencial cognitivo. Radford (2021) posiciona-se através de sua teoria considerando a educação um evento ético e estético no âmbito de um espaço político e é nesse contexto que:

> A TO coloca o objetivo da educação matemática como um esforço político, social, histórico e cultural voltado para a criação dialética de sujeitos reflexivos e éticos que se posicionem criticamente em práticas matemáticas histórica e culturalmente constituídas, e que ponderem novas possibilidades de ação e pensamento (Radford, 2021, p. 36).

Nessa perspectiva, a Teoria da Objetivação demonstra que a práxis educativa deve ser desenvolvida com estudantes e professores que se posicionem criticamente num contexto cultural e histórico, indo além do saber matemático, voltando olhares para um contexto escolar, no qual os estudantes e professores não sejam apenas vistos como entidades psicológicas e epistemológicas, mas como sujeitos culturais e ativos no qual seus saberes sejam sempre colocados em transformação, quando inseridos em contextos em colaborativos com outras pessoas (Radford, 2021).

Radford (2021), através da Teoria da Objetivação, também promove outra perspectiva em relação às teorias da aprendizagem da educação matemática, assumindo uma postura diferenciada com o propósito de teorizar a aprendizagem dos sujeitos com seus saberes culturais e com a própria dimensão do sujeito. Assim, a Teoria da Objetivação levanta o conceito de atividade humana em relação à concepção do humano, podemos dizer então que a atividade é dinâmica, está em uma relação dialética do *saber* e do *conhecimento*, portanto tudo é afetado e tudo se modifica e está em constante transformação, sendo entendida como um dos pontos principais para compreender o conceito de aprendizagem no âmbito da Teoria da Objetivação.

A atividade, segundo Radford (2021), presente no mundo dialético, é sensível, material, social, cultural e histórica, o ser humano realiza essas atividades para a satisfação de suas necessidades, num espaço social, produzindo, assim, sua própria existência. Entendemos que o ser humano é completamente material e relacional, está envolvido com a natureza e ao mesmo tempo nas relações sociais e materiais. São imbricados em condições de vida cultural e historicamente constituídos.

Nesse sentido, Radford (2020) faz a relação entre estudante e professor afirmando que eles seguem seus próprios ritmos de desenvolvimento com tempos diferenciados, se relacionando mutuamente e não estão estagnados nesses conhecimentos, estão em constante transformação entrando em contato com novos saberes, de forma colaborativa, e o processo de interação faz com que os seres humanos realizem as ações e reflitam a partir delas, melhorando tais ações em detrimento as reflexões que realizam, produzindo assim saberes coletivos. Especificamente na TO, o saber pode ser definido como sendo:

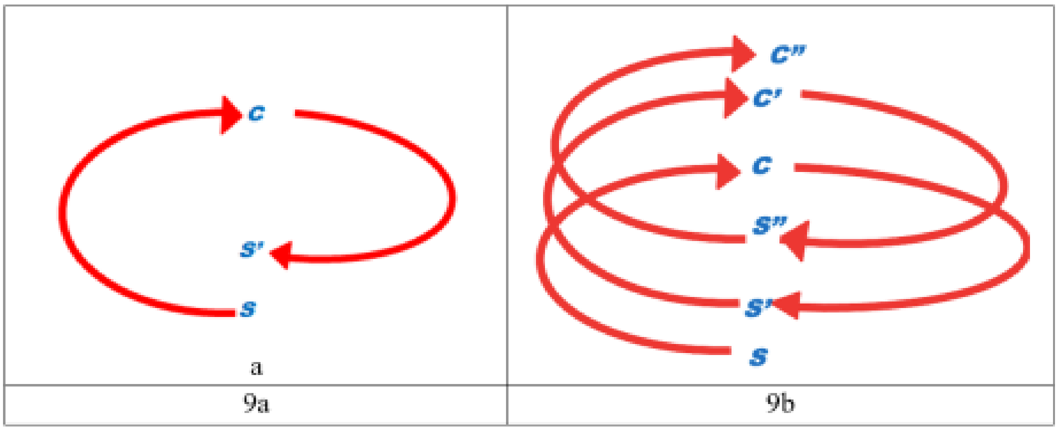
> Um sistema de processos de ação e reflexão corpóreos, sensíveis e materiais, constituídos histórica e culturalmente. Nosso ponto de partida é que, ao nascer, cada um de nós já encontrou um sistema de maneiras de pensar e conceber o mundo (matemático, científico, jurídico, etc.) (Radford, 2020, p. 16).

Mediante a exposição das ideias acima, é possível observar que o saber específico da espécie humana não é programado e nem estagnado, faz parte de um processo que inicia no seu nascimento e vai, gradativamente, passando por mudanças dependendo da cultura na qual está inserido e numa crescente, mas não determinada, forma de pensar e conceber o mundo em diferentes áreas do conhecimento.

Para a Teoria da Objetivação, o *conhecimento* é uma materialização, utilização ou incorporação do *saber*, é o conteúdo conceitual concreto através do qual o *saber* cria corpo, transformando-se no que é visível de se observar, como também se atualiza na inserção do meio (Radford, 2021). O saber é visto de forma geral e o conhecimento de forma específica, e é a atividade que permite a relação entre o *saber* e o conhecimento, em que o *conhecimento* se apresenta como sendo a atualização do saber de forma dinâmica num sistema contínuo. E sem que houvesse a possibilidade de atualização, ou seja, de transformação desse *conhecimento*, o *sabe*r continuaria sem possibilidades de ser modificado e expandido.

De fato, tais ideias apresentam sentido no que diz respeito à materialização do *saber*, pois através da atividade, é possível perceber a expressão viva do *saber*, que engloba o *conhecimento*, já que o *saber* é geral e o *conhecimento* é singular. Para expressar a relação entre saber, atividade e conhecimento, no que diz respeito às relações evolutivas estabelecidas entre diferentes espécies, Radford (2021) criou a Figura 01 fornece uma ideia gráfica (diagrama) e geral dessa relação.

Figura 01 - Representação da materialização do saber.



Fonte: Radford, L. 2021, p. 82.

Em seguida, está exposta uma explicação sobre a representação do movimento de atualização do saber em conhecimento por meio da atividade, de forma textual. Observemos o diagrama (Figura 01) e na sequência as explicações de Radford (2012) referente aos diagramas:

> As Figuras 9a e 9b tentam capturar a relação entre saber (S), atividade (A), e conhecimento (C). Do ponto de vista filogenético, em um ponto do desenvolvimento de uma cultura, o saber S (Figura 9a) é colocado em movimento pela atividade humana (simbolizado pelas setas) e atualizado ou materializado em uma forma desenvolvida (como conhecimento, C). Através da atividade, que é sempre movimento que é afetado por S e pelo C emergente, os indivíduos podem agora refinar, ajustar, expandir e transformar o saber S, dando como resultado um novo saber S'. Esse saber S', convertido em nova

> potencialidade, pode, através da mediação de outras atividades (as setas da Figura 9b) revelar-se ou atualizar-se em outro conhecimento C' (Figura 9b) (Radford, 2021, p. 81).

A ideia de representação do movimento apresentada por Radford (2021) no diagrama e na citação apresentados anteriormente, demonstram que o *saber* se expande por meio da atividade humana, e a cada novo processo de sistematização que acontece, novas formas de saberes são atualizados e se transformam em novos conhecimentos. Caso não houvesse a possibilidade desse tipo de atualização, o *saber* permaneceria estático, tendo a possibilidade de não gerar conhecimento.

3.2 CONCEPÇÃO DE APRENDIZAGEM DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO (TO)

Ao contrário das abordagens construtivistas e participativas, a visão da aprendizagem na Teoria da Objetivação (TO) é exploratória, não completamente de maneira geral, mas de forma a incentivar os sujeitos a se envolverem nos processos de aprendizagem, especificamente nas particularidades do que é aprendido na matemática. Radford (2021) indica que o objetivo da TO está centrado numa perspectiva histórico-cultural referente ao ensino-aprendizagem da matemática, não sendo assim apenas de natureza efetivamente participativa.

As teorias histórico-culturais, baseadas na escola de Vygotsky, possuem o conceito de internalização presente na base de questões da aprendizagem em abordagens socioculturais, no entanto, no caso específico da TO as ideias de internalização não são suficientes, não explicam como as crianças aprendem, pois não são de cunho educativo mas, sim, psicológico já que se referem às funções psicológicas superiores, como a memória e a percepção.

Dessa forma, a Teoria da Objetivação, segundo Radford (2021), busca explorar a aprendizagem por outro caminho, seguindo outra ideia de Vygotsky, que é a ideia da consciência, dentro do sentido dialético-materialista de como se tornar consciente de algo e transformado por algo. Na perspectiva de consciência, é necessário que se tenha a compreensão dos conceitos de objetivação e de subjetivação. Partindo da ideia do saber, no qual não é algo que possuímos ou que nos apropriamos, mas nos deparamos em nosso meio cultura no decorrer de nossas vidas, ou seja, o saber aparece para cada um de nós como uma capacidade geradora histórico-cultural de realizar atividades e de pensar de diferentes formas (Radford, 2021).

Portanto, ao deparar-se com sistemas de pensamento cultural e historicamente formados, denominados objetivação na Teoria da Objetivação (TO), é percebido como um esforço para tomar consciência da atividade na qual os estudantes e professores estão envolvidos. Em relação ao processo de ensino e aprendizagem, é mais apropriado afirmar que esses alunos e educadores estão imersos em um processo de objetivação, em vez de dizer que os estudantes objetivam o conhecimento. Os processos de objetivação, conforme descritos por Radford (2021), consistem em:

> Aqueles processos sociais e coletivos de tomada de consciência progressiva de um sistema de pensamento e ação, cultural e historicamente constituído, do qual tomamos consciência gradual e ao qual dotamos de significado (Radford, 2021, p. 45).

Ao analisar dessa forma, a aprendizagem é definida como um conjunto de processos de objetivação nos quais não acontecem de forma passiva, em que o estudante fique esperando tranquilamente receber o conhecimento, mas por meio de atividades corporais, significativas envolvendo a sensibilidade, a afetividade, a emoção, os artefatos e os meios semióticos, tudo isso envolvido na criatividade dos sujeitos participantes desse processo.

A aprendizagem, na teoria da objetivação, requer um olhar crítico em relação ao saber, como também um local em que os sujeitos envolvidos possam concordar ou discordar por meio das reflexões propostas. A aprendizagem não é a adoção incondicional do saber. Radford (2021) afirma que “na perspectiva crítica que aqui sugiro, ensinar e aprender não são vistos como canais de normalização social, mas como processos que se abrem para caminhos subversivos onde novas ideias e formas de ação podem ser ponderadas” (Radford, 2021, p. 111).

Neste contexto surge o conceito de consciência como relação subjetiva e de auto posicionamento em relação ao mundo objetivo. O sujeito se posiciona com criticidade ontologicamente em experiências vividas mediante fatos ou experiências no mundo real. Mais uma vez, de acordo com Radford (2021), a presença da consciência é especificamente humana, na qual:

> A consciência individual é uma forma especificamente humana de reflexão subjetiva da realidade concreta, no curso da qual passamos a formar sensibilidades culturais a fim de imaginar, refletir, compreender, dissentir, objetivar e sentir sobre os outros, sobre nós mesmos e sobre nosso mundo (Radford, 2021, p. 111).

Diante dessas considerações, pode-se dizer que a aprendizagem inclui os sentimentos, afetos e as emoções que fazem parte da natureza humana e que podem interferir na aprendizagem, já que não podem ser excluídas do processo. Especificamente na matemática, Radford (2021) argumenta que a aprendizagem engloba sentimentos de forma que toca e afeta os envolvidos no processo e que em sala de aula não se produz apenas conhecimentos, mas subjetividades, em outras palavras, seres humanos únicos e em constante transformações.

É interessante considerar que a aprendizagem vista por esse ângulo não é imitação, nem a participação de um evento já organizado, muito menos a vivência em outra realidade, que leve o sujeito a participar ativamente de outra cultura. Também não é a passagem de elementos do meio exterior para o meio interior. Essas concepções não conseguem definir aprendizagem no âmbito da TO. Radford (2007) designa a aprendizagem como sendo uma fusão entre os modos culturais de refletir e fazer e uma consciência emergente e fluida de procurar compreendê-los. Assim, nessa fusão está a consciência, consciência essa que está sempre em transformação contínua e é por isso, que os processos de objetivação e subjetivação estão entrelaçados na criação de um ser único e particular e, sendo assim, podemos concordar com o autor quando afirma que:

> Neste contexto dialético-materialista, a consciência é, portanto, uma relação subjetiva e de auto posicionamento em relação ao mundo objetivo. A consciência é o processo emocional, afetivo e subjetivo através do qual cada um de nós, como sujeitos individuais, refletimos e nos orientamos no mundo (Radford, 2021, p. 112).

A Teoria da Objetivação fundamenta o processo de ensino-aprendizagem no saber (objetivação) e no ser (subjetivação) e também nos signos, que são registros semióticos não fazendo uso apenas como mera representação, mas dotados de significações culturais, nos levando a entender que a matemática pode ser expressa por signos, como os símbolos matemáticos escritos, porém não apenas, pois também podem ser expostos por palavras faladas, ações, gestos que demonstram o modo de pensar e agir sobre o mundo (D'Amore; Radford; Bagni, 2017, p.147).

Diante das especificações expressas na matemática, em que são utilizados os signos, os símbolos escritos, falados, ações e gestos, que demonstram a forma de agir num determinado tipo de atividade de ensino-aprendizagem, podem ser alienantes, pois os alunos podem ser tratados como meros receptores de conhecimentos e os professores como os detentores do saber, ou que o aluno possa construir seu próprio conhecimento. Assim, a TO nos traz o *Labor Conjunto* que consiste numa concentração diferente de uma divisão do trabalho na atividade realizada em sala de aula, pois professor e aluno se voltam a realizar o mesmo *Labor Conjunto* que é explicada por Radford (2021) como sendo:

> O labor conjunto implica em uma conceituação diferente da divisão do trabalho na atividade de sala de aula e uma conceituação diferente do professor e dos alunos. No labor Conjunto, a aprendizagem consiste em perceber e dar sentido ao saber histórico-cultural de forma ativa e criativa. No labor conjunto, professores e alunos trabalham em conjunto, mas não fazem as mesmas coisas (Radford, 2021, p.112).

Esse trabalho em conjunto considera as atividades de ensino-aprendizagem na prática como uma só, ou seja, professores e aluno envolvidos em um único fazer, produzindo um trabalho comum, neste trabalho realizado ambos estão engajados uns com os outros e é onde, de acordo com Radford (2020), que se dá o encontro e a tomada de consciência gradativa de formas de pensamento matemáticos constituídos cultural e historicamente.

Na TO a dimensão do *Labor Conjunto* envolve a ética comunitária, pois dá a devida importância e responsabilidade do cuidado com o outro e o compromisso de um trabalho realmente coletivo. Nesse sentido, Radford (2021) afirma que o *Labor Conjunto* sensível e material é:

> Considerado o último campo da experiência estética, da subjetividade e da cognição, ele afirma que o labor conjunto apresenta um papel ontológico e epistemológico fundamental da matéria, do corpo, do movimento, da ação, do ritmo, da paixão e da sensação no ser humano (Radford, 2021, p.48).

Para ilustrar a ideia do *Labor Conjunto,* apresentamos o esquema na figura 02 que mostra as fases desse processo de cooperação em que professor e aluno trabalham ombro a ombro em busca da realização de uma obra comum. Como podemos analisar no esquema, todas as atividades de ensino-aprendizagem propostas pela Teoria da Objetivação são realizadas em grupos como ilustrado a seguir:

Figura 02 - Representação do Labor Conjunto

Fonte: Gobara, S; Radford, L. (2020, p.30) (traduzida pelos autores)

A ideia apresentada nas fases do *Labor Conjunto*, demonstra que a professora apresenta a situação problema e separa a turma em grupos e os membros desses grupos não realizam uma simples divisão de trabalho e nem fazem a mesma coisa, eles refletem a partir do problema proposto diante de um conceito diferente do envolvimento do professor e do aluno.

Não esquecendo que ao organizar uma sala de aula em grupos, não necessariamente realizará um *Labor Conjunto*, no qual é um tipo específico de atividade. Sendo assim deve existir uma comunicação profunda entre os participantes dos grupos formados, ou seja, um mesmo labor conjunto desses participantes, incluindo a linguagem, experiências incorporadas de movimento, ação, ritmo, paixão e sensação como também, o cuidado com o outro e o respeito pela fala do outro e que, juntos, mesmo que haja uma divisão de tarefas, mas que essa divisão não impeça que trabalhem ombro a ombro na busca de realizarem algo comum (Almeida; Martins, 2022).

Neste caso, a aprendizagem ocorre no sentido da percepção que ambos dão ao saber histórico-cultural de maneira que, tanto professor como aluno trabalhem de forma comprometida, ativa e criativa tentando resolver a situação proposta. E todas as ações que os membros dos grupos realizam na atividade são levadas em consideração, como os gestos, o tom da fala, a forma como escrevem e, principalmente, o respeito com o lugar da fala do outro, para que assim deem conta da solução do problema.

A partir dessa discussão teórica, compreende-se que tanto o aluno como o professor precisam desenvolver o pensamento algébrico, mesmo desempenhando tarefas diferentes no âmbito de uma atividade, e concomitante deverão dialogar respeitosamente diante das situações propostas. Assim, essa pesquisa busca analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, em relação às equações, num processo de formação continuada à luz da Teoria da Objetivação (TO), que tem como princípio a relação dialética entre o ensino e aprendizagem, observadas através dos processos de objetivação e subjetivação em situação coletiva na busca de um resultado comum de problemas propostos para resolver equações do primeiro grau.

A Teoria da Objetivação fornece subsídio para produção e análise dos dados, pois é uma teoria metodológica, que busca não somente os resultados dos dados que foram produzidos, mas sobretudo compreender o processo envolvido nas representações semióticas, dando suporte para explicar como os sujeitos participantes da pesquisa objetivam o saber e se estabelecem a partir das configurações sociais e culturais.

Para isso, a Teoria da Objetivação apresenta a atividade humana como a unidade metodológica de análise da produção dos dados, pois assume o trabalho em conjunto como forma de colocar o saber em movimento, produzindo conhecimento, interação com os outros sujeitos, com os instrumentos e com os signos culturais.

Dando prosseguimento, o próximo capítulo abordará a álgebra ancorada pela Teoria da Objetivação e como esse conteúdo aparece nos documentos oficiais, e na prática avaliativa, no domínio das equações do primeiro grau.

4. ÁLGEBRA E PENSAMENTO ALGÉBRICO

Ao pronunciar a palavra álgebra, percebe-se um certo empoderamento ou até mesmo uma apreensão, pois geralmente remete a combinações de letras e números, muitas vezes indecifráveis, que causa receio aos que não tiveram contato e respeito intelectual para os que dominam. Tais letras e números são utilizados, na maioria das vezes, para obter o valor de um termo desconhecido.

Diante desse cenário, há uma dificuldade de acreditar que tal álgebra possa fazer parte do currículo de estudantes com idades entre 9 e 10 anos, porém se pensar na álgebra não apenas como uma linguagem simbólica, mas como uma maneira diferenciada de tratar determinadas situações matemáticas, faz sentido imaginar no ensino da álgebra para estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, já que o foco está no pensamento algébrico, cujos objetos algébricos e a linguagem utilizada para representá-los sejam compreendidos de forma gradativa e significativa.

Para isso, esse capítulo será parcelado em três tópicos: no primeiro será feita uma discussão sobre o ensino da álgebra nos documentos curriculares; no segundo tópico ocorrerá a caracterização do pensamento algébrico utilizando a Teoria da Objetivação; e no terceiro, haverá uma verificação de como as equações do primeiro grau são pensadas dentro da prática dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais.

4.1 ÁLGEBRA NOS DOCUMENTOS OFICIAIS DOS ANOS INICIAIS

Diante das demandas necessárias para as formações continuadas no que diz respeito a unidade temática álgebra, foram averiguados minuciosamente, alguns documentos oficiais, e assim verificou-se nos PCNs (Brasil, 1997), nos Elementos Conceituais e Metodológicos para a Definição dos Direitos de Aprendizagem (Brasil, 2012), na BNCC (Brasil, 2017), no Currículo de Pernambuco (Pernambuco, 2018) e na Matriz Curricular Prioritária da rede municipal de Recife (Recife, 2022), pontos relevantes que demonstram uma evolução em relação à introdução da álgebra entendida como uma forma de pensamento específico, ou seja, o algébrico, que se encontra atualmente como eixo temático para ser trabalhado por professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A discussão será iniciada tratando sobre o que dizem os PCNs (Brasil, 1997) referente às quatro primeiras séries do Ensino Fundamental a respeito do conteúdo de álgebra nos anos iniciais. Nesse documento a álgebra não apresenta grande relevância, pois está inserida no bloco de conteúdo dos números e operações, e nos anos iniciais é tratada como uma pré-álgebra que pode ser trabalhada pelos professores, sem muito entusiasmo nas orientações. Só é possível encontrar, por exemplo, em todo o documento, a palavra álgebra citada sete vezes:

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do Ensino Fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação (Brasil, 1997, p. 39).

Nos PCNs (BRASIL, 1997), é possível avaliar que a importância que se dá a álgebra ocorre nos anos finais do Ensino Fundamental, não fornecendo subsídios ou orientações para um trabalho efetivo que possa favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, e muito menos incentivos para a realização de formações continuadas aos professores que tratam especificamente dessa temática.

É inegável que os PCNs (Brasil, 1997) tiveram uma importância significativa no contexto histórico da educação brasileira, no entanto, com o surgimento das propostas do documento intitulado como Elementos Conceituais e Metodológicos para a Definição dos Direitos de Aprendizagem (Brasil, 2012), notamos uma inovação em relação às novas orientações curriculares nacionais para o Ensino Fundamental, uma vez que surgiram novas demandas conceituais que não estavam contempladas nos PCNs (Brasil,1997).

Neste cenário, os Elementos Conceituais e Metodológicos para a Definição dos Direitos de Aprendizagem (Brasil, 2012) para o Ensino Fundamental vêm subsidiar nacionalmente os sistemas e redes de ensino na elaboração de seus currículos nos 1º, 2º e 3º anos do Ensino Fundamental:

> É dentro destas balizas e sensível às necessidades sociais, políticas, culturais e econômicas do país que este documento apresenta ao Conselho Nacional de

> Educação (CNE) e à sociedade brasileira para debate (e operação) os Elementos Conceituais e Metodológicos para Definição dos Direitos e Objetivos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização das crianças brasileiras em idade escolar.
>
> Este documento faz parte essencial de uma política de governo que está consubstanciada na MP No 586/2012 que foi anunciada pela Presidente da República no mesmo dia do lançamento do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa, em novembro de 2012 com a assinatura de adesão de 5240 municípios e dos 27 estados da federação. (Brasil, 2012, p. 7)

A apresentação deste documento, com caráter de inovação e de preocupação em subsidiar a formação de professores, foi criado para regulamentar o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC, 2014), que dentre outras atribuições, possibilitou formação continuada aos professores da rede pública que trabalhavam com alunos dos 1º, 2º e 3º ano do Ensino Fundamental, tendo início nos anos de 2013 e 2014, no qual o ano de 2014 foi dedicado aos estudos de ensino da matemática, como consta no documento:

> Tal Pacto Nacional supõe ações governamentais de cursos sistemáticos de Formação de professores alfabetizadores, oferecidos pelas Universidades Públicas participantes da Rede de Formação, a disponibilização de materiais pedagógicos fornecidos pelo MEC, assim como um amplo sistema de avaliações prevendo registros e análise de resultados que induzem ao atendimento mais eficaz aos alunos em seu percurso de aprendizagem (Brasil, 2012, p. 7).

Este documento intitulado Elementos Conceituais e Metodológicos para a Definição dos Direitos de Aprendizagem (Brasil, 2012) está dividido em duas partes: a primeira parte contempla os Fundamentos Gerais do Ciclo de Alfabetização e a segunda parte diz respeito aos Direitos e Objetivos de Aprendizagem e Desenvolvimento por Área de Conhecimento. Mas para esse trabalho, o foco está em analisar a área de Matemática, mais especificamente, as orientações a respeito da álgebra ou do pensamento algébrico.

> A Matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Desta maneira, parte do trabalho de letramento e alfabetização matemática tem nessas regularidades o suporte teórico para o desenvolvimento de três eixos estruturantes: o eixo dos números, o de espaço e forma e do desenvolvimento inicial do pensamento algébrico (Brasil, 2012, p 67).

Tendo como um de seus eixos o Pensamento Algébrico, esse documento objetiva a compreensão e reconhecimento dos padrões em sequências numéricas, de imagens e de sons ou em sequências numéricas simples, o estabelecimento de critérios para agrupar, classificar e ordenar objetos, considerando diferentes atributos e a produção de padrões, fazem parte de todos os eixos estruturantes. Destaca-se também a variabilidade de valores das grandezas e operações, como também a possibilidade da produção de padrões em faixas decorativas, sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples, como mostra o quadro a seguir:

Quadro 01: Objetivos de aprendizagem em relação ao pensamento algébrico nos Elementos Conceituais e Metodológicos para a Definição dos Direitos de Aprendizagem

EIXO ESTRUTURANTE PENSAMENTO ALGÉBRICO Objetivos de Aprendizagem	**1º Ano**	**2º Ano**	**3º Ano**
Compreender padrões e relações, a partir de diferentes contextos.			
Estabelecer critérios para agrupar, classificar e ordenar objetos, considerando diferentes atributos.	**I**	**I/A**	**A/C**
Reconhecer padrões de uma sequência para identificação dos próximos elementos, em sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples.	**I**	**I/A**	**A/C**
Produzir padrões em faixas decorativas, em sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples.	**I**	**I/A**	**A/C**
LEGENDA: I – Introduzir; A – Aprofundar; C – Consolidar.			

Fonte: Brasil (2012, p. 77).

Assim, conforme o quadro acima, notamos que o eixo estruturante do pensamento algébrico objetiva a aprendizagem na compreensão de padrões e relações em contextos variados. Estabelece a introdução, o aprofundamento e a consolidação dos objetivos no 1º, 2º e 3º anos do Ensino Fundamental, respectivamente. O fato de apresentar um eixo designado ao pensamento algébrico nos anos iniciais, é considerado um avanço em relação aos PCNs (Brasil, 1997).

No ano de 2017, foi entregue a versão final do documento intitulado Base Nacional Comum Curricular (BNCC), tendo sido elaborado por diversos especialistas das diferentes áreas do conhecimento, é considerado um documento moderno e completo, pois tem como meta perseguir uma educação de qualidade em todo o país:

> Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996)1, e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (Brasil, 2017, p. 7).

Esse documento normativo, que serve de referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares, teve como objetivo contribuir na orientação das formações de professores, na avaliação e na elaboração de conteúdos educacionais. Um ponto importante a ser citado é a intenção de contribuir no que diz respeito aos critérios e oferta de infraestrutura adequada para o desenvolvimento da educação brasileira.

Para o nosso estudo, iremos nos deter no campo da álgebra, na qual a BNCC (Brasil, 2017) caracteriza a álgebra para os anos iniciais do Ensino Fundamental, pela finalidade de desenvolver um tipo especial de pensamento, ou seja, o pensamento algébrico:

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos (Brasil, 2017, p. 270).

No que diz respeito às relações de igualdade de uma equação, a BNCC (Brasil, 2017) indica o trabalho com o sinal de igual, desde o 3º ano do Ensino Fundamental, como pré-requisito de equações algébricas, diferente do documento Elementos Conceituais e Metodológicos para a Definição dos Direitos de Aprendizagem (Brasil, 2012), que focou apenas em sequências e padrões. Também indica atividades simples com igualdade como, por exemplo: $7 + 2 = 9$ e $9 = 7 + 2$ ou $3 + 5 = 4 + 4$, para contribuir com a ideia de que a igualdade não é apenas um símbolo que indique uma operação a ser resolvida, mas que o sinal de igual tenha o significado relacional de equivalência.

Para os 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, o qual é o nosso foco de pesquisa, a BNCC (Brasil, 2017) indica uma continuidade mais aprofundada dos conhecimentos algébricos com o trabalho de equivalência por meio da igualdade introduzidos nos conteúdos como: identificação do termo desconhecido, operações fundamentais para resolver e elaborar problemas e a ideia de proporcionalidade.

Nesta pesquisa, esse assunto será tratado com mais detalhes, sobretudo a parte metodológica do trabalho, com igualdade para identificar o termo desconhecido, ou seja, as equações de primeiro grau, bem como a resolução de problemas por meio dessas equações na perspectiva do desenvolvimento do pensamento algébrico com base na Teoria da Objetivação. Assim, organizamos uma tabela, que apresenta um panorama de como a BNCC (Brasil, 2017) traz para os 4º e 5º anos, os objetivos de conhecimentos e as habilidades para unidade temática álgebra.

Quadro 02: Objetivos de conhecimentos e as habilidades para unidade temática Álgebra

Ano	Unidade Temática	Objetivos de conhecimento	Habilidades
4º ano	Álgebra	• Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural. • Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero. • Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão • Propriedades da igualdade	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural."Sou professor contra a ordem capitalista vigente que inventou esta aberração: a miséria na fartura. Sou professor a favor da esperança que me anima apesar de tudo. Sou professor contra o desengano que me consome e imobiliza." (FREIRE, 1996, p. 40) (EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades. (EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas. (EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos. (EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.
5º ano	Álgebra	• Propriedades da igualdade e noção de equivalência • Grandezas diretamente proporcionais • Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. (EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido (EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros. (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro

Fonte: Autoral. Ref: Brasil, Ministério da Educação, BNCC, 2017, p.294-296.

Ao analisar o quadro acima, nota-se que na unidade temática álgebra, do 4º ano e 5º ano, não há nos objetivos de conhecimento o nome explícito "equação", porém sua ideia aparece na habilidade "EF04MA14", a qual afirma que o estudante do 4º ano deverá apresentar a condição de reconhecer, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece a mesma quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos. Quando esse tipo de pensamento acontece, segundo Radford (2006), o estudante explorou o sinal de igual de forma analítica, reconhecendo que ele não serve apenas para definir o resultado de uma operação.

Para o 5º ano a habilidade "EF05MA10" apresenta caráter complementar em relação ao 4º ano, já que acrescenta a operações de multiplicação e divisão realizadas em ambos os termos da igualdade. No entanto, a habilidade "EF05MA11" afirma que o estudante deverá elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido, e se o estudante operar com esse desconhecido como se fosse conhecido, não apenas tentando resolver o valor do termo desconhecido, desenvolverá o raciocínio analítico e consequentemente o pensamento algébrico, segundo os estudos e as indicações de Radford (2006), como citado anteriormente.

Trazendo como pilares os conhecimentos estabelecidos na BNCC (Brasil, 2017) para o Ensino Fundamental, o Currículo de Pernambuco (Pernambuco, 2018) para Educação Infantil e Ensino Fundamental foi elaborado com a colaboração do estado de Pernambuco e a UNDIME/PE (União dos Dirigentes Municipais de Educação). O documento está organizado em quatro volumes: Educação Infantil, Ensino Fundamental – Linguagens, Ensino Fundamental – Matemática e Ciências da Natureza e Ensino Fundamental – Ciências Humanas e Ensino Religioso. Nossa análise será referente ao volume de Ensino Fundamental - Matemática e ciências da natureza do capítulo que trata da formação de professores.

Similarmente a BNCC (Brasil, 2017), o documento intitulado Currículo de Pernambuco (Pernambuco, 2018) para Educação Infantil e Ensino Fundamental apresenta como uma das habilidades relativas às aprendizagens à álgebra.

> A unidade temática álgebra tem como foco o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos (Pernambuco, 2018, p. 371).

O documento retrata a necessidade que os estudantes precisam ter para identificar regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, determinem as leis matemáticas e tenham condições de expressar relações de interdependência entre grandezas apresentadas nos variados contextos do dia a dia, como também, criar, interpretar gráficos e símbolos, tendo condições de resolver problemas por meio de equações e inequações com consciência dos procedimentos utilizados. Para o Currículo de Pernambuco para Educação Infantil e Ensino Fundamental, “As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade” (Pernambuco, 2018, p. 371).

Para concluir essa discussão a respeito dos documentos oficiais que tratam da álgebra, temos a Matriz Curricular Prioritária (Recife, 2022) que foi organizada pós pandemia, em que surgiram muitos desafios, sobretudo nas questões pedagógicas. Dessa forma, a Secretaria Executiva de Gestão Pedagógica organizou vários documentos norteadores e a Matriz Curricular Prioritária é a base do fazer pedagógico para os(as) estudantes do 1o ao 9o ano do Ensino Fundamental. Nesse documento, organizado por ano de escolaridade, visitamos o 4º e 5º ano, para ter uma visão geral de como a álgebra é tratada.

A Matriz Curricular Prioritária (Recife, 2022), baseada na BNCC (Brasil, 2017), indica o que é prioritário em cada ano de escolaridade para a aprendizagem dos(as) estudantes. Neste material, são encontradas indicações mais objetivas sobre o que é basilar para os estudantes conseguirem progredir e consolidar conteúdos em seu percurso educacional. É preciso pontuar que esse documento foi o norteador de todos os demais documentos pedagógicos do município, como também está de acordo com a Política de Ensino da Rede Municipal do Recife.

Como o documento está dividido por ano de escolaridade, foram selecionados para avaliações os quadros dos 4º e 5º anos (quadro 03), em que está inserido a álgebra.

Quadro 03 - Álgebra na Matriz Curricular Prioritária da rede municipal de Recife - 4º ano

EIXO	PENSAMENTO ALGÉBRICO
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM	**Reconhecer** que, se multiplicarmos um dos fatores de um produto por um número, o resultado também ficará multiplicado por esse mesmo número. **Determinar** o valor que torna uma igualdade verdadeira, envolvendo as operações fundamentais com números naturais. **Determinar** um elemento, desconhecido em uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais. **Determinar** alguns valores que tornam uma desigualdade verdadeira. **Identificar**, em sequências numéricas, envolvendo múltiplos de um número natural, às regularidades existentes. **Reconhecer** e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade, existente entre dois termos, permanece, quando se adiciona, ou se subtrai, um mesmo número, a cada um desses termos.
CONTEÚDOS / SABERES	Propriedade da equivalência. Raiz de uma igualdade. Determinação de um elemento desconhecido em uma igualdade. Determinação de elementos desconhecidos em uma desigualdade Sequência numérica recursiva, formada por múltiplos de um número natural. Propriedades da igualdade.
HABILIDADES BNCC	EF04MA11, EF04MA12, EF04MA13, EF04MA14, EF04MA15

Fonte: Matriz Curricular Prioritária da rede municipal do Recife (2022)

Para o 4º ano do Ensino Fundamental, este documento, estabelece como eixo denominado de pensamento algébrico, e estabelece os objetivos de aprendizagem, priorizando os conteúdos como as propriedades de equivalência, o valor do elemento desconhecido de uma igualdade e de uma desigualdade, as sequências recursivas e as propriedades de igualdade, no âmbito das habilidades da Base Nacional Comum Curricular.

Quadro 04 - Álgebra na Matriz Curricular Prioritária da rede municipal de Recife - 5º ano

EIXO	PENSAMENTO ALGÉBRICO
OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM	**Descrever** e completar uma sequência (numérica ou de figuras), com elementos ausentes (no início, no meio ou no fim da sequência). EF05MA01REC. **Reconhecer** o padrão associado à multiplicação ou à divisão de um número por 10, 100 ou 1000. EF05MA02REC. **Perceber** relações de variações entre grandezas, resolvendo problemas que envol-vam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar; alterar quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros. **Determinar** um elemento desconhecido em uma igualdade. **Reconhecer** que, se multiplicarmos ou dividirmos o dividendo e o divisor por um mesmo valor, o quociente não se altera. **Reconhecer**, por meio de investigações, a permanência da relação de igualdade ou de equivalência, ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir um número natural por um mesmo número. **Resolver** e elaborar problemas, onde um dos termos da sentença matemática seja desconhecido
CONTEÚDOS / SABERES	Sequências numéricas Padrão da multiplicação e da divisão por potências de dez. Variação entre grandezas. Determinação do elemento desconhecido em uma igualdade Propriedades da equivalência. Propriedades da igualdade e noção de equivalência.
HABILIDADES BNCC	EF05MA10, EF05MA11, EF05MA12, EF05MA13

Fonte: Matriz Curricular Prioritária da rede municipal do Recife (2022)

Para o 5º ano, a matriz curricular orienta um trabalho voltado aos padrões da multiplicação e da divisão, variação entre as grandezas e determina a identificação do valor desconhecido, priorizando as propriedades da equivalência. Também orienta a uma retomada das sequências numéricas, tudo isso com aportes da Base Nacional Comum Curricular.

Dessa forma, ao longo desta discussão, foi observado que a álgebra, ou pensamento algébrico, é indicada para ser abordada nos anos iniciais do Ensino Fundamental, tanto no âmbito nacional, com a BNCC (Brasil, 2017), quanto nos contextos específicos do estado de Pernambuco e do município de Recife. Essa abordagem deve estar alinhada com as orientações presentes nos documentos educacionais pertinentes. No próximo tópico, serão abordadas discussões a respeito do pensamento algébrico, fundamentado nos pressupostos teóricos da Teoria da Objetivação.

4.2 PENSAMENTO ALGÉBRICO NA PERSPECTIVA DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

A presença de incógnitas em sentenças matemáticas é o que define o saber algébrico numa visão geral das pessoas, e está diretamente ligada às experiências escolares ocorridas nas últimas décadas em relação ao ensino de álgebra, que o reduziam a como sendo apenas uma simplificação de expressões algébricas, resolução de equações, aplicação de regras e receitas prontas para manipular símbolos. Visitando a literatura científica, encontra-se um consenso entre alguns pesquisadores a respeito da caracterização do pensamento algébrico, em que afirmam não ser algo simples de explicar e que isso ocorra pelo fato do extenso campo em que essa forma particular de pensar matematicamente está incluso, ou seja, a álgebra tem uma grande quantidade de objetos de estudo, como equações, inequações, funções, padrões, etc, como também nos processos de inversão e simplificação (Almeida; Santos, 2017).

Nesta perspectiva, a reflexão será iniciada mostrando, de forma sucinta, a diferença entre pensamento aritmético e pensamento algébrico, assim será possível deixar claro qual a ideia do pensamento algébrico no âmbito da Teoria da Objetivação. De acordo com Radford (2014), o pensamento aritmético é uma forma específica de pensar, assim como o algébrico, mas há uma ruptura entre esses dois tipos de pensar, pois mesmo considerando as operações fundamentais, os números e suas propriedades, não há garantia que o processo de introdução à álgebra siga como um aprofundamento do pensamento aritmético. Segundo Radford (2014), o pensamento aritmético pode até colaborar com o pensamento algébrico, mas é possível observar que o pensamento algébrico poderá acorrer independentemente do pensamento aritmético, em que:

> Na perspectiva da teoria da objetivação, a característica do pensamento algébrico não se encontra apenas na natureza da grandeza (ou seja, na natureza do objeto sobre o qual se raciocina), mas também no tipo de raciocínio que é feito com grandezas (Radford, 2021, p.173).

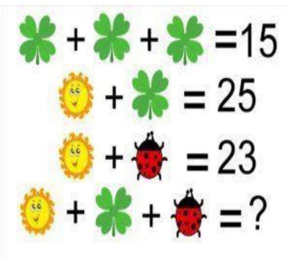
Dessa forma, a principal característica do pensamento algébrico é a analiticidade que tem a ver com o raciocínio que a pessoa apresenta em relação a grandezas determinadas e indeterminadas, estabelecendo relações entre esses dois tipos de grandezas, porém outros dois elementos ou vetores, que de acordo com Radford (2010), também caracterizam o pensamento algébrico, e estão relacionados ao senso de indeterminação, ou a indeterminação de grandezas, que corresponde ao que se quer descobrir no problema, chamados de variável e denotação, essa última que é a simbolização das grandezas indeterminadas que aparecem no problema.

Nesse contexto, serão mais bem explicados cada um desses elementos ou vetores, ao longo das atividades de avaliação e análise que serão vivenciadas pelos professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, mediante consideração de que o pensamento algébrico, como sendo uma prática social e multimodal, implica na visualização e materialização por diferentes maneiras.

Para melhor compreensão desses três elementos ou vetores que caracterizam o pensamento algébrico, mediante as ideias do Luis Radford, foi elaborado um quadro contendo a síntese da discussão e exemplos de como eles se apresentam em tarefas escolares.

Quadro 05: Vetores do pensamento algébrico em tarefas escolares

Vetor	O que compreendemos	Exemplo
Analiticidade	Este vetor distingue o pensamento algébrico do aritmético, quando há um pensamento analítico acontece uma ruptura epistemológica do pensamento aritmético para o algébrico, pois tem a ver com o raciocínio e principalmente como os números desconhecidos são tratados como se fossem conhecidos, ou seja, números concretos. A igualdade não é um símbolo que implicará em um resultado, ela é vista como uma relação de igualdade	Vamos resolver de forma analítica a seguinte equação: $5X + 2 = 3X + 6$ $5X + 2 - 2 = 3X + 6 - 2$ $5X = 3X + 4$ $5X - 3X = 3X - 3X + 4$ $2X = 4$ $2X \div 2 = 4 \div 2$ $X = 2$

		Pensando analiticamente a igualdade é vista de forma relacional
Senso de indeterminação	É a existência de grandezas não determinadas ou não conhecidas, nas equações chamamos de incógnitas ou variáveis, porém a presença de incógnitas ou variáveis não significa que sejam um problema especificamente algébrico. O que determina o raciocínio algébrico é a forma analítica de descobrir o valor da variável.	Verificando novamente a equação: 5 X + 2 = 3 X + 6 A letra X é chamada de incógnita ou variável, caracterizando o senso de indeterminação.
Denotação	As grandezas indeterminadas (Incógnitas ou variáveis) podem ser nomeadas ou simbolizadas de diferentes formas, como os signos alfanuméricos, porém não necessariamente até porque pode-se usar linguagem natural, gestos ou signos não convencionais, tais como desenhos, figuras presentes no cotidiano dos estudantes ou até mesmo uma mistura do que foi citado.	Para exemplificar a denotação não há necessidade da utilização de símbolos alfanuméricos. O desenho abaixo pode ser considerado um exemplo  Além da utilização de figuras do cotidiano dos estudantes, também podemos considerar a linguagem natural e os gestos.

Fonte: Autoral.

No quadro acima, são observadas as explicações e exemplificações referentes ao pensamento algébrico, caracterizado segundo Radford (2010) pela analiticidade, senso de indeterminação e denotação, elementos ou vetores presentes do pensamento algébrico conforme a Teoria da Objetivação. No entanto, é válido ressaltar que nessa teoria o pensamento algébrico difere das correntes contemporâneas que associam tal pensamento diretamente ao pensamento simbólico alfanumérico, envolvidos na resolução automática de uma equação, e por conter números e letras seja associado ao raciocínio algébrico, como podemos notar na exemplificação de Radford (2021).

> Considera-se frequentemente que a solução para a equação 2x + 2 = 10 automaticamente requer raciocínio algébrico, já que a equação envolve o uso de letras, independentemente das especificidades do raciocínio seguido pelo estudante. No entanto, como temos notado muitas vezes em nossas pesquisas nas escolas, os estudantes procedem por tentativa e erro: eles substituem o valor de x por 1, depois por 2, e assim por diante, até encontrar o valor x = 4 que torna a igualdade verdadeira (Radford, 2021, p. 174-175).

Essa forma mecânica leva o estudante a utilizar a tentativa e o erro, como visto no exemplo citado, ou seja, substitui o valor desconhecido por números naturais até encontrar a solução da equação, não utilizando o raciocínio analítico, o qual é a principal característica do pensamento algébrico conforme a Teoria da Objetivação, dessa forma, o aluno está pensando de forma aritmética e não algébrica (Radford, 2021).

Outro ponto relevante em relação ao pensamento algébrico segundo a Teoria da Objetivação, é que o mesmo não pode ser considerado uma aritmética generalizada, claro que não podemos excluir a importante relação entre esses dois pensamentos, o aritmético e o algébrico, porém não se pode extrair toda álgebra escolar da aritmética, há rupturas epistemológicas, na qual veremos claramente no exemplo dado por Radford (2021) em que alunos se deparam com equações do tipo Ax + B = Cx + D e não conseguem usar a inversões de operações, daí necessitarão agir em relação à incógnita, de forma dedutiva e operar com os valores desconhecidos como se fossem conhecidos, dessa forma será preciso pensar analiticamente e recorrer a uma ideia algébrica. Assim, operando dessa forma, com valores desconhecidos como se fossem conhecidos, verificamos a diferença entre o pensamento algébrico e o aritmético.

No próximo tópico, será mostrado como o pensamento algébrico é apresentado no domínio das equações do primeiro grau com base na Teoria da Objetivação.

4.3 PENSAMENTO ALGÉBRICO NO DOMÍNIO DAS EQUAÇÕES

Falar sobre equações como conteúdo a ser abordado por professores que ensinam nos anos iniciais, especificamente no 4º e 5º ano, pode parecer que está se tratando de algo impossível, se for levado em consideração as equações apenas como uma combinação de letras e números, ou seja, uma expressão algébrica, na qual o valor do termo desconhecido é encontrado mecanicamente. No entanto, ao trabalhar com o sinal de igual representando equivalência, como em A = B, em que A e B não necessariamente são idênticos, mas podem ser vistos como símbolos ou representações de um mesmo objeto dentro de uma relação equivalente (Radford, 2022), os estudantes podem se familiarizar com essa utilização do sinal de igual e o trabalho com equações fará sentido nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

No entanto, é relevante ter o conhecimento de que o símbolo de igual, considerado indispensável para o ensino da matemática, foi concebido, na forma que conhecemos atualmente, em 1557 pelo matemático inglês Robert Recorde. Essa notável criação está registrada em seu livro intitulado "The Whetstone of Witte", reconhecido como o primeiro tratado inglês sobre Álgebra. Além de Recorde, diversos matemáticos europeus utilizaram esse símbolo com propósitos diversos, extrapolando as associações comumente atribuídas ao sinal de igual. Mesmo antes da representação proposta por Recorde, o símbolo já servia para denotar o resultado de operações, além de indicar igualdade no sentido de equivalência. Historicamente, independentemente do símbolo que o representava, o sinal de igual desempenhava duas funções, tanto no sentido relacional, designando igualdade, quanto no sentido operacional, indicando o resultado de uma operação a ser realizada. Desse modo, o símbolo de igual pode ser classificado como um dos principais elementos matemáticos já concebidos (Cavalcante e Santos, 2008).

De acordo com os estudos de Radford (2022), o entendimento do sinal de igual e dos conceitos de equações ligados aos significados de igualdade numérica são partes centrais da matemática escolar. Assim:

> Vários estudos realizados com alunos do Ensino Fundamental e Médio se concentraram na identificação dos significados que esses alunos atribuem ao

> sinal de igual e sua compreensão das equações. Uma das principais descobertas foi a identificação de significados procedimentais e relacionais do sinal de igual. Um significado procedimental leva à concepção de o sinal de igual como uma inscrição que incita a realizar um cálculo, em contraste, uma compreensão relacional leva ver o sinal de igual como se referindo a um atributo de mesmice das partes equacionadas A e B em A=B (Radford, 2022, p. 02).

Trivilin e Ribeiro (2015), em seus estudos sobre equações, apontam que não é dada uma importância devida ao sinal de igual quando apresentado para os alunos, os quais o reconhecem apenas como um sinal que aponta o devido lugar, no qual devem colocar o resultado das operações realizadas e relatam que, em alguns tipos de tarefas propostas aos alunos, podem reforçar a ideia do sinal de igualdade aparecendo em sentenças logo após os símbolos operatórios (+, -, x e :), isso acontece, por exemplo, em tarefas do tipo: 3 + 5 = 8 que comumente acontece nos anos iniciais do Ensino Fundamental, em que os alunos se acostumam a dar o resultado, vendo nesses casos o sinal de igualdade como uma indicação para fazer um procedimento do lado esquerdo e colocar a resposta do lado direito.

Outro ponto relevante discutido nas pesquisas de Trivilin e Ribeiro (2015) em relação ao sinal de igual é referente à noção relacional, identificada em situações em que o sinal de igual é utilizado para representar uma igualdade de expressões, em uma relação funcional. Segundo os autores, a maneira restrita de como os alunos compreendem os significados do sinal de igualdade é resultado de suas experiências matemáticas no Ensino Básico, eles reforçam também que outras pesquisas apontam que os alunos têm condições de lidar com aspectos relacionados ao pensamento algébrico com foco nas equações nas séries iniciais, mesmo antes de apresentarem uma linguagem simbólica algébrica.

Radford (2021), em relação às equações, afirma que tal conteúdo ainda não despertou a devida importância que merece na álgebra inicial e ainda há muito que se estudar e aprender nesse campo de domínio da matemática. No entanto, através de seus trabalhos de pesquisa longitudinal de ensino e aprendizagem com estudantes de 10 ou 11 anos, trouxe contribuições relevantes em relação ao ensino e aprendizagem das equações.

Devido à natureza abstrata e descontextualizada e do uso de sinais apresentados nas sentenças numéricas que provocam entendimento computacional, distante da compreensão algébrico da incógnita, do sinal de igual e da equação no âmbito das relações algébricas (Radford, 2022). Nesse sentido, os meios ou sistemas semióticos aparecem com grande relevância e potencialidade na formação de conceitos, para que os estudantes encontrem uma forma de pensar algebricamente, principalmente no que diz respeito a solução de problemas que envolvem as equações do primeiro grau, tais meios ou sistemas semióticos foram organizados por Radford (2021) da seguinte forma:

- ✓ O sistema semiótico concreto (SSC) que diz respeito aos objetos materiais disponibilizados aos alunos na resolução dos problemas que envolvem as equações.

- ✓ O sistema semiótico icônico (SSI) que é utilizado para substituir as figuras concretas por desenhos icônicos, tais como o desenho de um envelope ou até mesmo o próprio sinal de igual.

- ✓ Sistema alfanumérico semiótico (SSA) onde são utilizadas as letras do nosso alfabeto para representar a variável ou incógnita de uma equação.

Tais sistemas são utilizados de forma gradativa respeitando a idade dos estudantes ou dos sujeitos envolvidos na pesquisa, no caso da nossa pesquisa, os professores trabalharão com o sistema semiótico icônico (SSI), pois substitui as figuras concretas por desenhos e o sistema alfanumérico semiótico (SSA) utilizando as letras do nosso alfabeto para representar a incógnita da equação, já que são pessoas adultas e conseguem abstrair do sistema semiótico concreto (SSI), ou seja, sem a necessidade de usar objetos materiais para utilizar na resolução das equações.

No entanto, um sistema semiótico utilizado de forma isolada, apenas como ferramenta, não faz sentido em si mesmo, sua utilidade é vista em um contexto de aprendizagem que o potencialize, sobretudo no que diz respeito às formas de resolução coletiva das equações do primeiro grau, apresentadas através de problemas, porém ampliando nossas reflexões notamos que independentemente do conteúdo trabalhado a atividade humana realizada será no Labor conjunto, no âmbito da Teoria da Objetivação Radford (2021) na qual:

> O espaço de discussão coletiva não é um lugar para os estudantes ou a professora exibirem suas proezas. É um local de crescimento coletivo, de produzir um trabalho comum, de compartilhar maneiras de pensar procedimentos para resolver o problema apresentado e de assegurar que os estudantes se envolvam genuinamente com as ideias uns dos outros, ou seja, que eles se envolvam com essas ideias de forma responsável, compreendendo-

> as, discutindo-as, contestando-as ou refinando-as, por exemplo (Radford, 2021, p.186).

Pelo exposto, para corroborar é acrescido que tal espaço onde oferece a possibilidade de os sujeitos entrarem em contato com o saber algébrico, no caso específico das equações do primeiro grau, a tomada de decisão consciente em relação ao saber poderá fazer com que os sujeitos encontrem e ressignifiquem os saberes algébricos histórico-culturais do sinal de igual, das equações e dos conceitos necessários para resolver equações Radford (2022).

5. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, serão apresentados, em suas subseções, os procedimentos metodológicos adotados para essa pesquisa. Além disso, será discutida a escolha metodológica, a descrição do cenário do processo formativo, os sujeitos da pesquisa, e a forma de utilização dos instrumentos necessários para a produção e registro dos dados. Serão apresentados, também, os procedimentos para a análise dos dados, por meio de um sistema multimodal, à luz da Teoria da Objetivação (TO). Por fim, mas não menos importante, será feita uma análise das questões éticas explicitadas na presente pesquisa.

5.1 NATUREZA METODOLÓGICA

A escolha metodológica para o desenvolvimento desta pesquisa é de natureza qualitativa. Acerca disso, Ludke e André (1986, p. 18) afirmam que a pesquisa qualitativa "é o que se desenvolve numa situação natural, é rico em dados descritivos, tem um plano aberto e flexível e focaliza a realidade de forma complexa e contextualizada". Ademais, Bodgan e Biklen (1994) compreendem que a pesquisa qualitativa tem, além de outras características, o ambiente natural como a principal fonte de dados, e possui o pesquisador como seu instrumento fundamental para a produção de dados. Ainda segundo Ludke e André (1986), na abordagem qualitativa, o pesquisador não pode assumir apenas o papel de observador, mas também de um participante ativo e reflexivo que atua e intervém na realidade.

Nesse sentido, o percurso metodológico, sua caracterização e desdobramentos são elementos mais importantes que o produto, uma vez que o processo educativo, repleto de informações relevantes para qualquer tipo de investigação, não é linear, tampouco estagnado. Sendo assim, o foco da abordagem qualitativa se encontra nos significados dos diferentes acontecimentos, como no objeto de estudo, sujeitos e nos diferentes elementos que compõem o universo que envolve os processos de ensino-aprendizagem, principalmente se tratando de uma abordagem teórica e metodológica como a TO.

De acordo com Radford (2015a), uma metodologia só pode fazer sentido por intermédio de sua inter-relação com um conjunto de princípios teóricos e as questões de pesquisa que visamos responder. Ou seja, “os princípios teóricos e o método que produz fatos e interpretações devem encaixar-se mutuamente” (Radford, 2021, p 27). Sendo assim, para estruturar os procedimentos metodológicos desta pesquisa, seguiu-se as orientações da Teoria da Objetivação (Radford, 2015; Radford, 2021), no que diz respeito à produção, registro e análises em relação aos dados produzidos.

Para isso, no âmbito de uma atividade de ensino-aprendizagem (AEA), foi elaborado um processo formativo com 6 professoras da educação básica, cujo resultado revelou formas algébricas de pensar as relações de igualdade e, consequentemente, a simplificação de equações. Para essa pesquisa, foi utilizado o método multimodal de análise dos dados, conforme os princípios teóricos da TO.

5.2 O CENÁRIO DAS FORMAÇÕES E SUJEITOS DA PESQUISA

As formações ocorreram em uma escola da Rede Municipal de Recife–PE, onde são realizadas atividades de ensino pela pesquisadora-formadora, nos anos iniciais, há aproximadamente duas décadas. A escola faz parte de uma comunidade da periferia da cidade de Recife e atende crianças do primeiro ao quinto ano do Ensino Fundamental, no turno da manhã e da tarde, além de possuir uma excelente infraestrutura. As salas são todas climatizadas, limpas, organizadas e com acústica adequada para a realização das videogravações. Acerca da gestão escolar, as responsáveis vigentes foram bastante solícitas e organizaram, no cronograma de trabalho das docentes participantes da pesquisa, o horário para período de realização das formações. Além disso, disponibilizaram a biblioteca da escola, local silencioso e pouco frequentado pelo corpo de funcionários da instituição.

Os sujeitos da pesquisa foram 6 professoras que trabalham nos anos iniciais do Ensino Fundamental na escola supracitada; todas possuem formação inicial em pedagogia e cinco delas atuam em sala de aula da educação básica há mais de 20 anos, e uma há mais de 10 anos. É importante destacar que os nomes atribuídos a elas para a discussão são fictícios, a fim de preservar integralmente anonimato das profissionais.

Para sintetizar e descrever melhor os sujeitos da pesquisa, organizamos um quadro com as informações das professoras que participaram da atividade de ensino-aprendizagem no âmbito do processo formativo.

Quadro 06 - caracterização dos sujeitos da pesquisa

Sujeitos da pesquisa	**Características dos sujeitos**
Bela	Pedagoga Especialista em Práticas de Ensino de História 25 anos de sala de aula
Branca de Neve	Pedagoga Especialista em Gestão e Planejamento Educacional Especialista em Educação de Jovens e Adultos e Multiculturalidade 22 anos de sala de aula
Merida	Pedagoga Especialista em Gestão Escolar 21 anos de sala de aula
Moana	Pedagoga Especialista em Administração escolar e Planejamento Educacional 26 anos de sala de aula
Rapunzel	Pedagoga Especialista em Psicopedagogia 22 anos de sala de aula
Cinderela	Pedagoga Especialista em Psicopedagogia 12 anos de sala de aula

Fonte: autoral.

Na próxima seção serão descritas as formas de registros de dados e a maneira em que os instrumentos foram utilizados, bem como a importância e a descrição de cada item para a pesquisa.

5.3 FORMAS DE REGISTROS DOS DADOS

Para a realização dos registros de dados durante o processo formativo foram realizadas videogravações no âmbito da atividade de ensino-aprendizagem, como também registros escritos e anotações de campo explicitando as estratégias realizadas pelas professoras (sujeitos da pesquisa) (Radford; Sabena, 2015).

Por meio das adaptações necessárias, foram empregados os instrumentos de produção de dados, descritos abaixo:

1 - Uma filmadora e um gravador de voz (ambos celulares): para registrar o processo formativo, utilizamos dois celulares, um para as videogravações e outro como um gravador de voz. Os dispositivos citados serviram como suporte, caso ocorresse algum imprevisto em relação à qualidade das filmagens, e foi bastante útil para ouvir o que as docentes diziam, principalmente quando falavam baixo ou estavam longe do microfone do celular. Esses instrumentos registraram as situações explícitas e implícitas do processo, que envolvem o planejamento e as ações das professoras na pesquisa frente à tarefa, destacando, assim, suas expressões semióticas, como gestos corporais e falas.

2 - Folha individual para registro: cada professora recebeu uma folha de papel ofício, para que anotassem suas ideias e escrevessem suas respostas. Depois da leitura do problema pela pesquisadora-formadora (tarefa da atividade), entregamos uma caneta (não lápis) às professoras e, depois, pedimos para que elas não escrevessem ideias aleatórias que pudessem ser descartadas, para que os registros escritos ainda pudessem ser lidos posteriormente. Dessa forma, permitimos que as docentes seguissem sua linha de pensamento, sendo entregue mais uma folha para organizar as possíveis soluções adquiridas no consenso do grupo.

3 - Anotações de campo: a pesquisadora-formadora utilizou um gravador de voz (celular), para criar anotações de campo posteriores ao primeiro encontro da etapa no processo formativo. Depois do segundo encontro formativo, as anotações foram feitas diretamente em um diário de campo, dispensando o apoio do gravador para essa finalidade.

Essas anotações de campo continham observações sobre o que ocorreu no processo formativo, ou seja, informações sobre as dimensões éticas, como colaboração, responsabilidade, solidariedade, etc.

Nesta pesquisa, recorremos a recursos tecnológicos para proporcionar um maior suporte na transcrição dos áudios, cujas ferramentas favoreceram o desenvolvimento das análises.

5.4 PROCEDIMENTOS PARA PRODUÇÃO DOS DADOS

Embasado pelos pressupostos teóricos da TO, teoria materialista dialética da objetivação, em que está pautada a presente pesquisa, os processos de ensino-aprendizagem só podem ser estudados em movimento, ou seja, por meio das atividades que aconteceram nos dias dos processos formativos.

Dessa maneira, a atividade referente nessa pesquisa é a de ensino-aprendizagem, na qual constitui a unidade metodológica de análise. Como mencionado anteriormente, o processo de ensino-aprendizagem ocorreu com inspirações no labor conjunto, em um sistema de colaboração coletiva em que professor e aluno são agentes culturais e trabalham “ombro a ombro” em busca da realização de uma obra comum (Radford, 2021). Sendo assim, todas as atividades de ensino-aprendizagem propostas nesta pesquisa forão realizadas seguindo os princípios organizadores orientados da TO e descritos nas subseções a seguir.

5.4.1 O objeto da atividade (Saber)

A constituição do objeto da atividade, isto é, o Saber, está em pensar algebricamente a partir de problemas que podem ser resolvidos por equações. Esses problemas podem favorecer a conclusão de que a relação de igualdade, existente entre os dois membros de uma equação (primeiro membro, antes do sinal de igual e segundo membro, depois do sinal de igual), permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número. Logo, o intuito é incorporar a noção de equivalência, mediante a utilização de dois sistemas semióticos: o sistema semiótico icônico (SSI) e o sistema semiótico alfanumérico (SSA).

5.4.2 O objetivo da atividade

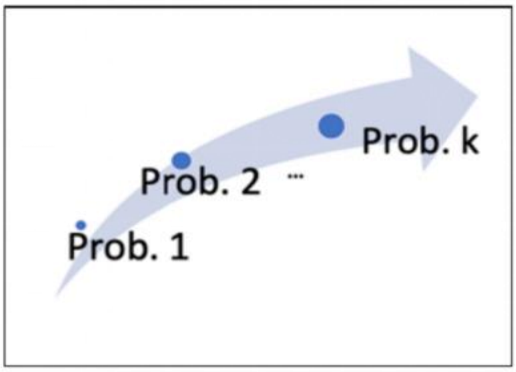
Para direcionar a atividade em prol de seu objetivo, é essencial estabelecer metas claras. Nesse sentido, é desejável que os professores se envolvam na resolução de problemas que exijam interpretações dos alunos, conduzindo-os à formulação de equações e, por conseguinte, à busca por soluções. Portanto, ela deve ser realizada no âmbito de uma atividade coletiva, inspirada no labor conjunto, na qual professores trabalham sobre a produção de uma obra comum, unificando seus esforços e habilidades e, claro, capitalizando suas múltiplas diferenças e perspectivas.

5.4.3 A tarefa da atividade

De acordo com a Teoria da Objetivação, para elaborar as tarefas foi necessário considerar o que os sujeitos já sabem, ou no caso dessa pesquisa, que já viveram em suas vidas escolares. Enquanto aos problemas matemáticos, elaborados para serem resolvidos no decorrer do processo formativo, tiveram de ter características interessantes ao olhar das professoras envolvidas na pesquisa; serem organizados de acordo com uma unidade conceitual e contextual e ter uma complexidade conceitual crescente (Radford, 2021).

A Figura 03 pode demonstrar mais efetivamente como a TO orienta a organização dos problemas que foram elaborados e utilizados no processo formativo. Na imagem, a seta que interliga os problemas os relaciona em termos de uma unidade conceitual e contextual, obedecendo a uma crescente complexidade conceitual.

Figura 03 - Desenho dos problemas baseado em uma unidade conceitual e contextual e em uma crescente complexidade conceitual



Fonte: Radford (2021 a, p 177).

A fim de corresponder ao objetivo e ao objeto da atividade, foram elaborados 4 problemas, dispostos em ordem de complexidade conceitual crescente, considerando o movimento da forma de pensar a respeito das equações. Essa organização foi feita para que as professoras envolvidas na formação pudessem encontrar, numa atividade de ensino-aprendizagem, o valor do termo desconhecido. Por fim, concluindo que a relação de igualdade de uma equação existe mediante a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão de um mesmo número entre os seus dois membros para construir a noção relacional de equivalência. Foi atentado também, a um contexto que julgamos interessante para as professoras: os problemas foram elaborados envolvendo canetinhas e estojos, objetos muito utilizados nas práticas escolares.

Contexto: numa aula de artes, a professora regente solicitou que os alunos se dividissem em duplas para realizar uma pintura. A dupla composta pelas alunas Clara e Ana, além de pintarem seus desenhos, realizaram questionamentos à professora a respeito das quantidades de canetinhas que tinham nos estojos que elas haviam recebido para realizarem as pinturas, mesmo sem abrir e contar cada uma delas. Intrigada com os questionamentos das alunas, a professora resolveu elaborar 4 problemas e no intuito de envolver toda a turma, pediu que todos os alunos resolvessem os problemas. Os 4 problemas elaborados pela professora estão descritos a seguir:

PROBLEMA 1 - Equação tipo X + 2 = 7

Para uma tarefa de colorir, a professora entregou a mesma quantidade de canetinhas para Clara e Ana. A aluna Clara recebeu um estojo com algumas canetas dentro e mais 2 canetas soltas, e a estudante Ana recebeu 7 canetas soltas. Quantas canetinhas tinha o estojo de Clara?

PROBLEMA 2 - Equação tipo: 12 = X + 4

Para outra tarefa de colorir, Ana ganhou 12 canetinhas soltas e Eva recebeu um estojo e mais 4 canetinhas soltas, mas as duas ganharam a mesma quantidade de canetinhas. Quantas canetinhas têm no estojo que Eva ganhou?

PROBLEMA 3 - Equação tipo 2X + 2 = X + 7

A professora presenteou Eva com 2 estojos com quantidades iguais de canetinhas dentro e 2 canetinhas soltas. Por sua vez, Ana recebeu apenas um estojo com a mesma quantidade de canetinhas das que foram oferecidas à Eva e mais 7 canetinhas soltas. Sabendo que Eva e a Ana ganharam a mesma quantidade de canetinhas, quantas canetinhas têm em cada estojo?

PROBLEMA 4 - Equação tipo X + 3X = 20

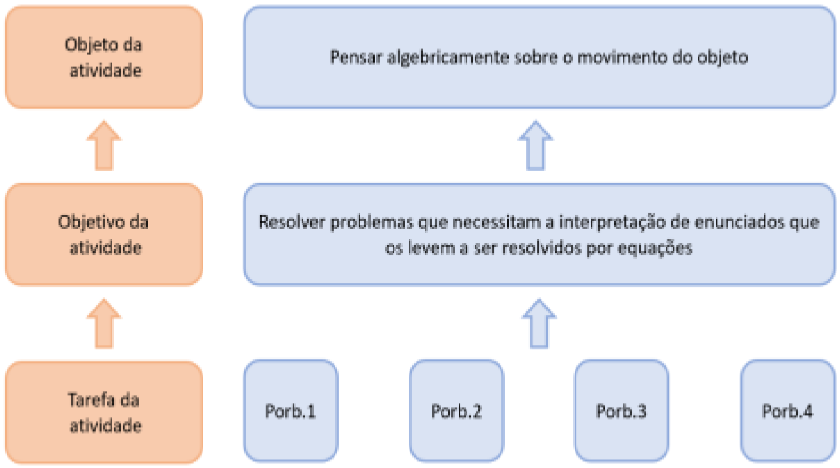
Clara ganhou algumas canetinhas de presente e Eva ganhou o triplo de canetinhas de Clara e, juntas, elas ganharam 20 canetinhas. Quantas canetinhas cada uma delas recebeu?

5.4.4 Estrutura do componente associado à atividade proposta de ensino-aprendizagem

Segundo a Teoria da Objetivação, a atividade é a unidade de análise metodológica, pois a entendemos como um sistema que colabora para a satisfação das necessidades coletivas. Além disso, opera uma divisão específica de trabalho, reproduzindo a sociedade na totalidade do âmbito de uma unidade mínima, baseada na concepção específica de indivíduos como seres naturais de necessidade (Radford, 2015).

Dessa forma, a estrutura objeto-objetivo-tarefa pode ser considerada uma parte central do projeto da atividade em sala de aula. Em síntese, organizamos os componentes estruturais da atividade apresentados nos tópicos acima que estão expostos na Figura 04.

Figura 04 - Componentes estruturais da atividade



Fonte: Adaptado de Radford (2021a, p 181)

Para a realização dos encontros do processo formativo, a organização ocorreu com base em dias e horários consoantes a disponibilidade das professoras em seu ambiente de trabalho (condução proposta pela escola onde a pesquisa foi realizada). Sendo assim, organizamos 4 encontros quinzenais durante os meses de outubro e novembro, conforme as datas especificadas no quadro 07. Destes, três encontros tiveram uma duração de 2 horas cada, enquanto o último foi estendido para 4 horas, totalizando, ao todo, 10 horas de processo formativo.

Quadro 07: Datas dos encontros do processo formativo.

Mês/data		**Temática**
Outubro	06	PRIMEIRO DIA DO PROCESSO FORMATIVO: Discussões referentes aos significados envolvendo a relação de igualdade e a simplificação de equações.
Outubro	20	SEGUNDO DIA DO PROCESSO FORMATIVO: Resoluções dos problemas 1 e 2 referentes às equações dos tipos X + 2 = 7 e 12 = X + 4
		TERCEIRO DIA DO PROCESSO FORMATIVO: Resoluções dos problemas 3

Novembro	01	e 4 referentes às equações dos tipos: 2X + 2 = X + 7 e X + 3X = 20
Novembro	17	QUARTO DIA DO PROCESSO FORMATIVO — Discussões em grupo: elaborando problema e confrontando ideias na resolução de equações do tipo X + A = B

Fonte Autoral

Por apresentar uma relação dialética entre ensino e aprendizagem, as formas de produção humana assumem uma postura comunitária. Nesse sentido, as professoras e a pesquisadora-formadora, inseridas no processo formativo que conteve momentos de interação coletiva, vivenciaram situações que envolveram as relações de igualdade e a simplificação de uma equação. Por exemplo, o encontro com formas algébricas de pensar essas relações e simplificações, mediadas pela atividade de ensino-aprendizagem (Romeiro; Moretti, 2021).

5.5 ANÁLISE DOS DADOS

Para analisar os dados, foi adotada a abordagem multissemiótica ou multimodal, considerando que o pensamento algébrico se manifesta por meio de várias expressões. Assim, as análises centraram-se no papel dos signos, da linguagem, dos artefatos e do corpo (gestos, postura corporal, ações cinestésicas, e percepções). O objetivo da pesquisa foi analisar não apenas o resultado dos dados produzidos, mas também o desenrolar do processo em que estão envolvidas as representações semióticas; isso inclui explicar como os sujeitos direcionaram o saber, constituído mediante representações culturais e sociais.

Na pesquisa em questão, a análise dos dados teve como objetivo responder “como o pensamento algébrico, as relações de igualdade e a simplificação de equações podem refinar ações e gerar reflexões em professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, no contexto de um processo formativo, utilizando as ideias da Teoria da Objetivação (TO)?”.

Uma vez que o pensamento algébrico é compreendido como um processo pelo qual os sujeitos generalizam ideias matemáticas por meio de um discurso argumentativo, e que este pensamento pode ser demonstrado por linguagens diferenciadas e não apenas a linguagem simbólica formal, mas também pela linguagem natural, gestual, oral e pictórica (RADFORD, 2020).

A abordagem para a análise dos dados seguiu as três etapas sugeridas por Radford (2015a). Inicialmente, foi conduzida uma visualização abrangente dos vídeos produzidos ao longo do processo formativo, para identificar momentos que apresentassem evidências do pensamento algébrico (**1. seleção dos segmentos salientes**). Posteriormente, realizou-se as transcrições dos momentos escolhidos em que foram identificadas as articulações em torno dos diferentes meios semióticos de objetivação (**2. análise dos segmentos selecionados por meio das lentes e princípios teóricos**). Por fim, a cadência dos diálogos fora incorporada, assim como outros gestos realizados pelas professoras e pela pesquisadora-formadora, incluindo fotos e desenhos nas transcrições dos diálogos (**3. inserção da cadência dos diálogos e outros gestos indexicais nas transcrições dos diálogos**).

5.5.1 Organização para as análises dos dados

Para a produção de dados, as formações foram conduzidas ao longo de quatro dias, conforme descrito no Quadro 07. Da mesma maneira, as análises também foram realizadas diariamente durante o processo formativo, seguindo uma estrutura específica para cada dia, detalhada nos tópicos a seguir:

Primeiro dia do processo formativo

No primeiro dia do processo formativo, a pesquisadora-formadora conduziu uma leitura e discussões com as professoras participantes da pesquisa. O foco recaiu sobre o texto: "O ensino de álgebra nos Anos Iniciais de acordo com a BNCC (Base Nacional Comum Curricular)", extraído da BNCC (Brasil, 2017) e organizado pelo grupo de pesquisa Al Jabr em História, Epistemologia e Didática da Álgebra. À medida que a leitura e discussões foram progredindo, as seis professoras (Bela, Cinderela, Rapunzel, Branca de Neve, Merida e Moana) e a pesquisadora-formadora, envolveram-se de forma colaborativa nas conversas, resultando em pontos relevantes, cuja organização foi dividida em três momentos distintos.

Dessa forma, os três momentos desse processo formativo foram estruturados da seguinte maneira: O primeiro momento envolveu uma discussão a partir do questionamento de como aprenderam álgebra em suas experiências escolares. O segundo momento se centrou em torno das respostas das professoras quando indagadas a respeito do que sabiam sobre pensamento algébrico. Por fim, no terceiro momento, as discussões abordaram o significado atribuído pelas professoras ao sinal de igualdade, tema central da pesquisa em questão.

Logo, as análises foram realizadas com base nas contribuições das docentes, mediante os questionamentos da pesquisadora-formadora nos três momentos do processo formativo explicado no parágrafo anterior.

Segundo dia do processo formativo

No segundo dia do processo formativo, as professoras foram organizadas em dois pequenos grupos, designados como Grupo 1 e Grupo 2. O Grupo 1 era composto pelas professoras: Cinderela, Rapunzel e Bela, enquanto o Grupo 2 consistia nas professoras: Branca de Neve, Merida e Moana. Vale ressaltar que os momentos de interação dos grupos com a pesquisadora-formadora durante a atividade de ensino-aprendizagem foram registrados em vídeos e logo depois organizados em 20 filmagens numeradas de 1 a 20, referente ao processo formativo desse segundo dia. Esses 20 vídeos foram revisados mais de uma vez, sendo transcritos apenas aqueles que continham os momentos salientes, ou seja, trechos da atividade de ensino-aprendizagem que evidenciaram processos de aprendizagem, conforme indicado por Radford (2021).

Sendo assim, optou-se pelos vídeos de número 12, 13 e 15, relacionados à resolução do problema 1, e pelos vídeos 18, 19 e 20, referentes à resolução do problema 2. Mediante os vídeos escolhidos, foram realizadas as transcrições da resolução dos problemas 1 e 2, resolvidos apenas pelo grupo de professoras designado como Grupo 2, composto por Branca de Neve, Merida e Moana. A escolha de focar nas transcrições e posterior análises dos dados desse grupo se deu pelo fato de as professoras integrantes assumirem aulas de matemática nos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, nos quais o conteúdo referente às propriedades da igualdade está inserido na unidade temática álgebra, conforme indicado pela Base Nacional Comum Curricular — BNCC (Brasil, 2017).

Dessa seleção, as transcrições resultaram em 8 quadros, cada um composto por 3 colunas e N linhas, organizados da seguinte maneira: na primeira coluna, estão enumeradas as falas das professoras, na segunda coluna, encontram-se as transcrições dessas falas, acompanhadas de fotos que contemplam os meios semióticos gestuais e visuais. Esses meios são relevantes na verificação do pensamento algébrico das professoras envolvidas. Os códigos da segunda coluna indicam a ordem da formação (Fx), o problema (Px), o grupo (G1 ou G2), o vídeo (Vx) e o tempo (t) dos momentos salientes. Na terceira coluna, estão as observações explicativas, a fim de esclarecer as falas transcritas da pesquisadora-formadora e das professoras, como é possível verificar no quadro X abaixo, para fins de exemplificação neste tópico.

Quadro 08 - Exemplo da estrutura dos quadros

	Transcrição: F2, P1, G2, V12, t: 0: 00 — 0:05	Observações
1		
12		

Fonte: Autoral

É válido destacar que todos os quadros utilizados para as transcrições e observações relevantes aos dados da pesquisa foram organizados seguindo o formato do quadro acima.

Terceiro dia do processo formativo

Os momentos de interação dos grupos com a pesquisadora-formadora no terceiro dia da atividade de ensino-aprendizagem foram gravados e organizados em 13 vídeos (numerados de 1 a 13). No entanto, após as primeiras visualizações dos vídeos, foram realizadas novas análises nos vídeos 9, 10 e 11, referentes à resolução do problema 3, e nos vídeos 12 e 13, relacionadas à resolução do problema 4. O fator importante para realização das transcrições foi identificar os momentos salientes que pudessem oferecer subsídios relevantes para nossas análises. Esses dados foram inseridos em 6 Quadros para fins de análise, seguindo a mesma estrutura descrita anteriormente para o segundo dia do processo formativo.

Quarto dia do processo formativo

No quarto dia do processo formativo, as professoras Branca de Neve, Merida, Moana, Cinderela e Rapunzel foram convidadas a participarem de uma atividade de ensino-aprendizagem, sendo divididas em dois grupos (Grupo 1 e Grupo 2). O Grupo 1 foi formado pelas professoras Merida, Rapunzel e Branca de Neve, enquanto o Grupo 2, composto pelas professoras Moana e Cinderela.

Foi solicitado a cada grupo que escrevesse um problema semelhante àqueles dos problemas 1, 2, 3 e 4 que elas haviam resolvido nos segundos e terceiros dias do processo formativo. A proposta foi traduzir os problemas em uma equação e resolvê-las. Vale ressaltar que, por motivos pessoais, a professora Bela não pôde estar presente neste dia. Dessa forma, as 5 professoras restantes e a pesquisadora-formadora participaram ativamente da atividade colaborativa, buscando atualizar, em conjunto, o saber no âmbito do processo formativo, tendo a história e a cultura como pano de fundo (Radford, 2021).

A atividade de ensino-aprendizagem desse dia teve uma duração de aproximadamente 4 horas, na qual foi registrada por vídeos e gravações em áudios. Com base nos dados provenientes desses registros, descrevemos os acontecimentos investigados sob uma perspectiva semiótica multimodal. As análises se concentraram nos signos, na linguagem, nos artefatos e, sobretudo, no corpo, uma vez que os gestos, fala e ações nos permitiram verificar os processos conjuntos de construção de sentidos (Radford, 2021). Além disso, o formato desse quarto encontro diferiu dos dias 1, 2 e 3, pois foram as professoras que elaboraram os problemas no âmbito de seus respectivos grupos.

Após a elaboração dos problemas, que resultaram em equações do tipo $X + A = B$, as professoras foram solicitadas a trocar os problemas entre os dois grupos. Cada grupo deveria resolver as equações de duas formas distintas: a primeira, utilizando o sistema semiótico icônico, e a segunda, o sistema semiótico alfanumérico. Após a resolução colaborativa das equações envolvendo as professoras e a pesquisadora-formadora, cada grupo foi convidado a redigir um texto, semelhante a um bilhete, explicando o processo adotado para resolver as suas equações.

5.6 QUESTÕES ÉTICAS DA PESQUISA

É imprescindível ressaltar que as questões éticas necessárias ao desenvolvimento dessa pesquisa obedeceram às diretrizes estabelecidas pela Comissão Ética da Universidade Federal Rural de Pernambuco. O respeito à dignidade, à liberdade e à autonomia do ser humano foi pautado na Declaração Universal dos Direitos Humanos de 1948 e na Declaração Internacional de Direitos e Deveres Humanos, de 1948.

Assim, os participantes desse estudo foram devidamente esclarecidos a respeito de todos os procedimentos utilizados na pesquisa que foram inseridos, bem como terão a garantia de preservação de suas identidades. Dada a necessidade do uso de vídeos e gravações na produção de dados, especialmente durante as atividades de ensino-aprendizagem, as professoras, cujas identidades foram preservadas com nomes fictícios, assinaram uma autorização de sua imagem.

Ademais, com uso da tecnologia, as imagens capturadas dos vídeos foram distorcidas com o intuito de preservar ainda mais a identidade das professoras envolvidas na pesquisa. As docentes também preencheram um termo de pesquisa, no qual consta que as informações e registros serão apenas manuseadas pela pesquisadora-formadora e pelo orientador. Os dados contidos neste termo serão armazenados pelo período de 5 anos.

Antes mesmo do início do processo formativo, foi enfatizado um ponto crucial: as professoras poderiam optar por interromper sua participação a qualquer momento, sem que houvesse nenhuma implicação. Com todos esses cuidados estabelecidos, a pesquisa foi submetida ao comitê de ética CEP/UFRPE, sendo devidamente aprovada, cumprindo com as exigências deste comitê, com número de aprovação 70794123.90000.9547.

6. ANÁLISES DOS DADOS A PARTIR DO SISTEMA MULTIMODAL

A organização para a análise dos dados seguiu o cronograma dos dias do processo formativo. Os dados produzidos foram examinados em relação aos quatro dias do processo formativo por meio de um sistema multimodal. Nessa análise, verificamos o desenvolvimento e o refinamento das ideias discutidas durante os quatro encontros da pesquisadora-formadora com as professoras.

6.1 PROCESSO FORMATIVO 1: Reflexões referente a álgebra

As análises abordam trechos relevantes do primeiro encontro formativo entre a pesquisadora-formadora e as professoras participantes. Como já mencionamos, neste encontro foi realizada uma leitura reflexiva a partir do texto intitulado: "O ensino de álgebra nos Anos Iniciais conforme a BNCC (Base Nacional Comum Curricular)", de autoria coletiva do Grupo de Pesquisa Al-Jabr. A seguir, apresentamos as respostas, posicionamentos e questionamentos, tanto pelas professoras participantes, quanto pela pesquisadora-formadora. Os dados produzidos foram organizados em três momentos distintos, conforme detalhado abaixo.

PRIMEIRO MOMENTO

Formadora: *Como vocês aprenderam álgebra em suas vidas escolares?*

Bela — ''*Eu vim de uma educação matemática terrível, e os professores se sentiam empoderados e não viam a matemática (álgebra) como uma coisa bonita e era usada para amedrontar. Eu não quero que meus alunos sofram, por isso procuro ensinar usando jogos e brincadeiras para que eles não tenham o medo que tive''.*

Branca de Neve — ''*Na minha escola, o professor ficava na porta e tínhamos que responder à tabuada na ponta da língua. Era muito ruim e toda vez me dava dor de barriga* (risos)''.

Cinderela — ''*Eu sempre achei a álgebra um nome assustador e eu acho que não devemos dizer aos alunos que iremos trabalhar com álgebra. Eles vão dizer: Tia, pelo amor de Deus! O que é isso?* (Risos de todas)''

Rapunzel — "*Concordo com Cinderela! E do jeito que aprendemos é assustador mesmo, hoje não é, mas não foi de forma legal que os professores nos ensinaram, pelo menos a mim…"*

Certamente as falas dessas professoras apresentam sinais de insegurança e descontentamento no que se refere ao contato que tiveram com seus professores de matemática durante o período escolar. A abordagem autoritária do ensino de matemática, que as deixou desconfortáveis diante da figura de um professor formal e detentor do saber, tem impactado suas práticas docentes. Este reflexo é evidenciado na fala de Bela, que expressa o desejo de fazer diferente.

Nesse contexto, Fiorentini (1995) esclarece que as experiências vivenciadas pelos professores podem resultar em diferentes modos de conceber e enxergar a questão da qualidade do ensino de matemática. Ainda nos dias de hoje, alguns educadores relacionam o ensino eficiente da matemática a um elevado nível de rigor e formalização dos conteúdos trabalhados na escola, o que pode ocasionar medo aos estudantes. Além disso, existe a crença de que o professor de matemática é sempre sábio e onipotente. É possível que, por conta dessas concepções, as falas das três professoras tenham convergido para um modo de ensino não agradável, não necessariamente restrito ao ensino de álgebra, mas abrangendo o campo mais amplo da disciplina de matemática.

Ademais, outro ponto que chamou nossa atenção foi a declaração da professora Bela ao afirmar: "*Eu não quero que meus alunos sofram, por isso procuro ensinar usando jogos e brincadeiras para que eles não tenham o medo que tive*". Notamos uma possível mudança histórica das atitudes da docente, enquanto profissional da educação, em relação ao período em que foi estudante. Segundo Fiorentini (1995), o modo de ensinar também sofre influência dos valores e das finalidades que o professor atribui ao ensino da matemática, principalmente, como ele concebe a relação professor-aluno. Além disso, há uma mudança não só na visão de mundo que o educador possui, mas também na sua concepção de sociedade e de homem. Nesse sentido, a resposta de Bela expressa preocupação e cuidado em relação aos seus alunos, não querendo que eles sofram, ou seja, que não vivenciem experiências negativas com a matemática.

Segundo Pacheco e Andreis (2018), a falta de oferta de formação inicial e continuada mais adequada para quem se propõe a ensinar matemática pode ter como consequência a aplicação de métodos de ensino que resultem em práticas que expõem os estudantes a situações desconfortáveis. Essa situação foi vivenciada por Branca de Neve ao relatar seu nervosismo e dor de barriga nos momentos em que precisava responder à tabuada, enquanto o professor ficava na porta para perguntá-la oralmente, expondo-a uma situação não agradável, pelo fato de não saber responder na frente de seus colegas. O uso desse tipo de método pode desenvolver bloqueios nos alunos em relação à matemática, como também medo e frustração (Pacheco; Andreis, 2018).

SEGUNDO MOMENTO

Formadora — ''*O que vocês sabem sobre pensamento algébrico?''*

Cinderela — ''*Eu acho que pensamento algébrico seja mais ou menos uma linguagem matemática que você pode explicar as coisas em problemas. Como, por exemplo: "Antônio foi à feira e comprou 20 maçãs e comeu 5". Para dar a resposta o aluno deve pensar algebricamente.''*

Bela — *''Pode ser isso que Cinderela falou, mas acho que trabalhamos o pensamento algébrico sem nem saber que tem esse nome. Trabalhamos e nem sabemos disso. Eu acho que o pensamento algébrico está em quase tudo, inclusive, em outras disciplinas.''*

Merida — ''*Eu já acho que tem a ver com você saber interpretar o conjunto dos números, só que quando falo de conjuntos dos números, eles estão ligados às operações matemáticas, adição, subtração…''*

Branca de Neve — ''*Eu vejo que o pensamento algébrico para ser trabalhado com crianças tem que, primeiro, preparar elas. A criança não está madura para isso sem ser no concreto, quando elas estão no 1º, 2º ou 3º ano elas não lidam só com o pensamento, elas lidam com o concreto.''*

Quanto ao entendimento sobre pensamento algébrico, as professoras apresentam, inicialmente, desconhecimento desse tipo de pensamento e o confundem com o pensamento aritmético. Para elas, os problemas algébricos devem ser resolvidos utilizando cálculos mentais ou algoritmos formais das operações básicas.

Foi possível verificar essa ideia na fala da professora Cinderela ao tentar explicar o que é pensamento algébrico: "*Antônio foi à feira, comprou 20 maçãs e comeu 5".* Consoante a definição de Radford (2021), o trabalho com álgebra implica lidar com números desconhecidos como se fossem conhecidos. No entanto, essa fala apresenta apenas um enunciado de um possível problema do campo aditivo com números conhecidos. O mesmo ocorre com a educadora Merida, uma vez que ela se refere aos conjuntos dos números para tentar se explicar. Segundo a professora, o pensamento algébrico está ligado às operações matemáticas, como a adição e a subtração.

Conforme Romeiro e Moretti (2021) destacam, a dificuldade das professoras em definir o pensamento algébrico pode estar vinculada ao aprendizado da álgebra direcionado a técnicas, regras ou formas mecânicas de manipulação de símbolos literais, vivenciadas durante o período de escolarização. Gomes (2020), por sua vez, aponta que, o ensino de álgebra se configura como um desafio por ser uma demanda relativamente recente para professores pedagogos que lecionam nos anos iniciais. Para Nacarato, Mengali, Passos (2009, p. 15) é um "desafio ensinar o que nem sempre se aprendeu".

A declaração da professora Branca de Neve enfatiza que as crianças não estão maduras o suficiente para lidar com situações que exijam o pensar algebricamente, desta forma, seu discurso sugere uma caracterização abstrata da álgebra. Contudo, esse argumento foi, durante muito tempo, utilizado para adiar o ensino de álgebra (Lins; Gimenez, 1997). As pesquisas desenvolvidas por esses autores, entretanto, apontam que, desde cedo, as crianças são capazes de lidar com tarefas que exigem o pensamento algébrico.

Quando a professora Cinderela destaca que o "*pensamento algébrico seja mais ou menos uma linguagem matemática*", ela evidencia reflexos de sua experiência como educadora ao lidar com problemas matemáticos que envolvam o pensamento algébrico. Além disso, concluímos, também, que a leitura realizada no começo deste encontro, na qual explicita quais conteúdos dos anos iniciais apresentam a necessidade de um trabalho partindo do pensamento algébrico, colaborou para a elaboração desse enunciado.

De maneira semelhante, a professora Bela, em sua fala, menciona que *"trabalhamos o pensamento algébrico sem nem saber que tem esse nome".* Em outras palavras, ela se refere às tarefas realizadas em sala de aula, como sequências figurais ou recursivas e ao valor do termo desconhecido, propostas no índice do livro didático. Embora a professora as aborde em sua prática, ela desconhece que se trata de um trabalho voltado ao pensamento algébrico.

Dessa maneira, tanto no âmbito nacional quanto internacional, Romeiro e Moretti (2021) destacam a necessidade urgente de reconhecimento do pensamento algébrico como um campo de estudo essencial. É preciso prestar atenção tanto à organização curricular, quanto à formação de professores que trabalham com matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental para que a álgebra não seja vista como um aprofundamento da aritmética e, muito menos, ser confundida com cálculos numéricos sem compreensão. Essa confusão entre os campos da aritmética e da álgebra é percebida na fala da professora Merida "*Eu já acho que tem a ver com você saber interpretar o conjunto dos números*". Para ela, saber trabalhar com o conjunto dos números já demonstra que o aluno compreende conceitos algébricos.

TERCEIRO MOMENTO

Formadora — ‘’*O que vocês sabem em relação ao uso do sinal de igual?’’*

Branca de Neve — ‘’*A igualdade é a relação entre duas quantidades. É um símbolo que a pessoa coloca entre duas quantidades para dar um resultado.’’*

Moana — ‘’*Se a gente for pegar ao pé da letra, igual seria igual a alguma coisa, mas ali simbolicamente é para dar um resultado de algo que estamos calculando.’’*

Merida — ‘’*Eu pensei… o meu pensamento está igual ao de Moana, em que você coloca um valor desconhecido para achar uma igualdade, e o valor corresponde ao número desconhecido que você quer calcular.’’*

Rapunzel — ‘’*Eu acho que o sinal de igual serve para mostrar ao aluno que ele precisa dar o resultado de uma conta. É uma maneira matemática da professora nem falar na prova que está pedindo um cálculo. E o aluno entende dessa forma, quando você coloca 5 + 4 =, o aluno já sabe o que vai fazer, né?’’*

De acordo com o ponto de vista das professoras em relação ao sinal de igual, entende-se que tal símbolo é atribuído por elas apenas para dar um resultado de uma operação aritmética. Para Radford (2022), as ideias que têm significados procedimentais levam à concepção do sinal de igual como uma forma de registro que incentiva a realizar um cálculo, fato identificável na fala das professoras Branca de Neve, Merida, Moana e Rapunzel. Sobretudo, na afirmação de Rapunzel ao mencionar que, quando o estudante visualiza a igualdade, já sabe que deve resolver alguma operação. Essa colocação sugere um entendimento singular no que diz respeito ao emprego do sinal de igual é visto apenas de forma operacional. Esse entendimento único pode gerar dificuldade em compreender a estrutura de uma equação, segundo Radford (2022).

Reforçando a ideia de que o sinal de igual é percebido pelas professoras como forma de operacionalizar um cálculo, o que gera dúvidas a respeito de sua utilização como relação de equivalência e envolvendo o significado da variável, os pesquisadores Ponte e Branco (2013) afirmam que a compreensão da utilização da simbologia algébrica e do significado da variável é um conhecimento importante para o professor que ensina matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Durante as reflexões ao longo do primeiro dia do processo formativo, foi possível notar que, ao iniciar as discussões referente ao texto da BNCC que estava sendo abordado, as professoras demonstraram surpresa por não terem conhecimento da presença da unidade temática álgebra na BNCC (Brasil, 2017), como indicação para ser trabalhada nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Na verdade, elas não associavam a palavra álgebra a nenhum conteúdo que fizesse parte do planejamento anual de matemática e expressaram considerar esse conteúdo como um "absurdo" de ser trabalhado com crianças tão jovens.

Ao longo de suas falas, as professoras apresentaram desconhecimento a um tipo especial de pensamento, o pensamento algébrico. Contudo, com as intervenções da pesquisadora-formadora, elas demonstraram surpresa ao perceberem que o pensamento algébrico pode e deve ser trabalhado no âmbito de conteúdos que fazem parte de seus planejamentos, podendo ser introduzidos em suas rotinas pedagógicas durante as aulas de matemática.

Vale salientar que, as palavras da pesquisadora-formadora, ao propor um novo olhar para as convicções das professoras em relação aos temas discutidos com subsídio do texto utilizado, podem ter surtido um efeito positivo a respeito do receio que elas apresentavam em trabalhar a álgebra em suas aulas. Nesse sentido, o primeiro dia do processo formativo teve caráter esclarecedor, em relação à forma como as professoras aprenderam álgebra em suas vidas escolares, o que elas sabiam sobre pensamento algébrico e suas considerações em relação ao uso do sinal de igual.

Foi notada uma satisfação exposta nas expressões faciais das professoras e, sobretudo, a desmistificação da álgebra, antes vista como algo "absurdo" de ser trabalhado com crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Concordando com

Moretti (2007) quando afirma que o fazer do educador está constituído de forma dialética com a sua atividade teórica, fazendo com que o seu caráter social do processo de aprendizagem seja articulado com sua prática pedagógica.

Dessa forma, a percepção das docentes em conseguir atribuir o nome a conteúdos tão familiares talvez as tenha deixado mais seguras para explorar diferentes formas de introduzir em suas práticas pedagógicas tarefas relacionadas à álgebra. Ponte e Branco (2013), falam que é essencial que professores tenham cautela quanto aos aspectos matemáticos e didáticos relativos ao ensino da álgebra, de modo a estarem aptos a preparar e concretizar situações de aprendizagem. Além disso, é crucial que recebam formações que contemplem experiências diversas, proporcionando tarefas de diferentes aspectos do pensamento algébrico e fornecendo conhecimento necessário para esse desempenho.

6.2 PROCESSO FORMATIVO 2: problemas 1 e 2 referentes às equações dos tipos X + 2 = 7 e 12 = X + 4

Como referido anteriormente no capítulo 3, a Teoria da Objetivação tem como elemento central para a análise dos dados: a atividade de ensino-aprendizagem. É na atividade que os processos de objetivação são sustentados e acontecem em encontros sensíveis e críticos com o saber. Dessa forma, para dar sentido ao que está sendo encontrado, é necessário que os sujeitos envolvidos se engajem em atividades sensíveis nas quais participam com todo o corpo (Radford, 2021).

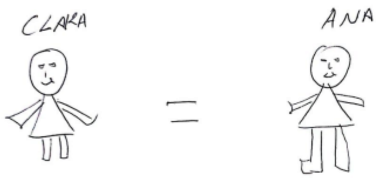
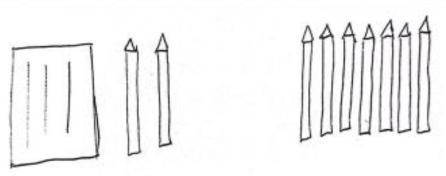
Sendo assim, para expor os dados produzidos na atividade de ensino-aprendizagem referentes aos problemas 1 e 2, organizamos 7 quadros. Em cada um deles, estão detalhadas as transcrições das falas, observações e as evidências (fotos e desenhos) dos momentos salientes referentes à resolução dos problemas 1 e 2. Em seguida, apresentamos as análises referente a cada quadro.

PROBLEMA 1 - Equação do tipo X + 2 = 7

> Para uma tarefa de colorir, a professora entregou a mesma quantidade de canetinhas para Clara e Ana. Clara recebeu um estojo com algumas canetinhas dentro e mais 2 canetinhas soltas. Para Ana, a professora deu 7 canetinhas soltas. Quantas canetinhas tinha o estojo de Clara?

O Quadro 09, contempla as falas de Merida e da pesquisadora-formadora em relação ao início da resolução do problema 1, assim como a primeira representação icônica realizada pelo Grupo 2, (composto pelas professoras Branca de Neve, Moana e Merida), grupo escolhido para as análises.

Quadro 09 - Transcrição e observações dos momentos salientes 1

	Transcrição: F2, P1, G2, V12, t: 0: 00 - 0:05	Observações
1	**Formadora**: Como a gente faz para resolver o problema com desenhos? O que vocês acham de representar a situação por meio de desenhos?	A formadora já tinha feito a leitura do problema 1, para os grupos inseridos na atividade de ensino-aprendizagem.
2	**Merida**: Vamos desenhar o que a gente entendeu do problema!  Desenho 1  Desenho 2	No desenho 1 as professoras desenharam as meninas do problema e indicaram que elas tinham quantidades iguais de canetinhas, como aponta o sinal de igual entre Clara e Ana. No desenho 2, colocaram já o estojo e as canetinhas indicadas no problema.

Fonte: Dados da pesquisa

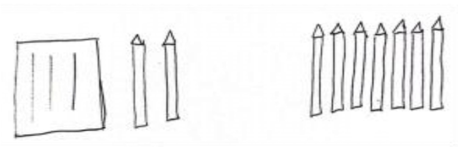
A pesquisadora-formadora apresentou o problema 1 por meio de uma leitura em voz alta, enquanto as professoras escutavam com atenção. Após a leitura, como podemos verificar no quadro 09, linha 1, foi solicitado que as professoras utilizassem, a princípio, o Sistema Semiótico Icônico (SSI) para resolver o problema 1. Essa solicitação foi validada na fala de Merida, na linha 2 do quadro 09, quando ela diz que *"vamos desenhar o que a gente entendeu do problema!"*, compartilhando a ideia e obtendo concordância com as outras professoras.

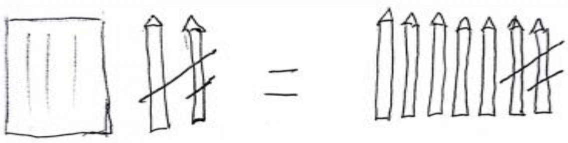
Ao longo do processo, que foi repleto de dúvidas e indagações, a professora Merida utilizou o SSI, sempre em conformidade com as demais professoras do seu grupo. No contexto dos sistemas semióticos de significações culturais, Radford e Moretti (2023) se referem a uma estrutura dinâmica supra simbólica, na qual encontramos concepções culturais sobre objetos matemáticos, sua natureza e os padrões sociais de produção de significados adequados como forma de investigações matemáticas.

A solicitação da pesquisadora-formadora está em consonância com o exposto pelos autores acima, baseada na compreensão de que os sistemas semióticos de significações culturais organizam, em um nível simbólico, a atividade de ensino-aprendizagem, em particular, por meio dos modos de produção de conhecimento e das formas de colaboração humana que são cultivadas nesse ambiente de estudo.

A seguir, o quadro 10 diz respeito às discussões entre a pesquisadora-formadora e as professoras envolvidas na atividade de ensino-aprendizagem em relação ao sinal de igual e sua representação, estabelecendo equivalência entre os membros da equação proveniente do problema 1.

Quadro 10 - Transcrição e observações dos momentos salientes 2

	Transcrição: F2, P1, G2, V13, t: 0:02 - 0: 30	Observações
13	**Branca de Neve:** vamos olhar a igualdade, né? Ela dá um balanço na questão.  Foto 1  Foto 2  Desenho 3	Branca de neve apontou para os desenhos (desenho 3) de ambos os lados da igualdade (foto 1 e foto 2)

14	**Formadora:** sabemos que essa igualdade dá esse balanço, como vocês disseram. O que acontece se eu tirar apenas uma canetinha de Clara? A igualdade permaneceria?	A formadora, por meio de sua pergunta, provocou as professoras a pensarem na igualdade de forma relacional.
15	**Moana**: não iria ficar igual...	Balançando a cabeça de um lado para o outro e se referindo a quantidade de canetinhas.
16	**Formadora**: e para ficar igual? O que devemos fazer?	
17	**Moana**: teria que tirar de Ana também  Foto 3	Moana aponta para o lado das canetinhas de Ana (foto 3)
19	**Formadora**: podemos fazer isso? Iria me ajudar em alguma coisa na resolução do problema?	A formadora incentivou as professoras a continuarem com o raciocínio de manter a igualdade entre os membros, retirando uma canetinha de cada lado.
20	**Moana:** a gente tem que levar em consideração a pergunta final, que é a quantidade de canetinhas do estojo de Clara, né?	Referindo-se a encontrar o desconhecido, representado ou denotado pelo estojo.
21	**Branca de Neve**: Eita! Tem que tirar duas de cada lado!  Desenho 4	Branca de Neve estava se referindo à retirada de duas canetinhas de cada lado da equação, na intenção de isolar o desconhecido, nessa tarefa, denotado pelo desenho do estojo. Para isso, realiza a operação de retirada de quantidades iguais e conhecidas. Nesse momento o sinal de igual já tinha sido desenhado por Branca de Neve.

Fonte: Dados da pesquisa

A princípio, as professoras desenharam a representação do problema 1 sem incluir o sinal de igual e nem o símbolo da adição. No entanto, Branca de Neve, em sua fala na linha 13 do quadro 10, destacou a importância da exploração do sinal de igual dizendo que: *"Ela dá um balanço na questão"*, referindo-se a uma relação de equivalência entre os membros da equação.

O que foi exposto corrobora com o pensamento de Radford (2022), que afirma quando a igualdade é uma das relações mais fundamentais da matemática, a expressão A=B se refere a algo igual a A e a B, não no sentido de A e B serem idênticos. No caso do problema 1, identificamos que a professora evidenciou a mesma quantidade de canetinhas entregues à Ana e a Clara, apontando com o indicador as partes equacionadas e sugerindo a colocação da igualdade, como podemos ver nas fotos 1 e 2 do Quadro 10.

Sendo assim, a colocação de Branca de Neve levou as demais professoras a perceberem a necessidade de juntar o estojo de Ana com suas canetinhas soltas para representar a quantidade recebida e, posteriormente, igualar a quantidade de canetinhas das duas estudantes. Ao colocar o sinal de igual, como podemos ver no desenho 4, acreditamos que elas conseguiram compreender como esse símbolo estaria representando uma mesma quantidade de objetos, no caso das canetinhas. Isso se refere a uma dada relação equivalente, retratando a mesma quantidade das partes equacionadas (Radford, 2022).

Na linha 14 do Quadro 10, a pesquisadora-formadora teceu um questionamento às professoras a respeito do que aconteceria se retirasse apenas uma canetinha de Clara. Consoante a Radford (2022), esse tipo de questionamento durante a atividade de ensino-aprendizagem é uma forma de conduzir as professoras a encontrarem as regras algébricas cultural e historicamente constituídas que sustentam a simplificação das equações. A resposta de Moana, na linha 15 do quadro 10, por exemplo, enquanto balançava a cabeça de um lado para o outro, demonstrou que ela percebeu que não era possível retirar apenas uma canetinha de Clara.

Dessa maneira, na linha 17 do Quadro 10, Moana percebeu que a igualdade entre os termos equacionados não permaneceria, caso retirasse apenas uma canetinha de Clara. Nesse momento, ela apontou para a igualdade e, gestualmente, afirmou o que havia dito. Essa percepção da professora, na linha 17, demonstra que ela está começando a considerar o sinal de igual não apenas como uma representação de um resultado numa sentença matemática, mas em seu sentido algébrico, enquanto uma equivalência.

Explicitado na linha 19 do Quadro 10, a pesquisadora-formadora continuou explorando a relação de igualdade quando insistiu em perguntar se poderia retirar apenas uma canetinha de Ana e uma canetinha de Clara. Sua intenção foi de envolver as outras professoras no processo colaborativo e fazê-las perceber a igualdade de forma relacional, assim como a professora Moana havia feito, quando sugeriu a retirada de uma canetinha de Ana e de Clara também.

Na linha 20 do Quadro 10, Moana sugere isolar o desconhecido, representado ou denotado pelo estojo. Nesse momento, as outras professoras, com olhares atentos e semblantes sérios, perceberam a retirada das 2 canetinhas de cada lado da igualdade, que permite a simplificação da equação, representada ali pelo sistema semiótico icônico. Para isso, foi utilizado um traço para designar a retirada das duas canetinhas de Ana e de Clara, como mostra no desenho 4, linha 21 do Quadro 10.

A interjeição de Branca de Neve (linha 21, Quadro 10), revela a percepção acerca da retirada de duas canetinhas de Ana e de duas canetinhas de Clara, ou seja, de ambos os lados da igualdade. Para este fato, Radford (2021) explica que um ato intencional específico referente a um objeto já incluiu o ato da pessoa que está voltada para esse objeto. De fato, aconteceu com a professora Branca de Neve, quando percebeu a necessidade de não retirar apenas uma canetinha de Clara e uma de Ana, mas sim duas, o que resultaria no isolamento do estojo de Clara e, consequentemente, na simplificação da equação.

No Quadro 11, tem-se os registros das discussões que se desenvolveram durante o intervalo de tempo explicitado, focando nos sentidos atribuídos à retirada de canetinhas de ambos os lados da igualdade e na denotação do valor indeterminado.

Quadro 11 - Transcrição e observações dos momentos salientes 3

	Transcrição: F2, P1, G2, V13, t: 0:31 — 1: 01	Observações
23	**Formadora**: por que eu tenho que tirar duas canetinhas de cada lado? 	A formadora tenta envolver as professoras no processo de objetivação, espalmando as mãos para chamar a atenção e questionando-as.

	Foto 4	
24	**Merida**: pra ficar igual, porque o estojo tem cinco.	Estabelecendo a hipótese que o estojo tem 5 canetinhas.
25	**Moana**: e para ficar igual teremos que tirar duas aqui e duas de lá.  Foto 5	Moana estava referindo-se às duas canetinhas de cada lado da igualdade. Para isso, realiza gestos indexicais.
27	**Branca de Neve**: tira duas de Clara e tira duas de Ana.  Foto 6  Desenho 5	Em relação às canetinhas de Clara e de Ana de cada lado da igualdade. O número 5 que está desenhado no estojo, colocado no final do processo.
32	**Moana**: Ficou só com o estojo, né?  Desenho 6	Merida se referiu a ficar com o estojo isolado no primeiro membro da equação.
34	**Branca de neve**: agora o estojo é igual a essas canetinhas aqui!	A professora Branca de Neve isolou o estojo, evidenciando dois vetores do pensamento algébrico: o indeterminado e sua denotação por meio do estojo.
43	**Merida**: o estojo não está cheio, mas tem cinco nele  Foto 7	Referindo-se às cinco canetinhas e apontando com a caneta.

Fonte: Dados da pesquisa

Em relação ao Quadro 11, a pesquisadora-formadora voltou a questionar, na linha 23, o porquê de retirar duas canetinhas de Ana e duas canetinhas de Clara. Com o intuito de envolver as outras professoras no processo de objetivação, ela espalmou uma das mãos para chamar a atenção e tentar promover a produção coletiva de ideias. Além disso, a pesquisadora-formadora também visou garantir que as professoras, especificamente a professora Merida, não estivessem pensando de forma procedimental, ou seja, nos sentidos atribuídos ao utilizar o sinal de igual como uma inscrição que indica a realização de um cálculo aritmético (Radford, 2022).

Na verdade, a hipótese de Merida, na linha 24 do Quadro 11, expressava a intenção de falar o resultado de uma operação. Logo, ela apresenta uma tendência a interpretar o sinal de igual de forma operacional, sem demonstrar a ideia relacional da equação. A hipótese apresentada pela professora Merida denota as características do raciocínio do tipo aritmético. Sobre isso, Gomes (2019), afirma que esse tipo de raciocínio se apresenta quando o aluno, em busca de um valor desconhecido, recorre a várias tentativas, como evidenciado na fala de Merida. Dessa forma, ela ainda não demonstrou um raciocínio dedutivo capaz de simplificar esta e outras equações.

Em outro momento, a Professora Moana, nas linhas 25 e 32 do Quadro 11, percebeu a necessidade de isolar o estojo de Ana ao mencionar a retirada das duas canetinhas tanto de Ana quanto do lado de Clara. A professora, então, resumiu a ideia gerada em um procedimento de isolar o termo desconhecido, representado pelo estojo.

A partir dos desenhos realizados pelas professoras no SSI (sistema semiótico icônico), foi possível solucionar o problema e determinar a quantidade de canetinhas do estojo de Ana. Elas partem da premissa de que é preciso manter a igualdade entre as partes equacionadas e, por isso, o que é retirado de um dos membros deve ser retirado do outro. No entanto, não podemos dizer que há uma generalização algébrica, haja vista que elas chegam a essa conclusão paulatinamente, retirando uma a uma.

No Quadro 12, apresentamos as discussões referentes ainda ao problema 1. Nesse momento da atividade, o sistema semiótico icônico é substituído pela utilização do sistema semiótico alfanumérico, partindo das resoluções apresentadas nos Quadros 9, 10 e 11.

Quadro 12 - Transcrição e observações dos momentos salientes 4

	Transcrição: F2, P1, G2, V13, t: 2:49 — 4:50	Observações
44	**Formadora**: vamos tentar resolver esse mesmo problema de outra maneira?	A formadora sugeriu a resolução do problema 1 pelo sistema semiótico alfanumérico.
45	**Moana:** (Risos!!) colocando X ou Y	A professora Moana deu a ideia de utilizar X ou Y na composição da equação.
46	**Formadora**: ela já quer colocar X (Risos!!). E X, seria quem?	Se referindo à Moana. E incentivando as professoras explicarem a denotação do indeterminado.
47	**Merida**: eu acho que X seria o estojo	Merida resolveu denotar o valor desconhecido por X.
48	**Moana**: não, o X seria Clara, Clara né igual a Ana?	Moana discorda de Merida em relação à denotação do desconhecido.
49	**Formadora**: elas duas têm as mesmas quantidades de canetinhas, o estojo não!	
50	**Merida**: X é o estojo mesmo, veja X mais 2 que é igual a sete. $X+2=7$ Desenho 7	As professoras Branca de Neve e Merida falam na mesma hora em relação à denotação do indeterminado de maneira simbólica.
51	**Moana**: eita, é mesmo! O estojo é o X!	Moana percebe que o indeterminado também pode ser representado por uma letra, no caso, o X.
77	**Moana**: exatamente isso! E agora podemos ver o que fizemos, que foi subtrair dois de um lado e dois de outro, aparecendo o X sozinho, num foi isso? $X+2-2=7-2$ $X=5$ Desenho 8	Moana fala da representação do problema pelo SSA, e da forma de resolução, partindo de um pensamento analítico. Aqui fica evidente os três vetores do pensamento algébrico: - A indeterminação, denotado por meio da letra X; - A analiticidade: a professora operou sobre o desconhecido, partindo da operação de retirada de quantidades iguais de ambos

		os lados da equação para isolar o desconhecido.
78	**Branca de Neve**: foi, mulher! Olha aqui no desenho!  Foto 8	Branca de Neve mostra às professoras Merida e Moana o X igual a 5.

Fonte: Dados da pesquisa

A pesquisadora-formadora sugeriu às professoras que resolvessem o problema 1 de uma forma diferente, ou seja, utilizando o sistema semiótico alfanumérico (SSA), partindo das ideias utilizadas para resolver o problema 1 no SSI. Assim, cada uma das equações simplificadas é deduzida da anterior, esse tipo de resolução é assegurado pela aplicação de regras algébricas envolvendo operações sobre quantidades determinadas e indeterminadas (Radford, 2022). No caso da resolução do problema 1, como demonstrado no desenho 8 (linha 77 do Quadro 12), foi utilizada a subtração em quantidades determinadas em ambos os lados da igualdade.

No entanto, no início da discussão, Moana, na linha 48 do quadro 12, apresentou uma interpretação equivocada, concluindo que o termo indeterminado é atribuído a tudo que pertence à Clara (canetas e estojo). Essa confusão surgiu devido à igualdade da quantidade de canetinhas de Ana e de Clara. Nesse momento, a pesquisadora-formadora interveio, como evidenciado na linha 49 do quadro 12. Somente a partir de suas colocações é que Moana percebeu que o termo indeterminado se referia ao estojo. Branca de Neve também teve a mesma percepção. Logo, as duas professoras falaram exatamente ao mesmo tempo, mediante o envolvimento na atividade colaborativa. Elas conseguiram representar a equação no sistema semiótico alfanumérico (SSA), em conjunto com a pesquisadora-formadora, conforme destacado na linha 50 e no desenho 7.

Radford (2022) afirma que a realização de atividades de ensino-aprendizagem desempenha um papel significativo no entendimento das regras de simplificação e resolução de equações, fundamentadas em operações. Durante a atividade, as professoras estiveram envolvidas em um fluxo de relações emocionais, afetivas, sociais e éticas. Nesse contexto, elas precisaram produzir processos intelectuais, discursivos e materiais e, ao mesmo tempo, lidar com a simplificação de equações proveniente do problema 1.

Ao longo da atividade foi possível envolver as professoras na discussão de como nomear o estojo de Ana no sistema semiótico alfanumérico (SSA). Por meio de um trabalho colaborativo e de uma escuta atenta, elas chegaram a um consenso de chamar de X. Isto é, um trabalho de percepção consciente da denotação do termo indeterminado e a aplicação da regra que assegura a simplificação de equações, possibilitou encontrar quantas canetinhas tinha no estojo de Ana, sem precisar abri-lo e contar, mas sim, apoiadas em um pensamento analítico. Na linha 78 do quadro 12, é possível observar a mão da professora Branca de Neve explicando às outras professoras e à pesquisadora-formadora sua forma de entendimento, no qual isolando o X (indeterminado), encontraria o seu valor.

PROBLEMA 2 - Equação tipo 12 = X + 4

> Para outra tarefa de colorir, Ana ganhou 12 canetinhas soltas e Eva ganhou um estojo e mais 4 canetinhas soltas. As duas ganharam a mesma quantidade de canetinhas. Quantas canetinhas têm o estojo que Eva ganhou?

No Quadro 13 estão escritas as transcrições, observações e as evidências que destacam os momentos salientes do início da resolução do problema 2. Logo abaixo, estão dispostas as análises referentes à motivação de explorar o sinal da igual de maneira relacional.

Quadro 13 - Transcrição e observações dos momentos salientes 5

	Transcrição: F2, P2, G2, V18, t: 0:56 — 1:27	Observações
7	**Moana**: é o mesmo raciocínio do outro problema?	A professora Moana está se referindo ao raciocínio utilizado no problema 1.
8	**Merida**: e no caso aí, Simone (formadora), a diferença desse problema para o outro é que o estojo vai seguir para o outro lado!  Foto 9  Foto 10	A professora Merida quis dizer que o estojo (o indeterminado) deve ir para o segundo membro da equação. Identificamos, nessa passagem, os vetores da indeterminação e da denotação (representado pelo estojo).
9	**Formadora**: e sem colocar o estojo para o outro lado? Faremos como?	A formadora sugeriu a resolução utilizando a relação de igualdade como alternativa.
10	**Moana**: eu quero fazer de cabeça (risos)	A professora Moana sugere a resolução a partir de tentativas e erros.

Fonte: Dados da pesquisa

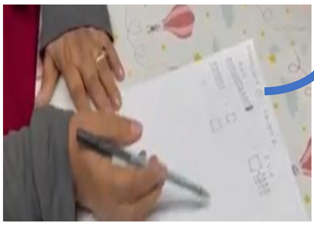
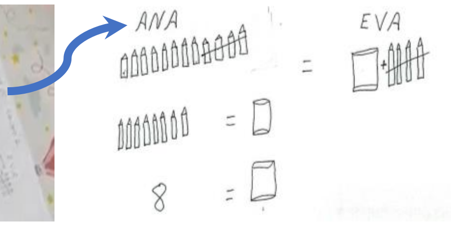
As professoras e a pesquisadora-formadora, no momento, estiveram diante de outro problema: um enunciado semelhante ao do problema 1. No entanto, não é uma cópia, mas sim, uma nova oportunidade de juntas, materializarem o saber e procurarem caminhos de cooperação entre elas para a produção coletiva de ideias que as levem à resolução do problema 2. Na linha 7 do Quadro 13, a professora Moana compartilha a ideia de utilizarem o mesmo raciocínio de resolução do problema 1. Em seguida, na linha 8 do Quadro 13, a professora Merida identifica a diferença entre os problemas 1 e 2, destacando que, enquanto no problema 1 o termo desconhecido estava no primeiro membro da equação, no problema 2 ele estava no segundo membro.

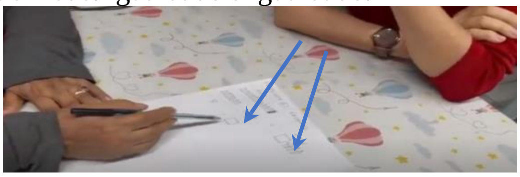
Como estivemos partindo da concepção analítica da álgebra, Gomes e Noronha (2021) afirmam que abordagens pedagógicas ou formas de colocar o saber algébrico em atualização não devem se resumir apenas na identificação do valor da incógnita ou do termo desconhecido, sobretudo nos anos iniciais. Sendo assim, a intenção da pesquisadora-formadora, como explícito na linha 9 do Quadro 13, foi explorar o sinal de igualdade como alternativa pedagógica de mobilização desse saber algébrico.

Mesmo com a utilização do sistema semiótico icônico (SSI), Moana, na linha 10 do quadro 13, propôs a resolução mental. Para Radford (2022), essa interpretação da professora Moana tem a ver com a natureza descontextualizada de atividade de cunho algébrico e dos sinais utilizados em sentenças numéricas resolvidas por ela em sua vida escolar, que, provavelmente, a induziram a esse pensamento. Podemos observar isso na foto 10, na qual a professora Moana está de braços cruzados, indicando que não tinha mais nada para resolver ou deduzir no problema, apenas indicar a resposta do termo desconhecido.

O Quadro 14 ainda se refere aos dados relacionados à resolução do problema 2. Sendo assim, ele traz as discussões em torno da generalização referente à retirada de N canetinhas de ambos os lados da igualdade, como também a posição do indeterminado denotado pelo desenho do estojo, disposto no segundo membro da equação.

Quadro 14 - Transcrição e observações dos momentos salientes 6

	Transcrição: F2, P2, G2, V19, t: 0:06 — 1:21	Observações
12	**Branca de Neve**: vou desenhar as canetinhas debaixo do nome de Ana. O estojo e as 4 canetinhas foram debaixo de Eva.  Desenho 9	À medida que a professora Branca de Neve explica como deveria ser a equação no sistema semiótico icônico, ela a representa, como evidencia o desenho 9.
13	**Merida**: é a mesma coisa do outro! Então retira aí as canetinhas, Branca de neve!	Se referindo a subtrair um número de canetinhas iguais em cada lado da igualdade.
15	**Formadora**: cortar o quê? Quantas?	
16	**Branca de Neve**: 4 canetinhas de Ana e 4 canetinhas de Eva, aí o estojo fica sozinho debaixo do lado de Eva, né?   Foto 11 Desenho 10	A ideia de Branca de Neve foi subtrair 4 canetinhas de cada lado da igualdade e isolar o desconhecido. Aqui, encontramos os 3 indícios de pensamento algébrico defendido por Radford (2021): a indeterminação, denotação e a analiticidade.
18	**Branca de Neve**: então, a gente desenha somente o estojo!	Branca de Neve toma consciência que o estojo é a incógnita e que, com as subtrações, ele ficou isolado.

19	**Moana**: que é igual a 8. A gente está trabalhando somente com estojo agora, os lápis foram cortados.	A Professora Moana também se dá conta que o estojo ficou isolado com as subtrações.
21	**Branca de Neve**: a gente coloca 8 igual ao estojo ou o contrário, né? Esse (o estojo) é igual a oito.  Foto 12	
22	**Formadora**: interfere na resposta se colocar o 8 no primeiro membro da igualdade?	
23	**Branca de Neve e Moana**: não.  Foto 13	Enquanto as professoras Branca de Neve e Moana falavam, a professora Merida fazia um gesto de sua ideia de que o número 8 no segundo membro e o estojo no primeiro membro não alteravam a igualdade.
24	**Branca de Neve**: igualdade é igualdade!  Foto 14	A professora Branca de neve reconheceu o sinal de igual de maneira relacional, apontando para os dois lados da igualdade com a caneta.

Fonte: Dados da pesquisa

Por conseguinte, durante o processo formativo, a professora Branca de Neve, como demonstra a linha 12 do quadro 14, propôs às outras professoras e à pesquisadora-formadora que resolvessem o problema 2 pelo sistema semiótico icônico, da mesma maneira como haviam resolvido no problema 1. Logo, é possível verificar no desenho 9, na linha 12, os membros da equação e os sinais de igual e do sinal de soma.

Ao observar o desenho 9 do quadro 14, ainda sem os traços, a professora Merida, na linha 13 do quadro 14, sugeriu, imediatamente, a retirada das canetinhas. No entanto, a pesquisadora-formadora interveio, na linha 15 do quadro 14, incentivando as professoras a refletirem juntas a respeito da retirada das canetinhas, com o intuito de produzir coletivamente as ideias, em vez de apenas negociar significados.

Sendo assim, a professora Branca de Neve, nas linhas 16 e 18 do quadro 14, apresentou um refinamento na operação de retirada que permitiu isolar o estojo e, consequentemente, simplificar a equação. No início do problema 1, as retiradas das canetinhas eram realizadas uma a uma e, agora, as professoras optaram pela retirada das quatro canetinhas de uma só vez. Essa ideia, de acordo com Radford (2022), representa uma generalização da operação de retirada, indicando que várias canetinhas podem ser removidas simultaneamente de ambos os lados da equação.

Diante da proposta de isolar o estojo com a retirada de uma só vez das canetinhas, as professoras enfrentam um momento de tensão, especialmente devido à posição do estojo no segundo membro da equação, algo pouco comum nos livros didáticos. Assim, na linha 21 do Quadro 14, Branca de Neve verbaliza em sua fala a seguinte dúvida: *‘’É possível que a indeterminação esteja no segundo membro?’’* A pesquisadora-formadora, na linha 22 do Quadro 14, aproveita esse questionamento para envolver as outras professoras e colocá-las diante da mesma dúvida. Elas pararam por um tempo e, em consenso, expressaram suas ideias, utilizando diferentes maneiras de representação. Enquanto Branca de Neve e Moana utilizavam a linguagem natural: *“não”*, a professora Merida, como mostra a foto 13, realizava um gesto, expressando a ideia de que o número 8 no segundo membro e o estojo no primeiro membro não alteravam a igualdade.

Os dados analisados nesse trecho apontam para os três vetores do pensamento algébrico, que de acordo com Radford são: senso de indeterminação, analiticidade e a designação simbólica que também pode ser chamado de denotação. Desta forma, se nos primeiros momentos encontramos indícios relacionados apenas à indeterminação e denotação, podemos perceber, agora, que o pensamento analítico emerge durante a resolução. Esse pensamento se manifesta na linha 16 do Quadro 14, quando as professoras partem da certeza de que, ao retirarem 4 canetas de Eva, a fim de isolar o estojo (determinação), também é preciso retirar de Ana.

Após a resolução dos dois problemas, ainda no encontro 2, no Quadro 15, a pesquisadora-formadora propõe um debate sobre a possibilidade de tarefas de cunho algébrico e como seria resolver esses mesmos problemas com seus alunos. As falas das professoras indicam que as estratégias de resolução encontradas durante o processo formativo também podem ser aplicadas pelos estudantes.

Quadro 15 **-** Transcrição e observações dos momentos salientes 7

	Transcrição: F2, P2, G2, V20, t: 3:05 — 4:46	Observações
34	**Merida**: acho que devemos começar do mais simples e vai aumentando gradualmente os valores, e a princípio com os desenhos e, depois que eles se apropriarem, aí vamos para os números.	A palavra número para a professora indica a resolução do problema pelo sistema semiótico alfanumérico. Quando ela fala “eles” está se referindo aos seus alunos.
35	**Formadora**: o que vocês acham sobre essa colocação de Merida?	
36	**Merida**: o bom é fazer na sala de aula do jeito que fizemos aqui, primeiro com desenhos e depois com as letras e os números, mas isso para os 4º e 5º anos, para o 1º ano devemos usar material concreto. Eu usaria os próprios estojos deles.	Merida se coloca novamente.
37	**Branca de Neve**: vai tirando os lápis de um lado e de outro e mostrando à criança que aquela igualdade mostra os lados e não um só.  Foto 15	Os movimentos das mãos da professora estavam se referindo aos membros da equação.
38	**Branca de neve**: então o que discutimos naquele texto do começo é equação para as crianças, né?	A professora fazendo a relação entre o texto da BNCC e o problema que acabaram de resolver.
39	**Formadora**: sim! Então é válido ensinar como a gente aprendeu? Passando os números de um lado para o outro?	A formadora com intuito de levantar reflexões sobre a forma mecânica de resolver os problemas.
40	**Branca de neve**: nunca! A criança vai só decorar.	
41	**Moana**: o que aprendemos aqui me deu uma luz para a sala de aula. Primeiro que eu não sabia nem o que era álgebra (risos) e muito menos que esses tipos de problemas eram uma equação.	A professora estava querendo dizer que os problemas poderiam ser resolvidos por equações.

Fonte: Dados da pesquisa

A resolução do problema 2, utilizando os sistemas semióticos icônico e alfanumérico, proporcionou às professoras e à pesquisadora-formadora um momento de envolvimento nos processos de objetivação, e principalmente, em relação ao reconhecimento do sinal de igual, de forma relacional. Para Radford (2021), o encontro das professoras com esse sistema de pensamento cultural e historicamente já constituído as conduziu a uma tentativa de materialização desse saber. A partir desse ponto, elas iniciaram uma discussão sobre a maneira de introduzir em suas aulas a abordagem dedutiva pela qual estavam tentando resolver os problemas que haviam sido propostos pela pesquisadora-formadora.

Na linha 34 do Quadro 15, Merida expressa sua ideia de resolver com seus alunos primeiro usando o sistema semiótico icônico, e depois o alfanumérico, assim como realizado no processo formativo. Em sua fala: *"Vai aumentando gradualmente os valores"*, ela está se referindo a iniciar com os valores pequenos das canetinhas e depois com valores maiores, com o intuito de generalizar a resolução da equação com N valores. Na linha 35, a pesquisadora-formadora tenta envolver as outras professoras na discussão iniciada pela professora Merida, que continua expressando sua ideia, sugerindo os anos a serem trabalhados nas equações: 4º e 5º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Em consonância ao pensamento de Merida, Branca de Neve, na linha 37 do Quadro 15 e na foto 15, gesticula ao mesmo tempo que fala, e afirma que a retirada das canetinhas, como regra de simplificação de equações estabelecida na resolução dos problemas 1 e 2, pode ser trabalhada com os alunos e que, de maneira satisfatória, poderá realizar um trabalho de compreensão com o sinal de igualdade. Na foto 15, a seta indica a professora Merida com as duas mãos levantadas e articulando-as ao mesmo tempo, demonstrando os membros de uma equação.

Diante dessas considerações, a pesquisadora-formadora, na linha 39 do Quadro 15, tenta corroborar a ideia das professoras Merida e Branca de Neve, questionando a todas sobre a forma mecânica na qual as equações eram tratadas e trabalhadas em sala de aula em décadas anteriores. Após um período de discussão, em consenso, as professoras concordaram em utilizar uma forma dedutiva de trabalhar com equações, sobretudo nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A fala de Moana, na linha 41, ilustra a concepção das professoras.

6.3 PROCESSO FORMATIVO 3: problemas 3 e 4 referentes às equações dos tipos: 2X + 2 = X + 7 e X + 3X = 20

No terceiro dia do processo formativo, as professoras Branca de Neve, Merida e Moana, pertencentes ao grupo 2, participaram de uma atividade de ensino-aprendizagem com o objetivo de, em conjunto com a pesquisadora-formadora, se envolverem na resolução dos problemas 3 e 4, que resultaram em equações do tipo: $2X + 2 = X + 7$ e $X + 3X = 20$. Assim como aconteceu no segundo dia do processo formativo, a escolha de analisar o grupo 2 se deu pelo fato das educadoras ministrarem aulas no 4º e 5º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental, os quais contemplam o nosso objeto de estudo, ou seja, as propriedades da igualdade de uma equação.

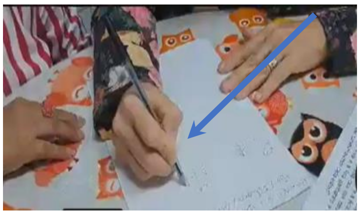
Dessa forma, para apresentar os dados produzidos na atividade de ensino-aprendizagem no segundo encontro do processo formativo, elaboramos 9 quadros. Neles, estão dispostas as transcrições das falas, observações e as evidências, como fotos e desenhos dos momentos salientes referentes a resolução dos problemas 3 e 4, como também as análises de cada quadro, posteriormente.

PROBLEMA 3 - Do tipo $2X + 2 = X + 7$

> A professora de Eva a entregou 2 estojos com quantidades iguais de canetinhas dentro e 2 canetinhas soltas. Para Ana, ela entregou apenas um estojo com a mesma quantidade de canetinhas dos que deu a Eva e mais 7 canetinhas soltas. Sabendo que Eva e Ana ganharam a mesma quantidade de canetinhas, quantas canetinhas contêm em cada estojo?

O Quadro 16 contempla as transcrições, observações e as evidências dos momentos salientes referentes ao problema 3, como também o desconforto e as dúvidas das professoras quando se depararam com um tipo de equação que possui o indeterminado, tanto no primeiro membro, quanto no segundo membro.

Quadro 16 - Transcrição e observações dos momentos salientes 8

Nº da linha	Transcrição: F3, P3, G2, V09, t:1:01 - 2:41	Observações
6	**Merida**: primeiro o desenhinho, igual como fizemos na outra vez   Foto 16 Foto 17	A professora Merida lembrou a representação pelo sistema semiótico icônico, corroborando com os escritos de Radford (2021) que aponta o pensamento algébrico como multimodal.
15	**Merida** : com quantidades iguais! Não devemos esquecer!	A professora Merida expressando a relação de

		igualdade que havia sido explorada nos problemas 1 e 2.
16	**Formadora**: Eva só ganhou os dois estojos mesmo?	A formadora envolveu as professoras no entendimento do problema, questionando-as a respeito da quantidade de estojos e canetinhas de Eva. Isso porque, ao desenhar a equação, apenas figuravam os dois estojos no membro que se referia ao total de "coisas" de Eva.
17	**Merida**: peraí, não, ela ganhou mais duas canetinhas soltas…	Merida reflete em relação ao questionamento da formadora.
22	**Moana e Branca de Neve**: tem Ana também!  Foto 18	As duas professoras apontam que Ana também tem estojos. (Ver foto 18)
23	**Merida**: e à Ana ela deu um estojo, né?	Referindo-se à quantidade de estojos que Ana ganhou.
25	**Branca de Neve**: um estojo com a mesma quantidade de canetinhas que Eva tem e mais sete canetinhas soltas.	Branca de Neve explicando sua compreensão do enunciado do problema.

Fonte: Dados da pesquisa

A pesquisadora-formadora iniciou a apresentação do problema 3 seguindo um contexto semelhante aos problemas 1 e 2. Esse problema, no entanto, resulta em uma equação do tipo $2X + 2 = X + 7$ com um grau de complexidade conceitual maior do que as dos problemas 1 e 2. De acordo com Radford (2021), o objetivo é recorrer a uma unidade conceitual e contextual e uma organização dos problemas com dificuldade mais complexa e crescente. Dessa forma, as professoras puderam navegar de maneira significativa entre os níveis de conceitualização cada vez mais sofisticados.

As professoras do grupo 2 entraram em discussão referente à organização dos dados que foram representados pelo sistema semiótico icônico. Na linha 5, a professora Merida convoca as outras professoras para iniciar a resolução do problema e, em seguida, aponta em que local do papel serão desenhados os estojos e as canetinhas de Clara e Eva. É possível verificar o desdobramento dessas ideias na linha 6 do Quadro 16, especialmente nas fotos 16 e 17, em que é possível observar o envolvimento das professoras na resolução do problema 3.

Entretanto, no início do processo de resolução do problema 3 ocorre uma confusão de pensamentos, visto que não se trata mais de equações do tipo X + A = B, mas sim de equações com incógnitas tanto no primeiro membro como no segundo membro. Essas nuances ocasionaram desconfortos e dúvidas das professoras na hora de organizar os dados do problema no sistema semiótico icônico. Na linha 17 e 22 do Quadro 16, é possível observar que Merida lembra da igualdade, porém, depois, se dá conta que Eva ganhou, além dos estojos, canetinhas soltas. Essa sua percepção só ocorreu após o questionamento da pesquisadora-formadora na linha 16: *"Eva só ganhou os dois estojos mesmo?"*, com o intuito de incentivar e envolver as professoras a refletirem na organização e interpretação dos dados do problema.

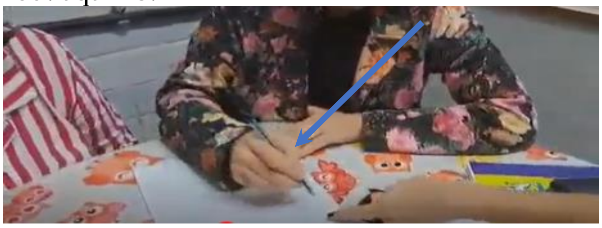
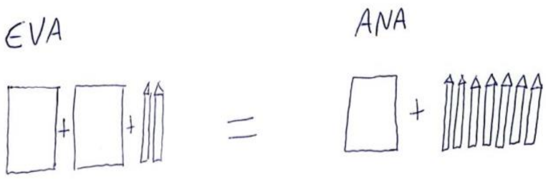
É importante ressaltar que esse envolvimento da pesquisadora-formadora aponta para a questão da Teoria da Objetivação, na qual faz referência ao trabalho "ombro a ombro" de todos os sujeitos que compõem o pequeno grupo. Neste trabalho, cada um deles exerce um papel diferente, mas laboram juntos em busca de uma obra comum (Radford, 2021).

Nas linhas 22, 23 e 25 do Quadro 16, as professoras começaram a encontrar, de maneira colaborativa, uma organização dos dados que representassem o problema 3 no sistema semiótico icônico. Portanto, elas expressaram que tanto Eva quanto Ana haviam ganhado estojos e canetinhas soltas e, com isso, começaram a elucidar a interpretação do enunciado e, consequentemente, a realizar a representação do problema 3 com desenhos.

As discussões do Quadro 17 centram-se nos momentos de reflexão e tensão entre as professoras e a pesquisadora-formadora em relação à composição da equação do problema 3 no sistema semiótico icônico.

Quadro 17 – Transcrição e observações dos momentos salientes 9

Nº da linha	Transcrição: F3, P3, G2, V09, t: 3:19 — 4:41	Observações
33	**Branca de Neve**: sabemos que Eva e Ana ganharam a mesma quantidade. Então é igual, coloca o igual aí, Merida!	A professora Branca de Neve percebeu a relação de igualdade entre o primeiro e segundo membro e que o sinal de igual simboliza essa igualdade.

34	**Merida**: aqui né?  Foto 19	A professora Merida desenha com a caneta a igualdade e a formadora aponta com o dedo confirmando a proposta das professoras.
39	**Moana**: mas por que são dois estojos e a gente já sabe que aqui há nove canetinhas soltas?	A professora Moana adicionou mentalmente e mecanicamente 2 e 7.
40	**Merida**: mas a gente quer saber a quantidade que tem aqui dentro dos estojos!  Foto 20	Apontando com a caneta e referindo-se a denotação semiótica que representa os estojos. Nesse momento, os dois vetores do pensamento algébrico emergem: a indeterminação e a denotação.
47	**Branca de Neve**: seria 5, pois 5 + 5 seria 10 e com 2 fica doze. Ficaria igual a 5 + 5 do outro lado.	Concepção aritmética da professora Branca de Neve baseada no cálculo mental.
48	**Formadora**: mas se fosse para explicar aos nossos alunos, como faríamos? Usamos essas contas?	Se referindo a concepção aritmética da professora Branca de Neve.
49	**Moana**: não poderia, eu pensei assim.	
52	**Branca de Neve**: vamos colocar com letras? Vamos fazer aquela conta, equação?	A professora Branca de Neve sugere a realização do problema pelo sistema alfanumérico.
53	**Formadora**: pode, sim, Branca de Neve, mas vamos terminar desse jeito mesmo, com os desenhos que vocês já representaram!  Desenho 11	A formadora tenta envolver as professoras na atividade colaborativa referente ao problema 3 com a utilização do sistema semiótico icônico.

Fonte: Dados da pesquisa

Para Radford (2021), quando um saber algébrico se torna objeto da nossa consciência, ou seja, quando ocorre a aprendizagem, há evidências e torna-se algo perceptivo. Nesse viés, a atividade proposta pela pesquisadora-formadora foi desenhada para colocar o saber algébrico em movimento, permitindo a materialização gradual desse saber.

Na linha 33 do Quadro 17, Branca de Neve verbaliza a relação de igualdade entre o primeiro e o segundo membro de uma equação, indicando uma tomada de consciência em relação a esse conceito. Essa compreensão foi produzida colaborativamente entre as outras professoras nos problemas 1 e 2, como evidenciado quando Branca de Neve solicita à Merida que ela represente com um desenho o sinal da igual. Sendo assim, houve entre elas, o entendimento quanto ao sinal de igual, à medida que Merida compreende e atende sua solicitação.

No momento seguinte, Merida aponta com a caneta, referindo-se à denotação semiótica da indeterminação, representada pelos estojos, revelando o reconhecimento perceptivo em relacionar quantidades iguais em ambos os membros da equação (Radford, 2021). Entretanto, Branca de Neve aparece no contexto da discussão, causando um momento de tensão ao expressar sua ideia aritmética e querer indicar logo o valor numérico do estojo. Diante desse fato, na linha 47 do Quadro 17, possivelmente como se fosse o triunfo do seu desempenho durante os dias de formação.

A partir daí, a pesquisadora-formadora se envolve com as professoras estimulando-as a continuarem a resolução do problema 3, utilizando o sistema semiótico icônico. Na linha 48 do Quadro 17, questiona como seria a forma de trabalhar em sala de aula com os alunos. Em seguida, a professora Moana questiona as ideias da professora Branca de Neve que, por sua vez, na linha 52 do Quadro 17, sugere a realização do problema pelo sistema semiótico alfanumérico. Logo, na linha 53 do Quadro 17, a pesquisadora-formadora intervém no processo ao sugerir a representação do problema utilizando o sistema semiótico icônico, a fim de que as estratégias iniciadas no SSI sejam concluídas, e que juntas, continuem trabalhando e tentando fazer desse momento da formação algo significativo, em que o saber em questão se torne um objeto da consciência das professoras (Radford 2021).

No Quadro 18, serão analisadas as discussões provenientes da utilização da regra já instituída de retiradas de valores conhecidos (canetinhas). Entretanto, há, também, a objetivação/materialização de uma nova regra algébrica surgida de simplificação de equações quando são retirados valores não conhecidos em ambos os lados da igualdade.

Quadro 18 - Transcrição e observações dos momentos salientes 10

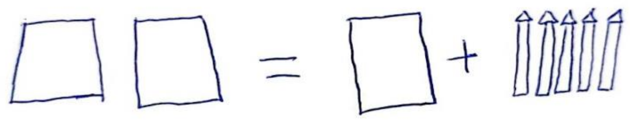
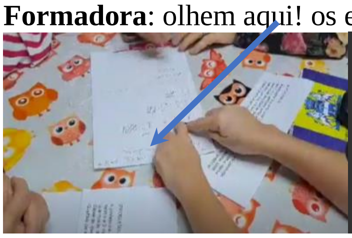
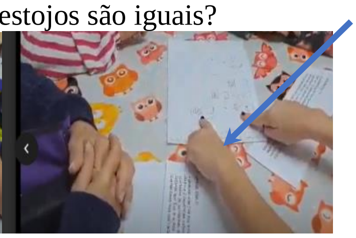
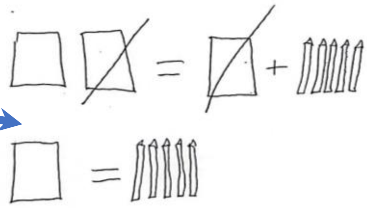
Nº da linha	Transcrição: F3, P3, G2, V09, t: 5:42 — 7:05	Observações
62	**Formadora**: vamos lembrar da forma como fizemos as questões anteriores? O que essa igualdade diz para gente? Ou melhor, se eu tirasse agora uma canetinha de cada lado, a igualdade permaneceria?	
63	**Branca de Neve**: ah, é... Vamos cortar logo duas canetinhas de lá e duas canetinhas de cá.  Desenho 12	Referindo-se a retirada das canetinhas em ambos os lados da igualdade como regra de simplificação de equações.
64	**Branca de Neve**: Aí ficou…  Desenho 13	Branca de Neve ficou reticente e pensativa ao perceber que, mesmo retirando as canetinhas, não conseguiu isolar o estojo.
66	**Formadora**: mas os estojos são iguais?	A formadora tentando envolver as professoras a respeito do raciocínio referente ao estojo (termo desconhecido)
68	**Merida**: lê novamente o problema, não entendo mais nada agora!	Momento de tensão e reflexão.
69	**Formadora**: olhem aqui! os estojos são iguais?   Foto 21 Foto 22	A formadora aponta para os desenhos, com os dois dedos. Na foto 21 mostra um lado da igualdade e na foto 22, os dois lados da igualdade, simultaneamente.
70	**Branca de Neve, Merida e Moana**: sim!!!	As professoras, muito envolvidas na atividade, responderam o questionamento da formadora no mesmo instante.
71	**Formadora**: então! Podemos retirar um estojo de cada lado? Da mesma forma que tiramos a canetinha? O que acontece?	A professora se envolve na atividade para que uma nova regra para simplificar equações se torne aparente.
72	**Branca de Neve**: eita!!! Se tirarmos um estojo desse lado e um estojo do outro fica que um estojo é igual a cinco canetinhas. Hiiiiiii!!! (risos)	A professora Branca Neve trabalhou de forma analítica com os estojos, dando conta da retirada de

	 Foto 23  Desenho 14	um estojo de cada lado da igualdade. Ela parte da premissa de que é possível manter a igualdade operando (retirada) sobre o desconhecido. Seu riso demonstra a tomada de consciência em relação à simplificação de equações com quantidades não determinadas.
73	**Moana, Merida e Branca de Neve**: ahhh, achamos!! (vibram juntas)	Descobrem o valor do estojo. Todas riram!

Fonte: Dados da pesquisa

A pesquisadora-formadora discutiu com as professoras sobre a regra de simplificação de equações estabelecida nos problemas 1 e 2, linha 62 do Quadro 18. Prontamente, Branca de Neve parte para generalização da regra ao propor, na linha 63 do Quadro 18, a retirada das duas canetinhas de um só vez de ambos os membros da igualdade. No entanto, na linha 64 do Quadro 18, é mostrado que ela ficou reticente e pensativa ao perceber que, mesmo retirando as duas canetinhas de ambos os membros da igualdade, não conseguiu isolar o estojo e, consequentemente, descobrir o número de canetas em seu interior. Decerto, segundo Filoy e Rojano (1989), equações do tipo AX + B = CX + D são mais difíceis do que equações da forma AX + B = C devido ao fato das professoras não conseguirem realizar procedimentos computacionais ou outros procedimentos aritméticos, visto que são mais complexos e difíceis de aplicar.

Branca de Neve, na linha 63 do Quadro 18, aplicou a regra de simplificação de equações ao retirar duas canetinhas de cada lado da igualdade. Contudo, ao se deparar com dois estojos no primeiro membro e um no segundo membro, ela demonstrou reticência, ou seja, mesmo com a retirada das canetinhas, o termo desconhecido não ficou isolado, e elas não conseguiram resolver a equação. Diante da dificuldade da nova equação, as professoras sugeriram abandonar as estratégias iniciadas no SSI e tentar resolver a partir do sistema alfanumérico. No entanto, a pesquisadora-formadora as incentivou a continuar a resolver o problema 3 pelo sistema semiótico icônico.

A pesquisadora-formadora, na linha 71 do Quadro 18, reconheceu que as docentes estavam no processo de isolar o desconhecido e, por isso, as questionou acerca da aplicação de uma regra que ainda não havia sido tematizada (uma regra para transitar de 2X + 2 = X + 7 para determinar o valor de X). No entanto, a regra não seria mais utilizada apenas para as canetinhas, mas sim, para os estojos. Esse percurso ocorrido na atividade pode ser explicado a partir das ideias de Filoy e Rojano (1989) pois, para resolver equações algebricamente do tipo AX + B = CX + D que são extraídas de fora do domínio da aritmética, é necessário operar sobre a incógnita e simplificar a equação, no caso do problema 3, com a retirada dos estojos de cada lado da igualdade.

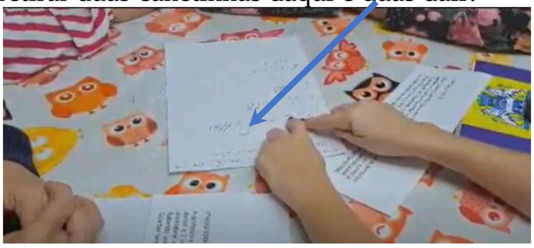
Sendo assim, nas linhas 67 e 69 do Quadro 18, a pesquisadora-formadora questionou as professoras: *"mas os estojos são iguais?".* Sua intenção foi fazê-las trabalhar com o desconhecido como se fosse conhecido e de raciocinar de maneira analítica a respeito da retirada dos estojos em ambos os lados da igualdade. Nesse sentido, podemos observar, nas Fotos 21 e 22, o esforço da pesquisadora-formadora em se certificar que as professoras haviam percebido a igualdade dos estojos e que, embora tenham valores desconhecidos, é possível trabalhar com eles mesmo assim, isto é, considerando o desconhecido como parte do raciocínio.

Na linha 72 do Quadro 18, é visível a expressão de felicidade de Branca de Neve ao verbalizar: *"Hiiiii",* e rir em seguida, revelando sua satisfação diante da tomada de consciência de uma nova regra para simplificar e resolver equações. Ao utilizar significados linguísticos, como fala e riso, ela indica que a retirada de um estojo de cada lado resulta em um estojo no primeiro membro, equivalente a cinco canetinhas. Com essa expressão exclamativa, a professora Branca de Neve colabora com suas colegas para perceberem a recém-descoberta da regra algébrica de simplificação de equações (retirada de valores não conhecidos em ambos os lados da igualdade). A utilização de significados linguísticos como o: *"Haaaa!!"* na linha 73 do Quadro 18, dessa vez pelas professoras Merida e Moana, evidencia uma percepção consciente da regra algébrica recém-instituída.

No Quadro 19, será mostrada a utilização da regra de retirada de valores desconhecidos em ambos os lados como medida inicial de resolução do problema 3, utilizando o sistema semiótico alfanumérico.

Quadro 19 - Transcrição e observações dos momentos salientes 11

Nº da linha	Transcrição: F3, P3, G2, V11, t: 0:08 — 1:05	Observações
1	**Formadora**: agora, podemos resolver esse problema 3 de outra maneira? De outra forma?	

2	**Merida**: podemos usar uma equação?	A professora Merida sugere a utilização do sistema semiótico alfanumérico.
3	**Moana**: exato, usando o X.	
4	**Branca de Neve**: coloca aí Merida, o X, porque a gente desconhece o valor dos estojos, né?! Assim… é uma incógnita.	A professora Branca de Neve denota o indeterminado, ou seja, ela nomeou o X para representar a incógnita.
5	**Moana**: isso! É igual a X + 7  Foto 24	A professora Moana completa o raciocínio da professora Branca de Neve. Enquanto isso, a docente Merida escreve o que elas falam. As mãos das professoras Moana e Branca de Neve, articuladas com suas falas, expressam suas ideias.
6	**Formadora**: e a gente pode usar o mesmo princípio que a gente fez antes? De retirar duas canetinhas daqui e duas dali?  Foto 25	A formadora aponta para os registros escritos feitos pelas professoras quando resolveram o problema 3 no sistema semiótico icônico.
7	**Moana**: pode, sim!	
8	**Merida**: vamos cortar logo os dois X?	A professora Merida sugere a retirada das duas incógnitas (estojos) de ambos os lados da igualdade.
10	**Merida**: vou cortar, tá?  Foto 26  Foto 27 $\cancel{X} + X + 2 = \cancel{X} + 7$ Desenho 15	A professora Moana cortou (retirou) o X de um lado da igualdade, depois do outro (foto 26 e 27).

Fonte: Dados da pesquisa

A pesquisadora-formadora, na linha 1 do Quadro 19, sugeriu a resolução do problema 3 utilizando o sistema semiótico alfanumérico, como podemos verificar nas linhas 2, 3 e 4 do Quadro 19, em que as professoras iniciaram a resolução do problema nomeando o estojo (o indeterminado) por X. A denotação de quantidades envolvendo valores indeterminados deve ser nomeada ou simbolizada, mas não necessariamente por simbolização alfanumérica (Radford 2022). Ela pode ser realizada de outras maneiras, como ocorreu ao longo da resolução dos problemas 1 e 2. Entretanto, no problema 3, as professoras resolveram nomear o indeterminado por X, o qual representou a quantidade desconhecida de canetinhas de dentro do estojo.

Na linha 6, a pesquisadora-formadora tece dois questionamentos com o intuito de remeter à ideia já estabelecida anteriormente de retirada de N canetinhas em ambos os lados da igualdade: *"E a gente pode usar o mesmo princípio que a gente fez antes?"*. Sua intenção era que as professoras percebessem que a ideia de retirar as 2 canetinhas poderia ser estendida para os estojos. A provocação da pesquisadora-formadora gerou um silêncio entre as professoras. Somente quando Moana concordou, a professora Merida, na linha 10 do Quadro 19, afirmou que poderia retirar o termo desconhecido, ou seja, remover o X (termo desconhecido nomeado por elas). Essa sequência de eventos pode ser observada nas fotos 12 e 13, assim como no desenho 6.

Nesse ponto, verifica-se mais uma vez a ocorrência de um pensamento analítico. Partindo de uma sequência de certezas, as professoras começam a operar sobre o indeterminado ao retirar a mesma quantidade de "coisas" de ambos os lados da equação, primando pela permanência da igualdade.

No Quadro 20, as professoras e a pesquisadora-formadora se envolveram na resolução do problema 3 por procedimentos algébricos. Além disso, houve a reflexão da professora Moana em relação à utilização do sistema semiótico alfanumérico com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Quadro 20 - Transcrição e observações dos momentos salientes 12

Nº da linha	Transcrição: F3, P3, G2, V11, t:1:36 — 1:57	Observações
16	**Merida**: Ahh, agora vamos subtrair 2 usando a subtração!	A professora Merida sugere a retirada de 2 canetinhas de ambos os lados da igualdade.

17	**Branca de Neve**: Então tira dois de um lado e dois do 7.	Se referindo a retirada de duas canetinhas das 7 que estavam no segundo membro.
18	**Moana**: coloca menos dois (- 2)  Foto 27	
20	**Merida**: X + 2 - 2 = no caso aqui 7 - 2 (depois da igualdade)  Foto 28	A professora Merida verbaliza a explicação de Branca de Neve e aponta com a caneta para mostrar às outras colegas onde irá fazer as subtrações do 2.
21	**Moana**: agora, desse jeito para as crianças é muito complicado, viu?! Eu me compliquei para avaliar as crianças.	A professora Moana se refere à dificuldade de compreender a subtração das duas canetinhas em ambos os lados da igualdade.
22	**Formadora**: que jeito? Como assim?	
23	**Moana**: essa parte de equação é melhor ficar só no desenho ou, se possível, usar o concreto, um material qualquer para representar as canetinhas e os estojos. $\cancel{X}+X+2=\cancel{X}+7$ $X+2=7$ Desenho 16	Revelando sua ideia em resolver o problema 3 apenas no sistema semiótico icônico. Não concordando em usar símbolos alfanuméricos para crianças pequenas. Representação da equação com o SSA em consenso (desenho 16).

Fonte: Dados da pesquisa

Após a retirada do termo desconhecido, isto é, do elemento X de ambos os lados da igualdade, as educadoras observaram, na linha 20 do Quadro 20, que a equação restante era semelhante às que resolveram nos problemas 1 e 2. A partir disso, elas aplicaram a regra que haviam instituído quando assumiram que poderiam retirar N canetinhas de ambos os lados da igualdade. Conforme Radford (2021), no momento preciso de aprender algo, os participantes da AEA passam por um processo de reorganização do pensamento matemático: o que antes era necessário com muitas palavras e ações, não é mais, e as ideias se reorganizam e se contraem, ou seja, os participantes filtram o necessário do desnecessário, contraindo sua atividade semiótica (Radford, 2021).

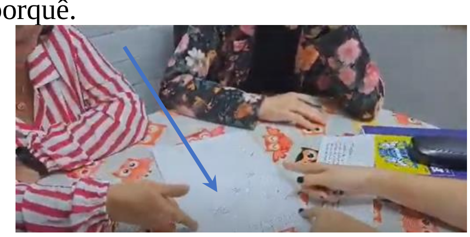
A professora Merida, com sua ideia reorganizada, expressa sua sugestão da subtração, na linha 16 quadro 20, por meio de uma colocação linguística: *"Ah!!!"*. Branca de Neve, por sua vez, na linha 17 do Quadro 20, tenta explicar melhor a ideia de Merida, lembrando sempre da relação de igualdade como equivalência. Sendo assim, a retirada do indeterminado, a princípio, possibilitou a simplificação da equação inicial, resultando em outra equação, no caso, X + 2 = 7, ou seja, uma equação mais simples e com percurso de resolução conhecido por elas.

Entretanto, Moana, na linha 21 do Quadro 20, discordou da resolução da equação com símbolos alfanuméricos para ensinar às crianças, e de fato, faz sentido, pois de acordo com a BNCC (Brasil, 2017), não é necessário formalizar, a resolução de problemas com o uso de incógnitas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Como nossa análise gira em torno do ensino-aprendizagem do professor em relação ao pensamento algébrico, com foco nas propriedades de igualdade de uma equação, o uso dessa linguagem simbólica foi possível.

A ideia da professora Moana reflete o refinamento de seu pensamento algébrico. Podemos constatar isso na passagem de regras aritméticas baseadas na tentativa e erro, quando ela resolve os problemas 1, 2 e 3 por estratégias algébricas nesse último momento formativo. Durante a AEA, ao participar das atividades colaborativas com as outras professoras e com a pesquisadora-formadora, Moana reorganizou suas concepções sobre a resolução de problemas que resultam em equações, adotando uma abordagem mais analítica e dedutiva. Além disso, ela apresentou indícios de pensar algebricamente ao compreender o sinal da igual como uma ideia de equivalência e ao aplicar a simplificação de equações. Esse fato foi comprovado quando ela passou a operar com valores desconhecidos como se fossem conhecidos, como podemos ver no desenho 16, com a retirada em ambos os membros da igualdade.

No Quadro 21, as reflexões foram realizadas conforme as lembranças das educadoras de como a resolução de equações era tradicionalmente ensinada, ou seja, de maneira computacional e mecânica, sem uma compreensão profunda do processo. Elas destacam que, depois da resolução dos problemas e das discussões, sentem-se mais tranquilas para trabalhar equações com seus alunos.

Quadro 21 - Transcrição e observações dos momentos salientes 13

Nº da linha	Transcrição: F3, P3, G2, V11, t: 2:35 — 3: 10	Observações
29	**Formadora**: vocês estão entendendo as ideias que estamos usando?	A formadora quer se certificar de que houve uma compreensão clara das ações realizadas pelas professoras para simplificar a equação.
30	**Branca de Neve**: estamos resolvendo com compreensão. Antes, eu só sabia que tinha que passar para lá, mas não sabia o porquê.  Foto 29	A professora fica reticente, pensativa. Branca de Neve se mostra satisfeita por ter resolvido a equação de maneira dedutiva (Foto 29) e dar sentido a algo que antes fazia apenas por memorizar uma regra.
31	**Merida**: e a história de colocar para o outro lado somando ou subtraindo, tudo mecanizado…  Foto 30	A professora levanta uma das mãos, mostrando a passagem dos números de um lado para o outro da igualdade.
32	**Branca de Neve**: a gente tinha que decorar aquilo. Era muito chato!	Referindo-se à forma computacional de resolver equações, ou seja, com memorização de procedimentos.
33	**Merida**: engraçado que, não passava pela minha cabeça fazer esse tipo de intervenção nas minhas aulas, e ainda hoje muito professor só ensina no mecânico, viu?!	A professora se referindo a como o ensino da álgebra acontece nas escolas que ela tem conhecimento.
34	**Formadora**: por isso que eu insisto para a gente encontrar uma maneira, juntas, de resolver o problema sem ser por memorização de procedimentos.	
35	**Moana**: verdade! E fez a gente perceber mesmo a “coisa” de resolver com lógica!	A professora refletiu em relação à resolução de equações de forma analítica. Aqui, a palavra lógica é entendida por nós como uma forma de resolver algebricamente com sentido.

Fonte: Dados da pesquisa

A pesquisadora-formadora iniciou uma discussão para garantir que houve uma compreensão das ações realizadas pelas professoras na resolução da equação, especialmente no que diz respeito à simplificação de equações e no trabalho com valores desconhecidos como se fossem conhecidos. Após o questionamento da pesquisadora-formadora, na linha 29 do Quadro 21, Branca de Neve, na linha 30 do Quadro 21, confirma sua compreensão e recorda o método tradicional de ensino de equações, que se baseia em uma maneira computacional e mecânica, sem uma reflexão ou compreensão profunda do processo de resolução. Ela apenas realizava as etapas de maneira memorizada.

Esse momento do processo formativo envolveu a pesquisadora-formadora e as professoras em uma discussão tranquilizadora, diferentemente do início do processo, em que estavam angustiadas e preocupadas por terem que resolver equações consideravam "difíceis", principalmente aquelas com estojos em ambos os membros da equação.

Acreditamos, também, que esse medo e angústia perpassam o período escolar de suas vidas. Fiorentini (1995) explica essa forma de ensino que o rigor e a formalização dos conteúdos matemáticos trabalhados na escola eram preponderantes, assim como o emprego de técnicas de ensino e o controle do processo de ensino-aprendizagem na crença de reduzir as reprovações, as quais aconteciam muito, principalmente na disciplina de Matemática. Na linha 32 do Quadro 21, na fala da professora Branca de Neve, é possível verificar sua angústia quando diz: *"A gente tinha que decorar aquilo. Era muito chato!"*

Na linha 33 do Quadro 21, Merida expõe seu ponto de vista: *"Engraçado que não passava pela minha cabeça fazer esse tipo de intervenção nas minhas aulas, e ainda hoje muito professor só ensina no mecânico, viu?!"* Nesse momento, ela está se referindo a sua prática docente, na qual reproduz a forma tradicional de ensino. Concordamos com Fiorentini (1995), que:

> o professor que concebe a Matemática como uma ciência exata, logicamente organizada e a-histórica ou pronta e acabada, certamente terá uma prática pedagógica diferente daquele que a concebe como uma ciência viva, dinâmica, historicamente sendo construída pelos homens, atendendo a determinados interesses e necessidades sociais (Fiorentini, 1995, página 4).

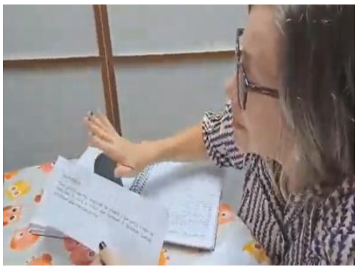
Sendo assim, entende-se que as falas das professoras carregam o peso de suas vivências em relação à memorização de etapas, como se a resolução de equações fosse uma simples receita de bolo, receita esta que tende a ser reproduzida em suas práticas didáticas. As expressões das educadoras acabam por denunciar suas angústias como alunas, assim como também a negação de não querer repetir esses procedimentos em suas práticas docentes. Na linha 34 do Quadro 21, a pesquisadora-formadora justifica a maneira como os processos foram realizados, enquanto na linha 35 do quadro 21, Branca de Neve dá sua opinião relatando que tais processos a fizeram refletir sobre a resolução de equações com compreensão em relação aos processos realizados.

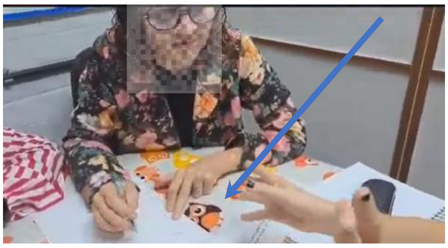
PROBLEMA 4 - Do tipo X + 3X = 20

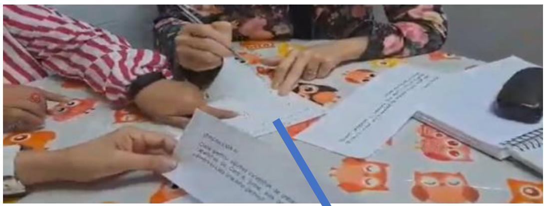
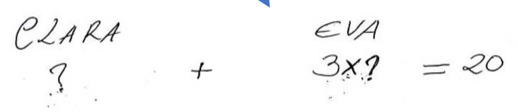
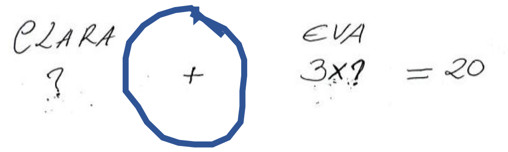
> Clara ganhou algumas canetinhas de presente e Eva ganhou o triplo de canetinhas de Clara e, juntas, elas ganharam 20 canetinhas. Quantas canetinhas cada uma delas ganhou?

No Quadro 22, as discussões foram referentes à escolha da denotação do indeterminado, ou seja, se as professoras utilizavam X ou ? Para compor a equação proveniente do problema 4.

Quadro 22 - Transcrição e observações dos momentos salientes 14

Nº da linha	Transcrição: F3, P4, G2, V12, t: 0:01 — 2:12	Observações
1	**Formadora**: vamos, agora, para o problema 4. O problema é outro, porém, no mesmo contexto envolvendo cantinhas. Então, vamos lá!   Foto 31 Foto 32	A formadora apresenta o problema para as professoras (foto 31 e 32).

4	**Merida**: meu pai! E agora?	Demonstração de preocupação depois da leitura do problema.
5	**Branca de Neve**: algumas canetinhas! Como a gente vai desenhar algumas canetinhas?	Endossando a preocupação da professora Merida
9	**Moana**: coloca uma interrogação? vamos fazer logo por equação.	A interrogação seria a forma de denotar o indeterminado.
11	**Formadora**: vamos colocar os nomes das meninas primeiro, fica melhor assim?	
17	**Merida**: eu ia colocar 3X  Foto 33	
19	**Formadora**: mas vai colocar X aqui e ali a interrogação?	A formadora indica que as denotações das incógnitas seriam diferentes para uma mesma equação.
22	**Moana**: aqui é a interrogação que a gente não sabe quanto é.	
23	**Merida**: é que ela ganhou o triplo dessa, e a gente não sabe, então é 3 vezes a quantidade de clara.	Explicando que Eva ganhou três vezes a quantidade de Clara
24	**Formadora**: mas vocês denominam a quantidade de Clara por quem? Interrogação ou X?	A respeito da denotação do desconhecido.

25	**Moana**: não está denominada… Eita! Tá, sim, pela incógnita!	
26	**Merida**: Pela interrogação, né?	Se referindo a utilizar a interrogação como sendo a incógnita.
28	**Branca de Neve**: então esse lado aqui é 3 vezes a interrogação também. Não X não viu!  Foto 34  Desenho 17	As professoras chegaram em um consenso sobre como denotar o indeterminado, acatando a sugestão de Moana de usar o símbolo "?" (o X em "3x?" representa a multiplicação, e não o indeterminado)
33	**Formadora**: E esse mais aqui? Por que vocês colocaram de repente?  Desenho 18	Referindo-se ao sinal da soma que a professora Moana colocou sem explicações.
34	**Branca de Neve**: porque no texto diz que a quantidade de Clara mais a quantidade de Eva é igual a 20.	A professora Branca de Neve explicou o símbolo da soma que a professora Moana havia colocado.

Fonte: Dados da pesquisa

Após a leitura do problema 4, as professoras iniciaram a composição da equação pelo sistema semiótico alfanumérico, abandonando a ideia de utilizar, a princípio, o sistema semiótico icônico. A fala de Moana, na linha 9 do Quadro 22, comprova esse pensamento inicial, contudo, elas demonstraram dificuldade de compreender o enunciado. Nas linhas 4 e 5 do Quadro 22, as professoras Merida e Branca de Neve expressam esse receio por meio de suas expressões verbais, mas, juntas, resolveram compor a equação. Para isso, utilizaram o símbolo de uma interrogação, causando um pouco de confusão, uma vez que, em alguns momentos, queriam usar a interrogação e em outros a letra X para denotar o indeterminado.

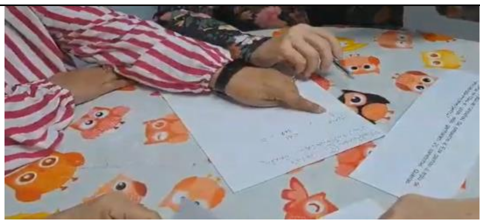
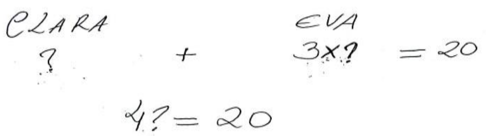
Na linha 28, na foto 22 e no desenho 8 do Quadro 22, Branca de Neve tenta esclarecer a confusão sobre quem iria representar o desconhecido, se o X ou a interrogação. Depois de um tempo, resolveram denotar o indeterminado pela interrogação. Em seguida, com a confusão desfeita, as professoras se voltam para a composição da equação, que estava sem o símbolo da soma, porém, de repente, a professora Moana o colocou, sem explicações.

Por conseguinte, a pesquisadora-formadora, na linha 33 do Quadro 22, questiona o motivo do registro do símbolo de soma, com o intuito de unir ideias para compor a equação. Na linha 34 do Quadro 22, a professora Branca de Neve esclarece o motivo, e a explicação foi aceita pelas outras professoras e pela pesquisadora-formadora. Logo, o esclarecimento foi de comum acordo e apresentaram a estrutura da equação, como podemos ver no desenho 18.

Ademais, observa-se, no Quadro 23, que as professoras ao realizarem a composição da equação referente ao problema 4, se depararam com uma situação particular, caracterizada por um problema de partilha. Este fato gerou momentos de tensão durante o processo de resolução, uma vez que as regras já instituídas de retirada de N canetinhas e N estojos não poderiam ser utilizadas nesse tipo específico de problema.

Quadro 23 – Transcrição e observações dos momentos salientes 15

Nº da linha	Transcrição: F3, P4, G2, V12, t: 3:12 — 4:39	Observações
43	**Branca de Neve**: então, essa interrogação… Se cortar uma interrogação aqui, e aqui fica só duas vezes a incógnita, duas vezes a incógnita é igual a 20!	A professora Branca de Neve fica reticente por um tempo e, em seguida, aplica a regra de retirada das canetinhas, equivocadamente.

	 Foto 35	
44	**Formadora**: mas vejam a igualdade onde está!  Foto 36	A formadora questiona com o intuito delas perceberem o equívoco.
45	**Branca de Neve**: sim! E se eu cortar uma desse lado aqui e desse também?	Referindo-se a cortar uma canetinha de ambos os lados da igualdade, porém, trocou os símbolos de soma pelo sinal de igual.
46	**Merida**: mas por que vamos cortar?	
47	**Formadora**: mas vejam a igualdade onde está!	A formadora afirmou o lugar do sinal de igual mais uma vez.
48	**Branca de Neve**: ah, é! A igualdade tá aqui! Osh, eu confundindo com o mais (risos). Então a gente soma as interrogações e vai dar 4 interrogações dessa, que é igual a 20  Desenho 19	A professora percebe sua troca e rir.
51	**Formadora**: vejam, Clara tem uma interrogação e Eva tem 3 interrogações!	
55	**Moana**: Ah! Isso, isso! Entendi agora. Então desse lado tem 4 interrogações!	Referindo-se à soma de uma interrogação com mais 3 interrogações, ou seja, 4 interrogações no primeiro membro da igualdade.

Fonte: Dados da pesquisa

Como já mencionado, as professoras se depararam com um problema de partilha na resolução do problema 4. Sobre isso, Almeida (2016) diz que, nesse tipo de questão, a quantidade total conhecida é repartida em partes desiguais e desconhecidas. E, nesse caso, não era possível aplicar a regra de retirada de N canetinhas de ambos os lados da igualdade já instituída por elas.

As professoras perceberam que existia uma quantidade desconhecida para Clara e a mesma quantidade três vezes para Eva. Assim, todos no primeiro membro da equação, o que se tornou uma dificuldade para elas. A professora Branca de Neve, na linha 43 no Quadro 23, tenta resolver a situação e sugere a retirada de canetinhas para confundir o símbolo de soma pelo da igualdade por distração, e não por desconhecimento, como fica evidente no decorrer da resolução.

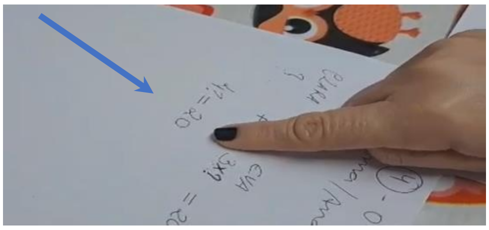
A sugestão de Branca de Neve em simplificar a equação removendo quantidades conhecidas e desconhecidas em ambos os lados da equação foi violada por ela, visto que houve uma confusão com os símbolos de soma e de igualdade. Sendo assim, as professoras envolvidas na AEA chegaram a um momento de tensão observável na linha 46, quando a docente Merida faz um questionamento: *"Mas por que vamos cortar?*", e Moana fica em silêncio, demonstrando que ambas não estavam compreendendo as ações da professora Branca de Neve em relação às retiradas ao longo do processo. Por sua vez, a pesquisadora-formadora, na linha 47 do Quadro 23, realizou uma intervenção com o intuito de fazer com que as professoras refletissem em relação à resolução da equação.

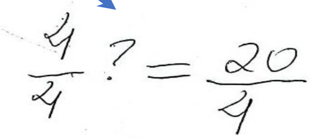
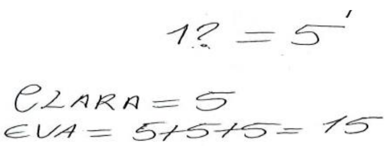
Em seguida, Branca de Neve, na linha 48 do Quadro 23, toma consciência da troca dos símbolos matemáticos que havia realizado e expressou seu equívoco com figuras linguísticas e risos. Logo, a professora apresenta indícios de trabalhar com valores desconhecidos como se eles fossem conhecidos, sobretudo quando afirma na linha 48 que: *"então a gente soma as interrogações gerando 4 interrogações dessas, que é igual a 20"*, admitindo a soma das incógnitas (ou valores desconhecidos), isto é, das interrogações.

Durante a discussão, a pesquisadora-formadora, ao abordar a soma das incógnitas com um tom interrogativo, tentou envolver as outras docentes na proposta apresentada por Branca de Neve, conforme evidenciado na linha 55 do Quadro 23. A professora Moana expressou sua compreensão sobre a ideia de Branca de Neve de somar os valores desconhecidos, ou seja, somar as interrogações. A professora agiu com o valor desconhecido (interrogações) como se fosse conhecido, utilizando uma das premissas da analiticidade, que segundo Radford (2021) caracteriza o pensamento algébrico.

No último quadro, o Quadro 24, as discussões foram referentes ao impasse de sugestões, quando as professoras e a pesquisadora-formadora depararam-se com outra forma algébrica, a divisão em partes iguais, para resolver equações lineares com quantidades positivas, relacionadas ao problema 4, do tipo partilha.

Quadro 24 - Transcrição e observações dos momentos salientes 16

Nº da linha	Transcrição: F3, P4, G2, V13, t: 0: 01–3: 49	**Observações**
1	**Branca de Neve**: agora vamos ter que dividir? Por que 4 é igual a 20? Meu Jesus!	A professora Branca de Neve, confusa, se assusta ao perceber a dificuldade da questão.
18	**Formadora**: mas, e agora? Vamos olhar aqui o sinal de igual com muito carinho. Vamos lá! Olha, olha para o sinal de igual. Ele está dizendo que 4 interrogações é igual a 20?  Foto 37	
22	**Formadora**: então, queremos descobrir o valor de quem?	A formadora questiona as professoras para que, juntas, reflitam a respeito do indeterminado.
23	**Branca de Neve**: da interrogação.	
25	**Merida**: somente ela, então temos que fazer o quê? O que eu faço aqui para tirar esse 4 daqui?  Foto 38	A professora Merida expõe sua dúvida na simplificação da equação no problema de partilha.

28	**Branca de Neve**: vai ter que ser dividido, né?	A professora Branca de Neve sugere a operação de divisão.
29	**Merida**: descer o 20, vai ter que ser, digamos assim, distribuído em partes iguais. Agora, dividido, distribuído, é.  Foto 39	Referindo-se, com as mãos, à divisão do 20 em 4 partes iguais
31	**Branca de Neve**: no caso, no caso… dividimos por 4.	
35	**Branca de Neve**: e aqui também desse lado, podemos fazer o mesmo. Para ficar só com uma, ficar só com a interrogação!	Branca de Neve explicando sua ideia de como simplificar a equação
56	**Merida**: AH! Dividindo 20 por 4! Eu boto em baixo. Boto? Se fizer de um lado tenho que fazer do outro!  Foto 40  Desenho 20	Preferiram a divisão representada com o traço de fração e a afirmação da professora a respeito do sinal de igual.
64	**Branca de Neve**: temos 20, então é do 20 dividido por 4 que vai dar 5! Uhum!!!  Desenho 21	As professoras optaram por demonstrar o resultado da equação estabelecendo a quantidade de canetinhas de Clara e de Ana.

Fonte: Dados da pesquisa

Na linha 1 do Quadro 24, a professora Branca de Neve se assusta ao ver a equação em que ela e as outras professoras conseguiram escrever no Sistema Semiótico Alfanumérico. No entanto, um problema maior surgiu, pois, a regra de retirada de *N* canetinhas não poderia ser utilizada nesse contexto. Assim, uma nova operação matemática, que elas denominaram por distribuir, apareceu a partir do momento que se depararam com a equação 4? = 20. Dessa maneira, seria necessária a representação de um signo que expressasse a ideia de distribuir, no SSA. As professoras optaram pelo símbolo de fração e, na linha 29 do quadro 24, a professora Merida explica a ideia dizendo que devemos descer o 20, ou melhor, distribuir o 20 em partes iguais.

De acordo com Radford (2022), Merida, Moana e Branca de Neve estavam, agora, diante de mais uma regra de simplificação de equações lineares com quantidades positivas, quais fossem conhecidas ou desconhecidas. As primeiras regras foram baseadas na retirada de quantidades iguais (determinadas e indeterminadas) de ambos os lados de uma igualdade. Enquanto a nova regra, que emergiu na resolução da equação 4? = 20, envolve a simplificação do valor desconhecido por meio de uma distribuição igual (divisão) de espécies diferentes. Essa regra surgiu em resposta ao questionamento da pesquisadora-formadora, na linha 22 do quadro 24, em que fala: *"E queremos descobrir o valor de quem?",* na intenção de isolar o indeterminado (estojo).

As participantes da pesquisa e a pesquisadora-formadora exploraram outra abordagem algébrica para resolver equações lineares com quantidades positivas, principalmente nos problemas de partilha. Nesse caso, utilizaram fração (desenho 20) como um signo representativo da operação de divisão. Isso permitiu a simplificação da equação, a identificação do indeterminado e a determinação da quantidade de canetinhas de Clara e de Ana, como podemos verificar no desenho 21.

6.4 PROCESSO FORMATIVO 4: elaborando problemas e expressando ideias na resolução de equações do tipo X + A = B

As análises desse encontro foram realizadas a partir de uma investigação semiótica multimodal em torno dos signos, da linguagem, dos artefatos e, sobretudo, do corpo (os gestos, a fala e as ações). Esses elementos corporais, de acordo com Radford (2021) são cruciais no desdobramento da atividade de ensino aprendizagem. Por meio deles, as professoras e a pesquisadora-formadora conseguem identificar o surgimento gradativo do modo de perceber, intuir e pensar em equações como um significado emergente no âmbito desse contexto. Sendo que as ações corporais citadas não são consideradas meros mediadores.

Ao início do encontro, a pesquisadora-formadora reuniu-se com as professoras para realizar a tarefa inicial. Nesse encontro teve a ausência de uma das 6 professoras, a Bela, que não pôde participar por problemas pessoais. Assim, dando seguimento com as representantes presentes, elas se dividiram em dois grupos. Os grupos foram nomeados de grupo 1, com as professoras Merida, Rapunzel e Branca de Neve e de grupo 2, com as professoras Moana e Cinderela. A pesquisadora-formadora convidou as professoras em seus respectivos grupos a elaborarem um problema por grupo, que foram denominados de problema A (grupo 1) e problema B (grupo 2), semelhantes aos vistos no segundo e no terceiro dia do processo formativo.

Após o convite e a explicação da tarefa, os grupos optaram por elaborar os problemas que poderiam ser resolvidos por equações do tipo X + A = B, semelhantes ao problema 1, resolvido pelas professoras no segundo dia do processo formativo. Durante a atividade, as professoras e a pesquisadora-formadora interagiram de forma colaborativa a respeito do contexto dos problemas, a forma de escrevê-los e a resolução das equações provenientes desses problemas.

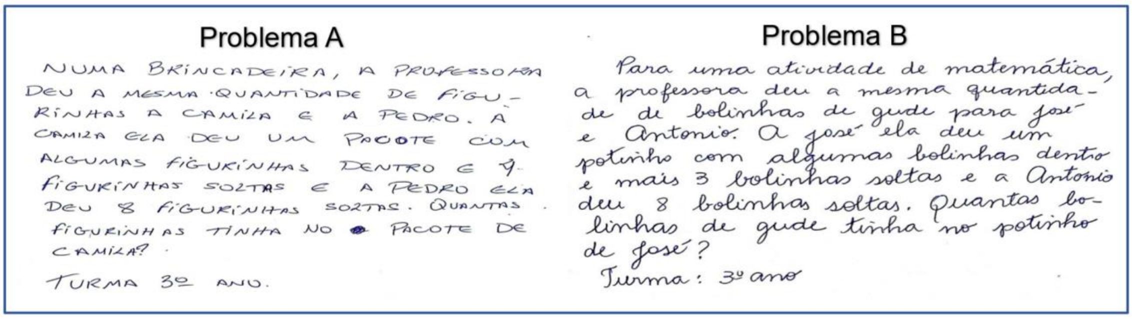
A todo momento, a pesquisadora-formadora estava envolvida nos pequenos grupos. Segundo Radford (2022), esse fator pode explicar a imersão das professoras na atividade, como pode ser observado na figura 05, ao notar a atenção e a concentração das professoras na hora da escuta. No entanto, percebemos a professora Merida passando a mão na testa, indicando que já estava articulando ideias de elaboração do problema. Branca de Neve também, quando demonstra um semblante sério e a cabeça virada levemente para o lado.

Figura 05 - Apresentação da tarefa

Fonte: Dados da pesquisa

Durante a elaboração dos problemas A e B, pelos respectivos grupos, as professoras do grupo 1 e 2 estavam bastante concentradas e empenhadas na elaboração dos problemas e em tom baixo, conversavam e articulavam bastante. A pesquisadora-formadora ficava transitando entre os grupos e interagindo com as professoras a respeito do contexto e da linguagem utilizada para a elaboração dos problemas. A seguir na figura 06, temos os problemas A e B, elaborados pelas professoras dos grupos 1 e 2, respectivamente.

Figura 06- Problemas A e B


Problema A

NUMA BRINCADEIRA, A PROFESSORA DEU A MESMA QUANTIDADE DE FIGU- RINHAS A CAMILA E A PEDRO. A CAMILA ELA DEU UM PACOTE COM ALGUMAS FIGURINHAS DENTRO E 4 FIGURINHAS SOLTAS E A PEDRO ELA DEU 8 FIGURINHAS SOLTAS. QUANTAS FIGURINHAS TINHA NO PACOTE DE CAMILA?

TURMA 3º ANO.

Problema B

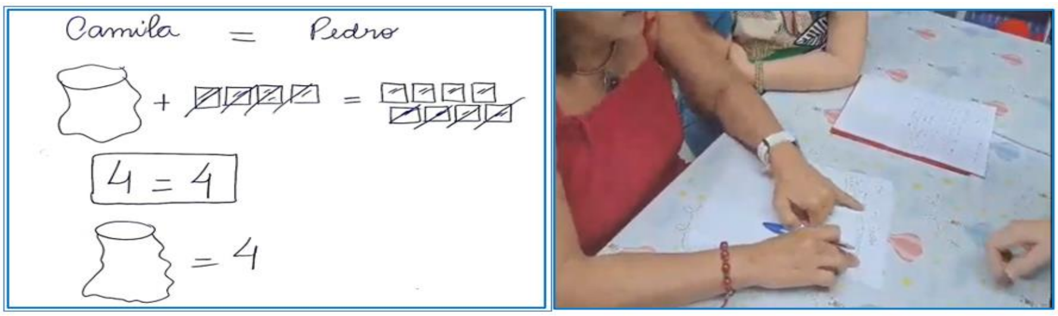
Para uma atividade de matemática, a professora deu a mesma quantida- de de bolinhas de gude para José e Antonio. A José ela deu um potinho com algumas bolinhas dentro e mais 3 bolinhas soltas e a Antonio deu 8 bolinhas soltas. Quantas bo- linhas de gude tinha no potinho de José?

Turma: 3º ano

Fonte: Dados da pesquisa

Após a elaboração dos problemas A e B, foi solicitado pela pesquisadora-formadora que os problemas fossem trocados para que cada grupo resolvesse o problema elaborado pelo outro grupo. Também foi solicitado que os grupos resolvessem os problemas utilizando primeiro o sistema semiótico icônico e depois o sistema semiótico alfanumérico, ou seja, seguindo a mesma forma de resolução do problema 1, resolvidos por elas no segundo dia do processo formativo.

Figura 07: Resolução do problema A pelo SSI - grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa

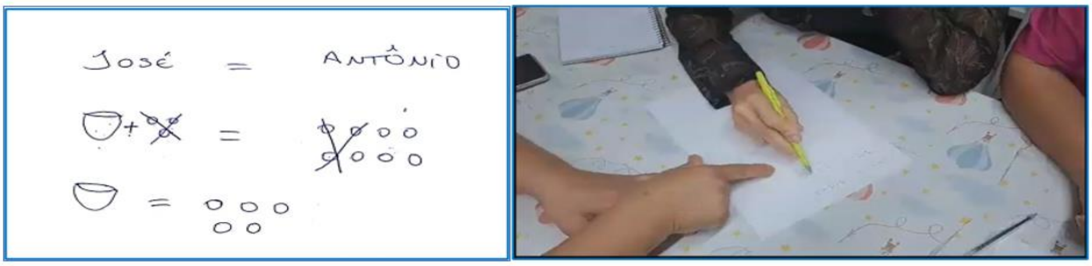
É possível verificar na Figura 07, professora Moana, através dos gestos com as mãos, explicando o processo de resolução, em que com um dedo mostra um dos membros da equação e com o outro dedo o outro membro. Esse gesto aponta que a professora reconhece a igualdade de forma relacional. As outras professoras acompanham esse movimento atentas e participativas. Na mesma figura, observamos a resolução do Problema A utilizando o sistema semiótico icônico, em que as professoras partiram para a retirada de N figurinhas, usando a regra estabelecida na resolução dos problemas 1, 2 e 3 resolvidos anteriormente no segundo e terceiro dia do processo formativo. Essa retirada é evidenciada com o traço diagonal que indica a remoção dos objetos de quantidade determinada, simplificando a equação traduzida por elas para resolver o problema A.

Figura 08: Resolução do problema A pelo SSA - grupo 1

Fonte: Dados da pesquisa

O Problema A também foi resolvido pelo grupo 1, utilizando outro sistema semiótico, o sistema semiótico alfanumérico, como mostra a Figura 08. Pode-se verificar as mãos de duas professoras no processo de resolução de forma colaborativa, ou seja, de forma ética. Elas se relacionavam respeitosamente a fim de simplificar a equação e encontrar a solução do problema. Radford (2021), afirma que existe uma ética na forma como o saber é legitimado, sobretudo em alguns procedimentos de investigação, comprovação e solução de problema, os quais são destacados, preferidos, em detrimento de outros procedimentos.

Figura 09: Resolução do problema B pelo SSI - grupo 2

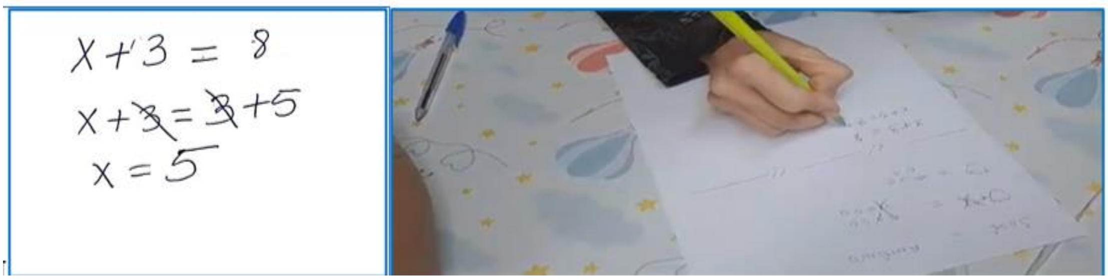


Fonte: Dados da pesquisa

De forma semelhante ao grupo 1, as professoras do grupo 2 utilizaram o sistema semiótico icônico para resolver o Problema B. A Figura 09, mostra a mão da professora Merida escrevendo a resolução do problema, enquanto a professora Cinderela apontava com o dedo indicador, se referindo a retirada das três bolinhas de gude de ambos os lados da equação. As professoras do grupo 2 demonstraram pensar de forma analítica, quando optaram por retirar as três bolinhas de gude de uma só vez.

A aplicação de regras algébricas que envolvem a retirada de quantidades específicas de ambos os lados de uma igualdade, conforme descrito por Radford (2022), proporciona a possibilidade de isolar o desconhecido e determinar, consequentemente, o seu valor. No caso do problema elaborado pelas professoras, isso se relaciona com a quantidade de bolinhas de gude de dentro do pote. Essas ações são executadas por meio de um pensamento analítico, o que indica haver indícios de pensamento algébrico.

Figura 10: Resolução do problema B pelo SSA - grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa

Na resolução do Problema B que foi utilizado o sistema semiótico alfanumérico, como ilustrada na Figura 10, as professoras do Grupo 2 seguiram o mesmo raciocínio realizado com os desenhos. Dessa maneira, elas retiraram o numeral 3 que representa a quantidade determinada de bolinhas de gude, usando a operação de subtração, eliminando, assim, as três bolinhas no primeiro membro da equação e as outras três bolinhas no segundo membro, conseguindo isolar o indeterminado.

Entretanto, um fato diferente ocorreu na resolução do Problema B. Na Figura 10, observa-se que, na equação x+3=8, as professoras não subtraíram 3 em ambos os membros da igualdade; em vez disso, elas fizeram a decomposição do número 8 (3 + 5), resultando numa outra equação do tipo x+3=3+5.

Possivelmente as professoras compreenderam o sinal de igual de forma relacional e, assim, retiraram 3 bolinhas de gude em ambos os lados da equação. Conseguiram isolar o indeterminado e resolver, sem dificuldades, a quantidade de bolinhas de gude de dentro do saco, sem se apoiar em estratégias aritméticas, assim como fizeram no início do processo formativo

Diante das representações realizadas e da resolução das equações, é possível verificar o processo de objetivação das professoras envolvidas na atividade de ensino-aprendizagem. Corroborando com Radford (2022), compreendemos que as professoras foram, gradualmente, tomando consciência dos conceitos envolvidos, como seus significados culturais e formas de utilização.

Para criar um contexto, as professoras usaram, no Problema A, pacotes de figurinhas e figurinhas soltas e, no Problema B, potinhos de bolas de gude e bolas de gude soltas. Dessa maneira, tanto no Problema A, quanto no Problema B foi solicitado a descoberta do indeterminado, tarefa realizada com êxito, visto que elas conseguiram denotar a indeterminação e encontrar seu valor.

Em outro momento da formação, logo após a resolução dos problemas, as participantes dos grupos 1 e 2 foram convidadas a escreverem um texto em forma de bilhete, explicando como conseguiram resolver os problemas propostos por cada grupo.

Abaixo, na Figura 11, temos o texto escrito pelas professoras do grupo 2, contendo as explicações da resolução do Problema A, elaborado pelas professoras do grupo 1.

Figura 11: Bilhete elaborado pelas professoras do grupo 2

No 1º momento utilizamos desenhos e começamos eliminando as mesmas quantidades de figurinhas de Camila e Pedro para chegarmos a mesma quantidade de ambos.

No 2º momento, usamos o sistema alfanumérico para concluirmos a resolução do problema, ou seja, Camila tem a mesma quantidade de figurinhas de Pedro.

Fonte: Dados da pesquisa

Assim como foi solicitado às professoras do grupo 2, as professoras do grupo 1 também escreveram um texto (figura 12) na forma de bilhete, explicando como conseguiram resolver o problema B, elaborado pelas professoras do grupo 2.

Figura 12: Bilhete elaborado pelas professoras do grupo 1

SABENDO QUE OS PERSONAGENS DO PROBLEMA TÊM A MESMA QUANTIDADE DE BOLAS DE GUDE, FIZEMOS O DESENHO PARA REPRESENTAR AS MESMAS QUANTIDADES. ENTÃO, USAMOS O SÍMBOLO DA IGUALDADE. EM SEGUIDA, ELIMINAMOS A MESMA QUANTIDADE EM AMBOS OS LADOS, CHEGANDO AO RESULTADO DO PROBLEMA.

APÓS A RESOLUÇÃO UTILIZANDO O DESENHO, FIZEMOS O REGISTRO A PARTIR DO CÁLCULO USUAL, QUE NO CASO FOI A EQUAÇÃO DE 1º GRAU.

Fonte: Dados da pesquisa

Nesse ponto do processo formativo, as professoras Merida, Branca de Neve e Moana expressaram, verbalmente, as dificuldades encontradas ao atender à solicitação da pesquisadora-formadora para elaborar os problemas e na escrita da explicação da resolução da equação através dos bilhetes. Segue, abaixo, alguns trechos das falas dessas professoras:

> **1 - Branca de Neve** (Video 3, tempo: 00:00:15 - 00:00:17) - Eu achei que seria fácil elaborar os problemas, mas, não foi, fiquei perdidinha, hummmm...

2 - Merida (vídeo 3, tempo: 00:00:22 - 00:00:53)

Você expressar o seu pensamento em escrita. Eu sempre tive dificuldade porque a gente acha fácil, realmente, a resolução é relativamente fácil.

00:00:33

Mas aí, quando você expõe o seu pensamento em forma de palavras, como você fica naquela, né? naquela dificuldade de achar palavras que se encaixam no texto! E aí você pensa, como é que a outra pessoa vai entender?

00:00:48

Porque é para outra pessoa entender, então você tem que ser o mais claro possível, né?

00:00:52

Para a pessoa entender e dizer: Ah! então esse problema eu sei resolver!

3 - Moana (vídeo 3, tempo: 00:01:23 - 00:01:39)

00:01:23

Que você fez a interpretação é o mais complicado, né? Você interpreta o que o outro tá querendo que você entenda.

00:01:31

Isso para a criança também. A gente tem que sempre tentar fazer um texto ou falar de uma forma que a criança possa compreender o que a gente está querendo.

A elaboração dos problemas, de fato, gerou um desconforto nas professoras, conforme expresso na fala de Branca de Neve, na linha 1, ao afirmar que seria fácil, mas não foi e se sentiu um pouco perdida. Segundo Radford (2022), a ação e o significado de sentidos na resolução de um problema precedem a linguagem até o ponto em que se unem para gerar uma nova unidade psíquica na formação do conceito. A justificativa de Radford (2022) também pode ser percebida na fala da professora Merida, linha 2, quando ela comenta: *"Porque é para outra pessoa entender, então você tem que ser o mais claro possível, né?!"*. Essa responsabilidade de escrever para outra pessoa, possivelmente, aponta a nova unidade psíquica.

No primeiro parágrafo do bilhete elaborado pelas professoras do Grupo 2, elas escreveram de maneira sucinta a regra de retirada de objetos determinados de ambos os lados da igualdade, além de terem falado sobre a quantidade igual das figurinhas de Camila e Pedro, referindo-se a igualdade como equivalência. No segundo parágrafo, no qual elas chamaram de momento, foram ainda mais cautelosas ao expressarem a resolução pelo SSA e estabelecer a igualdade entre as partes equacionadas, no entanto, não deixaram claro o valor do indeterminado, isto é, o valor do pacote de figurinhas.

Entretanto, no bilhete elaborado pelas professoras do Grupo 1, elas organizaram as ideias a partir da quantidade de bolas de gude que as personagens do problema possuíam. Dessa forma, explicitaram que resolveram pelo SSI e deixaram claro a representação do sinal de igual. Além disso, as professoras desse grupo explicaram a regra de retirada de *N* objetos de quantidade determinada de ambos os lados da igualdade, como forma de simplificar a equação e, consequentemente, descobrir o valor do indeterminado. Para concluir o bilhete, elas usaram a seguinte frase: *"Fizemos o registro a partir do cálculo usual, ou seja, a equação do 1º grau".* Ou seja, essa foi a forma que encontraram de explicar que também resolveram o problema pelo sistema semiótico alfanumérico.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a inserção da álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental, Radford e Moretti (2021), afirmam que é um grande desafio para a maioria dos professores polivalentes do Ensino Fundamental incorporar o pensamento algébrico em suas práticas pedagógicas. Corroborando com essa ideia, alguns autores (Ribeiro; Ribeiro, 2016; Santos; Moreira, 2016; Freire, 2011; Baldin, 2018; Nacarato; Mengali; Passos, 2009) apontam dificuldades relevantes enfrentadas pelos docentes dos anos iniciais em suas práticas pedagógicas.

Nesse contexto, foram analisados os indícios do pensamento algébrico que emergiram em uma atividade de ensino-aprendizagem durante um processo formativo, envolvendo 6 professoras que ensinam matemática para crianças do 1º ano ao 5º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental na rede pública municipal de Recife, Pernambuco.

No primeiro encontro, as professoras e a pesquisadora-formadora se envolveram em discussões referentes às suas práticas pedagógicas, expressando suas angústias e receios relacionados à matemática. Os segundo e terceiro dias, concentraram-se na resolução de problemas referentes às relações de igualdade e a simplificação de equações. Já no quarto e último dia, as professoras elaboraram problemas, que poderiam ser resolvidos por equações do tipo $X + A = B$ e produziram textos em forma de bilhete, explicando a forma de resolução dos problemas.

Corroborando com as ideias de Radford (2021), os processos de objetivação ocorrem em atividades que proporcionam encontros sensíveis e críticos com o saber. Durante o segundo e o terceiro dia do processo formativo, as seis professoras e a pesquisadora-formadora tiveram a oportunidade, de forma colaborativa, de resolverem uma sequência de tarefas composta por 4 problemas elaborados em ordem crescente de complexidade. Essa atividade ofereceu a oportunidade de compreensão do sinal de igualdade de maneira relacional, a simplificação de equações e, consequentemente, sua resolução. Logo, a principal questão metodológica envolveu o contexto dos problemas, a complexidade em ordem crescente, sua apresentação e a escolha dos sistemas semióticos para a resolução.

Ademais, foram traçados como um dos objetivos específicos de pesquisa, analisar os vetores (denotação, indeterminação e analiticidade) que, segundo Radford (2021), caracterizam o pensamento algébrico. A analiticidade, principal vetor, é alcançada por meio de deduções e utilização de premissas indicando que pensamos algebricamente; isso ocorre quando a generalização algébrica é alcançada pela analiticidade, na qual valores desconhecidos são tratados como se fossem conhecidos. Enquanto a generalização algébrica pode se manifestar de diversas maneiras envolvendo diversos meios semióticos. No caso da presente pesquisa, foram utilizados dois sistemas semióticos na resolução de 4 problemas: o sistema semiótico icônico (SSI) e o sistema semiótico alfanumérico (SSA).

As análises foram feitas, no primeiro dia, a partir de três momentos. Destaca-se que o segundo momento foi centrado no saber historicamente constituído pelas seis professoras sobre álgebra ou pensamento algébrico. Nesse contexto, foi possível constatar que, pelo menos inicialmente, elas não tinham familiaridade com esse tipo de pensamento e frequentemente o confundiam com o pensamento aritmético. Para as professoras, a resolução de problemas algébricos deveria ocorrer por meio de cálculos mentais ou pela aplicação de algoritmos formais das operações básicas.

Durante o segundo e o terceiro dia do processo formativo, os dados apontaram, segundo Radford (2021a), que a aprendizagem é um processo e, por isso, não acontece repentinamente, muito menos surge de forma natural, como por exemplo, no problema 1, em que as professoras, sobretudo Merida, atribuíram a ideia do sinal de igual, de forma procedimental, ou seja, nos sentidos atribuídos ao utilizar a igualdade como uma inscrição que indica a realização de um cálculo aritmético (Radford, 2022). E, ao longo da atividade de ensino-aprendizagem, foi possível verificar um refinamento na ideia da professora, a ponto do sinal de igual ser visto de forma relacional.

Quanto ao isolar o indeterminado, as professoras, de forma processual e colaborativa, se deram conta de isolar o estojo de Ana (personagem do problema 1), ao falar da retirada, paulatinamente, de quantidades conhecidas em ambos os lados da igualdade. Entretanto, a ideia gerada em um procedimento de isolar o termo desconhecido, denotado pelo estojo, ainda não era configurado que as professoras estavam pensando algebricamente. Mediante a exploração do sinal de igual como alternativa pedagógica na mobilização do saber algébrico, na ocorrência das reflexões verificamos que a professora Moana se referia à resolução mental da equação utilizando o SSA, ou seja, recorria à utilização do pensamento aritmético. De acordo com Radford

(2022), esse entendimento está relacionado com a natureza descontextualizada de atividades de cunho algébrico vivenciadas pela professora Moana.

Verificou-se também que o pensamento analítico emergiu durante a resolução do problema 2, quando se partiu da certeza da retirada de N valores determinados em ambos os lados da equação. E quando as professoras se viram diante do problema que resultou na equação 2X + 2 = X + 7, elas perceberam que a regra instituída de retirar N quantidades determinadas para simplificar equações não era suficiente para resolver esse tipo de situação.

Trabalhando colaborativamente, as professoras e a pesquisadora-formadora, organizaram suas ideias a respeito da resolução de problemas que resultam em equações de forma analítica e dedutiva, apresentando indícios de pensar algebricamente a partir da compreensão do sinal de igual como ideia de equivalência e a simplificação de equações, quando conseguem operar com valores desconhecidos como se fossem conhecidos, concluímos que as professoras mobilizam os três vetores do pensamento algébrico.

Dessa forma, no problema 4, as professoras e a pesquisadora-formadora, refletiram juntas na resolução de um tipo específico de problema, o de partilha. As professoras em consenso optaram por resolver o problema apenas pelo sistema semiótico alfanumérico, e denotaram o indeterminado pelo sinal de interrogação.

Apontamos que na resolução do problema 4, as regras já instituídas de retirada de N quantidades determinadas e N quantidades indeterminadas, não poderiam ser utilizadas neste tipo de problema. Nesse ponto do processo formativo, as professoras perceberam que outra operação deveria ser incorporada na resolução: dividir em partes iguais para resolver equações lineares com quantidades positivas, a nova regra apareceu na resolução da equação 4? = 20.

A nova regra instituída deu conta de resolver o problema 4, e dessa forma, as professoras entraram em contato com outra forma algébrica de resolver equações lineares com quantidades positivas, no âmbito dos problemas de partilha, utilizando o traço de fração (Ver desenho 10 do quadro 9) como um signo que representasse a operação de divisão.

Os dados apontaram, no último dia do processo formativo, para uma complexidade de pensar dedutivamente, mesmo com professoras letradas e experientes. Observamos que os elementos do pensamento algébrico, como a indeterminação, denotação e analiticidade, surgiram e foram sendo refinados gradualmente ao longo das atividades no processo formativo. A interação progressiva com as regras para simplificação de equações, por exemplo, que interpretamos como um pertencimento do processo de generalização e, consequentemente, um indicativo de pensamento analítico, foi constantemente revisitada e reconsiderada durante as atividades com a utilização dos sistemas semióticos icônicos e alfanuméricos.

Mesmo sendo o processo de pensar dedutivamente carregado de complexidade, os encontros no âmbito do processo formativo foram agradáveis e alegres. Risos e gargalhadas permearam toda a experiência, assim como o respeito mútuo entre as professoras e a pesquisadora-formadora em relação às atitudes positivas e engajamento. Sobretudo, houve respeito pelas falas umas das outras, demonstrando que, para a Teoria da Objetivação (TO), os processos de objetivação e subjetivação são intrinsecamente entrelaçados (Radford, 2021).

Em relação às limitações identificadas ao longo dessa pesquisa, pode-se apontar a dificuldade de encaixar os horários dos encontros formativos com o calendário da escola, onde a pesquisa foi realizada. Ainda é salientado que o houve uso de celulares convencionais para registrar as gravações de vídeos e áudios, porém a adoção e disponibilidade de equipamentos mais sofisticados poderiam registar melhor os momentos do processo formativo.

Portanto, espera-se que essa pesquisa contribua positivamente na formação de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. E que tais professores possam ter um olhar diferenciado na forma como entendem as relações de igualdade de uma equação e possibilitem a criação de tarefas voltadas ao pensamento algébrico em suas práticas pedagógicas.

É possível frisar que a investigação possa ter mais desdobramentos em futuras pesquisas, assim como, novas formações com um quantitativo e variedade maior de tarefas e de professoras, que possam expressar a forma como o pensamento algébrico se atualiza e se refina focando não apenas nos processos de objetivação, mas também nos de subjetivação, visto que o objetivo desta pesquisa se deu apenas nos processos de objetivação.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento de pensamento algébrico**: um modelo para problemas de partilha de quantidade. 2016. 200 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016.

ALMEIDA, J. R.; SANTOS, M. C. Pensamento algébrico: em busca de uma definição. **RIPEM**, Campo Mourão, v. 6, n. 10, p.34-60, [?]. 2017.

ALMEIDA, J. R.: MARTINS, J. Labor Conjunto Remoto: uma proposta metodológica para formação continuada de professores que ensinam matemática. **RIPEM**, [?], v. 12, n.3, p. 106-124, [?] 2022.

BALDIN, Y. Y. Desenvolvimento do Pensamento Algébrico no Currículo de Escola Básica: Caso de modelagem pictórica da Matemática de Singapura. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, Costa Rica, v. 13, n. 17, p. 31-44, [?], 2018.

BODGAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: Fundamentos, métodos e técnicas. [?]. Portugal: Porto Editora, 1994, 335 p.

BRASIL. [Ministério da Educação (Secretaria de Educação Básica)]. **Elementos Conceituais e Metodológicos para Definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo Básico de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental**. Brasília, DF: MEC, 2012. 136 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/docman/?task=doc_download&gid=>. Acesso em: jun, 2022).

BRASIL. [Ministério da Educação (Secretaria da Educação Básica)]. **Base Nacional Comum Curricular:** educação é base. Brasília, DF: MEC, 2017. 599 p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acessado em: abr, 2022.

BRASIL. [Ministério da Educação (Secretaria da Educação Fundamental)]. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2022.

BRASIL. [Ministério da Educação (Secretaria da Educação Básica)]. **Orientações gerais**: Catálogo. Rede Nacional de Formação Continuada de Professores de Educação Básica. Brasília, DF: MEC, 2005. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Rede/catalg_rede_06.pdf>. Acesso em 02 jan. 2023.

BRASIL. Lei n° 13.005, de 25 de junho de 2014. Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE e dá outras providências. **Câmara dos deputados**: Brasília, DF, 25. Jun. 2014.

BRASIL. Resolução nº 2, de 20 de dezembro de 2019. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação). **Conselho Nacional de Educação - CNE**, Brasília, Seção 1, pp. 46-49. 2019. Disponível em: https://normativasconselhos.mec.gov.br/normativa/view/CNE_RES_CNECPN22019.pdf. Acesso em: 14 set. 2023.

Cavalcanti, J. D. B.; Santos, M. C. A saga do sinal de igualdade: mais de 450 anos de história. **Educação Matemática em Revista**, v. 13, n. 25, p. 33-36, 2008.

D'AMORE, B.; RADFORD, L.; BAGNI, G. T. Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática. *In*: D'AMORE, B; RADFORD, L. (Org.). **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos**. Bogotá: Editorial UD, 2017, [?], p. 167-194.

FERREIRA, M. C. N.; RIBEIRO, A. J.; RIBEIRO, C. M. Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: primeiras reflexões à luz de uma revisão de literatura. **Educação e Fronteiras On-Line**, Dourados, v. 6, n. 17, p. 34-47, maio/ago. 2016.

FILLOY, E., ROJANO, T. Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. **For the Learning of Mathematics**, Montreal, v. 9, n. 2, p. 19-25, jun., 1989. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/40247950. Acessado em: 16 ago. 2023.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Revista Zetetiké**, v. 3, n. 1, p. 1-31, 1995.

FREIRE, R. S. **Desenvolvimento de Conceitos Algébricos por Professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.** 2011. 181 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação brasileira, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011. Disponível em: <http://repositorio.ufc.br/handle/riufc/3304>. Acesso em: jul, 2022

GATTI, B. A. Análise das políticas públicas para formação continuada no Brasil, na última década. **Revista Brasileira de Educação**, v. 13, n.37, p. 57-186, jan./abr. 2008.

GOBARA, S. T.; RADFORD, L. (org.) **Teoria da Objetivação**: fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática. 1 ed. São Paulo: Livraria da física, 2020, 293 p.

GOMES, L. P. da S. **Introdução à álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental**: uma análise a partir da Teoria da Objetivação. 2020. 180f. Tese (Doutorado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2020.

GOMES, L. P. da S.; PAIVA, J. P. A. A.; NORONHA, C. A. Mapeamento investigativo acerca da Teoria Cultural da Objetivação no Brasil. *In*: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2018, Belém. **Anais [...].** Belém: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional

Pará, 2018. [?]. Disponível em: <http://sipemat2018.sbempara.com.br/> Acesso em: 20 jan 2019.

JUNGBLUTH, A. **Álgebra no Currículo de Matemática dos Anos Iniciais: e agora?** 2020. 204 p. Dissertação (Programa de pós-graduação em educação cientifica e tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/216632. Acessado em: 18 jun. 2023.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o Século XXI**. 4. ed. Campinas: Papirus, 1997. 176 p.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação:** Abordagens qualitativas. São Paulo, EPU. 1986.

MORETTI, V. D.; CEDRO, W. L. (org.). **Educação matemática e a teoria histórico-cultural: um olhar sobre as pesquisas**. 1. ed. Campinas: Mercado de Letras, 2017. 389 p.

MORETTI, V. D. **Professores de matemática em atividade de ensino**: uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente. 2007. 206 f. Tese (Doutorado em Educação: Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

MORETTI, V. D.; RADFORD, L. **Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais:** FDiálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural/organização. [?]. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021, 316 p.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender. **Autêntica**, Belo Horizonte, v. 28, n. 48, p. 482-484, abr. 2014

OLIVEIRA, Z. H. R. **Formação Continuada de Professores dos anos Iniciais do Ensino Fundamental no Contexto Remoto:** um Olhar para Processos de Objetivação em Tarefas de Generalizações de Padrões. 2022. 103 f. Dissertação (Programa de pós-graduação em ensino das ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

PACHECO, M. B.; ANDREIS, G. S. L. Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio. **Revista Principia**, João Pessoa, v. [?], n. 38, p. 105-119, 2018.

PERNAMBUCO. [Secretaria de Educação]. **Currículo de Pernambuco**: Ensino fundamental, área das ciências humanas e área de ensino religioso. Pernambuco,2018. 612 f. Disponível em: <https://www.afogadosdaingazeira.pe.gov.br/selecao-simplificada/CURRICULO-DE-PERNAMBUCO-ENSINO-FUNDAMENTAL.pdf> Acessado em: 4 jul. 2022

PONTE, J. P.; BRANCO, N. Pensamento algébrico na formação inicial de professores. **Educar em Revista**, Curitiba, v. [?], n. 50, p. 135-155, out./dez. 2013. Disponível em:

<https://www.scielo.br/j/er/a/CHPNjrWVNDpS7LnzZ3THm6C/?format=pdf&lang=pt> Acessado em: 13 mai. 2023.

RADFORD, Luis. The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. **Mathematics Education Research Journal**, v. 26, n. [?], p. 257-277, nov. 2014. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/261014764_The_Progressive_Development_of_Early_Embodied_Algebraic_Thinking> Acesso em: 11 nov. 2023

RADFORD, L. Towards a cultural theory of learning [conference]. In: PITTA-PANTAZI, D.; PHILIPPOU, G. (Orgs.), Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. CERME – 5. Larnaca, Grécia, p. 1782-1797, 2007.

RADFORD, L. Introducing equations in early algebra. **ZDM–Mathematics Education,** v. 54, n. 6, p. 1151-1167, 2022.

MORETTI, V. D.; RADFORD, L. Abordagem histórico-dialética dos conceitos na organização do ensino da matemática. **Educ. Pesqui.**, São Paulo, v. 49, n. e252104, p. 1-16, 2023.

RADFORD, L. Methodological aspects of the theory of objectification. **Perspectivas da Educação Matemática – UFMS**, v. 8, n. temático – 2015.

RADFORD, L. A teoria da Objetivação e Seu Lugar na Pesquisa Sociocultural em Educação Matemática. *In*: MORETTI, V. D; CEDRO, W. L. (org.) **Educação Matemática e a Teoria Histórico-cultural**: Um olhar sobre as pesquisas. Campinas: Mercado das letras, 2017.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. *In*: North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education – PME, 28., 2006. **Anais [...].** Bergen University College. 2006. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/239933692_Algebraic_thinking_and_the_generalization_of_patterns_A_semiotic_perspective> Acessado em: 04 abr. 2023

RADFORD, L. The Cultural – Epistemological Conditions of the Emergence of Algebraic Symbolism. *In*: F. Furringhetti, S. Kaijser & C. Tzanakis (Eds.), **Proceedings of the 2004 History and Pedagogy of Mathematics Conference & ESU4**, Uppsala, Sweden, p. 509-524 (Plenary Lecture). 2006.

RADFORD, L. Un recorrido através de la teoría de la objetivación. In: GOBARA, S. T.; RADFORD, L. **Teoria da Objetivação**: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática. São Paulo: Editora livraria da física, cap. 1, p. 15-42, 2020.

RADFORD, L. Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. **Research in Mathematics Education**, v. 12, n. 1, Mar. 2010, p. 1-19

RADFORD, L. O Ensino-Aprendizagem da Álgebra na Teoria da Objetivação. *In*: MORETTI, V. D.; RADFORD, L. (Eds.) **Pensamento algébrico nos anos iniciais**: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural. São Paulo: Livraria da Física, 2021. cap. 7, p. 171-195.

RADFORD, L. Aspectos Conceituais e Práticos da Teoria da Objetivação. *In*: MORETTI, V. D.; RADFORD, L. (org.). **Pensamento algébrico nos anos iniciais**: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural. São Paulo: Livraria da Física, 2021, cap. 1, p. 35-56.

RADFORD, L. SABENA, C. The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. *In*: BIKNER-AHSBHAS, A.; KNIPPING, C.; PREMEG, N. (org.). **Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education**. New York: Springer, 2015. p. 157-182.

RADFORD, L. Teoria da Objetivação: uma perspectiva Vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática / Luis Radford; tradução de Bernadete B. Morey e Shirley T. Gobara. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021a

RECIFE. [Secretária de educação]. **Matriz Curricular Prioritária da rede municipal do Recife.** Recife: Secretaria de educação, 2022. 24 p.

ROMEIRO, I. O.; MORETTI, V. D. O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico na Formação de Professores dos Anos Iniciais: Contribuições da Teoria da Objetivação. *In*: **Pensamento algébrico nos anos iniciais**: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural. São Paulo: Livraria da Física, 2021. cap. 4, p. 105-129.

ROJAS, P. J.; VERGEL, R. **Álgebra escolar y pensamiento algebraico**: aportes para el trabajo en el aula. 1. ed. Bogotá: Editorial UD, 2018. 120 p.

RIBEIRO, A. J. **A Álgebra Que se aprende e a Álgebra que se Ensina:** Encontros e desencontros na visão dos professores. *In*: Conferência interamericana de educação matemática, 14., 2015, México. **Anais [...].** Chiapas: XIV CIAEM, 2015.

SANTOS, C. C. S.; MOREIRA, K. G. O Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *in*: Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...].** São Paulo: Sociedade brasileira de educação em matemática, 2016. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4980_2866_ID.pdf>. Acesso em: jun, 2023).

TRIVILIN, L. R.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 38-59, abr., 2015.