**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO**
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**
**DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS**
**DOUTORADO DE ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**ROCHELANDE FELIPE RODRIGUES**

# PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA NO CONCEITO DE FUNÇÃO: Analisando o Processo de Ensino e Aprendizagem e as Influências na Formação do Professor de Matemática

**RECIFE**
**2019**

ROCHELANDE FELIPE RODRIGUES

# PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA NO CONCEITO DE FUNÇÃO: Analisando o Processo de Ensino e Aprendizagem e as Influências na Formação do Professor de Matemática

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do título de doutor em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos
Coorientador: Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes

**RECIFE**
**2019**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

R696p Rodrigues, Rochelande Felipe.
Percurso de estudo e pesquisa no conceito de função: analisando o processo de ensino e aprendizagem e as influências na formação do professor de matemática / Rochelande Felipe Rodrigues. – Recife, 2019.
349 f.: il.

Orientador(a): Marcelo Câmara dos Santos.
Coorientador(a): Marcus Bessa de Menezes.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco. Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências e Matemática, Recife, BR-PE, 2019.
Inclui referências e apêndice(s).

1. Teoria antropológica do didático 2. Percurso de estudo e pesquisa 3. Contrato Didático 4. Ciclo de solução de problemas 5. Função I. Santos, Marcelo Câmara dos, orient. II. Menezes, Marcus Bessa de, coorient. III. Título

CDD 370

## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Rochelande Felipe Rodrigues**

**PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA NO CONCEITO DE FUNÇÃO: Analisando o Processo de Ensino e Aprendizagem e as Influências na Formação do Professor de Matemática**

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos
Co-orientador: Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes
Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE
Defendida em 28 de Agosto de 2019.

**Banca Examinadora**

_______________________________________
Marcelo **CÂMARA DOS SANTOS**
Presidente/ 1ª Examinador interno/ Orientador
Instituição: Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

_______________________________________
Marcus Bessa de **MENEZES**
2ª Examinador interno/ Co-orientador
Instituição: Universidade Federal de Campina Grande – UFCG

_______________________________________
Anna Paula de Avelar **BRITO LIMA**
Presidente/ 3ª Examinadora interna
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

_______________________________________
Jadilson Ramos de **ALMEIDA**
4ª Examinador Interno
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

_______________________________________
Paula Moreira Baltar **BELLEMAIN**
5ª Examinadora Externa
Instituição: Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

_______________________________________
Catarina Oliveira **LUCAS**
6ª Examinadora Externa
Instituição: Universidade do Porto - UP

*Dedico este trabalho a todos que contribuíram diretamente e indiretamente para a sua conclusão, em especial à minha esposa Marly e aos meus filhos Samanta e Felipe.*

# AGRADECIMENTOS

Depois de muitos desafios e conquistas durante o estudo, pesquisa e registro desse trabalho, destaco alguns agradecimento a serem feitos, mas não esquecendo que esse trabalho é um conjunto de inúmeras pessoas que contribuíram de forma direta e indireta. Deixo os meus sinceros agradecimentos para:

A toda a minha família, mãe, irmãs, irmãos, esposa, filhos, tias, tios, primos, primas, sobrinhos e sobrinhas, que ajudaram de alguma forma nesse processo, com destaque para a minha mãe Alaide e o meu falecido pai João de Deus, que proporcionou-me ter uma educação;

A minha esposa Marly que me apoiou nos diversos momentos da pesquisa e aos meus filhos gêmeos, Samanta e Felipe, que me fez compreender o principal motivo de continuar estudando continuamente;

Ao meu orientador Marcelo Câmara dos Santos, que acreditou e confiou na proposta da pesquisa, realizando orientações diretas e precisas, proporcionando momentos de aprendizagem e de crescimento profissional;

Ao meu coorientador Marcus Bessa de Menezes, que orientou com entusiasmo e disposição, no qual durante esse processo os laços de amizade foram fortalecidos e fundamentados;

Aos grandes amigos de graduação Alysson, Joelson e Aroldo que contribuíram de forma direta para a realização do trabalho;

Aos grandes amigos Fernando Emílio e Zé Luiz responsáveis por muitos momentos de alegria, força, amizade, reflexões teóricas, proposições e ideias durante essa jornada, nos quais são amigos que conquistei deste a trajetória do mestrado;

Aos amigos do doutorado Michelle, Maurílio, Patrícia, Renata, Paula, José Luís, Simone e Bárbara que foram importantes para a construção das minhas ideias através de suas colocações nas aulas, com destaque para Michelle, Bárbara e Zé Luiz, nos quais os laços de amizades foram fortalecidos no percurso do doutorado;

As professoras Rogéria e Josinalva, que foram de extrema importância para a minha formação, me orientando na graduação e no mestrado na área da Educação Matemática;

As professoras Anna Paula, Monica Lins e Jadilson que contribuíram de forma importante para a construção das ideias iniciais e da tese;

A professora Paula Baltar, que de forma elegante e direta apontou questões pertinentes para a nossa pesquisa, contribuindo de maneira precisa na construção das ideias;

Destaco a dedicação e a atenção da professora Catarina Lucas, que me recebeu em Portugal, contribuindo de forma essencial e fundamentada, trazendo elementos que enriqueceram a tese;

A professora São Luís, que me recebeu de forma receptiva em Portugal e orientou-me nas questões relacionadas a Psicologia Cognitiva;

A todos os professores do programa de Ensino das Ciências que apoiaram e contribuíram de forma valiosa para a minha formação, principalmente os que fizeram e fazem parte da coordenação;

A Universidade do Porto, especialmente a Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação, que me acolheu e deram toda a assistência para minha permanência e andamento do estudo realizado;

Ao Instituto Federal do Rio Grande do Norte, especificamente ao campus Canguaretama, que na figura dos professores e técnicos me recebeu de forma atenciosa, respeitosa e profissional, possibilitando a concretização da pesquisa;

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), que proporcionou um período de qualificação na Universidade do Porto, no qual foi essencial para a fundamentação da tese.

# RESUMO

A tese teve a finalidade de analisar a aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), um dispositivo didático que pode ser utilizado como metodologia para o ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos nas licenciaturas em Matemática, como também pode atuar na formação inicial e continuada do professor de matemática. O PEP tem seus fundamentos na Didática da Matemática francesa e sua base teórica na Teoria Antropológica do Didático (TAD), tendo Yves Chevallard como o seu principal representante. Também utilizamos a noção de Contrato Didático (CD) de Guy Brousseau, que traz elementos importantes de análise dos encaminhamentos do PEP, ressaltando os contratos estabelecidos, as renegociações, os efeitos e as rupturas de contrato didático no processo. Para complementar as nossas análises no sentido de verificar uma possível aprendizagem proporcionada pelo PEP, utilizamos o Ciclo de Solução de Problemas (CSP) abordado pela Psicologia Cognitiva, identificando a evolução dos passos e os possíveis insights. A proposta de aplicação do PEP foi por meio do conteúdo de função, um importante conteúdo da Educação Básica e da Educação Superior. A nossa pesquisa apresenta alguns pontos de ligação entre o CD e o PEP e, consequentemente, com o CSP, que podem identificar alguns avanços e dificuldades na implementação do dispositivo didático, principalmente na mudança do contrato didático já estabelecido para um novo contrato didático. Portanto, com a TAD e o CD verificando as questões relacionadas ao ensino apoiado pelo CSP, que pode nos dar indícios de aprendizagem do conceito de função na aplicação do PEP, observando também a sua influência na formação do professor de matemática. Como resultados, observamos que o PEP promove uma mudança na praxeologia dos alunos e na do professor, ao mesmo tempo em que influencia as práticas de ensino utilizadas pelo professor, promovendo a sua formação profissional.



## Palavras-chave

Teoria Antropológica do Didático; Percurso de Estudo e Pesquisa; Contrato Didático; Ciclo de Solução de Problemas; Função.

# ABSTRACT

The purpose of this thesis was to analyze the application of the Study and Research Path (SRP), a didactic device that can be used as a methodology for the teaching and learning of mathematical concepts in undergraduate mathematics, such as can also work in the initial and continuing education of the Math teacher. The (SRP) has its bases in the French Mathematics Didactics and its theoretical basis in Anthropological Theory of Didactics (ATD), with Yves Chevallard as its main representative. We also use the notion of Didactic Contract (CD) of Guy Brousseau, which brings important elements of the analysis of the SRP directions, highlighting the established contracts, the renegotiations, the effects and disruptions of the didactic contract in the process. To complement our analysis and verify a possible learning provided by SRP, we use the Cycle of Solutions of Problems (CSP) approached by the Cognitive Psychology, identifying the steps of the evolution and the possible insights. The proposed implementation of the SRP was by the function content, an important content of the Basic Education and College Education. Our research presents some points of connection between the DC and the SRP, and, consequently, with the CSP, which may identify some advances and difficulties in the implementation of the didactic device, especially in the change from the didactic contract already established to a new didactic. Therefore, with the ATD and the DC checking the questions related to the teaching supported by the CSP, which can give us clues of the learning about the concept of function in the application of SRP, noting also its influence on the formation of the Mathematics teacher. As results, we observed that the CSP promotes a change in the praxeology of the students and teachers, while influencing the teaching practices used by the teacher, promoting their professional training.



**Keywords**: Anthropological Theory of Didactics; Course of Study and Research; Didactic Contract; Cycle of Solutions of problems. Function.

# RÉSUMÉ

La thèse a eu pour objectif d'analiser l'aplication du *parcours d'étude et de recherche* (PER), un dispositif didactique qui peut être utilisé comme méthode pour l'enseignement et l'apprentissage des notions mathématiques en Licence en Mathématiques, ainsi que dans la formation initiale et supplémentaire du professeur de mathématiques. Le PER a ses fondements dans la didactique des mathématiques française et sa base théorique dans la théorie anthropologique du didactique (TAD), ayant Yves Chevallard comme son principal représentant. Nous utilisons aussi la notion de contrat didactique (CD) de Guy Brousseau, qui nous apporte des éléments importants d'analyse des applications du PER, mettant en évidence les contrats établis, les renégociations, les effets et les ruptures de contrat didactique dans le processus. Pour compléter nos analyses dans le sens de vérifier une possible apprentissage fournie par PER, nous utilisons le cycle de solution de problèmes (CSP) traité par la psychologie cognitive, en identifiant l'évolution des étapes et les possibles *insights*. La proposition de l'application du PER a été grâce au contenu de fonction, un important contenu de l'éducation de base et de l'enseignement supérieur. Notre recherche présente quelques points de connexion entre le CD et le PER, et par conséquent, avec le CSP, qui peuvent identifier quelques avances et difficultés dans la mise en œuvre du dispositif didactique, surtout pour le changement du contrat didactique déjà établi par un nouveau contrat didactique. Donc, avec la TAD et le CD constatant les questions liées à l'enseignement soutenu par le CSP, qui peut nous donner des indices d'apprentissage du concept de fonction dans l'application du PER, en observant également son influence dans la formation du professeur de mathématiques. Comme résultats, nous observons que le PER promeut un changement dans la praxéologie des élèves et celle du professeur, en même temps qu'influence les pratiques d'enseignement employées par le professeur, en promouvant sa formation professionnelle.



**Mots-clés**:Théorie Anthropologique du Didactique; Parcours d'Étude et de Recherche; Contrat Didactique; Cycle de Solution de Problèmes; Fonction.

# LISTAS DE ILUSTRAÇÕES

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE QUADROS

## SUMÁRIO

## Introdução

A Matemática é uma área de conhecimento que tem diversas aplicações no seu próprio campo, como também que contribui para o desenvolvimento de outras áreas da ciência, a exemplo da tecnologia das últimas décadas desenvolvida para a construção dos *hardwares* e a elaboração dos *softwares.* A Matemática contribui, ainda, para o estudo do universo, aplicando os conceitos matemáticos para representar as diversas situações físicas, e para a ciência econômica, na elaboração de modelos matemáticos para representar um comportamento atual e prever um comportamento futuro das diversas situações financeiras.

Ao compreendermos essa contribuição para evolução da ciência e para a sociedade, devemos discutir o seu processo de ensino e aprendizagem permanente nas instituições de ensino, no sentido de proporcionar a compreensão de conceitos e aplicações matemáticas nas diversas áreas, bem como no de contribuir para a formação escolar do cidadão e para o uso de conhecimentos da Matemática em situações cotidianas.

Antes de discutimos sobre seu ensino e sua aprendizagem, devemos falar brevemente sobre a finalidade dessa área do saber para a sociedade. Segundo o Dicionário da Língua Portuguesa, Matemática é a "designação genérica das ciências de método essencialmente dedutivo que tem como como objeto de estudo os números, figuras geométricas e outras entidades abstratas" (COSTA; MELO, 1987, p. 1074). É importante destacar, que a definição da Matemática vem mudando a cada geração pelos matemáticos, os quais "formulam uma definição de acordo com o seu entendimento." (DAVIS; HERSH, 1985, p. 33).

A Matemática está dividida em ramos, com particularidades e finalidades conceitualmente interligadas. Entre os seus ramos, citamos a Aritmética, a Álgebra e a Geometria. A Aritmética estuda os números, suas operações e propriedades. A Álgebra generaliza a Aritmética, utilizando variáveis que representam os números, estuda a manipulação formal de equações, caracteriza os polinômios e as estruturas algébricas. A Geometria estuda as formas, o tamanho e as posições que as figuras ocupam no espaço. A interligação dessas áreas deu origem a outras, como, por exemplo, o Cálculo Diferencial e Integral, que surgiu a partir da Álgebra e da Geometria. Então, podemos entender que a Matemática estuda as quantidades, as medidas, as formas, os espaços, as propriedades, as estruturas e padronizações, auxiliando em diversos campos teóricos e práticos da ciência, na resolução dos problemas.

Os conceitos matemáticos ajudam a resolver problemas em diversas situações, como, por exemplo: na medição de terras; na construção de equipamentos e máquinas; na organização do sistema financeiro; na música; na codificação ou decodificação; na construção civil; na construção dos diversos meios de transporte; na previsão de acontecimentos climáticos. Daí ser importante ensinar para as próximas gerações os conceitos matemáticos, de maneira que a compreensão das noções e a de suas aplicações sejam preservadas. Com esta finalidade, o seu ensino deve ser fundamentado em propostas metodológicas que busquem a compreensão dos conceitos matemáticos de maneira representacional, estrutural e funcional, ressaltando o seu papel na sociedade e apresentando um sentido para os conceitos estudados. Davis e Hersh (1985) destacam a construção do sentido e a importância da utilização da Matemática para o desenvolvimento da sociedade, de forma a ocasionar avanços conceituais em diferentes áreas, a exemplo das ligadas à evolução dos computadores.

O principal responsável pelo processo de ensino dos conceitos matemáticos e de sua articulação com outras áreas de conhecimento para a sociedade são os professores de Matemática, os quais necessitam de uma formação específica que proporcione uma compreensão particular e geral das situações nas quais essa área pode atuar.

No Brasil, os cursos de licenciatura em Matemática devem estar alinhados às Diretrizes Curriculares Nacionais, com a intenção de construir práticas de ensino que irão influenciar diretamente na formação inicial e continuada. A Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM, 2013) destaca a finalidade dos cursos de licenciatura em Matemática de preparação dos futuros professores, nos aspectos conceituais e didáticos, com vistas à compreensão dos conceitos matemáticos e a sua aplicação, estabelecendo sentido ao campo educativo e à conexão com os possíveis problemas do cotidiano.

A formação inicial e continuada dos professores de Matemática deve ser fundamentada em teorias de ensino que busquem auxiliar a didática com o conceito matemático, construindo uma prática que proporcione a união entre a compreensão dos conceitos e a transposição didática. Nesse sentido, existem teorias e metodologias direcionadas para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, nas quais a Didática da Matemática[1](DM) de influência francesa vem contribuindo.

A DM iniciou as suas pesquisas por volta da década de 1970, na França, onde o fracasso da matemática moderna levou a discussões e investigações que ocasionaram ações pontuais e gerais na busca da compreensão dos principais problemas para propor possíveis alternativas aos fenômenos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem. Almouloud (2007, p.17) afirma que as pesquisas no campo da Didática da Matemática vêm trazendo bons resultados: "Os resultados alcançados demonstram avanços importantes na identificação e na compreensão de fenômenos que interferem no processo de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos". Tais resultados consolidaram essa área de investigação e a exigência de interlocução com outras áreas, como a psicologia, a sociologia, a epistemologia, a filosofia, entre outras, tornou-se necessária.

Neste processo de consolidação da DM, algumas teorias foram desenvolvidas, a saber: a Teoria da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996); a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986); a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1996, 2007); a Teoria da Ontosemiótica (GODINO, 2012); e a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996), dentre outras. As investigações da DM vêm sendo discutidas de maneira articulada por Brun (1996); Machado (2010); Parra e Saiz (1996); D'Amore (2007); Almouloud (2007); Pais (2002); Bosch e Gascón (2010); Jonnaert e Borght (2002), entre outros[2]. O propósito das discussões teóricas e metodológicas das linhas de investigação da Didática da Matemática está direcionado, dentre outras questões, à busca de modelos metodológicos voltados para o ensino da matemática básica e superior de maneira articulada.

Dentre as teorias que compõem a DM, iremos destacar a Teoria Antropológica do Didático (TAD) e a Teoria das Situações Didáticas (TSD), as quais foram abordadas em nossa pesquisa. A TAD propõe um desenvolvimento e articulações de noções matemáticas que funcionam como uma maneira de explicar o fenômeno da transposição

[1]Essa área de conhecimento, em alguns países, como na França e na Alemanha, é chamada de "Didática da Matemática". Em outros, como na Holanda, é denominada "Metodologia do Ensino da Matemática". No Brasil e nos Estados Unidos, bem como na maioria dos outros países, é reconhecida por "Educação Matemática" (FIORENTINI, 2009).

[2] Existem países que estão aplicando, desenvolvendo e adaptando as noções e teorias da Didática da Matemática. Destacamos a Espanha, Argentina e o Brasil com resultados expressivos.

didática[3] (BESSA DE MENEZES, 2010). Segundo Bosch e Gascón (2010), a Teoria Antropológica do Didático apresenta as formas de organização do ensino escolar de Matemática e são descritas em termos de praxeologias de ensino, com dois blocos em sua estrutura: prático-técnico (a *práxis*, o saber fazer didático) e o tecnológico-teórico (o *logos*, o saber didático). A *práxis* didática é constituída dos tipos de tarefas e das técnicas disponíveis quando há um discurso tecnológico-teórico didático capaz de descrever, desenvolver e explicar a prática didática, possibilitando a criação de critérios para aperfeiçoá-la.

No caso da TSD, iremos destacar a noção de Contrato Didático (BROUSSEAU, 1996) que analisa as relações estabelecidas de maneira explícita e implícita entre o professor e os alunos, em torno de um saber, assim como as suas influências relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem, observando o conjunto de comportamentos[4] específicos do professor esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos específicos dos alunos esperados pelo professor.

O Contrato Didático é constituído de três polos relacionados entre si: o aluno, o professor e o saber. Essa relação didática entre eles tem por objetivo promover a apropriação dos saberes definidos como saberes a ensinar (*savoir à enseigner*) pelos alunos. Para que tal apropriação se torne possível, são propostas situações didáticas nas quais os saberes são mobilizados e negociados entre os parceiros didáticos. O Contrato Didático pode sofrer rupturas no sentido de interrupção das suas cláusulas para a estruturação de um novo contrato. Em qualquer situação didática, o Contrato Didático está presente, possibilitando análises dos fenômenos relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem da matemática.

A TAD teve um papel central em nossa pesquisa, juntamente com a noção do Contrato Didático, ao definirmos, inicialmente, a nossa fundamentação teórica, o nosso objeto de pesquisa e a nossa problemática. No entanto, necessitamos, no decorrer da pesquisa, do auxílio dos elementos teóricos do Ciclo de Solução de Problemas (CSP)

[3] Segundo Chevallard (1991, p. 39), a transposição didática é uma "noção que observa o caminho do saber científico para o saber a ser ensinado, analisando as mudanças de instituição para instituição, até a construção do saber pelo aluno".

[4] O sentido de comportamento está relacionado às expectativas esperadas e construídas pelo professor e pelos alunos, durante o processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, em sala de aula ou em outros ambientes de aprendizagem. Tal discussão será mais detalhada durante o texto desta tese, pois trará elementos teóricos à construção conceitual e metodológica.

fundamentado na Psicologia Cognitiva (PRETZ; NAPLES; STERNBERG, 2003; STERNBERG; STERNBERG, 2017).

O CSP é representado por sete passos, que são: a identificação do problema; a definição do problema; a formulação de estratégia, que é composta pelo pensamento divergente para chegar no pensamento convergente ou parte da análise para a síntese; a organização das informações; a alocação de recursos; o monitoramento da solução; e, por último, a avaliação. Durante o desenvolvimento dos CSP, os passos seguem a ordem apresentada, mas podem também acontecerem simultaneamente, ocasionando a sua evolução e seus possíveis *insights* (SMITH, 1996; DAVIDSON, 2003; STERNBERG; STERNBERG, 2017) que podem apresentar-se nos alunos, nos momentos de aprendizagem do conceito matemático ensinado pelo professor.

Com a compreensão da importância do ensino dos conceitos matemáticos para a sociedade, através das instituições de ensino e de seus professores, como também dos elementos teóricos informados inicialmente, apresentamos a nossa problemática e a nossa justificativa a seguir.

## Problemática e Justificativa

Os desafios relacionados ao processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos são originados de diferentes motivos, um deles tem origem na formação inicial e continuada de professores. Onuchic e Allevato (2009) comentam que os professores das licenciaturas em Matemática estão concluindo a sua formação inicial sem a preparação adequada para superar os problemas que existem nas salas de aulas da educação básica. Tal fato nos levou a investigar qual o modelo de ensino é predominante nas instituições de formação de professores de Matemática.

Parra e Otero (2011) ressaltam que o modelo atual das universidades apresenta um autismo institucional[5], tanto pelos seus integrantes como também pela sociedade. Esse autismo está diretamente ligado às metodologias adotadas nos cursos de licenciatura em Matemática, dificultando a evolução da compreensão dos conceitos, assim como a sua funcionalidade. Fonseca, Bosch e Gascón (2007) comentam que os conceitos

[5] O sentido do autismo institucional das universidades está ligado a uma deficiência na sua comunicação com a sociedade.

matemáticos são estudados de uma única maneira, pontual e pouco articulada, refletindo-se esse problema nos diferentes níveis de ensino. Outro problema na formação de professores de Matemática é a epistemologia escolar monumentalista[6] presente na educação básica, no sentido de que os conteúdos são visitados durante a formação, não compreendendo a finalidade e aplicação dos conceitos (CHEVALLARD, 2006).

Nos cursos de licenciatura em Matemática, a possível reprodução de conteúdos sem uma compreensão de sua verdadeira finalidade é repassada para o futuro professor que, em sua prática docente, manipula as técnicas de resolução em problemas já determinando os caminhos de respostas. Esse direcionamento em excesso pode ocasionar uma "fraude epistemológica", conforme D'Amore (2007):

> O aluno produz uma resposta correta, mas não porque tenha entendido a sua necessidade matemática ou lógica a partir do enunciado, não porque tenha "compreendido e resolvido o problema", não porque tenha aprendido um objeto matemático, mas simplesmente porque estabeleceu uma semelhança com outro exercício; ele apenas reproduziu uma solução já feita por outros para ele (D'AMORE, 2007, p. 191).

Neste sentido, entendemos que a formação de professores de Matemática, no Brasil, encontra-se em um paradigma de ensino tradicional (LEÃO, 1999), o qual também podemos caracterizar como o paradigma do inventário dos saberes (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). A falta de preparo na formação dos professores de Matemática, o autismo institucional, a epistemologia escolar monumentalista e a fraude epistemológica foram as principais questões que nos fizeram refletir sobre a formação do professor dessa área de ensino e, consequentemente, sobre o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos.

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) pode ser uma alternativa para enfrentar as questões relacionadas aos problemas de ensino e de aprendizagem da Matemática, como também de influenciar a formação do professor. A TAD propõe um dispositivo didático chamado Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), que proporciona o

[6] Termo utilizado por Chevallard, que o usa o sentido de "monumento", em que são visitados, observados e apreciados, mas, depois de um curto espaço de tempo, as características são esquecidas. Nesse sentido, faz-se a semelhança com os conceitos matemáticos estudados na escola.

ensino da Matemática como uma atividade de modelação[7], construindo sequências de ensino e aprendizagem e fazendo com que o professor tenha uma mudança praxeológica.

Os Percursos de Estudo e Pesquisa surgem pela necessidade de fundamentar as organizações didáticas escolares, nas quais são produzidos saberes para a criação de respostas a questões relacionadas à aprendizagem Matemática (BOSCH; GASCÓN, 2010). A condução desse dispositivo didático consiste, basicamente, na construção de modelos matemáticos levando em consideração as hipóteses formuladas. Assim, pode-se elaborar elementos para a resposta da questão geratriz[8] e de suas derivadas, de forma que as responsabilidades do processo de ensino e aprendizagem sejam partilhadas entre professor e alunos, possibilitando a verificação dos avanços e limitações dos modelos matemáticos sugeridos (BARQUERO; BOSCH; GASCÓN, 2011). O dispositivo didático proporciona uma mudança de postura do professor e de seus alunos no que diz respeito às praxeologias, que conduzem para uma ruptura do Contrato Didático atual para um Contrato Didático renovado.

A aplicação do PEP vincula-se a um Modelo Epistemológico de Referência (MER) necessário para fundamentar o seu desenvolvimento. O MER pode ser proposto para um ensino mais amplo, como o da Geometria Plana, ou mais específico, como para o ensino de função, tornando-se uma alternativa ao Modelo Epistemológico Dominante (MDR). Em nossa pesquisa, propomos um MER direcionado para o ensino e aplicação do conceito de função presente nos cursos de licenciatura em Matemática.

Este conceito é apresentado e utilizado nos conteúdos das disciplinas de Matemática Básica ou equivalente, nos cursos de licenciatura em Matemática, nas Engenharias e em áreas afins. A escolha do conceito se deve ao fato de ele ser um dos primeiros conceitos abordados nessas disciplinas, o que dará base conceitual para os demais abordados posteriormente, como, por exemplo, os relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral. O conceito de função é importante compreender o conceito de função no Ensino Médio, como também que ele seja consolidado no Ensino Superior, pois está presente em vários ramos da Matemática, como também em aplicações voltadas para o cotidiano.

[7] Escolhemos utilizar a palavra "modelação" sem confundir seu significado com o da palavra "modelização", que tem a sua utilização concretizada na área de estudo da modelagem matemática (BASSANEZI, 2002).
[8] Pergunta ou questionamento sobre um determinado problema de um contexto relevante de ensino para o professor e relevante na aprendizagem, para os alunos.

Diante do contexto apresentado, formulamos a seguinte questão de pesquisa: quais as restrições e as condições para o processo de ensino e aprendizagem do PEP na abordagem do conceito de função, em uma disciplina de Matemática Básica da licenciatura em Matemática. Paralelamente, tornou-se necessário observar quais influências o PEP exerce na formação do professor da disciplina. Consequentemente, levantamos quatro hipóteses:

$H_1$: As praxeologias atuais dos professores no processo de ensino e aprendizagem do conceito de função não são compatíveis com as praxeologias presentes no PEP;
$H_2$: Ao aplicarmos o PEP existirão rupturas que poderão ocasionar novos contratos didáticos, como também renegociações de contrato;
$H_3$: O PEP, na medida em que é um dispositivo didático de ensino de conceitos matemáticos, também promove a aprendizagem;
$H_4$: O PEP tem influência nas mudanças praxeológicas do professor de uma disciplina de Matemática Básica.

**Objetivo Geral e Objetivos Específicos**

Diante da nossa questão de pesquisa e das hipóteses formuladas, tivemos o seguinte objetivo geral: analisar os contratos didáticos estabelecidos, alguns elementos cognitivos e as organizações praxeológicas construídas e/ou reconstruídas numa aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa, na disciplina Funções I, da Licenciatura em Matemática no processo de compreensão e aplicação do conceito de função.

A partir do objetivo geral, formulamos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar as organizações matemáticas e didáticas do professor da disciplina Funções I durante a aplicação dos Percursos de Estudos e Pesquisa, no processo de compreensão da aplicação do conceito de função;
- Identificar as organizações matemáticas dos alunos da disciplina Funções I durante a aplicação dos Percursos de Estudos e Pesquisa, no processo de compreensão da aplicação do conceito de função;

- Analisar as negociações do Contrato Didático, em especial as possíveis rupturas na aplicação dos Percursos de Estudos e Pesquisa, no processo de compreensão do conceito de função, na disciplina Funções I;
- Analisar o desenvolvimento do PEP proposto na disciplina Funções I, tomando por base o Ciclo de Solução de Problemas fundamentado na Psicologia Cognitiva.

O primeiro objetivo específico está direcionado para a verificação das mudanças das organizações didáticas e matemáticas do professor da disciplina Funções I, observando se o PEP influencia a sua prática docente, sendo mais um instrumento de formação do professor de Matemática. O segundo observa as possíveis mudanças praxeológicas realizadas pelos alunos, de modo que consigam articular as técnicas conhecidas, de maneira a provocar uma crescente mudança das organizações matemáticas. O terceiro visa verificar, através do Contrato Didático, as renegociações, os efeitos e as possíveis rupturas, com base na relação entre o saber do professor e dos alunos durante a aplicação do PEP. O último tem a finalidade de observar se o PEP proporciona a aprendizagem do conceito de função.

## Apresentação da Tese

Com a nossa pergunta de pesquisa, as nossas hipóteses, o nosso objetivo geral e os objetivos específicos, organizamos a nossa tese em cinco capítulos, ao longo dos quais apresentamos a nossa visão sobre a formação de professores no Brasil, a fundamentação teórica por nós utilizada, o nosso MER, o nosso percurso metodológico, as análises dos dados e as nossas conclusões.

Apresentamos, no primeiro capítulo, a trajetória da formação do professor de Matemática no Brasil, desde as primeiras aulas desta disciplina ministradas nas instituições militares e técnicas (engenharias). Destacamos alguns momentos históricos que influenciaram a sua formação, refletidos em suas práticas docentes na atualidade. Discutimos, também, as estruturas dos cursos de licenciatura em Matemática, com destaque para as suas transformações, até o formato atual. Outro ponto destacado foi o paradigma de ensino tradicional que prevalece na formação do professor de Matemática, refletido diretamente no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Por fim, caracterizamos o paradigma do questionamento do mundo discutido pela TAD (CHEVALLARD, 2009a, 2009b), como alternativa ao paradigma do ensino tradicional (LEÃO, 1999).

No segundo capítulo, apresentamos as nossas discussões sobre os principais elementos teóricos de nossa tese. Iniciamos com a Teoria Antropológica do Didático, trazendo os seus elementos teóricos, tais como: sistema didático; praxeologia; organização matemática e didática; os seus momentos de análise; os níveis de codeterminação; e sobre o PEP, com os principais elementos teóricos que fazem parte do seu desenvolvimento. Em seguida, contemplamos a noção de Contrato Didático, destacando o seu estabelecimento entre o professor, o aluno e o saber em jogo, as suas renegociações, as suas rupturas e os seus efeitos. Para complementar a nossa pesquisa, utilizamos o Ciclo de Solução de Problemas fundamentado na Psicologia Cognitiva, para observar seus passos e possíveis *insights*. Finalizando o capítulo, apresentamos as possíveis relações entre os elementos das teorias citadas anteriormente, com a finalidade de fundamentarmos as nossas análises.

No terceiro capítulo, apresentamos a nossa proposta do Modelo Epistemológico de Referência para o ensino de função para a licenciatura em Matemática. Alguns pontos foram levados em consideração, tais como: um breve levantamento histórico da evolução do conceito de função até a sua apresentação nos livros didáticos utilizados atualmente nos cursos de licenciatura em Matemática; a análise de documentos oficiais da educação brasileira, com um olhar para o conceito de função; as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem desse conceito apresentadas por pesquisas realizadas no Brasil (ESPITA; CRUZ; OCHOA, 2011; LOURENÇO; OLIVEIRA, 2014; TENÓRIO; PENNA; TENÓRIO, 2015; NEVES; RESENDE, 2016; ANDRADE; SARAIVA, 2012; SANTOS; BARBOSA, 2017; LIMA, 2014) e a análise praxeológica de um livro didático utilizado nos cursos de licenciatura.

A construção e desenvolvimento do nosso MER estão fundamentados na modelação matemática (CHEVALLARD, 1989; GASCÓN, 2001), nos níveis de modelação funcional (RUIZ-MUZÓN, 2010) e na atividade de modelação funcional para o cálculo diferencial elementar (LUCAS, 2015). A proposta do modelo está dividida no campo discreto e no contínuo, que possui tarefas para serem realizadas. Também é composto de quatro estágios de modelação funcional, que partem da delimitação do problema e do levantamento de hipóteses, incluem a elaboração do modelo a ser utilizado, sua análise e aplicação e, por fim, a formulação de outras questões derivadas e novas hipóteses, levando à repetição do processo.

No capítulo seguinte, temos a nossa proposta metodológica, com a nossa abordagem de pesquisa, o local dos trabalhos e seus sujeitos, os instrumentos utilizados ao longo do estudo, a proposta do percurso matemático e a descrição do PEP aplicado. Seguimos uma abordagem qualitativa, por ela apresentar elementos que proporcionam responder à nossa questão de pesquisa. O local da pesquisa foi uma instituição de ensino técnico superior, com a participação de alunos do curso de licenciatura em Matemática. Apresentamos a proposta de desenvolvimento do PEP, com as fichas diagnósticas de trabalho e a questão geratriz, juntamente com os percursos matemáticos sugeridos. A nossa proposta de PEP foi aplicada em dois estudos empíricos, que contêm os momentos de formação com o professor da disciplina Funções I e as sessões presenciais e não presenciais.

No quinto capítulo, temos as análises dos dados coletados nos dois estudos empíricos realizados. As análises foram organizadas de maneira separada, com cada momento do estudo empírico sendo acompanhado da descrição da formação do professor da disciplina Funções I e das sessões presenciais. Ao final de cada análise dos estudos empíricos, apresentamos os resultados preliminares.

Ao final, apresentamos as nossas conclusões e as questões abertas, seguidos dos anexos. Esperamos que a tese deixe para o leitor mais perguntas sobre o tema do que respostas, porque entendemos que a finalidade de uma pesquisa não é fechar as discussões, mas ampliá-las especialmente sobre o Percurso de Estudo e Pesquisa, e sua aplicação nos cursos de licenciatura em Matemática.

# Capítulo I - A Licenciatura em Matemática no Brasil: a formação do professor de Matemática e o paradigma da TAD

A condução metodológica da formação de professores tem um caráter específico e importante para o processo de ensino e aprendizagem, e para os conceitos a ele relacionados nas diversas áreas de conhecimento. Neste sentido, a estrutura dos cursos de licenciatura é baseada em princípios metodológicos que regem a formação do futuro professor, influenciando diretamente na sua prática docente.

As licenciaturas em Matemática possuem práticas metodológicas fundamentadas em teorias de ensino e, possivelmente, em experiências herdadas pelos seus professores e transmitidas de uma geração para outra. Para tentar compreender qual a predominância formativa existente nesses cursos no Brasil, apresentaremos pontos históricos, teóricos e documentais característicos, de forma geral, da formação atual. Posteriormente, discutiremos os desafios da formação de professores de Matemática e como o paradigma da TAD se apresenta como uma possível mudança nessa prática. Destacamos que o nosso objetivo não é fazer uma discussão demasiada, mas levantar alguns pontos relevantes para a nossa discussão, de maneira a alicerçar as ideias apresentadas na nossa pesquisa.

## 1.1 O Surgimento da Profissão do Professor e das Licenciaturas em Matemática no Brasil

Antes da existência dos cursos de formação de professores de Matemática no Brasil, os professores eram oriundos de instituições de formação militar ou técnica, a exemplo dos cursos de formação de oficiais e de engenheiros, que apresentavam, em seu currículo, disciplinas de Matemática que complementavam a sua formação.

Valente (2005) comenta que as origens da profissão do professor de Matemática remetem às escolas militares fundadas no final do século XVII, pelo fato de o conhecimento matemático tornar-se essencial para a formação do militar, o qual se deparava com os cursos de Aritmética, Álgebra e Geometria. Com o decorrer dos anos, veio a consolidação desses cursos e, com base neles, foram produzidos livros para o ensino da Matemática que influenciaram a organização da referida disciplina no âmbito escolar, até o século XIX.

Nas primeiras décadas do século XIX, com a criação dos cursos jurídicos, os professores militares passam a ensinar Geometria, existindo uma ampliação do ensino da Matemática para outras áreas. Posteriormente, surgiram outras aulas avulsas além das de Geometria, como as de Latim, Retórica, Filosofia e Francês, as quais, reunidas, originariam as primeiras instituições de ensino secundário que davam acesso aos cursos superiores, a exemplo dos cursos jurídicos e das escolas de Medicina.

Com o passar dos anos, até o início do século XX, existiu um aumento do número de professores de Matemática, que eram originários das escolas militares e politécnicas, como também do colégio-modelo do Império, do Colégio Pedro II e dos cursos preparatórios de engenheiros. A falta de instituições que formassem professores nessa área, até o início do século XX, levou os engenheiros a serem os principais responsáveis por ministrar as aulas de matemática, e muitos deles ingressavam no magistério como professores substitutos que poderiam chegar à cátedra de Matemática[9]. (VALENTE, 2005).

Nessa época, as discussões relacionadas ao ensino da Matemática estavam se iniciando em nível internacional, existindo eventos e comissões com a finalidade de discutir o tema, a exemplo do Congresso Internacional de Matemática realizado em Cambridge em 1912 e a *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique* (CIEM). Esta é uma comissão da *International Mathematical Union* (IMU)[10], com interesse em questões internacionais relacionadas à educação matemática, com o objetivo de promover melhorias nas condições de ensino da Matemática, através de publicações científicas, pedagógicas, programas e atividades variadas. Tem uma atuação mais efetiva nos países emergentes, no sentido de melhorar os padrões de educação matemática.

As influências das discussões internacionais chegaram no Brasil por volta de 1920, e teve como representante Euclides Roxo, que era professor do Colégio Pedro II. Ele foi responsável por reformas no ensino da matemática[11], pela produção de livros didáticos e pela defesa de um ensino da matemática por professores que tivessem uma formação específica (VALENTE, 2008). Tais discussões geraram embates entre os

---

[9] O mais alto nível do magistério na época.
[10] Para saber mais sobre a IMU, acessar https://www.mathunion.org/
[11] Sobre detalhes da atuação de Euclides Roxo em reformas para o ensino da matemática, ver (CARVALHO; WERNECK; ENNE; COSTA; CRUZ, 2000)

professores que ensinavam Matemática, como os ocorridos entre Euclides Roxo com o professor Antônio Lisboa[12].

Para Euclides Roxo, o professor Lisboa era o exemplo do professor conhecedor de Matemática, mas que não conhecia as questões relacionadas ao ensino (VALENTE, 2005). Nesse momento, o Euclides Roxo levantou a discussão de que um professor de Matemática não deve ter apenas o conhecimento e domínio dos conteúdos específicos para ensinar, mas também uma preparação sobre como ensinar esses conteúdos.

As transformações do ensino da Matemática realizadas nas primeiras décadas do século XX levaram em consideração a criação de instituições específicas para a formação de professores dessa disciplina, e voltavam-se para a formação de um profissional preparado metodologicamente para seu ensino em nível do secundário.

Tais acontecimentos também nos remetem a um possível início de mudança de paradigma[13], no sentido da formação do professor e do ensino da Matemática, nos quais a centralidade no ensino da técnica pela técnica começa a dar lugar a uma preocupação com o ensino.

Diante da necessidade de formar profissionais preparados para o ensino das diversas áreas de conhecimento, foram criados os primeiros cursos de formação de professores no Brasil, que surgiram com a criação das Faculdades de Filosofia Ciências e Letras, por volta de 1930 (CASTRO, 1974). A formação dos professores de Matemática para o ensino secundário passou a ser chamado de 3 + 1; no caso, três anos de formação específica e um ano de formação didática, correspondendo a 75 % do currículo em disciplinas de Matemática. Segundo Fiorentini e Oliveira (2013), o formato dos cursos de formação de professores 3 + 1 teve a perspectiva da aplicação do conhecimento matemático produzido e pesquisado na academia, para o ensino secundário, fazendo com que houvesse um primeiro um rol de disciplinas de matemática superior para, depois, ter-se acesso aos processos metodológicos de ensino.

Esta estrutura de ensino resultava de uma visão segundo a qual "ensinar era visto, essencialmente, como transmitir o conhecimento do professor para o aluno. E aprender era, basicamente, receber essa transmissão sem muitos ruídos" (MOREIRA, 2012, p. 1138). Segundo Manrique (2009), ainda é comum encontrar, nos cursos de licenciaturas

[12] O relato da discussão está detalhado no artigo de Valente (2005).
[13] Entendemos paradigma segundo a afirmação de Thomas Kuhn, que considera paradigmas "as realizações cientificas universalmente reconhecidas que, durante algum tempo, fornecem problemas e soluções modelares para uma comunidade de praticantes de uma ciência" (KUHN, 1998, p. 13).

em Matemática, a concepção da transmissão dos conteúdos, de acordo com a ordem dos livros didáticos ou utilizando outras fontes de informação, ficando o aluno passivo no processo de aprendizagem e direcionando-se a aula para a memorização e fixação de conteúdos através de exercícios de repetição.

A atuação dos professores de Matemática das escolas militares e técnicas moldaram esse modelo de formação 3 + 1, no qual o conteúdo matemático era predominante e segundo o qual, para ensinar Matemática, o futuro professor teria que ser primeiro um bacharel, ou um quase bacharel em Matemática. No entanto, esse formato também revela uma preocupação com o ensino, apresentando uma mudança de perspectiva didática, com a exigência de um ano de formação didática.

Com a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), em 1961, foram criados o Conselho Federal de Educação (CFE) e seus conselhos Estaduais. O CFE teve como uma das atribuições estabelecer o currículo mínimo e o tempo dos cursos de ensino superior. Com o parecer 292/62 do CFE, o modelo 3 + 1 não foi admitido nos cursos de formação de professores, no qual a licenciatura e o bacharelado passaram a ser graus distintos, podendo ser cursados ao mesmo tempo (CASTRO, 1974).

Com o passar dos anos, os cursos de formação de professores tiveram outros formatos, como os cursos de licenciaturas centrados nas suas respectivas áreas. No caso da Matemática, o Curso em Ciências[14] era a base comum para Física, Biologia, Química e Matemática, e, posteriormente, a complementação específica. Apesar de os cursos de formação de professores de Matemática terem atualmente formatos diferentes, e não mais o formato 3 + 1, a estrutura curricular adotada anteriormente permanece, conforme observa Moreira (2012):

> ... podemos dizer que as licenciaturas saíram do 3+1. Mas, apesar disso, o que nos permite afirmar que o 3+1 não saiu das licenciaturas? A resposta é: a lógica subjacente ao 3+1 ainda permanece como a lógica estruturante desses cursos (MOREIRA, 2012, p. 1140).

Com a mudança curricular nos cursos de formação de professores de Matemática, atualmente, as disciplinas deste curso podem ocupar, em média, 50% do currículo, porém o trabalho desarticulado com as disciplinas direcionadas para o ensino continua a ser um

[14] Para saber mais detalhes sobre a constituição dos cursos de ciências, ver o artigo de Castro (1974).

dos problemas da formação (MOREIRA, 2012). Tal desarticulação, presente nos cursos de formação de professores, pode ser estendida para os conteúdos específicos de Matemática, nos quais os conceitos também podem estar sendo ensinados separadamente, sem qualquer conexão entre si.

> Em relação à formação inicial do professor, verificamos que os principais problemas detectados pelas primeiras pesquisas de 70 e 80, junto aos cursos de Licenciatura em Matemática, também se fizeram presentes nos estudos mais recentes. Esses problemas foram: desarticulação entre teoria e prática, entre formação específica e pedagógica e entre formação e realidade escolar; menor prestígio da licenciatura em relação ao bacharelado; ausência de estudos históricos-filosóficos e epistemológicos do saber matemático; predominância de uma abordagem técnico-formal das disciplinas específicas; falta de formação teórico-prática em Educação Matemática dos formadores de professores (FIORENTINI; NACARATO; FERREIRA; LOPES, FREITAS; MISKULIN, 2002)

Diante desta breve apresentação de alguns pontos históricos da trajetória do ensino e do professor de Matemática, até os cursos de licenciatura, podemos destacar duas questões relevantes, concernentes nos currículos de formação. A primeira é a forte influência dos antigos cursos do formato 3 + 1, os quais têm uma centralidade no conhecimento matemático, em detrimento do conhecimento pedagógico. A segunda pode ser uma consequência da primeira, a metodologia de ensino predominante e que guia os futuros professores, com base na reprodução dos conceitos matemáticos, sem qualquer conexão entre si e com a repetição excessiva de exercícios.

## 1.2. Os Desafios dos Cursos de Formação dos Professores de Matemática no Brasil

A formação inicial de professores de Matemática, no Brasil, apresenta várias influências que são oriundas do processo histórico, social e cultural, as quais se refletem nas propostas curriculares dos cursos de licenciatura, e, consequentemente, na prática desenvolvida em sala de aula, existindo uma incidência direta no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Os currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática são um tema com discussões em nível nacional e internacional. A partir delas, pode-se mudar a prática dos futuros professores e influenciar diretamente o ensino da referida disciplina.

As discussões em torno das propostas curriculares para a formação de professores de Matemática no Brasil são destacadas pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Ambas as instituições escreveram um documento a respeito da formação de professores da área, levantando alguns problemas de sua formação e sugerindo algumas propostas para os cursos de licenciatura.  De acordo com esse documento, o curso de Licenciatura em Matemática é

> ... muito parecido com primeiro curso de Matemática criado na Universidade de São Paulo, em 1934. Na maioria das instituições, as disciplinas ainda são agrupadas em conteúdo específico e conteúdos pedagógicos, com tendência a valorizar mais o primeiro grupo que o segundo, mesmo em se tratando da formação do professor de Matemática e não do bacharel em Matemática (SBEM, 2013, p. 3 e 4)

Tal afirmação, nos remete a formação 3 + 1 que tem uma presença forte nos currículos das licenciaturas em matemática atuais. Essa influência que sofrem as propostas curriculares gera perfis diferentes, com problemas diversos para a formação do professor de Matemática, conforme Gatti e Barreto pontuam:

> Fica claro que esses cursos de licenciatura em Matemática estão formando profissionais com perfis diferentes, alguns com uma formação Matemática profunda, que talvez não se sintam preparados para enfrentar as situações de sala de aula, que não se restringem ao saber matemático. Outros, com uma formação pedagógica desconexa da formação específica em Matemática, forçando o licenciado a encontrar as inter-relações entre esses tipos de formação (GATTI; BARRETO, 2009, p. 145).

Segundo Santos, Costa e Gonçalves (2017) comentam que as licenciaturas em Matemática devem deixar claro, nas suas propostas curriculares, que não estão formando matemáticos, mas professores. Uma formação centrada no conteúdo matemático não aproxima o futuro professor da realidade que ele vai enfrentar; do contrário, faz com que qualquer mudança de postura na sala de aula seja impossibilitada. No início do século XX, Felix Klein, matemático alemão e escritor de várias obras para o ensino da

Matemática, já demonstrava a preocupação com uma formação inicial voltada para a realidade das escolas, como vemos na passagem abaixo:

> Quando, depois de complementarem o curso, se tornam professores e são confrontados de ensinar matemática elementar de forma adequada ao grau de ensino, primário ou secundário, a que se dedicam, e como não conseguem estabelecer nenhuma relação entre esta tarefa e a matemática que aprenderam na universidade, facilmente aceitam o ensino tradicional, ficando os estudos universitários mais ou menos agradáveis que não tem influência na sua forma de ensinar (KLEIN, 2009, p. 1)

Um redirecionamento das propostas dos cursos de Licenciatura em Matemática torna-se necessário para formar um profissional preparado, com condições conceituais e metodológicas de enfrentar as demandas da sociedade na qual ele está inserido. A SBEM (2013) reconhece que a formação do professor de Matemática necessita de uma reflexão cautelosa no que diz respeito às especificidades de sua prática e, que, como resultado dessa reflexão, possa influenciar a estrutura curricular do curso. Portanto, algumas instituições orientam e sugerem pontos essenciais para os cursos de Licenciatura em Matemática reformularem as suas diretrizes curriculares.

As Referências Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura, documento produzido pelo Ministério da Educação, destacam o perfil do licenciado, atribuindo uma centralidade na docência da Educação Básica, na qual o conhecimento dos fundamentos da Matemática necessita ser sólido, levando em consideração o desenvolvimento histórico e a relação nas diversas áreas, como também ressalta a necessidade de um conhecimento específico para realização da transposição dos temas matemáticos em conhecimento escolar (BRASIL, 2010).

Este documento apresenta dois conhecimentos essenciais que o futuro professor de Matemática deve dominar: 1) os fundamentos matemáticos e 2) a transposição desses conhecimentos para Educação Básica. O primeiro conhecimento está sendo moldado durante séculos, pelas discussões do que ensinar em Matemática e pelas diversas mudanças curriculares nos cursos de formação de professores, na maioria das vezes os conteúdos matemáticos preenchendo um espaço maior nos currículos. O segundo conhecimento tem sido trabalhado há décadas, com estudos e avanços significativos, sendo implementado nos currículos de maneira mais evidente nos últimos anos. Entendemos que os dois conhecimentos se apresentam desequilibrados na formação do professor de Matemática, haja vista que muitos licenciados saem despreparados em relação a um dos dois conhecimentos, ou aos dois.

A SBM (2015) elaborou uma proposta na qual estabelece as diretrizes curriculares para o ensino da Matemática resultante de discussões relacionadas à formação dos professores. Tal proposta tem dois princípios norteadores: o primeiro destaca o conhecimento profundo do que se ensina, mas também a necessidade de "dominar a conexão" entre a matemática estudada no curso e sua prática docente; o segundo ressalta a necessidade de o futuro professor compreender o conhecimento matemático mais amplo e profundo, isto é, o conhecimento da Matemática superior, com a intenção de articular com os conhecimentos da Matemática básica com outras áreas de conhecimento, a exemplo da Química, da Física e da Biologia (SBM, 2015, p. 12).

O primeiro princípio é semelhante aos dois domínios de conhecimentos apresentados nas Referências Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática, existindo o mesmo direcionamento. O segundo princípio destaca que os conteúdos matemáticos devem ser desenvolvidos e articulados entre si, ampliando o seu entendimento dentro da própria Matemática, como também em outras áreas de conhecimento nas quais a matemática é considerada ferramenta para o desenvolvimento das mesmas.

Ball e Bass (2009, p. 1) destacam que, para o ensino da Matemática, os futuros professores necessitam ter uma visão ampla e profunda dos conhecimentos matemáticos os quais eles irão ensinar, buscando uma visão periférica ou um tipo de "visão do horizonte matemático[15]".

As diretrizes curriculares para os cursos de Matemática aprovadas pelo CNE (2001) apresentam, em uma das suas orientações, que a estrutura curricular deve "construir uma visão global dos conteúdos de maneira teoricamente significativa para o aluno" (CNE, 2001, p. 4). Observamos que as orientações apresentadas para a formação do professor de matemática no Brasil destacam a compreensão sólida e profunda dos conceitos matemáticos e um entendimento amplo na própria Matemática, como também em outras áreas de conhecimento. E, por último, este documento apresenta a importância da transposição didática destes conhecimentos para a Educação Básica.

[15] Vision horizon knowledge of mathematics (BALL; BASS, 2009, P. 1).

Observamos que as discussões relacionadas à mudança dos currículos, nos cursos de licenciatura, são realizadas pelas principais instituições que representam o ensino da Matemática no Brasil, apresentando alguns problemas e algumas sugestões. No caso dos problemas, destacamos dois: 1) a falta de identidade[16] dos cursos de licenciatura, existindo uma influência da formação do bacharelado; 2) a utilização desarticulada dos conceitos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem. Dentre as sugestões: 1) direcionam para a necessidade de mudança que prepare o futuro professor de forma que tenha um conhecimento sólido no conhecimento matemático, com uma visão ampla e articulada do conceito, na própria Matemática e nas diversas áreas; 2) a capacidade de o futuro professor compreender as diversas propostas metodológicas de ensino, de maneira que possam ser articuladas com o conhecimento matemático.

Diante deste quadro apresentado até aqui, utilizamos um dispositivo didático em nossa pesquisa fundamentado na TAD, para buscarmos alguns caminhos que superem os problemas e atendam a algumas das necessidades apresentadas pelas instituições responsáveis pelo ensino da Matemática. Em seguida, tentaremos descrever qual paradigma o ensino da Matemática e a formação de professores têm sido mais influenciados. Consequentemente, apresentaremos o paradigma que a TAD propõe e suas consequências na formação de professores e para o ensino da Matemática.

### 1.3. O paradigma da TAD, o PEP e a Formação de Professores de Matemática no Brasil

O processo de mudança na formação do professor de Matemática vem sendo influenciado pelo contexto educacional, social e pelas demandas de cada período histórico. Esse processo de mudança é incentivado por paradigmas que vão mudando ou se adequando com o decorrer do tempo, a partir de novos questionamentos que vão surgindo na comunidade científica, iniciando lutas e resistências entre as novas e as velhas concepções.

[16] Entendemos como falta de identidade dos cursos de formação de professores de matemática quando os cursos não apresentam, em seu currículo uma coerência entre a matriz curricular e seus objetivos de formação.

Kuhn (1998) comenta que cientistas podem fazer parte de grupos diferenciados e ter interpretações diferentes sobre o mesmo tema, com argumentações alicerçadas, cada um, pelo paradigma que os rege. O processo de mudança de paradigma de um dos grupos não pode ser forçado nem, muito menos, imposto; mas, através de argumentações e provas, devem ser apresentados e discutidos, na incorporação de outra ideia.

Com o processo mudança surge a resistência de um dos grupos, com "a fonte dessa resistência e a certeza de que o paradigma antigo acabara resolvendo todos os seus problemas e que a natureza pode ser enquadrada na estrutura proporcionada pelo modelo paradigmático" (KUHN, 1998, p. 192). Ao nos reportamos ao contexto da formação de professores de Matemática no Brasil, vimos que, apesar de as mudanças curriculares terem acontecido, notamos uma resistência de grupos na adequação destes currículos, pelo motivo de acreditarem na necessidade de existir a maior presença de conteúdos matemáticos na formação do professor.

Esse contexto está inserido em um paradigma do ensino tradicional que influencia diretamente a sua organização curricular, e, consequentemente, a prática do professor. Leão (1999) comenta que o paradigma do ensino tradicional "foi um dos principais a influenciar a prática educacional formal, bem como o que serviu de referencial para os modelos que o sucederam através do tempo" (LEÃO, 1999, p. 188).

O ensino tradicional tem a escola como um instrumento para difundir as orientações e transmitir os conhecimentos acumulados pela humanidade; a transmissão desses conhecimentos acontece de forma logicamente sistematizada, na qual o professor é o principal agente dessa transmissão e seus alunos agentes passivos do processo (SAVIANE, 1999). Apesar das significativas mudanças terem acontecidos nas propostas curriculares, a ideia de transmissão de conhecimento está presente nos documentos e nas propostas da formação inicial, caracterizando a presença desse paradigma de ensino nos dias atuais.

Segundo Moraes (1997), a fragmentação do conhecimento e, por conseguinte, das práticas pedagógicas é um retrato do ensino tradicional, cuja característica principal é não ter o aluno como foco central do processo de ensino, mas sim os seus procedimentos. Com ênfase nos procedimentos, existem algumas ações direcionadas para a formação de professores e que têm uma abrangência nacional no Brasil com foco nos procedimentos de ensino, destacamos o Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática para o Ensino Médio (PAPMEM), o Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

O PAPMEM foi iniciado em 1990. É um programa idealizado e organizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), com o objetivo de treinar os professores de Matemática em todo o território nacional, abordando conteúdos matemáticos do ensino médio. Acontece, geralmente, duas vezes por ano, em diversos pólos distribuídos no Brasil. Possui metodologia que consiste em assistir as aulas e resolver os exercícios que são apresentados e elaborados por um grupo de professores do IMPA, nos quais as discussões das resoluções das questões são direcionadas pelos professores do Programa.

O PROFMAT foi iniciado em 2011 e é um mestrado semipresencial com oferta em todo o território nacional, com a coordenação da SBM e o apoio do IMPA. Tem a finalidade de qualificar os professores de Matemática da Educação Básica da rede pública. As aulas são, em sua maioria, expositivas e a sua matriz curricular é composta, em quase sua totalidade, de disciplinas de Matemática. O seu objetivo, que está expresso no artigo 2ª do seu regimento, diz que o PROFMAT deve desenvolver uma formação matemática "profundada e relevante ao exercício da docência na Educação Básica, visando dar ao egresso a qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática" (PROFMAT, 2019).

O PAPMEM e o PROFMAT são programas que influenciam a formação de professores e que têm características estruturantes do ensino tradicional, seja na metodologia ou nas propostas curriculares, que trazem a visão de que muito conhecimento matemático é suficiente para ser um bom professor.

Outro programa que está alinhado é a OBMEP, criada em 2005. Trata-se de um projeto nacional realizado pelo IMPA e que tem o apoio da SBM. Inicialmente, sua aplicação era exclusiva para as escolas públicas, mas hoje é também aplicada nas escolas privadas. Essas ações são direcionadas para o ensino fundamental e médio, distribuídas em três níveis e realizadas em duas etapas. A primeira etapa acontece com questões de múltipla escolha, com uma exigência mínima de acerto para seguir a próxima etapa. A segunda e última etapa é composta de questões abertas de Matemática, nas quais os resultados classificam os alunos em cada nível. A OBMEP tem como um dos seus objetivos principais a melhoria da qualidade da educação básica, como também incentivar o aperfeiçoamento dos professores. Como os dois programas anteriores, a OBMEP está centrada nos procedimentos de ensino.

Podemos considerar que esses três programas têm uma considerável influência na formação de professores de Matemática no Brasil. Todos recebem verbas governamentais através do Ministério da Educação (MEC) e do Ministério da Ciência, Tecnologias, Inovações e Comunicações (MCTIC). Possivelmente, este é um dos motivos de terem uma abrangência nacional, influenciando ações e mudanças curriculares nas licenciaturas em Matemática, nas diversas instituições de ensino. Também destacamos que a justificativa principal dos programas é enfrentar as dificuldades relacionadas ao ensino da Matemática, seja atuando na formação do professor ou na inserção direta na sala de aula.

Apesar da atuação desses programas, o Brasil não apresenta bons resultados nas avaliações internacionais. O *Programme for International Student Assessment* (PISA)[17], desenvolvido e coordenado pela *Organisation for Economic Co-operation and Development* (OECD)[18], possui representações e coordenações locais em vários países. No Brasil, o PISA é coordenado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira (Inep)[19]. Tem como objetivo avaliar as habilidades e os conhecimentos adquiridos essenciais para exercer a participação do aluno na sociedade. São avaliados os alunos próximo ao final da escolaridade obrigatória, nas habilidades de compreensão de leitura, Matemática e Ciências. A sua aplicação é trienal, tendo sido a última aplicada em 2018.

Segundo a OECD (2016), o Brasil está abaixo da média dos países participantes nas três habilidades. No caso da Matemática, vem tendo uma pequena recuperação desde a primeira avalição, no ano 2000, porém, nos resultados de 2015, apresentou um retrocesso em sua pontuação, em relação a 2012.

O ensino da Matemática no Brasil vem avançando lentamente em comparação a outros países que fazem parte da OECD, sendo muitos os motivos relacionados a este entrave, a exemplo: do baixo índice do IDH[20] nas diversas localidades do país; da falta

---

[17] Para mais informações, acessar: http://www.oecd.org/pisa/

[18] Para mais informações, acessar: http://www.oecd.org/

[19] "O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) é uma autarquia federal vinculada ao Ministério da Educação (MEC). Sua missão é subsidiar a formulação de políticas educacionais dos diferentes níveis de governo, com intuito de contribuir para o desenvolvimento econômico e social do país". Trecho retido do site: http://portal.inep.gov.br/web/guest/sobre-o-inep

[20] "O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida resumida do progresso a longo prazo em três dimensões básicas do desenvolvimento humano: renda, educação e saúde. o objetivo da criação do IDH foi o de oferecer um contraponto a outro indicador muito utilizado, o Produto Interno Bruto (PIB) *per capita*, que considera apenas a dimensão econômica do desenvolvimento". Trecho retirado do site: http://www.br.undp.org/content/brazil/pt/home/idh0.html

de uma política de governo voltada para o ensino e a formação de professores; da falta de infraestruturas adequadas das escolas públicas, entre outros.

Não indicamos como principais responsáveis desse entrave o modelo do ensino tradicional que molda os programas de formação de professores de Matemática e que influencia os currículos e as práticas docentes, pois é uma construção social escolhida pelas instituições. Os responsáveis são todos os sujeitos que fazem parte da sociedade, principalmente que tem o poder de decisão nas diferentes esferas administrativas e que podem apresentar alternativas para o entrave. O ensino e a formação de professores de Matemática necessitam de uma verdadeira transformação que quebre com a metodologia dominante atual, fugindo de soluções dentro desse mesmo domínio pragmático (KUHN, 1998).

Diante desse contexto, seguimos a ideia de Chevallard (2009a, 2009b), que tenta enfrentar o paradigma do ensino tradicional, propondo, através da Teoria Antropológica do Didático (TAD), a discussão do paradigma escolar do questionamento do mundo para contrapor o paradigma escolar de inventário de saberes. O paradigma da TAD parte de uma dimensão codisciplinar[21], buscando, principalmente, enfrentar o ensino e aplicação isolada dos conceitos matemáticos escolares, articulando o seu entendimento nos diferentes níveis institucionais. Proporciona ao professor uma visão ampla e articulada dos conceitos matemáticos, um ensino ampliado e articulado dentro da área matemática, como também fora dela. O conceito matemático deixa de ter uma função de monumento[22] sem vida e sem sentido, para adquirir uma função articulada e ampla, existindo a razão de ser.

No nível escolar, o professor tem o papel de proporcionar um ambiente de ensino que construa uma visão ampla e articulada dos conceitos matemáticos abordados. Mesmo que tome como referência inicial um determinado conteúdo, sua ampliação e articulação, deve abordar outros conceitos esperados ou não. Esse cenário é constituído por questionamentos iniciais conectados ao mundo e que são interdisciplinares, que devem ter um potencial gerador de outras questões, gerando o interesse dos alunos ao buscarem uma possível resposta dos questionamentos (CHEVALLARD, 2012). O paradigma do questionamento do mundo tem uma influência direta na forma como os conteúdos são

[21] Ver Chevallard (2009b).
[22] Está relacionado ao sentido de monumentos, que são visitados, observados e apreciados, mas, depois de um curto espaço de tempo, essas características são esquecidas. Nesse sentido, faz-se a semelhança com os conceitos matemáticos estudados na escola (CHEVALLARD, 2006).

vistos e organizados, proporciona uma mudança curricular, modificando a prática e a formação de professores de Matemática.

Para que o paradigma da TAD torne possível a sua aplicação, é apresentado e utilizado um "novo" dispositivo didático chamado Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)[23]. O PEP parte de uma questão geratriz ($Q_0$) com grande poder de gerar outras questões derivadas $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, fazendo com que os conceitos e conteúdos abordados vão surgindo articuladamente durante a busca da resposta $R^{\heartsuit}$ da questão inicial (CHEVALLARD, 2009a).

No desenvolvimento do PEP o professor e alunos são desafiados permanentemente, com momentos de discussões e pesquisas dos possíveis caminhos de resolução, mobilizando técnicas matemáticas disponíveis para, a partir delas, proporem outras técnicas, ampliando e articulando a visão dos conceitos matemáticos.

As discussões sobre o PEP iniciaram-se por volta dos anos 2000 e vêm sendo desenvolvidas em níveis de ensino diferentes e com temas matemáticos variados. Exemplificamos esse processo com o trabalho de Lucas (2015), que desenvolveu e aplicou um PEP voltado para o ensino superior, abordando o cálculo diferencial elementar. Delgado e Garcia (2015) propõem um PEP para futuros professores da educação infantil, abordam questões da própria formação. Barquero (2015) parte de um problema que se baseia nas dificuldades de conseguir uma distribuição homogênea de bicicletas em um sistema urbano de uso compartilhado, envolvendo professores e alunos de nível universitário no desenvolvimento do PEP. Barquero, Bosch e Gascón (2011), se baseiam em um PEP para propor a integração curricular de conteúdos matemáticos que os estudantes devem aprender de maneira articulada, através de um processo de modelização. Santos Junior (2017) abordam a noção de juros simples e compostos, aplicando um PEP para alunos do ensino superior de uma turma da área de gestão de negócios. Pereira (2017) propõe um trabalho com base no PEP e direcionado para professores do ensino básico, abordando conceitos da álgebra escolar. Andrade (2012) observa, em seu estudo, de que forma um PEP que envolve as tarefas fundamentais pode constitui-se em um dispositivo metodológico para formação de professores.

Outros trabalhos sobre o PEP foram e estão sendo desenvolvidos, expressando bons resultados relacionados ao ensino da Matemática, como também à formação de

[23] O PEP será abordado de maneira mais detalhado no capítulo 2.

professores. Para a formação de professores de Matemática, existem estudos, aplicações e resultados que direcionam o PEP para a formação de professores. Destacamos, nesse sentido, o trabalho de Barquero, Bosch e Romo (2018), que apresentam, com base na TAD, uma aplicação baseada em cinco módulos que levam os professores a um processo de investigação dos questionamentos levantados durante o percurso de formação, buscando combinar a teoria à prática, analisando as restrições institucionais para propor as condições de sobrevivência das propostas construídas.

O PEP propõe um ensino amplo e articulado dos conceitos matemáticos, enfrentando a reprodução e a repetição excessiva de técnicas matemáticas sem qualquer articulação didática. Busca construir um sentido para o estudo matemático, sem exagerar na quantidade de conteúdos; volta-se para uma mudança curricular que se desvincule da formação 3 + 1 e se centre numa formação que prepare o professor para as demandas da escola e da sociedade.

Observamos que as licenciaturas em Matemática, no Brasil, necessitam de uma mudança no seu currículo e na sua condução na formação inicial e continuada, que atenda às necessidades atuais do professor e da sociedade, possibilitando uma articulação de conhecimentos de serem compreendidos e aplicados. A formação atual está ligada a um paradigma de ensino centrado no conhecimento matemático que, por sua vez, leva uma metodologia de ensino voltada para a reprodução de conceitos e a repetição excessiva de atividades. Essa formação pode levar a dificuldades de aprendizagem do futuro professor de Matemática e pode ser reproduzida para os seus futuros alunos.

Neste sentido, a nossa pesquisa está direcionada para a aplicação do PEP em uma licenciatura em Matemática, e é apresentada como uma alternativa a ser utilizada na formação inicial e continuada dos professores da área, proporcionando articulações entre os conhecimentos matemáticos, a sua compreensão e sua razão de ser.

# Capítulo II: Elementos da Teoria Antropológica do Didático e algumas relações com o Contrato Didático e com a Psicologia Cognitiva

A nossa pesquisa, de modo geral, tem como finalidade analisar quais influências o dispositivo didático Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) tem no processo de formação de professores de Matemática e no ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, observando-se, especificamente, o estudo da noção de função.

Para atingir nossos objetivos, utilizamos alguns elementos teóricos da Teoria Antropológica do Didático (TAD), do Contrato Didático (CD) e do Ciclo de Solução de Problemas (CSP) abordado na Psicologia Cognitiva, os quais fundamentaram a nossa pesquisa. Neste processo, buscamos relacionar e articular estes elementos teóricos, a fim de levantar pontos dessa articulação que serviram de base para analisar a aplicação e o desenvolvimento do PEP, na medida em que este dispositivo didático tem influência na formação do professor da licenciatura em Matemática e também promove a aprendizagem dos seus alunos. Portanto, temos a TAD juntamente com o CD, que podem apresentar indícios relacionados ao ensino do conceito de função, e o CSP, que nos dá elementos da existência de aprendizagem.

## 2.1. Uma Introdução à Teoria Antropológica do Didático

A teoria Antropológica do Didático (TAD) teve as suas primeiras discussões por volta do ano de 1980, logo após problematizar a Transposição Didática (TD). Segundo Chevallard (1996), a TAD deve ser observada como um desenvolvimento e articulação das noções praxeológicas que permitam pensar de forma unificada um considerável número de fenômenos didáticos.

Segundo Almouloud (2007), a TAD apresenta contribuições importantes para a Didática da Matemática, através de elementos que esclarecem a discussão relacionada ao ensino e à aprendizagem das organizações matemáticas, analisando objetos existentes no sistema didático.

Chevallard (2009a) caracteriza um sistema didático como uma reunião de três instâncias: estudante, professor e desafio didático, no qual o estudante tenta resolver o desafio didático por intermédio do professor.

> Um sistema didático se forma cada vez que algumas pessoas se deparam com uma questão cuja resposta não seja evidente e decidem fazer algo para resolvê-la. Nesse caso, as pessoas se transformam em estudantes da questão (...) Para realizar a tarefa problemática que têm nas mãos, os estudantes podem recorrer à ajuda de um coordenador de estudo (...), o professor (...) (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p.195).

De uma maneira geral, temos a Didática da Matemática, que observa e analisa o sistema didático com a finalidade de compreender os fenômenos didáticos a partir das atividades didáticas, as quais podem apresentar os avanços e as dificuldades presentes no processo de ensino e aprendizagem; consequentemente, nessa perspectiva, propõe condições para que os conceitos matemáticos possam ser compreendidos.

Quanto à TAD, Chevallard (1996, p. 127) propõe inicialmente três conceitos primitivos: os objetos O, as pessoas X, as instituições I. Chevallard (1996) chama a atenção para os objetos O, por serem eles necessários e fundamentais, considerando que "todas as coisas são objetos". Ou seja, o objeto irá existir caso seja reconhecido por, pelo menos, uma pessoa X ou instituição I (BESSA MENEZES, 2010).

A definição de pessoa proposta por Chevallard não deve generalizar o fato de que "todo indivíduo é uma pessoa". Esta surge das várias relações que o indivíduo tem com diferentes instituições, ou seja, é o conjunto de sujeitos do indivíduo que forma a pessoa. Para o pesquisador, a pessoa muda pelas sujeições que lhe são incorporadas com o tempo, ao longo do qual a relação pessoal com o objeto promove a aprendizagem. Dependendo da mudança e da evolução de suas relações pessoais com os objetos, o indivíduo permanece invariante (ARAÚJO, 2009, p. 37).

O conceito primitivo de Instituição é conceituado por Chevallard (1996, p. 129), nos seguintes termos: "[...] a instituição pode ser quase tudo o que quer que seja. Uma escola é uma instituição, tal como o é uma sala de aula; mas existe igualmente a instituição <trabalhos orientados>, a instituição <curso>, a instituição <família>". Araújo (2009) exemplifica que a sala de aula e o estabelecimento escolar são instituições do sistema educativo, que impõem aos seus sujeitos suas regras, condicionando a maneiras próprias de fazer e de pensar.

### 2.1.1. A Noção de Praxeologia

Outro elemento teórico da TAD é a noção de praxeologia, também apresentada por Chevallard (1996), composta por certo tipo de tarefas (T) que é conduzida pelo emprego de uma ou mais técnicas (τ), constituindo um bloco prático-técnico (o saber-fazer). As técnicas são amparadas por uma tecnologia $(\theta)$ e justificadas por uma teoria (Θ), ou por um bloco tecnológico-teórico (o logos).

Como exemplo disso, temos o seguinte tipo de tarefa: determine o zero da função definida por $f(x) = 3x - 1$. Para resolver essa tarefa, podemos utilizar a seguinte técnica: primeiramente consideramos a igualdade $f(x) = 0$ e substituímos a expressão da função, ficando com a seguinte equação, $3x - 1 = 0$, resolvendo: $3x - 1 + 1 = 0 + 1$ (somar + 1 nos dois lados da igualdade), $3x = 1 \therefore 3x.\frac{1}{3} = 1.\frac{1}{3}$ (multiplicar por $\frac{1}{3}$ os dois lados da igualdade), obtendo $x = \frac{1}{3}$ como o zero da função. Essa técnica utilizada tem como justificativa tecnológica $(\theta)$ as propriedades da equação[24] e é alicerçada pela Teoria $(\Theta)$ da álgebra.

Notamos que qualquer tipo de tarefa vem acompanhada dos blocos prático-técnico e o tecnológico-teórico, mas, na formação inicial dos professores de Matemática, existe uma forte tendência de abordar prioritariamente as tarefas e as técnicas sem relacionar com a tecnologia e a teoria, retirando o sentido da finalidade dos conceitos matemáticos abordados na sua formação.

Uma praxeologia pode ser matemática (PM) ou didática (PD). Na PM, temos uma organização matemática (OM) que está relacionada com a construção Matemática ligada às situações didáticas; e, na PD, temos a organização didática (OD), nas quais são organizações que fazem a transposição das OM para fins didáticos. O conjunto de organizações (OM e OD) permite analisar a prática durante as situações de ensino e aprendizagem.

[24] Princípio aditivo: quando aos dois membros de uma equação se adiciona (ou deles se subtrai) a mesma quantidade, obtém-se uma nova equação equivalente à primeira. Princípio multiplicativo: quando aos dois membros de uma equação se multiplica (ou deles se divide) a mesma quantidade (diferente de zero), obtém-se uma nova equação equivalente à primeira (BARBOSA; BRITO LIMA, 2018, p. 8).

### 2.1.2. Tipos de Organizações Matemáticas

As praxeologias podem ser utilizadas para facilitar a análise do processo didático e a complexidade crescente das organizações matemáticas (CHEVALLARD, 1999). Tais praxeologias foram definidas em organizações (ou praxeologias) matemáticas pontuais, locais, regionais e global.

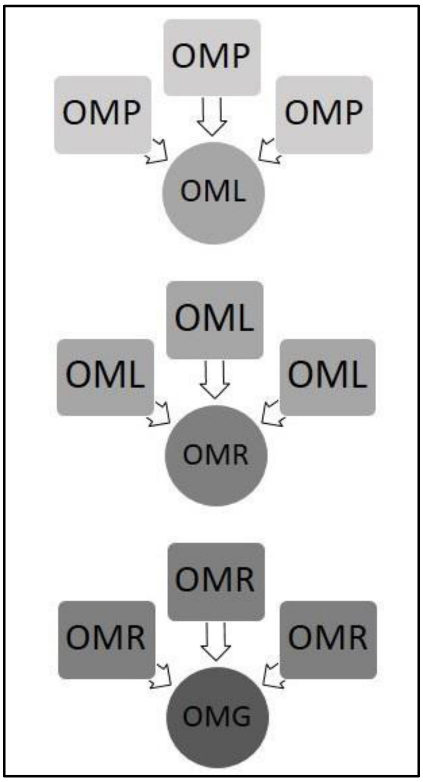
A organização matemática pontual (OMP) é centrada em uma única técnica, para ser utilizada em um único tipo de tarefa. Neste caso, está definida, inicialmente, a partir do bloco prático-técnico, apesar de a tarefa estar fundamentada em uma técnica ($\tau$), na tecnologia ($\theta$) e na teoria ($\Theta$).

A organização matemática local (OML) compõe-se da interação de várias OMPs, validadas e justificadas por uma tecnologia, com a finalidade de fundamentar as organizações que fazem parte da OML.

A organização matemática regional (OMR) é composta do conjunto das OMLs, o qual uma teoria ($\Theta$) fundamenta, coordena e integra em um discurso teórico matemático comum.

Por último, há a organização matemática global (OMG) composta de uma OMR agregando várias teorias $\{\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots, \Theta_n\}$(FONSECA, 2004). A crescente complexidade das OMs conduz o aluno a uma mudança de suas praxeologias e faz com que ele possa resolver tarefas mais complexas. A imagem seguinte representa a relação entre as organizações matemáticas:

Figura 1 - Representação das complexidades das OM




Fonte: Próprio autor (2019)

Na tarefa: construir o gráfico da função definida por $f(x) = 3x - 2$, temos uma OMP que apresenta um tipo de atividade e, consequentemente, uma técnica para resolvê-la. Por vezes, temos tipos de tarefas que implicam a utilização de técnicas diferentes para resolver o problema proposto, justificadas por uma tecnologia.

Observemos o seguinte exemplo: resolva analiticamente e graficamente o sistema de equações $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$. Este caso implica na utilização de técnicas diferentes para a resolução do problema.

Analiticamente podem ser utilizadas as diferentes técnicas de resolução de sistema de equações, como é o caso do método da adição, da substituição, por escalonamento, entre outros. Graficamente, a utilização do sistema cartesiano auxiliado pelas técnicas de construção gráfica nos dá uma visualização do sistema no plano cartesiano. A utilização dessas técnicas é justificada pelo sistema de equações lineares e representada pelo sistema cartesiano. Ao utilizarmos um conjunto de OML, teremos a construção da OMR.

O exemplo dado representa uma OML das várias organizações que devem ser desenvolvidas, constituindo uma OMR, justificada pela teoria da álgebra linear. Consequentemente, além da teoria da álgebra linear, juntam-se as teorias da álgebra elementar, da álgebra abstrata, da álgebra computacional, entre outras que fazem parte do ramo da Matemática denominada álgebra, constituindo uma OMG.

### 2.1.3. Momentos de Análise das Aplicações da TAD

Para um direcionamento e a análise das aplicações das organizações matemáticas (OM), Chevallard (1997, 1999) apresenta seis momentos para descrever as Organizações Didáticas, ressaltando que eles podem acontecer de maneira simultânea. Estes momentos dão o sentido didático das praxeologias que são utilizadas e desenvolvidas pelos alunos e encaminhadas pelo professor.

O primeiro momento é o encontro com as organizações matemáticas (OM) propostas. Essas OM estão ligadas à influência cultural e a suas práticas sociais, como também à escolha do professor das situações fundamentais (BROUSSEAU, 1986). As situações fundamentais proporcionam aos alunos o sentido dos conceitos estudados, fazendo com que eles sejam os atores principais do processo didático, com a finalidade do desenvolvimento das OM.

O segundo momento é o da exploração dos tipos de tarefas e da elaboração de técnicas. Esse momento nos permite criar e usar uma técnica relativa a problemas do mesmo tipo. A elaboração das técnicas é, pois, um meio para resolver, de maneira quase rotineira, esses problemas.

O terceiro momento de estudo é o da constituição do entorno tecnológico-teórico relativo à técnica proposto pela OM e relacionado diretamente aos momentos anteriores, com a finalidade de fundamentar e justificar as técnicas utilizadas.

O quarto momento é o de trabalho da técnica, utilizada, de fato, para proporcionar a sua validação ou adequação.

O quinto momento é o da institucionalização, ressaltando qual a OM construída, explicitando os elementos que fazem parte de sua constituição.

Por último, há o momento da avaliação, ligado diretamente ao da institucionalização, no sentido de que o processo é avaliado no que se refere aos momentos pontuais e no seu contexto geral, com um balanço desses momentos (CHEVALLARD, 1997, 1999).

Todos esses momentos trazem reflexões ligadas à condução das construções das OM e das OD propostas, nas quais o professor tem um papel importante (BROUSSEAU, 1986), fazendo com que seja realçada a participação do aluno, tornando o autor principal.

### 2.1.4. Níveis de Codeterminação

Com a intenção de analisar e estruturar as questões matemáticas em torno das OM e OD, Chevallard (2001, 2004, 2007) propõe os níveis de codeterminação, a qual representa as estruturas que influenciam o ensino e a aprendizagem da Matemática. A constituição desses níveis é determinada pelo mais alto deles, que é a civilização, até o nível tópico, que é o mais baixo.

Figura 2 - Níveis de Coderterminação

**Civilização**
↓↑
**Sociedade**
↓↑
**Escola**
↓↑
**Pedagogia**
↓↑
**Disciplina**
↓↑
**Domínio**
↓↑
**Setor**
↓↑
**Tema**
↓↑
**Tópico**

Fonte: Chevallard (2007)

Os níveis buscam analisar e compreender as influências e restrições geradas pelas OM e OD, possibilitando reestruturar e reorganizar as condições de ensino e aprendizagem. Ao tomarmos por base o nível escola, constatamos que existem níveis superiores a determinarem o que estudar e quais procedimentos são adequados para esses estudos, a exemplo dos documentos oficiais da educação.

Assim, existem os níveis inferiores à escola, como a disciplina e o tema. Por exemplo, se partimos da seguinte questão: quais são as simetrias de um retângulo no quadrado?, temos o tema como simetria de polígonos, que se inclui no setor das transformações no plano e também compreende o domínio da Geometria, que pertence à disciplina Matemática (CHEVALLARD, 2001, p. 3).

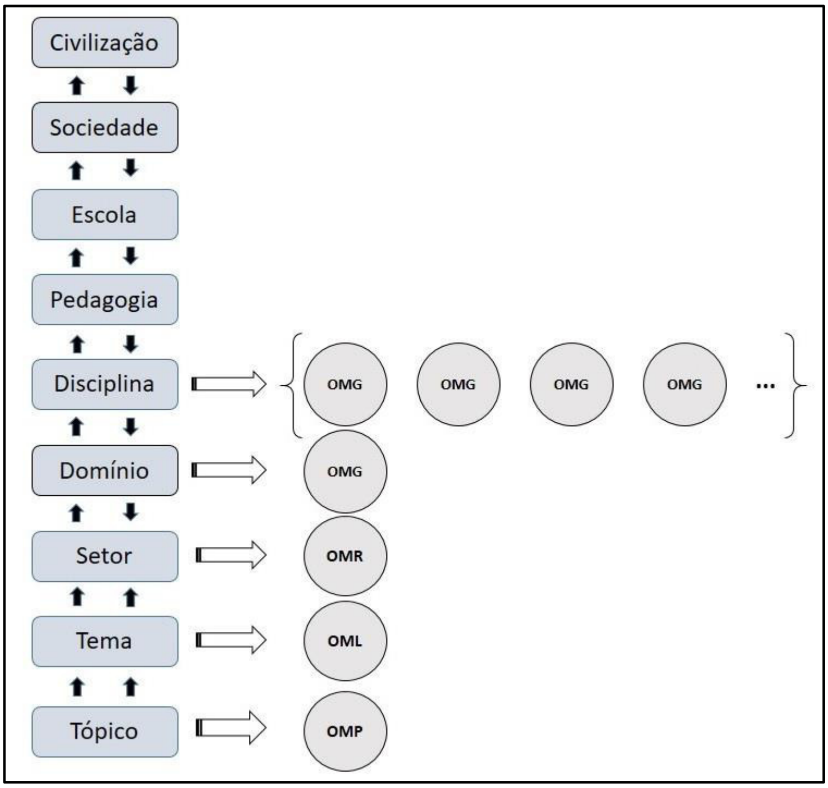
Existe correspondência dos níveis de codeterminação mais baixos com os tipos de OM, os quais possuem restrições particulares para o seu ensino, isto é, a aplicação da OD. Nesse caso, a compreensão dessas restrições em cada nível torna-se necessário para construir as condições para a aprendizagem (CHEVALLARD, 2007).

O nível tópico está relacionado à organização matemática pontual, pelo fato de existir um tipo de tarefa centrada em uma única técnica. Este nível está mais relacionado ao aluno, porque este, geralmente, é avaliado por tipos de tarefas de forma independente umas das outras, não consolidando a interação entre as técnicas centradas nos tipos de tarefas.

A OMP dificilmente está relacionada a um tema matemático isoladamente, o qual, para um professor, é insuficiente, necessitando de uma organização matemática mais ampla constituída por várias OMP, justificadas por uma tecnologia, constituindo uma organização matemática local, correspondendo ao nível tema.

Na medida em que os alunos articulam as OML com a intervenção ou não do professor, podem reconstruir essas organizações necessitando de um nível mais elevado, chamado de organizações matemáticas regionais. A articulação de algumas OML gera a OMR justificada por uma teoria, relacionada ao nível setor. Para um nível superior ao setor, temos a articulação de um grupo de OMR, constituindo uma organização matemática global, relacionada ao nível domínio. Na constituição dos vários domínios, temos o nível disciplina, que é a Matemática (CHEVALLARD, 2002).

Figura 3 - Níveis de Coderterminação Associados às Organizações Matemáticas




Fonte: modificado de Chevallard (2007)

No Brasil, a licenciatura em Matemática é composta de várias disciplinas que compõem a sua matriz curricular, a exemplo das disciplinas Matemática básica, Cálculo Diferencial e Cálculo Integral, Análise, Álgebra, Didática, Prática de Ensino, entre outras que ficam no nível das disciplinas que são formadas pelo conjunto dos domínios.

Ao situarmos a disciplina de Matemática Básica, que contém o domínio "função" apresentado, por vezes, em capítulos de livros didáticos, encontramos os setores, que podem ser denominados "noção de função", "função afim", "função quadrática" etc. Quando delimitamos o setor da função afim, temos os temas de estudo da construção gráfica, do zero da função, do estudo do sinal e de outros elementos. Segundo Chevallard (2002), o professor tem uma atuação mais evidente nos níveis tópico e tema; essa falta de articulação com os níveis maiores limita a construção ou a reconstrução de novas praxeologias no sentido econômico, caracterizando um problema ecológico.

Nos níveis superiores à disciplina, encontramos as estruturas que se referem a uma realidade diferente das anteriores, como, por exemplo, os níveis da pedagogia, da escola e da sociedade, que contribuirão para determinar a ecologia das organizações matemáticas e didáticas, tal como a organização e construção dos programas escolares.

Tomando por base a tabela construída por Silva (2016), que apresenta os níveis de codeterminação utilizada para exemplificar e apresentar os elementos de sua pesquisa, considerando as noções de área e perímetro, iremos apresentar uma tabela na qual foi utilizada a noção de função afim, possivelmente abordada nas licenciaturas em Matemática.

Quadro 1 - Exemplo de Associação dos Níveis de Codeterminação

| Níveis de Codeterminação | Objetos Associados | Responsáveis pelo Nível de Codeterminação |
|---|---|---|
| Civilização | Ocidental | ------ |
| Sociedade | O Ministério de Educação, as Secretarias de Educação Estaduais e as Municipais dos Estados, o Conselho Nacional de Educação e as Políticas Públicas Educacionais | A política, a noosfera, alguns membros da sociedade e o professor |
| Escola | Educação Superior | A política, a noosfera e o professor |
| Pedagogia | Licenciatura em Matemática e o Projeto Político- Pedagógico | A política, a noosfera e o professor |
| Disciplina | Matemática Básica ou equivalente | Noosfera e o Professor |
| Domínio | Função | Noosfera e o Professor |
| Setor | Função afim | Noosfera e o Professor |
| Tema | Zero da função afim | Professores e alunos |
| Tópico | Tarefas relacionadas a determinar o valor zero da função afim | Professores e alunos |

Fonte: adaptada tomando por base o trabalho de Silva (2016)

Quando uma instituição tem um tópico a ser estudado, é necessário que essa mesma instituição estabeleça uma hierarquia de níveis em relação a este tópico, porém, é importante destacar que essa hierarquia não garante a qualidade do seu processo de estudo. Nesse sentido, a compreensão dos níveis de codeterminação busca identificar e compreender as restrições nos seus diferentes níveis, para proporcionar condições para o processo de ensino e aprendizagem de um determinado conceito (CHEVALLARD, 2002, 2007).

### 2.1.5. Modelo Epistemológico de Referência e Modelo Didático de Referência

Na condução das situações didáticas propostas, outro elemento incorporado à TAD procura dar sentido e sinalização para os caminhos de ensino e aprendizagem da Matemática, alicerçados e direcionados por modelos de referência que orientam as conduções didáticas e matemáticas. Esses modelos vêm buscar uma emancipação frente à epistemologia dominante[25] presente nas instituições de ensino, epistemologia na qual o monumentalismo está presente de maneira marcante.

O modelo a ser apresentado, inicialmente, é o epistemológico de referência (MER)[26], cuja organização matemática se apresenta como alternativa frente à epistemologia dominante na instituição de ensino. GASCÓN (2014) destaca que,

> para ter os processos de transposição didática como objeto de estudo, a didática necessita de analisar de maneira crítica os modelos epistemológicos das matemáticas dominantes nas instituições envolvidas, e assim libertar-se da falta de crítica desses modelos (GASCÓN, 2014, p. 100, tradução nossa).

Tal enfrentamento é materializado pelo MER, no qual o estudo crítico dos documentos oficiais, das concepções dos professores e alunos, dos livros textos, dos planos de estudos, das praxeologias atuais, entre outros, faz parte de sua construção.

O MER pode ser específico ou geral. No caso do específico, está relacionado a temas matemáticos, como, por exemplo, à divisibilidade elementar (GASCÓN, 2001), ao limite de funções (BARBÉ *et al.*, 2005), à proporcionalidade no âmbito das relações funcionais elementares (GARCÍA *et al.*, 2006), ao sistema de numeração (SIERRA *et al.*, 2007), à modelização matemática (BARQUERO *et al.*, 2011; SERRANO *et al.*, 2010) e

---

[25] É a forma concreta como as universidades, como instituições docentes mais especificamente, e a comunidade de agentes intervêm nos processos de estudos das matemáticas, fazendo com que os professores universitários e os estudantes interpretem a matemática e a sua relação com a instituição (BARQUERO; BOSCH; GASCÓN, 2010).

[26] Destacamos que o capítulo III é dedicado a uma discussão mais ampla sobre o MER, como também, apresentaremos a nossa proposta do MER para o ensino de funções.

à modelização algébrico-funcional (RUIZ-MUNZÓN *et al.*, 2011). O MER geral está ligado a estruturas mais amplas que podem englobar os específicos, tais como a caracterização do modelo epistemológico dominante da atividade Matemática no ensino secundário da Espanha (FONSECA *et al.*, 2004); há reformulação do problema da metacognição no âmbito da TAD (RODRÍGUEZ *et al.*, 2007), (LUCAS, 2015).

Em um entendimento mais amplo dos MER, temos os modelos didáticos de referência (MDR) que estão direcionados a um sistema didático formado por uma instituição mandante com uma estrutura consistente e que apresentam os desafios crescentes de estudos, com a constituição de grupos de alunos e professores que buscam as respostas dos desafios propostos. Segundo Bosch e Gascón (2010), os MER e MDR:

> Em particular devem servir para questionar, analisar e avaliar (em lugar de aceitar acriticamente) os dois tipos de modelos dominantes nessas instituições: por outro lado, os *modelos epistemológicos das matemáticas* que se tomam como transparente e indiscutível nas instituições tidas como “nobres” pelo seu prestígio e legitimidade social, aparecem como responsáveis por moldar o “saber sábio” (mas não desejam fazer parte do objeto de estudo da didática), por outro lado os modelos de estudos mais ou menos espontâneos que constituem a forma culturalmente de aceitar e interpretar o ensino e a aprendizagem escolar da matemática, consequentemente, tem grande preponderância nas instituições de ensino (BOSCH e GASCÓN, 2010, p. 62, tradução nossa).

Observamos que os MER e os MDR apresentam elementos importantes frente aos possíveis problemas relacionados à epistemologia dominante nas instituições de ensino. Diante do enfrentamento dessa epistemologia, nos cursos de Licenciatura em Matemática, nossa discussão se direciona para o Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), um tipo de engenharia didática ligada à organização didática e à modelação matemática para o ensino.

### 2.1.6. Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)

Chevallard (2009a) comenta que o PEP tem a sua origem relacionada aos Trabalhos Pessoais Supervisionados[27] iniciados no ano 2000. Com a evolução das

[27] *Travaux Personnels Encadrés* (TPE). Atividades interdisciplinares aplicadas no sistema do ensino francês, em horários alternativos, buscando desenvolver a autonomia dos estudantes.

pesquisas, o PEP desenvolveu uma condução codisciplinar associada ao sistema herbartiano, e, consequentemente, tomou como base para o seu desenvolvimento as dialéticas. Por volta dos anos 2004, o PEP se consolidou, sendo constituído por um conjunto de Atividades de Estudos e Pesquisas (AEP)[28].

Almouloud e Silva (2012), comentam que o Percurso de Estudo e Pesquisa é um tipo de engenharia didática (ED) (ARTIGUE, 1996) com algumas características próprias, denominada engenharia do PER[29]. As discussões iniciais sobre a ED se deram por volta de 1980 e, no decorrer dos anos, ocorreu a sua evolução teórica e metodológica, desenvolvendo-se a engenharia didática de primeira e segunda geração, e as suas diversificações.

A primeira geração da engenharia didática está direcionada a determinar dispositivos de ensino que possam ser comunicáveis e que possam ser reproduzidos; o pesquisador deve analisar os resultados da situação desenvolvida em sala de aula, tomando por base as quatro fases: análises preliminares; concepção e análise *a priori* das situações didáticas; experimentação; análise *a posteriori*; e validação. No caso da segunda geração da engenharia didática, o foco está na formação inicial e continuada de professores, com vistas à elaboração e produção de recursos de ensino a serem utilizados em sala de aula, proporcionando meios para a aprendizagem da matemática e para o seu ensino (ALMOULOUD; SILVA, 2012).

A engenharia do PEP é uma diversificação da ED, que possui algumas características próprias é caracterizada pela sua condução codisciplinar, na qual agrega ferramentas praxeológicas de disciplinas da matemática, como também de outras disciplinas e conceitos de áreas diferentes da matemática. Almouloud e Silva (2012) apresentam um quadro que sintetiza alguns dos aspectos centrais da engenharia do PEP:

[28] *Activités d'Étude et de Recherche* (AER), sigla em francês. "O princípio AER questiona profundamente uma certa epistemologia escolar monumentalista e filosófica que substitui as questões (abertas) *Q, fonte de toda produção de conhecimento, pelas falsas questões que o professor se esforça para fazer aos alunos"* (CHEVALLARD, 2007, p. 33, tradução nossa)

[29] *Parcours d'Étude et de Recherche* (PER) é a sigla em francês do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP).

Quadro 2 - Aspectos centrais da engenharia do PEP

| | Objetivo(s) | Aspectos centrais |
|---|---|---|
| Percurso de Estudo e de Investigação (PER) | • Categorizar um conjunto de práticas sociais de conhecimento.<br>• Sistema didático: $S$ ($X$, $Y$, $Q$), sendo Q a questão a ser respondida, X o grupo de estudo e Y a equipe responsável em auxiliar o estudo. | • O conhecimento (matemático), não é algo que é conhecido de antemão, este surgirá durante a investigação, junto às discussões realizadas com os alunos.<br>• Questões geradas a partir de uma PER devem ser tomadas para melhorar a investigação ou retomá-la.<br>• O estudo é um projeto que assume um desenvolvimento em longo prazo (local de aprendizagem muito relevante).<br>• Estabelece níveis de trabalho<br>• Exige dos professores uma revisão de sua relação com o saber.<br>• Um dos perigos relacionados com a construção de uma didática do inquérito e dos PER, em classes de matemática, está no fato de falta de uma infraestrutura adequada. |

Fonte: Amouloud e Silva (2012)

Relacionada à engenharia do PEP, que tem condução codisciplinar, Chevallard (2009a) apresenta uma nova área de pesquisa em didática chamada Didática da Investigação Codisciplinar[30], cuja noção-chave é descrita como:

> Uma questão *Q*, um sistema didático *S*(*X* ; *Y* ; *Q*) se forma em torno dela: sendo *X* uma equipe de estudo (uma classe, um grupo de estudantes, um grupo de pesquisadores, um jornalista, etc.) e *Y*, um grupo (geralmente reduzido: *Y* pode ser, inclusive, um conjunto vazio) de apoio ao estudo e de diretores de estudo (professor, tutor, diretor de pesquisa, diretor de redação, etc.) O objetivo da criação desse sistema é estudar *Q*, ou seja, tentar dar-lhe uma resposta *R* que a priori satisfaça certas restrições ... (CHEVALLARD, 2009a, p. 1, tradução nossa)

Chevallard (2004, 2006, 2009a) apresenta o PEP como um dispositivo didático direcionado à modelação matemática[31]. Está relacionado a um estudo de uma questão viva ($Q_0$), ou questão geratriz, isto é, uma problemática relevante que pode gerar outras problemáticas menores dela derivadas ($Q_i$). Tal problemática ($Q_0$) e suas derivações ($Q_i$) conduzem a um grande número de saberes que possibilitarão caminhos de resoluções diferentes ($R_i$), e à verificação de suas limitações nas conduções desses caminhos. Nessa

[30] *Didactique de l'Enquête Codisciplinaire*

31 A TAD descreve a modelação matemática como um processo de construção e reconstrução das OM complexas e crescentes (OMP, OML, OMR, OMG), partindo de uma questão problemática que constitui a razão de ser do processo (LUCAS, 2015).

cadeia de questões ($Q_i$), são geradas cadeias de respostas ($R_i$) com a seguinte representação: $(Q_i, R_i)$.

Segundo Fonseca, Casas, Bosch e Gascón (2009, pg. 2), o "[...] PEP vem recuperar a genuína relação entre perguntas e respostas que está na origem da construção do conhecimento científico em geral e das atividades de modelação em particular". Chevallard (2009a) apresenta um modelo representado pelo "esquema herbatiano" de maneira condensada, a saber:

$$(S(X\,;\,Y\,;\,Q) \rightarrow M) \hookrightarrow R^{\blacktriangledown}$$

Sua representação expandida é, por sua vez, assim representada:

$$[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \rightarrow \{\, R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}^{\lozenge}, \ldots, O_m^{\lozenge} \,\}] \hookrightarrow R^{\blacktriangledown}$$

No modelo proposto, temos *S(X ; Y ; Q)* caracterizado por um sistema didático formado por um grupo *Y* (professor, orientador, coordenador de pesquisa, entre outros), que deve fazer, estudar, reconstruir e deixar acessíveis os caminhos possíveis para um grupo de alunos *X*, na busca de responder a uma questão geratriz $Q_0$, cujo estudo conduza para as reconstruções dos principais elementos da organização matemática local (OML) de partida.

O sistema $\{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}^{\lozenge}, \ldots, O_m^{\lozenge}\}$ representa o conjunto de recursos que servirá para produzir a resposta final $R^{\blacktriangledown}$. Neste modelo, propõe-se que, durante o desenvolvimento do estudo, sejam mobilizados todos os recursos *médios*[32], os saberes e as respostas disponíveis $R_i^{\lozenge}$, para construir uma boa resposta $R^{\blacktriangledown}$, na qual os objetos de qualquer natureza $O^{\lozenge}$atuarão como *médios* para colocar em prova as $R_i^{\lozenge}$. Lucas (2015, p. 33) comenta que o esquema herbartiano pode ser considerado "um sistema de referência didático para observar, descrever, analisar e avaliar os sistemas existentes nas instituições sociais ou teoricamente possíveis. Ele fornece um modelo geral entendido pela TAD como «estudar uma questão»" (tradução nossa).

[32]Instrumento indispensável para colocar à prova as respostas geradas a partir das $R_i^{\lozenge}$,verificando a sua validez.

Além do esquema herbartiano, Chevallard (2007, 2009a) apresenta outros elementos essenciais para o desenvolvimento do PEP, denominados dialéticas. Em sequência, na nossa discussão, faremos uma resumida descrição.

A primeira é chamada de "o paraquedista e a trufa". Ressalta a saída das condições clássicas de ensino presentes na sala de aula, na intenção de preparar as condições necessárias para o aluno desenvolver um estudo e uma pesquisa da questão apresentada, encontrando e utilizando as informações necessárias durante o percurso.

A segunda é "o tópico e o atópico". Na falta da organização e preparação de um PEP existe o risco de se trilhar um caminho que ficará fora do tópico estudado ou mesmo de estudar uma obra *O* que nos levará a trilhar um caminho no qual a resposta não terá sentido algum. Neste caso, uma preparação prévia torna-se necessária para que a condução do PEP promova um olhar amplo e consistente sobre tema abordado.

A terceira é denominada "as caixas pretas e as caixas brancas" e representa os conhecimentos que temos como pertinentes para o ensino proposto. Na condução do PEP, torna-se necessário que o professor não apresente uma resposta pronta ou um caminho definido, mas que possibilite um ambiente com elementos mínimos no qual o aluno possa buscar a uma resposta adequada. Esse ambiente pode ser caracterizado como um local entre as duas caixas; no caso, uma área cinza.

A quarta é "a leitura e a escrita". Ao nos depararmos com o desenvolvimento do PEP, vemos que todo o seu processo é composto de perguntas e respostas, o qual é iniciado com a questão geratriz, na busca de uma reposta não rotulada, como também com as suas questões derivadas, que são acompanhadas possivelmente pelas suas respostas.

A quinta dialética é "a conjectura e a prova". Durante o desenvolvimento do PEP, as conjecturas são frequentes; portanto, essas conjecturas devem serem colocadas à prova utilizando-se as obras e as respostas institucionalizadas para defender a sua posição. Observamos que essa dialética tem uma relação com a dialética anterior, essencial para o desenvolvimento do dispositivo didático.

A sexta dialética é denominada "*mídia* e *meios*". A *mídia* é todo sistema que representa o mundo ou uma parte dele e que é endereçada a tipo de público, como, por exemplo, o "curso" do professor de matemática, um programa de TV, um blogue etc. No caso do meio, Chevallard (2007) associa essa dialética ao *milieu* da Teoria das Situações Didáticas. No desenvolvimento do PEP, as respostas podem ser construídas e reconstruídas, necessitando de meios para colocar à prova as suas respostas e a sua validação.

Por último, a sétima dialética é "do indivíduo e do coletivo" e está relacionada à divisão de responsabilidade na busca da resposta da questão geratriz, na qual o indivíduo (professor) tem o seu papel perante um trabalho coletivo (alunos). Esta dialética vai de encontro ao trabalho individual, que é ressaltado no sistema de ensino predominante, buscando a integração de ideias do coletivo. (CHEVALLARD, 2009a, 2007)

Relacionadas às dialéticas e necessárias para o funcionamento do sistema didático, temos a mesogênese, a topogênese e a cronogênese (Chevallard, 2009a, 2009b). São necessárias para o desenvolvimento do PEP na análise das restrições e geram condições para a sua condução didática. Nesse sentido, os referidos autores observam:

> Para que possa levar a cabo um ensino por PEP, é necessário que a organização didática pense em um certo número de condições relativas às funções didáticas, chamadas de mesogênese, topogênese e cronogênes" (PARRA; OTERO; FANARO, 2013, p. 852, tradução nossa).

A mesogênese é a construção do meio *M*. Na aplicação do PEP, o meio não está construído totalmente. A sua construção se dá a partir das aulas com diversas produções internas ou externas à sala de aula, nos quais os alunos podem utilizar as respostas $R^{\lozenge}$ ou as obras *O* disponíveis, desenvolvendo as dialéticas, mais especificamente a *mídia* e *meios*. A topogênese representa a divisão de responsabilidades assumidas pelo professor e pelo aluno no meio *M*. No desenvolvimento do PEP, o professor terá a responsabilidade de apresentar a questão geratriz $Q_0$ e os alunos terão a responsabilidade de buscar uma resposta $R^{\heartsuit}$, utilizando as $R^{\lozenge}$ e as *O* disponíveis. Esta função didática tem uma relação com a dialética do indivíduo e coletivo. Por último, devido à cronogênese, na constituição da mesogênese, conjuntamente com a topogênese, existirão momentos que as $R^{\lozenge}$ e as obras *O* serão incorporadas no *M*, as quais serão adequadas para dispor de uma "dilatação" do tempo didático e do tempo oficial nas aulas, às quais podemos relacionar com a dialética leitura e resposta (PARRA, OTERO e FANARO, 2013).

Rodríguez, Bosch e Gascón (2007) comentam que o PEP surge a partir de questões problemáticas, as quais, em suas resoluções, necessitam de construções de várias praxeologias. Nesse caso, trata-se de um conjunto de conhecimentos teóricos e práticos articulados entre si. Desse modo, no PEP, a questão geratriz aparecerá como possibilidade de deixar mais viva a resolução de um problema em sala.

A aplicação do PEP exige mudança em relação a algumas normas que são impostas por níveis maiores ao disciplinar e que, por essa razão, podem se converter em restrições para ser posta em prática. Rodríguez, Bosch e Gascón (2007, p. 488) afirmam que "[...] Os PEP que não se mostram centrados em um tema[33], setor, área, nem sequer disciplina, encontra dificuldades para serem desenvolvidas dentro de uma aula normal de Matemática".

O PEP propõe uma nova maneira de observar os problemas de ensino e aprendizagem da Matemática, partindo de um tema central, ou questão geratriz e, a partir daí, iniciar todo o processo de desenvolvimento na busca de uma boa resposta, uma resposta não rotulada[34], mas construída a partir das articulações de conhecimentos adquiridos no processo.

## 2.2. A Noção do Contrato Didático

A noção do contrato didático (BROUSSEAU, 1996) emerge como elemento importante a ser analisado em um sistema didático no qual o professor, o aluno e o saber se relacionem entre si. Essas relações geram responsabilidades que são compartilhadas entre o professor e o aluno, mediados pelo saber em questão, gerando obrigações implícitas ou explicitas no contrato didático estabelecido.

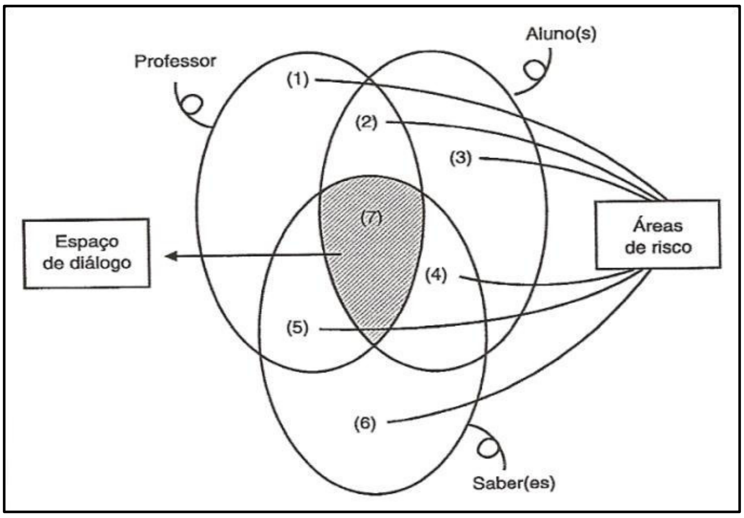
> Estabelece-se então uma relação que determina – explicitamente em pequena parte, mas sobretudo implicitamente – aquilo que cada parceiro, o professor e o aluno, tem a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de maneira ou de outra, responsável perante o outro. Este sistema de obrigações recíprocas assemelha-se a um contrato. Aquilo que aqui nos interessa é o *contrato didático*, ou seja, a parte deste contrato que é específica do conteúdo: o conhecimento matemático visado (BROUSSEAU, 1996, p. 51).

[33] Tema, setor, área e disciplina da Matemática.
[34]Na perspectiva do PEP, a resposta rotulada é aquela que já se encontra pronta ou quase pronta desde o início da questão geratriz.

Segundo Brousseau (1986, pg. 50), o contrato didático é a “regra do jogo, é a estratégia da situação didática”. Na evolução das situações didáticas essas regras são modificadas surgindo novas situações, criando expectativas e papéis a serem cumpridos pelos envolvidos, nas situações, chamadas “jogo didático”. Diante dos elementos que fazem parte do sistema didático, Jonaert e Borght (2002), ressaltam que, a partir da interação de um professor, de seus alunos e do saber em jogo, o professor explicita a intenção de construir condições para os alunos se apropriarem do saber.

Jonnaert e Borght (2002) ressaltam que uma das funções do contrato didático é criar áreas de diálogos entre três famílias de variáveis (aluno, professor e saber). A figura a seguir representa a ideia dos autores, representando as várias áreas que podem existir nas situações didáticas:

Figura 4 - Uma das funções do contrato didático: ampliar o espaço de diálogo – reduzir a área de risco




Fonte: Jonnaert e Borght (2002).

Na Imagem 04, as áreas estritamente específicas a cada um dos três parceiros (1, 3 e 6), são áreas que se encontram sós, isolados das outras famílias de variáveis. As áreas 2, 4 e 5 relacionam-se duas a duas, não existindo uma interação entre as variáveis do aluno, do professor e do saber. Por exemplo, a área 2 relaciona-se com o professor e o aluno, excluindo as variáveis do saber. Jonnaert e Borght (2002) comentam que a função do contrato didático é, especialmente, ampliar a área 7, onde as três famílias de variáveis se encontram.

O contrato didático pode ser exemplificado na situação em que o professor de Matemática inicia a sua aula introduzindo o conteúdo de função afim. Ele escreve no quadro a definição, dá exemplos, aplica os exercícios e, em seguida, resolve-os todos. Faz todo esse procedimento sem comunicar previamente aos alunos. Por outro lado, os alunos já esperavam esse procedimento do professor, existindo a participação de ambas as partes no jogo didático. As expectativas do professor tanto quanto as dos alunos foram atendidas nessa relação implícita do contrato didático.

Outros elementos teóricos são relacionados a esse contrato e são essenciais ao funcionamento do sistema didático. São eles: a situação adidática e a devolução, nos quais é ressaltado o papel do aluno intermediado pelo professor (BROUSSEAU, 1986).

A situação adidática pode ser materializada por uma situação criada pelo professor com a intenção do ensino de um determinado conceito matemático. Essa intenção de ensino não é revelada ao aluno, mas ele consegue aplicar esses conhecimentos em diferentes situações, como por exemplo, na resolução de problemas sem a intervenção do professor. Nesse sentido, o aluno terá adquirido "esse conhecimento quando for capaz de aplicá-los, por si próprio, às situações com que se depara fora do contexto de ensino, e na ausência de qualquer indicação intencional." (Brousseau, 1996, p. 49-50). Essa situação, tem a finalidade de introduzir os conhecimentos com significados que proporcionem a compreensão dos conceitos abordados, realçando o papel do aluno.

Ligada à situação adidática, temos a devolução, que é a maneira de comunicar um problema ao aluno, fazendo com que ele se sinta o único responsável a respondê-lo, isto é, tornando o problema seu, de forma a aceitar a responsabilidade na condução da resposta, realizando um desenvolvimento autônomo. Nesse sentido, "o ensino é a devolução ao aluno de uma situação adidática, e a aprendizagem é uma adaptação a esta situação". (BROUSSEAU, 1996, 51).

Segundo Araújo, Brito Lima e Câmara dos Santos (2011), nem todas as aulas e as expectativas são atendidas, o que faz com que o professor tenha uma postura específica para que os alunos tenham sucesso; no caso, levando a facilitar, de formas diferentes, a sua prática pedagógica. Essas práticas são denominadas "efeitos de contrato didático".

### 2.2.1. Alguns Efeitos do Contrato Didático

Na condução das aulas pelo professor, alguns efeitos do contrato didático estabelecido podem surgir. Brousseau (1996) denomina alguns desses efeitos como:

Topázio, Jourdain, Deslize Metacognitivo, Utilização Abusiva da Analogia e o Envelhecimento das Situações de Ensino.

Iniciaremos com o efeito Topázio. Apresentaremos, a seguir, uma situação na qual esse efeito pode surgir e, consequentemente, os outros efeitos

Imaginemos uma aula de Matemática básica em uma turma de alunos recém-ingressos no ensino superior. Em determinado momento da aula, o professor escreve uma função do segundo grau e constrói o seu respectivo gráfico, definindo o valor máximo e mínimo do domínio. Logo depois, pergunta à turma qual o domínio e a imagem da função. Depois de alguns minutos de silêncio, o professor insiste na pergunta e alguns alunos começam a dar respostas erradas, como, por exemplo, confundindo os valores do domínio pelos valores da imagem.

O professor, desejando que os alunos cheguem à resposta correta, promove uma renegociação[35] do contrato estabelecido inicialmente, começando a resolver parcialmente a função ao apresentar o valor mínimo do domínio da função. Como alguns alunos continuam a responder errado e outros continuam em silêncio, o professor vai respondendo pouco a pouco, até, finalmente, chegar à resposta completa, caracterizando o efeito Topázio.

Brousseau (2008, p. 80), destaca que, quando o professor faz “perguntas cada vez mais fáceis, tenta obter o máximo de significação do máximo de alunos. Se os conhecimentos em questão desaparecem por completo, estamos diante do efeito Topázio”.

O professor, ao continuar a sua aula sobre função quadrática, pergunta aos seus alunos como pode eles relacionar o conceito de função a uma situação do cotidiano. Os alunos começam a relacioná-lo com situações absurdas ou improváveis de existir, como, por exemplo, na construção de objetos cilíndricos ou esféricos utilizando funções quadráticas. Como o professor não deseja o debate, evitando, assim, as possíveis perguntas que podem surgir por parte dos alunos, admite essas possíveis relações, afastando um possível fracasso (BROUSSEAU, 1996), caracterizando no efeito Jourdain.

Em outra situação, o professor, ao perceber o fracasso dos alunos em relação à compreensão do conceito de função quadrática, utiliza a representação pelo diagrama de

[35] A renegociação de contrato deve ser realizada na situação didática, quando o “aluno que não consegue ultrapassar a dificuldade e ligar, através do conhecimento, a sua ação aos resultados obtidos, a responsabilização deve ser renegociada ...” (BROUSSEAU, 1996, p. 54).

setas, para explicar o domínio e a imagem com a sua lei de correspondência, mas a sua ênfase fica na representação utilizada, afastando a compreensão real do conceito. Nesse sentido, Brousseau (1996, p. 43) comenta que, quando o aluno fracassa em uma atividade de ensino, o professor “pode ser levado a justificar-se, para prosseguir a sua ação, a tomar as suas próprias explicações e os seus meios heurísticos como objetos de estudo no lugar do verdadeiro conhecimento matemático”. Esse efeito Brousseau (1996) denomina deslize metacognitivo.

Na continuação da mesma aula, o professor coloca um problema no quadro de função quadrática, para os seus alunos, e diz que, para chegar à solução, é necessário utilizar a fórmula de Bhaskara. Os alunos incialmente não conseguem responder o problema, o professor é, então, obrigado a renegociar o contrato, apresentando um problema semelhante com a sua respectiva resposta. Nesse momento, os alunos tiveram um pequeno avanço, mas sem sucesso. Mais uma vez, o professor apresenta o problema e responde com outro exemplo análogo ao primeiro, explicitando as técnicas a serem utilizadas na resolução.

Com as repetidas explicações à base de problemas análogos, os alunos conseguem responder ao primeiro problema proposto pelo professor; no caso, os alunos “obtêm a solução de uma leitura das indicações didáticas, e não de um investimento no problema” (BROUSSEAU, 1996, p. 45). Esse efeito é denominado “utilização abusiva da analogia” e tem uma relação estreita com o efeito Topázio, produzindo situações em que o professor apresenta continuamente respostas parciais ao problema, fazendo o aluno se distanciar do saber em jogo.

Por último, apresentamos o efeito do envelhecimento das situações de ensino. Imaginemos o mesmo professor preparando o material de ensino para as próximas aulas de Matemática, nas quais o conteúdo de função quadrática será ensinado a novas turmas. Ele percebe que a reprodução das mesmas aulas não tem o mesmo efeito para a turma de alunos descrita incialmente, nem para outras possíveis turmas. Então, ele tem “uma necessidade bastante grande de mudar, pelo menos, a formulação de sua exposição ou das suas instruções, os exemplos, os exercícios e, se possível, a própria estrutura da aula” (BROUSSEAU, 1996, p. 46). Essa mudança de postura do professor é importante para favorecer um ambiente de aprendizagem dos conceitos matemáticos abordados, fazendo com que as situações didáticas vivenciadas pelos alunos sejam significativas.

### 2.2.2. As Rupturas de Contrato

Ao analisar as relações implícitas ou explícitas que se estabelecem no contrato didático, verificamos que muitas delas se manifestam ocorrendo rupturas ou não das regras contratuais. Brousseau (1986) comenta que o mais importante não é tentar explicitar todas as regras que aparecem no contrato didático, mas as suas possíveis rupturas.

As rupturas de contrato são elementos importantes no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, pois promovem a compreensão dos conceitos trabalhados pelo professor. Segundo Araújo, Brito Lima e Câmara dos Santos (2011), tais conceitos, a serem repassados pelo professor de forma diferente das atuais, promovem uma tensão entre professores e alunos, fazendo com que os alunos utilizem novas formas de conduzir as suas respostas, ocasionando as rupturas de contrato. Nesse sentido, podemos considerar a seguinte afirmação de Sarrazy (1995, p. 6): "De fato, a aprendizagem vai repousar não sobre o funcionamento do contrato, mas sobre suas rupturas".

Araújo, Brito Lima e Câmara dos Santos (2011) apresentam, em sua pesquisa, resultados que representam momentos de ruptura de contrato. A pesquisa foi aplicada em uma turma de 8° ano do ensino fundamental de uma escola da rede particular da cidade do Recife, no estado brasileiro de Pernambuco. Na ocasião, foi entregue ao docente responsável uma lista de problemas de álgebra; sua escolha do problema foi motivada pelo objetivo de proporcionar uma ruptura de contrato didático. O modelo dos problemas não era convencional, isto é, eram problemas que os alunos não estavam acostumados a resolver.

O problema analisado pelos pesquisadores tem o seguinte enunciado: Em São Paulo, tenho um sobrinho a menos que em Recife. Gastei R$ 200,00 na compra de presentes para os sobrinhos do Recife e R$ 120,00, para os de São Paulo. Com isso, todos os meus sobrinhos receberam presentes do mesmo valor. Quantos sobrinhos tenho em São Paulo e no Recife?

É um problema cuja resposta não é esperada pelos alunos por não corresponder a um valor inteiro, mas um valor racional. Segundo os pesquisadores, durante a aula, vários questionamentos foram levantados pelos alunos e pelo professor, gerando momentos de tensão, "por se defrontarem com um problema diferente do que eles estavam acostumados a resolver, o que indica o motivo da ruptura do contrato." (ARAÚJO; BRITO LIMA; CÂMARA DOS SANTOS, 2011, p. 749).

Outro exemplo de ruptura de contrato é apresentado por Jonnaert e Borght (2002), que relatam uma situação ocorrida em uma turma de 5ª série do ensino fundamental. A situação acontece quando os alunos utilizam a técnica de dividir por 4 um número natural quando solicitados a multiplicar por 0,25, como, por exemplo, 500 x 0,25 (neste caso, a divisão é exata). Nessa situação, os alunos dividem 500 por 4, obtendo o mesmo resultado de 500 x 0,25. Mas, no momento em que o professor apresenta um número não divisível por 4, os alunos se deparam com uma situação nova, necessitando os alunos novos de conhecimentos e o professor, de uma renegociação do contrato vigente, para gerar uma ruptura.

Algumas das devoluções podem gerar rupturas de contrato, fazendo com que o aluno se depare com uma situação diferente, a qual enseja novos conhecimentos para resolução de problemas. Mas nem sempre o aluno consegue avançar nesse sentido, sendo preciso que haja a intervenção do professor, isto é, que seja devolvido ao professor o problema. Nesse momento, que o professor compreende a necessidade de sua intervenção e assume o seu papel novamente, gera uma renegociação do contrato didático, caracterizando uma contradevolução[36]. Assim, "por meio das rupturas didáticas do contrato, o professor deve descobrir os limites da devolução e aceitar as contradevoluções do aluno que pede para mudar de estratégia." Portanto, no jogo didático gerado pelas rupturas de contrato, ocasionada pelas devoluções e pelas contradevoluções, "leva a evolução das relações do aluno com o saber", criando uma dinâmica própria do contrato didático (JONNAERT; BORGHT, 2002, p. 194).

A observação das rupturas de contrato pode proporcionar uma visão da evolução de uma situação didática proposta, sendo o contrato didático considerado o motor da relação didática e as rupturas, o seu combustível. Segundo Jonneart e Borght (2002, p. 195), a relação didática se "alimenta de rupturas de contrato em torno de um projeto de ensinar e de um projeto de aprender".

[36] "... em uma espécie de contradevolução, o aluno não está mais em condições de responder às expectativas do professor. Mais do que isso, nesse exato momento da relação didática ele deve pedir ao professor para renunciar a ela (JONNAERT; BORGHT, 2002, p. 194).

A mudança de postura do professor e dos alunos mediados pelo saber em questão poderá efetivar uma ruptura no contrato vigente[37], a qual possibilitará uma divisão de responsabilidades perante um contrato didático estabelecido. Neste sentido, o que são analisadas são as relações implícitas ou explícitas estabelecidas no contrato didático e de que modo elas se manifestam, efetivando rupturas, ou não, das regras anteriormente estabelecidas.

### 2.3. O PEP e a Noção do Contrato Didático

Durante o desenvolvimento do PEP, são geradas mudanças nas praxeologias do professor e dos alunos, ocasionando o crescimento das OM e estabelecendo responsabilidades partilhadas relacionadas ao saber em jogo. As considerações de Rodríguez, Bosch e Gascón (2007) ressaltam que as possibilidades de aplicações de um PEP e de sua eficácia, na incorporação de resoluções de problemas, no processo de ensino e de aprendizagem, estão ligadas a uma partição de responsabilidades definidas pelo contrato didático.

Para Chevallard, Bosch e Gascón (2001, pg. 205), "o Contrato Didático é acionado quando, sob a coordenação do professor, o aluno entra, verdadeiramente, em contato com uma obra concreta para estudá-la e a aprende". A questão geratriz proposta pelo professor de Matemática tem a função de desenvolver, nos alunos, a intenção de buscar uma resposta através de pesquisas e estudos, e isso gera relações implícitas e explícitas entre o professor, aluno e o saber.

Retomando a ideia de Jonnaert e Borght (2002), que representa as áreas de riscos e os espaços de diálogos nas situações didáticas (ver a figura 2), na aplicação do PEP, existe a possibilidade de ampliação da área do diálogo, com a condução da aula para uma articulação entre os pólos (professor, aluno, saber) e a diminuição da área de risco, o que resulta em uma melhor didática e uma boa aprendizagem dos conteúdos matemáticos em sala de aula.

[37] No contrato didático, existem regras implícitas e explicitas no jogo didático. No momento em que essas regras são quebradas, isto é, as expectativas do aluno ou do professor não são concretizadas, gerando tensões, emergem as rupturas de contrato (BROUSSEAU, 1996).

Na análise do contrato didático, os seus efeitos podem estar presentes no desenvolvimento do PEP, os quais podem apresentar pontos importantes referentes ao processo de ensino e aprendizagem. Os efeitos podem indicar as mudanças dos contratos didáticos, as suas renegociações e as rupturas estabelecidas durante o desenvolvimento das OM.

No que se refere à ruptura de contrato, pode ser comparada a um contrato implícito unindo o professor e o aluno, na medida em que o aluno tem a surpresa de que não consegue resolver o problema e em que há a surpresa do professor, que se depara com a insuficiência de sua capacidade de ensinar. Nesse sentido, produz uma crise, gerando negociações para buscar um novo contrato com vistas à aquisição de novos conhecimentos; então, "é o conhecimento matemático que resolverá as crises surgidas com as rupturas de contrato." (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 220).

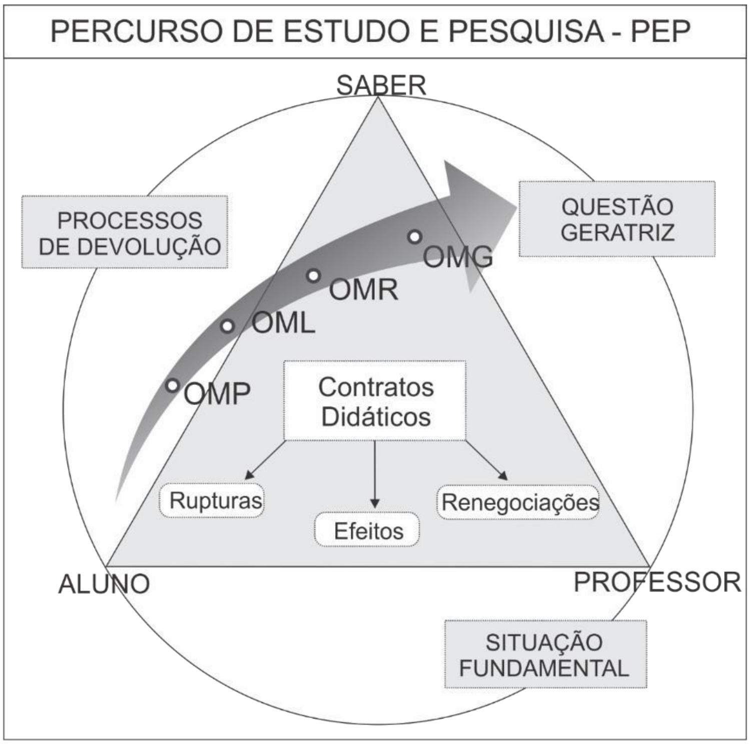
O Percurso de Estudo e Pesquisa tem, na sua essência conceitual, a finalidade de avaliar o ensino dos conceitos matemáticos que proporcionam a aprendizagem, cuja análise de sua condução, ao se observar as possíveis rupturas, torna-se importante.

Destacamos, inicialmente, dois momentos nos quais pode acontecer a ruptura ao aplicarmos o PEP. O primeiro está relacionado à apresentação da questão geratriz aos alunos. Neste caso, ao se depararem com uma questão na qual o enunciando é aberto, no sentido de levar a vários possíveis caminhos para encontrar a resposta. O aluno se depara com uma nova expectativa, quebrando um contrato didático que tinha sido antes estabelecido (FONSECA; CASAS; BOSCH; GASCÓN, 2009). Já o professor enfrentará novas situações geradas pelas novas expectativas estabelecidas pelo aluno.

Tomando por base Araújo, Brito Lima, Câmara dos Santos (2011), o segundo momento de ruptura está relacionado à evolução das OM, que podem gerar momentos de tensão, por demandarem novos conhecimentos e formas diferentes para a resolução das questões surgidas durante o percurso de estudo e pesquisa.

Em uma situação didática na qual seja apresentada uma questão geratriz e em que o aluno inicie a resolver por um tipo de tarefa relacionada a uma organização matemática pontual, evolui-se, no desenvolvimento da resolução do problema, para uma organização matemática local, e consequentemente, para uma organização matemática regional. Neste processo de ensino e aprendizagem, os contratos didáticos e suas renegociações são estabelecidos, os efeitos de contrato tornam-se aparentes e evidentes, e suas rupturas são destacadas. A figura a seguir representa o processo da evolução do PEP e sua relação com alguns elementos do contrato didático.

Figura 5 - Relações entre alguns elementos da TAD e do CD




Fonte: próprio autor (2019)

No desenvolvimento do PEP, nos momentos em que as OM são mudadas por outras mais complexas, existe a possibilidade de identificar os efeitos e as possíveis rupturas de contrato, com a finalidade de analisar a sua evolução. A evolução das OM é desenvolvida e a relação entre o professor, o aluno e o saber são estabelecidas a partir do contrato didático, graças ao qual renegociações podem acontecer naturalmente. Os efeitos do contrato didático devem ser observados, principalmente quando se relacionam com as renegociações e rupturas, pelo fato de eles apresentarem mais elementos para a compreensão do processo de mudança de uma OM para outra, e revelarem o comportamento do professor e de seus alunos nesta evolução.

A situação fundamental e a devolução estão presentes em todo o processo de aplicação do PEP, podendo ser relacionadas, inicialmente, com a questão geratriz e com as suas questões derivadas, proporcionando um sentido dos conceitos abordados e o andamento didático do dispositivo, como também as contradevoluções (JONNAERT;

BORGHT, 2002), que têm um papel importante na adequação do desenvolvimento do dispositivo didático.

No que diz respeito à noção de contrato didático, eles são estabelecidos, os seus efeitos e suas rupturas, serão os principais elementos as serem observados no desenvolvimento do PEP em nossa pesquisa, por entendermos que são suficientes para responder parcialmente a nossa questão de pesquisa. Porém, não descartamos a presença e a importância dos outros elementos citados referentes à noção do contrato didático no desenvolvimento do PEP.

### 2.4. A Psicologia Cognitiva no Ensino da Matemática e o Ciclo de Solução de Problemas

Apresentaremos alguns pontos que consideramos pertinentes da Psicologia Cognitiva e a sua relação com o ensino da Matemática, trazendo uma proposta de solução de problemas com base no estudo da cognição humana.

Iniciaremos com uma breve introdução sobre a Psicologia Cognitiva, por acharmos importante compreender a sua trajetória histórica e epistemológica, assim como o seu papel atual nas pesquisas educacionais e, consequentemente, a sua importância nas pesquisas relacionadas ao ensino de Matemática e suas contribuições nas metodologias de ensino e aprendizagem. Por último, apresentaremos o ciclo de solução problemas, o qual apresenta elementos teóricos que podem se relacionar com o PEP e o CD, com a finalidade de construirmos meios de análise para verificarmos indícios de aprendizagem do conceito de função, ao aplicarmos um PEP.

#### 2.4.1. Uma Breve Introdução à Psicologia Cognitiva

A Psicologia Cognitiva é um campo de estudo da Psicologia com influência e contribuições em diversas áreas de conhecimento, como, por exemplo, no ensino das diversas disciplinas escolares, na Medicina, na Administração de Empresas, entre outras. A sua atuação diversificada tem colocado a Psicologia Cognitiva como uma das principais áreas de interesse de pesquisa nos diversos institutos e universidades do mundo. Devido a sua importância nos diversos tipos de pesquisas, e, principalmente, na Matemática, apresentaremos uma breve contextualização do desenvolvimento teórico da Psicologia Cognitiva, caracterizando as suas principais influências e seus métodos de pesquisa. Ressaltamos que essa contextualização se torna importante para caracterizarmos melhor a nossa pesquisa.

Segundo Sternberg e Sternberg (2017), os historiadores da Psicologia destacam a Filosofia e a Fisiologia como as suas primeiras raízes conceituais, e, a partir delas, outras linhas de pensamento foram desenvolvidas, até chegar às áreas de atuação da Psicologia tal qual a conhecemos hoje. De modo geral, a Filosofia busca compreender a natureza na sua amplitude de formas e visões diferentes do mundo, geralmente por meio da introspecção[38]. No caso da Fisiologia, ela procura um estudo científico que contenha formas vitais na matéria, com resultados fundamentados em métodos empíricos, isto é, baseando os seus estudos na observação. Essas duas bases conceituais evoluíram as suas discussões a partir da Dialética[39] e influenciaram o desenvolvimento da Psicologia, gerando discussões que levaram para diferentes visões da compreensão da mente humana.

Duas linhas de pensamento têm influenciado as discussões, na área da Psicologia, durante o seu desenvolvimento: o racionalismo e o empirismo. O racionalismo tem a ideia de que o "conhecimento se dá por meio de análise da lógica", não necessitando de experimentos para construir mais conhecimento. Platão (428 - 348 a.C), seu principal representante, acreditava que o conhecimento se dava por meio do pensamento lógico. Mais tarde, René Descartes (1596 – 1650), um dos principais representantes do racionalismo e famoso pela frase: "Penso; logo, existo.", acreditava que o pensamento introspectivo e reflexivo era superior aos estudos baseados na observação.

No caso do empirismo, a aquisição do conhecimento se dá por meio da "experiência e observação" da observação do comportamento e dos processos são essenciais. Os seus principais representantes são Aristóteles (384 – 322 a.C.), que acreditava que o conhecimento era dado pela observação e pela experiência, e John Locke (1632 – 1704), que defendia que as pessoas nasciam sem conhecimento e o iam adquirindo por meio da observação e experiência.

---

[38] Observação e análise de si, com vistas a estudar a sua própria pessoa; ou, então, com vistas a conhecer o espírito humano em geral (CLÉMENT; DEMONQUE; HANSEN-LOVE; KAHN, 1994, p. 203).

[39] No seu sentido lato, Interação dinâmica e fecunda entre elementos opostos, quer se trate de fatos ou de pensamentos; no sentido estrito: arte da discussão ou técnica do diálogo, com o intuito de descobrir a verdade através de perguntas e respostas (CLÉMENT; DEMONQUE; HANSEN-LOVE; KAHN, 1994, p. 96).

As duas visões tiveram influência por séculos no desenvolvimento da ciência, até que o filósofo Immanuel Kant (1724 – 1804) sintetizou dialeticamente as duas ideias, destacando o lugar das duas visões no desenvolvimento científico (STERNBERG; STERNBERG, 2017, p. 6). As duas visões são importantes ao analisarmos o desenvolvimento da Psicologia Cognitiva. Segundo elas, as observações com base empírica foram estruturadas e fundamentadas teoricamente, existindo uma relação de mão dupla.

Sternberg e Sternberg (2017) afirmam que as origens da Psicologia Cognitiva têm diferentes ideias e abordagens, nas quais o desenvolvimento foi baseado nos posicionamentos dialéticos. Um deles registrou-se entre o estruturalismo e o funcionalismo.

O estruturalismo[40] é considerado a primeira escola de pensamento da Psicologia, voltada para "compreender a estrutura (configuração de elementos) da mente e as suas percepções". Um dos seus principais representantes é o psicólogo Wilhem Wundt (1832 – 1920); suas ideias influenciaram o estruturalismo na Psicologia, tendo a introspecção[41] como um dos principais métodos utilizados. Com as diversas críticas em relação ao método da introspecção e a observação concentrada nas estruturas, surge um movimento alternativo ao estruturalismo, que é o funcionalismo.

O funcionalismo[42] tinha a função de "compreender o que as pessoas fazem e por que fazem", destacando a compreensão dos processos do funcionamento da mente humana. Como o interesse do funcionalismo estava centrado nas aplicações práticas, foi conduzido a abordagens pragmáticas, levando ao pragmatismo[43]. Destacamos dois importantes representantes do funcionalismo: William James (1842 – 1910), com pesquisas centradas na atenção, consciência e percepção; e John Dewey (1859 – 1952), sendo destacado com suas abordagens pragmáticas na Educação. Esses dois

[40] Método geral que consiste em privilegiar as estruturas dos fenômenos a conhecer, ou seja, a fazer prevalecer as relações entre os termos de um conjunto, para explicar o seu funcionamento (CLÉMENT; DEMONQUE; HANSEN-LOVE E KAHN; 1994, p. 134).

[41] É um método que procura observar, de forma consciente, os processos de pensamento humano, buscando elementos básicos de um objeto ou de um processo (STERNBERG; STERNBERG, 2017).

[42] A Psicologia toma como objeto de estudo não as estruturas da consciência, mas as suas funções (DORON; PAROT, 2001).

[43] Doutrina filosófica introduzida por Charles S. Pierce em 1878, fala que a significação de um conceito é constituída pelos seus efeitos práticos; o sentido do conceito do sol, por exemplo, é, portanto, o calor, a luz e todos os efeitos conhecidos do sol (DORON; PAROT, 2001).

pesquisadores tiveram grande influência na condução do pensamento da Psicologia Cognitiva contemporânea (STERNBERG; STERNBERG, 2017, p. 7).

O interesse em saber como as pessoas aprendem foi se tornando o objeto de estudo mais focado da Psicologia, levando a surgir outras correntes de estudos, uma delas chamada Associacionista. Esta corrente de estudo tende a "examinar como os elementos da mente, por exemplo, eventos e ideias, podem ser associados para resultar em uma forma de aprendizagem" (STERNBERG; STERNBERG, 2017, p. 10). Essas associações[44] podem resultar em três vertentes: contiguidade, similaridade e contraste. Os seus principais representantes foram o Hermann Ebbinghaus (1850 – 1909), se destacando com os trabalhos relacionando à repetição na aprendizagem, e o Edward Lee Thorndike (1874 – 1949), destacando, em seus estudos, o papel da satisfação e a nomeação da lei do efeito[45], ideias que precederam a abordagem behaviorista.

Com a evolução das pesquisas na Psicologia, a utilização de animais foi se tornando mais frequente para investigar as relações existentes entre o estímulo e a resposta, tomando forma e dando base teórica para uma abordagem behaviorista. Esta abordagem está centrada na "relação entre o comportamento observado e os eventos ou estímulos ambientais". Um dos seus principais representantes foi o psicólogo Ivan Pavlov (1849 – 1936), com destaque para o estudo da aprendizagem clássica condicionada[46], a qual abriu caminho para o behaviorismo. Uma das correntes do behaviorismo foi o behaviorismo radical[47], tendo John Watson (1878 – 1958) e B. F. Skinner (1904 – 1990) como os seus principais representantes. Watson não utilizava os pensamentos ou seus mecanismos em suas pesquisas, acreditando que os estudos deveriam ser centrados na observação do comportamento. Já Skinner acreditava que todas as maneiras de observar o comportamento humano, incluindo os comportamentos relacionados à aprendizagem, poderiam explicar as reações ao ambiente. As contribuições desses estudiosos tiveram

[44] A contiguidade diz respeito às associações que ocorrem ao mesmo tempo; a similaridade, às que possuem propriedade e características semelhantes; o contraste, às situações que apresentam polaridade (STERNBERG; STERNBERG, 2017).

[45] A lei do efeito está relacionada ao recebimento de um estímulo, o qual tende a produzir respostas se o organismo for recompensado (STERNBERG; STERNBERG, 2017).

[46] Estudou o comportamento involuntário, iniciou as suas pesquisas observando cachorros que salivavam ao verem o responsável pela alimentação levar a comida; em outro momento, os cachorros salivavam ao verem o responsável pela alimentação, mesmo sem o alimento, acontecendo a resposta. Pavlov, defendia que a resposta dos cachorros indicava uma forma de aprendizagem (STERNBERG; STERNBERG, 2017).

[47] Entende-se por behaviorismo radical os fenômenos sentidos por introspecção, considerados comportamentos como os outros, isto é, submetidos aos mesmos tipos de determinismos e acessíveis à análise experimental (DORON; PAROT, 2001, p. 153).

influências na aprendizagem, na linguagem e na resolução de problemas (STERNBERG; STERNBERG, 2017, p. 11).

Com a limitação em alguns aspectos do behaviorismo, como: a não abordagem de atividade complexas da aprendizagem da linguagem e da solução de problemas; a observação apenas do comportamento, descartando-se o estudo da mente; e a utilização de animais, com o controle do ambiente dos experimentos. Surgiram críticas, o que fez surgir, durante 1950, um movimento chamado Revolução Cognitiva. O cognitivismo é "um conjunto de concepções psicológicas cujo objeto principal é o estudo dos processos de aquisição dos conhecimentos e de tratamento da informação" (DORON; PAROT, 2001, p. 145).

Segundo Sternberg e Sternberg (2017), o Cognitivismo explica como as pessoas pensam, considerando boa parte do comportamento humano; e é entendido, de certa maneira, como uma junção das formas de análise de como as pessoas pensam e aprendem do Behaviorismo, que utiliza análises quantitativas, e do Gestaltismo[48], este último que considera os processos mentais internos. Durante o desenvolvimento da Psicologia Cognitiva, a sua atuação foi determinante em diversas áreas, como, por exemplo: na Psicologia Computacional, conduzindo pesquisas que levam computadores a se comunicarem com humanos de forma independente, ou a tomarem decisões de situações sem o intermédio de uma pessoa, levando ao que conhecemos hoje como Inteligência Artificial (AI).

Na aviação, usa-se a AI no caso de manuseio de alavancas posicionadas na cabine do avião e que são responsáveis para erguer os trens de pouso e para movimentar os aerofólios; estes, por serem iguais e terem funções diferentes, ocasionavam erros aos pilotos e graves acidentes; a AI também é utilizada nas propagandas, nas quais são usados conhecimentos da Psicologia Cognitiva pelos publicitários, para conseguirem os seus objetivos empresariais. Com o avanço da Psicologia, de forma teórica e prática, principalmente no que se refere ao comportamento e a suas relações com o pensamento humano, a expressão Psicologia Cognitiva foi consolidada.

[48] A Psicologia Gestalt entende que compreendermos melhor os fenômenos psicológicos quando visualizamos de forma organizada e estruturada. Eles utilizam os *insights* para compreender o evento mental não observável pelo qual alguém vai da situação de não ter a ideia sobre como resolver um problema para a situação de compreendê-lo totalmente no que parece ser um mero instante de tempo (STERNBERG; STERNBERG, 2017, 13).

Com a sua consolidação, desenvolveram-se diversos métodos de pesquisa que foram aperfeiçoados e aplicados nas diferentes áreas de conhecimento. Iremos apresentar, a seguir, de maneira sucinta, alguns métodos de pesquisa da Psicologia Cognitiva, tomando por base a descrição de Sternberg e Sternberg (2017).

Um dos métodos por eles usados são os experimentos laboratoriais, nos quais são controladas e analisadas, basicamente, as variáveis independentes e as variáveis dependentes. As variáveis independentes são reguladas e manipuladas pelo investigador, diminuindo ou excluindo a possibilidade de variação, como, por exemplo, a escolha da idade, do sexo ou da altura. As variáveis dependentes podem ser consideradas as respostas dos resultados influenciados, eventualmente, pelas variáveis independentes. Nesse processo de controle das variáveis, algumas informações são irrelevantes à pesquisa e são controladas de forma a não influenciar as variáveis dependentes; neste caso, recebem o nome de variáveis de controle. Da mesma forma, as variáveis que não influenciam as variáveis dependentes e que não necessitam de controle são chamadas de variáveis de confusão. No seu desenvolvimento, esse método apresentou outros elementos de análise[49] auxiliados pela probabilidade e estatística.

Outro método da Psicologia Cognitiva encontra-se nas pesquisas neurocientíficas, as quais estão centradas no desempenho cognitivo e nas estruturas celebrais. De forma geral, é composta de três categorias: *post-mortem*, que são estudos realizados após a morte de um indivíduo, buscando estabelecer relações cognitivas existentes antes da morte com as estruturas visíveis do cérebro, a exemplo dos estudos do cérebro de pessoas que possuíam uma inteligência extraordinária; estudo de imagens do cérebro, geralmente aplicado ao estudo das atividades celebrais de indivíduo com déficit cognitivo; e obtenção de informações dos processos celebrais durante o desempenho atividades normais de um indivíduo.

Os autorrelatos, o estudo de caso e a observação naturalística são métodos de pesquisas que podem obter informações de como as pessoas pensam nos diversos contextos existentes. Os autorrelatos são o processo no qual o indivíduo descreve o seu processo cognitivo em uma determinada situação de aprendizagem. Este método vai depender da confiabilidade de quem está relatando a situação, porque pode faltar com à

[49] A correlação é um elemento bastante utilizado nas análises das pesquisas cognitivas. Sternberg e Sternberg (2017, p. 23) descrevem a correlação como uma relação estatística entre, pelo menos, dois atributos, como as características dos participantes ou da situação.

verdade por diversos motivos ou não relatar todo o processo por esquecimento de dados. No estudo de caso, é realizada uma pesquisa profunda e detalhada de um indivíduo ao se deparar com uma determinada situação. Na Medicina existem vários estudos de caso, um dos mais conhecidos foi o do operário Phineas Gage, que sobreviveu a uma explosão no seu local de trabalho, ele foi atingido na cabeça, por uma haste de ferro, sofrendo danos no lóbulo frontal, o que ocasionou mudanças no seu comportamento; o seu caso foi estudado em vida e depois da sua morte. A observação naturalística são os estudos centrados no desempenho cognitivo, em situações diárias e em contextos não controlados.

Por último estão os métodos que utilizam a simulação por computador e a inteligência artificial. A simulação por computadores são pesquisas direcionadas para desenvolver programas que imitem função ou determinado processo dos seres humanos. Os mais conhecidos são os simuladores de aviões, de carros etc. No caso da Inteligência Artificial, os estudos são direcionados para o desenvolvimento de algoritmos que simulem e desenvolvam, de maneira independente, o pensamento humano.

A construção da Psicologia Cognitiva como uma área científica tem influência de linhas de pensamento que moldaram a sua base teórica e os seus procedimentos de pesquisa, sendo definida como "o estudo de como as pessoas percebem as informações, aprendem-nas, lembram-se delas e pensam nelas." (STERNBERG e STERNBERG, 2017, p. 30). A sua atuação está crescendo e se tornando diversificada nos diversos campos de estudos, auxiliando na comprovação de resultados científicos, como também na solidificação de fundamentações teóricas.

Uma de suas atuações expressivas está na Educação, existindo um destaque nas discussões teóricas educacionais, no auxílio de pesquisas e no desenvolvimento de práticas direcionadas para o ensino e a aprendizagem. No nosso caso, iremos direcionar o estudo para o ensino da Matemática, que iremos discutir no próximo subtópico.

### 2.4.2. A Psicologia Cognitiva e o Ensino da Matemática

Com a evolução das discussões sobre como as pessoas pensam e aprendem, muitas teorias, noções e métodos foram desenvolvidos, estudados e aplicados em adultos e, principalmente, em crianças. A Psicologia Cognitiva tem um lugar de destaque nessas discussões, contribuindo, de forma efetiva, para a compreensão de como aprendemos, e, consequentemente, para o desenvolvimento de métodos de ensino.

Ao tratarmos da Psicologia e da Educação nos deparamos com duas áreas de conhecimento que possuem as suas peculiaridades no seu desenvolvimento como área de estudos. Segundo Sprinthall (1993), os estudos da Psicologia estão centrados em técnicas de análises exaustivas e cuidadosas relacionadas ao significado de ser um humano, enquanto, na Educação, concentra os seus estudos nas práticas escolares.

Outro ponto a ser destacado é o equilíbrio entre a teoria e a prática, essencial para o desenvolvimento do ensino nas diversas áreas, nas quais uma valorização excessiva da teoria ou da prática pode não trazer resultados significativos. A esse respeito, Springtall (1993, p. 5) observa:

> Por um lado, a teoria sem prática pode ser uma especulação abstrata. A prática não guiada por uma teoria, por outro, pode resultar numa atividade ao acaso – ou pior ainda, frenética – sem um objetivo definido ou consequência relevante. (SPRINTHALL, 1993, p. 5)

Diante da busca desse equilíbrio entre a teoria e a prática, Sprinthall (1993) levanta quatro preocupações a serem consideradas simultaneamente pela Psicologia Educacional: o aluno, o professor, as estratégias de ensino e o conteúdo a ser ensinado. O aluno, por ser um indivíduo único, possuir características próprias, e cujo comportamento individual ou em grupo, deve ser considerado, principalmente suas variações e diferenças. O professor, diante dos seus sentimentos ocultos[50] direcionados aos alunos, em sala, pode gerar uma agenda oculta, ocasionando efeitos não intencionais do próprio professor ou dos seus alunos no desenvolvimento da aula. Uma terceira preocupação está relacionada às estratégias de ensino, em relação às quais pouco se sabia e que levava os professores a ensinarem de acordo com a sua experiência de vida, sem qualquer fundamentação teórica; no entanto, para conduzir as aulas, o professor necessita dominar estratégias de ensino e competências para que o resultado esperado seja alcançado positivamente, perante os seus alunos. Por último, há que considerar o conteúdo a ser ensinado. Neste caso, o professor necessita conhecer o conteúdo a ser utilizado em sala, saber dividi-lo e sequenciá-lo, tomando por base as suas prioridades de ensino.

[50] "Sentimento oculto" é a expressão utilizada por Sprinthall (1993) para representar o sentimento não expressado pelo professor aos seus alunos.

A Psicologia Educacional tem um papel importante no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos das diversas áreas de ensino, na maneira como busca articular meios para o professor utilizar as estratégias de ensino, possibilitando que o aluno consiga compreender o conteúdo abordado.

Durante o processo de associação da Educação com a Psicologia, vários caminhos de pesquisa foram traçados, várias teorias de aprendizagem consultadas, porém iremos apresentar as ideias de dois pesquisadores ligados à Psicologia Cognitiva e que influenciam, significativamente, as conduções metodológicas direcionadas ao ensino brasileiro, a saber: Piaget e Vygotsky.

Jean Piaget era biólogo e o seu trabalho sobre a Teoria Genética não foi direcionado para a Educação, mas teve uma grande repercussão e influência no ensino, gerando diversas ações educativas inspiradas em suas ideias. Piaget entende que a construção de conhecimento está relacionada à interação como meio em situações diferenciadas com quais o sujeito se depara, o que faz com que ele construa hipóteses para compreender os fenômenos que o cercam, existindo a assimilação[51] e a acomodação[52] como elementos desse processo. Na tentativa do sujeito de assimilar um conhecimento, surgem os desequilíbrios gerando os conflitos cognitivos, e, consequentemente, o sujeito busca o equilíbrio, com o objetivo de se adequar ao meio. Essa interação entre o sujeito e o meio gera a construção do conhecimento através de etapas que proporcionam o desenvolvimento da cognição do sujeito, que adquire, consequentemente o conhecimento específico (CORREIA; BRITO LIMA; ARAÚJO, 2001).

A teoria de Piaget é bastante discutida e vasta, com várias contribuições relacionadas à Educação, como a visão do erro no desenvolvimento da aprendizagem, que traz outra perspectiva na construção do conhecimento.

Lev Vygotsky, por sua vez, foi um psicólogo, e a sua obra foi bastante discutida no cenário educacional brasileiro, por volta dos anos finais de 1980 e início de 1990. Correia, Brito Lima e Araújo (2001) destacam as principais ideias de Vygotsky,

[51] A assimilação é simultaneamente produtora (do esquema e da situação), reconhecedora (da situação, dos <<alimentos >> ou dos argumentos do esquema) e generalizadora (em função das variações da experiência). Tal como sucede como na "acomodação", o trabalho de assimilação pode ser mais ou menos espontâneo ou dirigido, dependendo dos instrumentos postos à sua disposição no decorrer do desenvolvimento da inteligência (DORON; PAROT, 2001, p. 85).

[52] A Acomodação é a atividade pela qual os esquemas de ação e pensamento se modificam em contato com o objeto ou depois do processo de assimilação (DORON; PAROT, 2001, p. 25).

ressaltando que, a partir de uma análise sócio-histórica e psicológica, podemos ter elementos para compreender o processo de ensino e aprendizagem. Dentre as principais ideias estão: a relação dialética entre o indivíduo e a sociedade; as relações psicológicas superiores, as quais são originadas entre o indivíduo e o seu contexto sócio-cultural; a mediação do indivíduo com o mundo através de meios criados pelo homem; e o cérebro como base biológica das funções mentais.

Outra ideia de Vygotsky está relacionada à mediação. Nesse sentido, é importante ressaltar que o conhecimento não é construído pela interação direta entre o sujeito e o objeto, mas é mediado pelos instrumentos[53] e signos[54].

Também para Vygotsky, há a representação do objeto pela linguagem, com a função de comunicar, estruturar e organizar o pensamento. A linguagem, nas suas várias formas de representação, tem o papel essencial de comunicar aos indivíduos, de forma estruturada e organizada, o conhecimento historicamente acumulado, tendo a escola como uma das mediadoras desse processo.

A zona de desenvolvimento proximal (ZDP) foi outra ideia de Vygotsky bastante discutida; o ZDP é a distância entre o conhecimento que o aluno já possui, não necessitando de auxílio para realizar uma atividade, e o conhecimento que ele poderá adquirir para realizar uma atividade através de interações com outros indivíduos mais experientes (CORREIA; BRITO LIMA; ARAÚJO, 2001).

As ideias de Vygotsky se consolidaram com o tempo, influenciando até hoje muitas discussões metodológicas educacionais. No contexto do ensino da Matemática, existem inúmeros trabalhos que têm na sua base conceitual a Psicologia Cognitiva, com contribuições que direcionaram a forma de conduzir o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Butterworth (1996) apresenta uma série de trabalhos nos quais discute pontos teóricos da Psicologia Cognitiva voltada para a compreensão e aplicação dos conceitos matemáticos, especificamente para o raciocínio matemático e a aritmético.

Ashcraft (1996) apresenta um breve histórico dos últimos 20 anos de pesquisas da Psicologia Cognitiva relacionadas com o processo de operações aritméticas (adição e multiplicação), abordando o papel da memória no processo mental aritmético e os estudos cognitivos relacionados com a ansiedade diante do ensino da matemática. Basicamente,

---

[53] São objetos do mundo físico que medeiam a ação (CORREIA; BRITO LIMA; ARAÚJO, 2001).
[54] São instrumentos psicológicos mediando o próprio pensamento (CORREIA; BRITO LIMA; ARAÚJO, 2001).

o trabalho de Ashcraft (1996) tem como finalidade compreender como as pessoas pensam no momento em que estão realizando operações aritméticas simples, buscando identificar os processos cognitivos, as representações da memória e quais são os componentes mentais necessários para realizar as operações matemáticas.

Segundo Ashcraft (1996), as principais pesquisas da Psicologia Cognitiva tiveram início a partir de 1972, com os trabalhos de Guy Groen e de John Parkman, direcionados para a análise das operações aritméticas básicas. Eles abordaram o ensino da contagem, da adição e da multiplicação. Suas pesquisas abriram caminho para os estudos da Psicologia Cognitiva, trazendo contribuições relevantes para o ensino da matemática. Estas discussões surgiram entre a forte influência do behaviorismo no ensino, nos Estados Unidos, e suas ideias de estímulo e resposta, repetição e reforço. Apesar da influência do behaviorismo, a visão do ensino da aritmética era reconhecida em dois pontos: na compreensão dos conceitos e nos procedimentos aritméticos, destacando a diferença dos dois pontos.

Com a introdução do computador para auxiliar as pesquisas na Psicologia, ocorreu uma revolução na forma de desenvolver os estudos e analisar os dados, principalmente nessa área, na qual se começou a utilizar o tempo de reação (TR) como variável dependente primária. O auxílio do computador permitiu desenvolver uma análise estratégica, possibilitando analisar o desempenho da variável estudada de forma minuciosa, com um fluxo de informações através de um sistema de processamento, como por exemplo, o padrão de ouro[55], que está relacionado ao tempo de reação de determinadas atividades aritméticas, para compreender os processos mentais.

Também, conduziu estudos direcionados para a dependência do TR, ou latência da resposta, para tentar compreender os processos mentais subjacentes, intitulada, na maior parte dos casos, de *chonometric*[56]. Algumas pesquisas com o auxílio de computadores tiveram muita relevância, como a de Guy Groen e John Parkman, nas quais a partir de resultados processados de maneira computacional, foram desenvolvidos um modelo de quatro estágios da adição mental, trazendo discussões relacionadas à memória. Posteriormente, modelos diferentes foram desenvolvidos por outros pesquisadores, consolidando as discussões relacionadas ao pensamento aritmético (ASHCRAFT, 1996).

[55] Gold Standard (ASHCRAFT, 1996).

[56] Leva em consideração a medida do tempo necessário para os processos mentais de tratamento da informação e da tomada de decisão, inferida a partir do tempo de reação de escolha ou de uma das suas variáveis, tais como: tempo de identificação; julgamento de verdade e outras. (DORON; PAROT, 2001)

Consequentemente, o estudo da memória de trabalho ganhou destaque entre as pesquisas da Psicologia Cognitiva, permitindo uma discussão mais elaborada em relação ao desempenho matemático, especificamente às operações aritméticas, com várias pesquisas e experimentos.

Ashcraft (1996) comenta que diversos estudos da Psicologia Cognitiva voltados para o ensino da Matemática tiveram contribuições importantes e avanços nas discussões de ensino e nas suas metodologias. Muitos dos trabalhos estavam centrados na resolução de problemas matemáticos e na aritmética, tais estudos e seus resultados geraram possibilidades de aplicações em áreas afins, tais como: neurocognição; deficiências no pensamento matemático; diferenças interculturais; e ansiedade matemática. Todas estas discussões fizeram consolidar os estudos na área da cognição matemática, cujas contribuições vêm fortalecendo o ensino da Matemática.

As pesquisas da Psicologia Cognitiva voltadas para essa área abriram espaço para o desenvolvimento de outras áreas de estudo, como, por exemplo, a Neurociência. Esta área de estudo tem uma ampla atuação e inclui as áreas da neurociência molecular, celular, sistêmica, comportamental e cognitiva (LENT, 2010). Apresentaremos, a seguir, resumidamente algumas pesquisas que tiveram o foco no ensino da Matemática e são fundamentadas pela Neurociência Cognitiva, por entendermos que ela tem contribuído, de maneira efetiva, para o ensino da Matemática. Lent (2010, p. 6) define a neurociência cognitiva como a que "trata das capacidades mentais mais complexas, geralmente típicas do homem, como a linguagem, a autoconsciência, a memória e etc".

Dowker (2005) discute as relações entre a Psicologia, da Neurociência e a Educação voltada para a aprendizagem da aritmética. A sua pesquisa analisa como é desenvolvida, em crianças, a cognição aritmética, seu desempenho e suas diferenças individuais, como também em adultos saudáveis e em pacientes neuropsicológicos, ressaltando que não existe apenas uma habilidade aritmética, mas habilidades aritméticas.

Este pesquisador apresenta perspectivas da neurociência nas suas diferentes abordagens, ressaltando as diferenças individuais dos componentes da aritmética, como: os princípios e procedimentos aritméticos; o conhecimento dos fatos aritméticos: a compreensão dos princípios aritméticos com a finalidade de usá-los para conceber novos padrões de estratégias; o estímulo aritmético e a capacidade de lidar com somas. O autor discute as questões geradas por contribuições internas (cérebro) e externas (meio ambiente, cultura e linguagem) que caracterizam as diferenças individuais do desenvolvimento matemático dos indivíduos. Ressalta a importância dos estudos relacionados ao desenvolvimento aritmético e do pensamento, interessando a psicólogos, educadores, neurocientistas, matemáticos e a formuladores de políticas educacionais, que necessitam do conhecimento aritmético para a atuação em suas respectivas áreas.

Destacamos o trabalho de Dehaene, Izard, Pica e Spelke (2006), os quais apresentam um estudo realizado com os índios Mundurukú da Amazônia, uma comunidade isolada e com pouco ou nenhum acesso à educação formal. Os sujeitos da pesquisa foram as crianças e adultos Mundurukú que participaram de testes não-verbais, com a finalidade de identificar a presença dos conceitos geométricos básicos, como: ponto, reta, paralelismo, formas geométricas, como também a utilização de mapas geométricos para identificar a ideia de direção, ângulo e distância.

A pesquisa utilizou imagens geométricas a partir das quais os participantes poderiam identificar e associar aos conceitos matemáticos abordados, nos quais os pesquisadores utilizaram o tempo médio de resposta como um dos parâmetros para analisar os resultados. Comparados aos resultados de crianças e adultos americanos, os resultados obtidos junto aos índios Mundurukú, verificou-se que o desempenho dos dois grupos de crianças foram idênticos, e, no caso dos adultos, os americanos tiveram um resultado significante melhor, chegando-se à conclusão de que os conceitos básicos geométricos e aritméticos são inerentes à mente humana, independentemente do contexto histórico e cultural dos povos.

Em outro trabalho, Dahaene, Izard, Pica, Spelke (2008) pesquisaram a representação e compreensão da noção dos números na comunidade dos índios Mundurukú. Foram aplicados testes que apresentavam escalas de 1 até 10 e de 1 até 100, com a finalidade de analisar a capacidade dos indígenas de registrar os números cardinais.

Na pesquisa, foram utilizados computadores que auxiliaram os indígenas nos seus registros, sendo utilizada a neuroimagem como um dos elementos de análise. Também foram comparados os resultados dos testes com crianças e adultos americanos, concluindo que os ocidentais estimam grandes quantidades numéricas de forma compreensiva e jugam com o pensamento linear quando os números são apresentados de forma simbólica. No caso dos Mundurukú, foi apresentada uma não linearidade na mesma situação. Ao final do trabalho, os pesquisadores estabelecem uma relação entre a neurociência e o ensino da Matemática, apresentando quais partes do cérebro são afetadas e sua relação com o ensino.

Butterworth (2002) apresenta uma associação entre a linguagem e a matemática. Destaca que a matemática também é uma linguagem, mas com os seus próprios elementos. O autor discute patologias que afetam as habilidades na linguagem, quais podem não afetar o raciocino matemático, apresentando o caso do Mr. Harvey como exemplo, chegando à conclusão de que áreas do cérebro responsáveis pela linguagem são áreas diferentes das habilidades matemáticas, a exemplo do raciocínio lógico, que se localiza em uma área diferente da linguagem. Na sua discussão, faz uma ligação da Psicologia com o logicismo matemático, citando as obras de Jean Piaget. Em seguida, discute alguns problemas patológicos relacionados à compreensão matemática, a exemplo da discalculia, caracterizada por dificuldades no desenvolvimento das competências aritméticas.

Apesar de vários estudos da Psicologia Cognitiva estarem concentrados na aritmética, existem trabalhos que abordam outros conceitos matemáticos. Destacamos a pesquisa de Lautenschlager, Ribeiro e Zana (2017), na qual analisam como os professores concebem o conceito de polinômio antes e depois de participarem de uma formação continuada, verificando as concepções estruturais e operacionais e tal conceito; os autores utilizam como fundamentação teórica estudiosos da Psicologia Cognitiva que abordam a ideia de conceito e de sua estruturação. A formação continuada analisada pela pesquisa teve 31 encontros presenciais e 9 a distância, abordando temas como grupos colaborativos, conjunto dos numéricos (naturais, inteiros, racionais), anéis de polinômios e funções. Como resultado da pesquisa, chegaram à conclusão da necessidade de, na formação do professor de Matemática, ser contemplado o conhecimento conceitual e procedimental de forma equilibrada.

Temos, ainda, a pesquisa de Fernandes, Muniz, Mourão-Carvalhal e Dantas (2015), que abordaram o estudo da memória, da aprendizagem e da indissociação entre o corpo e a mente direcionada para a aprendizagem matemática. A pesquisa foi direcionada para investigar quais possíveis impactos um programa pedagógico pode ter ao ser aplicado em atividades didático-manipulativas usando o corpo e o movimento. O estudo foi realizado com 37 crianças que apresentavam indicativos de deficiência de aprendizagem e com idades de 7 até 12 anos. Constataram, na pesquisa, que, após as atividades propostas no estudo, os alunos melhoram a sua autonomia acadêmica, o senso de autoeficácia e a compreensão dos conceitos matemáticos.

A Psicologia Cognitiva tem contribuído para o ensino da Matemática, apresentando estudos com resultados expressivos e consolidados, trazendo avanços no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, proporcionando uma sólida fundamentação teórica para elaboração de métodos de ensino. Além dos pesquisadores citados anteriormente, temos: Brito (2011); Figueredo (2007); Fonseca e Barros (2016), e outros, que contribuem para a discussão em torno da utilidade e da importância da Psicologia Cognitiva na educação matemática.

### 2.4.3. Ciclo da Solução de Problemas

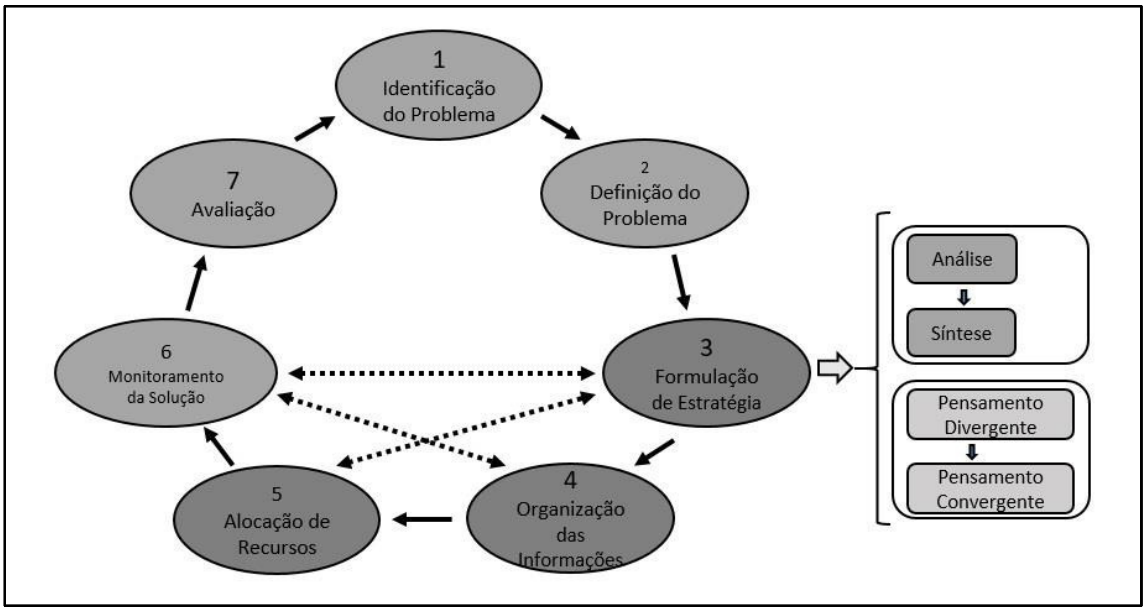
Durante muitos momentos de nossas vidas, nos depararmos com situações problemáticas reais ou construídas com a finalidade de ensino e aprendizagem, que necessitam de decisões e procedimentos de resoluções que podem ser de forma simples ou complexa, de forma individual ou coletiva. Sternberg e Sternberg (2017) apresentam um procedimento para resolver problemas chamado "ciclo de solução de problemas" e que pode auxiliar nos caminhos para buscar as possíveis respostas, levando a uma análise da situação, a uma organização dos elementos existentes no problema, e, finalmente, a um procedimento de resolução.

Segundo Sternberg e Sternberg (2017), ao nos depararmos com um problema não resolvido, estamos no estado inicial, no qual faremos um esforço para chegar à solução, chamada "estado de meta". Entretanto, no caminho seguido do estado inicial para o estado de meta, podem existir vários obstáculos com diferentes níveis de dificuldade, necessitando de estratégias para sua superação, e consequentemente, entrando em um ciclo de solução. Os passos que fazem parte do ciclo de solução de problemas são os seguintes: (PRETZ, NAPLES, STERNBERG, 2003, pp. 3 e 4):

1) Reconhecer ou identificar o Problema: neste passo inicial, existe uma análise preliminar da situação para saber, de fato, se temos um problema a ser resolvido ou se é uma situação já resolvida; caso seja um problema, seguimos para o próximo passo;
2) Definir e representar o problema mentalmente: com a identificação de que temos um problema, procuramos definir e representar com a finalidade de compreender qual exatamente é nosso problema;

3) Desenvolver a estratégia da solução: para este passo, são sugeridos caminhos para o levantamento de informações que o problema pode apresentar, sua análise, que é o desmembramento da totalidade de um problema complexo para elementos mais simples, e a complementação do processo, que é a síntese, constituindo o agrupamento de vários elementos que possam trazer resultados úteis. Também é sugerido outro par de estratégias, o pensamento divergente, que é o processo de articular diversas soluções possíveis para posteriormente aplicarmos o pensamento convergente, cuja finalidade é transformar as diversas possibilidades em uma solução razoável;
4) Organização do conhecimento sobre o problema: com as informações coletadas em seguida, parte-se para a organização dos dados, com a finalidade de buscar uma articulação entre as informações, traçando um caminho da resolução do problema;
5) Alocar os recursos mentais e físicos para resolver o problema: este passo está relacionado à verificação do tempo, ao esforço, ao dinheiro empregado para esse fim etc. Um ponto a ser destacado é a utilização dos recursos mentais, essenciais para o planejamento e a elaboração de estratégias de resolução de problemas, nos quais a serem utilizados com mais eficiência leva a um esforço menor para a conclusão do problema;
6) Monitore o seu progresso em direção ao objetivo: está relacionado a uma análise constante do percurso escolhido para resolver o problema, verificando a sua viabilidade;
7) Avalie a solução: após chegar à solução possível do problema, uma avaliação é essencial para identificar se, realmente, o problema foi resolvido.

Figura 6 - Ciclo de Solução de Problemas




Fonte: Sternberg e Sternberg (2017)

Ressaltamos que os passos dos ciclos não seguem uma ordem estrita. Na maioria das situações, existe a flexibilização dos passos, que podem até mesmo acontecer de forma simultânea. A solução bem-sucedida de um problema pode acontecer independentemente de uma ordem, existindo a possibilidade de avançar ou retroagir nas nossas decisões, além de outras variáveis que podem contribuir ou não para a solução do problema, como, por exemplo, a influência de nossas emoções a resolver um determinado problema (PRETZ; NAPLES; STERNBERG, 2003).

Segundo Sternberg e Sternberg (2017), os problemas podem ser classificados em dois tipos: os bem estruturados e os mal estruturados. Os problemas bem estruturados, também chamados de bem definidos, são dos tipos cujo caminho ou procedimento para chegar à sua solução já conhecemos, como, por exemplo: calcule o valor da área do quadrado ou determine os zeros da seguinte função $f(x) = x^2 + 5x - 1$.

Este tipo de problema tem uma presença marcante nas escolas, principalmente nas aulas de Matemática, nas quais os alunos são levados a responder listas de exercícios com o mesmo procedimento de resolução. Alguns estudos da Psicologia Cognitiva têm um tipo de problema bem definido denominado "problemas em movimento", pelo fato de existir um número de movimentos para solucioná-los, como por exemplo: o problema da travessia do rio entre os orcs e os hobbits. Neste problema existe um único barco de três lugares que deve atravessar os três hobbits e os três orcs que estão na mesma margem para a outra margem do rio, sabendo-se que a quantidade dos orcs não pode ser maior que a quantidade dos hobbits dentro do barco e nas duas margens do rio, com a consequência de os hobbits serem devorados pelos orcs[57].

Existem outras versões deste problema com anjos e diabos, ovelhas e lobos etc. Este tipo de problema tem um procedimento de solução linear, fazendo com que o indivíduo siga etapas sequenciadas na sua solução. Uma das dificuldades que pode nele existir é no momento em que se revela a incapacidade de superar uma das etapas, existindo uma paralisação da resolução do problema.

Este é um método de pesquisa geralmente aplicado para analisar a solução dos problemas bem definidos e cuja finalidade é entender melhor como os seres humanos resolvem problemas semelhantes.

Entre o estado inicial e o estado de meta de um determinado problema existe o espaço do problema, que é o levantamento e a testagem de todos os procedimentos e estratégias possíveis. Sternberg e Sternberg (2017) destacam duas estratégias: o algorítmico, que é caracterizado por um conjunto de procedimentos repetitivos que seguem uma ordem linear na resolução do problema; este tipo de estratégia é bem reproduzido pelos programas de computadores, que conseguem realizar muitos cálculos em pequenos espaços de tempo, diferentemente do ser humano, que tem uma limitação mental e fisiológica para tanto. No caso dos humanos, ao tentarem resolver determinados problemas, muitas vezes utilizam as chamadas estratégias heurísticas, que são "estratégias informais, intuitivas e especulativas que conduzem, algumas vezes, a uma solução eficaz e, outras vezes não". Elas podem ser caracterizadas como atalhos de resoluções que o ser humano utiliza para resolver um determinado problema. As heurísticas podem ser do tipo: análise de meios-fins; avançar; retroagir; gerar e testar[58] (STERNBERG e STERNBERG, 2017, p. 385).

A representação dos problemas bem definidos é um ponto estudado pela Psicologia Cognitiva, e traz questionamentos de como problemas semelhantes podem ser resolvidos pela mesma pessoa, de formas diferentes. Sternberg e Sternberg (2017) ilustra esta situação comentando sobre problemas isomórficos com a mesma estrutura formal de resolução e conteúdo diferente. Um exemplo disso é o problema da travessia dos orcs e dos hobbits, com o problema da travessia dos anjos com os diabos. A estrutura de

[57] Para a visualização do problema, ver Sternberg e Sternberg (2017, p. 384).
[58] Para saber mais sobre os tipos de heurísticas, ver Sternberg e Sternberg (2017, p. 386).

resolução dos problemas é a mesma, mas com um formato de conteúdo e contexto diferente. Outro exemplo é quando resolvemos problemas que buscam determinar as raízes reais de uma equação de segundo grau, quando, geralmente, é utilizada a fórmula de Baskara para sua resolução, porém a apresentação do problema pode ser diferente em outras situações de ensino.

Existem outros de jogos e desafios que se enquadram em tipos de problemas bem definidos e que são utilizados para compreender como os seres humanos pensam em determinadas situações simuladas ou reais, nos quais contribuem para as suas análises. No caso dos problemas mal estruturados, também chamados “problemas mal definidos”, eles não apresentam, inicialmente, um percurso para serem solucionados, nem uma solução aparente. Diferentemente dos problemas bem definidos, nos quais os caminhos para solucionar os problemas são claros, nos mal definidos as etapas e o processo de solução são construídos, podendo até não existir uma única solução, mas soluções viáveis.

Pela sua representação variada e de possíveis soluções alternativas, existe a necessidade de avaliar os caminhos possíveis de solução e escolher um, justificando a sua escolha. Um exemplo de problema mal definido pode ser o seguinte: Uma mulher que morava em uma cidade pequena casou-se com 20 homens nessa mesma cidade. Todos ainda estão vivos e ela nunca se divorciou de nenhum deles. Apesar da situação, ela não infringiu a lei. Como fez isso?[59]

Segundo Sternberg e Sternberg (2017. p. 390), os problemas mal definidos também podem ser considerados problemas de *insight*[60], para os quais se deve ter um olhar diferenciando, pelo fato de existirem alternativas de resolução diferentes dos habituais. No caso, “é necessário reestruturar a representação do problema para solucioná-lo”.

Os *insights* surgem durante a resolução dos problemas propostos e são responsáveis pelo andamento das resoluções, contribuindo para a consolidação dos conceitos abordados. Podem ser relacionados a momentos súbitos ou especiais na resolução de um grande ou pequeno problema, mas também são consequências de muito

[59] Problema retirado de Sternberg e Sternberg (2017, p. 389).
[60] Em inglês, significa <<visão interior>>. Os representantes da Psicologia da Gestalt designam assim uma espécie de iluminação intelectual, instantânea, global e direta. Trata-se de uma <<intuição>> que pode aparecer tanto no animal como no homem. É pelo *insight* que se explica a inteligência prática dos animais superiores, por exemplo a experiência de Kohler com o seu chimpanzé Sultan (REIMÃO; MADUREIRA; MUÑOZ, 1978, p. 313).

esforço e estudo, podendo ser graduais e incrementados no decorrer do tempo, nos quais também podem surgir problemas bem definidos.

> Eu defino *insight* como "um entendimento". O insight pode se referir, por exemplo, ao entendimento de um mecanismo, uma analogia, um princípio indutivo ou uma reconceitualização. Por essa definição, o *insight* pode ser adquirido de várias maneiras, incluindo uma aquisição incremental de conhecimento ou através da realização repentina de uma ideia" (SMITH, 1996, p. 232, tradução nossa).[61]

Os *insights* foram estudados pelos psicólogos gestaltistas[62], os quais ressaltam que, para a sua solução, um problema deve ser visto e compreendido na sua totalidade. Sternberg e Sternberg (2017), baseado nos estudos de Max Wertheimer, cita os pensamentos produtivo e reprodutivo que envolvem os *insights*. O pensamento produtivo supera as associações existentes dos conceitos abordados, não se constituindo em um pensamento linear, enquanto o pensamento reprodutivo consolida as associações existentes, seguindo, na maioria das vezes, um pensamento linear. A neurociência também realiza estudos analisando os *insights* em determinadas situações: utiliza a ressonância magnética funcional para observar as atividades celebrais; e os eletroencefalogramas, para identificar a rapidez da atividade de alta frequência durante os *insights*.

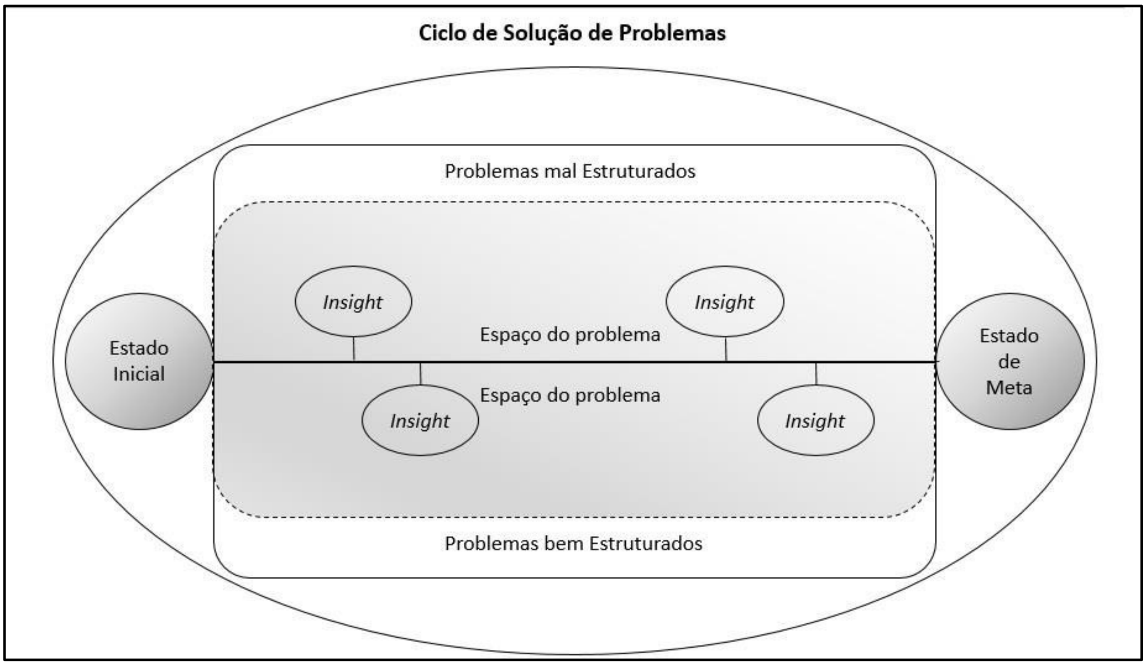
Para representar o processo do estado inicial até o estado de meta, nos quais os problemas mal definidos e os bem definidos se encontram juntamente com os *insights*, utilizaremos a figura 07:

---

[61] "*Insight* I define as "an understanding." Insight can refer, for example, to understanding a mechanism, an analogy, an inductive principle, or a re-conceptualization. By this definition, insight can be acquired in a variety of ways, including an incremental acquisition of knowledge or via a sudden realization of an idea" (SMITH, 1996, p. 232).

[62] Gestalt ou Psicologia da Forma, nascida da reflexão fenomenológica sobre o <<vivido>>, esta doutrina apoia-se em experiências irrefutáveis relativas à percepção nos animais e no homem. Verifica que um elemento muda de significação conforme esteja colocado em tal ou tal conjunto: a mesma figura num quadro diferente não parece idêntica a ela mesma. A Psicologia da Forma afirma, em seguida, que o todo é percebido antes das partes que o constituem: uma melodia é ouvida sem que se tenha consciência das notas que a compõem; pode-se transpô-la sem que o seu carácter próprio seja alterado (REIMÃO; MADUREIRA; MUÑOZ, 1978, p. 272 - 273).

Figura 7- Representação do Estado Inicial ao Estado de Meta




Fonte: próprio autor (2019)

Ressaltamos que essa representação é um resumo do processo da resolução de um problema, o qual pode se repetir várias vezes, em um mesmo problema, dependendo de sua característica e do caminho tomado para a sua solução. No processo, estão incluídas as estratégias de resolução, como as algorítmicas e as heurísticas, podendo ser utilizadas nos problemas bem definidos ou nos problemas mal definidos, nos quais os *insights* podem acontecer.

Durante a resolução de problemas, alguns obstáculos podem surgir, ocasionando interpretações errôneas, caminhos equivocados ou a paralisação da resolução. Um dos fatores que podem prejudicar a resolução de um problema é a configuração mental realizada pelo indivíduo, na qual se constrói uma estrutura mental para representar o problema em seu contexto, como também o seu procedimento de resolução.

A configuração mental também pode ser chamada de entrincheiramento, no qual o indivíduo fica entrincheirado em uma configuração mental fixa de resolução, por ter realizado vários problemas anteriores com o mesmo procedimento, dificultando uma mudança de estratégia ao se deparar com um tipo problema que necessite de procedimentos diferentes de resolução dos anteriores.

Outra configuração mental é a fixação funcional, que é a incapacidade de compreensão de algo que possui uma função específica na utilização de outras funções, dificultando a utilização de conceitos antigos em problemas novos. Os estereótipos também são considerados uma configuração mental, caracterizados pelas crenças apresentadas por membros de grupos sociais e relacionados a certas características, como, por exemplo: os meninos sabem mais Matemática que as meninas; a Matemática é pronta e acabada; todos os problemas de Matemática são complicados (STERNBERG e STERNBERG, 2017).

A fixação funcional e os estereótipos, são configurações mentais presentes em muitas situações reais ou não, que podem prejudicar o andamento de qualquer resolução de problemas.

Sternberg e Sternberg (2017) comenta sobre os tipos de transferências[63] relacionadas às configurações mentais que focam em determinados tipos de problemas ou nas estratégias de resoluções. Uma das transferências é a negativa, acontecendo quando a experiência negativa de resolver um problema anterior é transferida para outro problema, dificultando a sua resolução.

Outra situação é caracterizada quando a configuração mental é transferida para a resolução de outro problema, facilitando a sua resolução. Neste caso, temos a transferência positiva. Por último, há a transferência de analogias, relacionada à capacidade de transferir configurações mentais construídas em problemas anteriores já resolvidos para resolver outros problemas semelhantes. Esse processo é bem utilizado nos problemas matemáticos nos quais as estratégias de resolução de problemas já resolvidos são utilizadas em novos problemas; esse tipo resolução é caracterizado como solução de problema análogo[64]. A importância das transferências de analogias "não é a similaridade do conteúdo, mas quão próximos seus sistemas estruturais de relação estão para se igualarem" (STERNBERG e STERNBERG, 2017. p. 399).

Um processo importante na resolução de problemas é a incubação, que trata do pensamento ou reflexão do problema por um tempo ou um por período determinado ou não, com a finalidade de diminuir o efeito da transferência negativa. A incubação é uma "quebra na resolução do problema que permite que as fixações improdutivas se enfraqueçam e que as associações mais úteis surjam (DAVIDSON, 2003, p. 162, tradução

[63] A transferência diz respeito ao aproveitamento do conhecimento ou às habilidades relacionadas a determinadas situações problemáticas para outras (STERNBERG; STERNBERG, 2017, p. 396).
[64] Para saber mais. ver Novick e Holyoak (1991).

nossa)[65]. A incubação pode ser durante o sono, nas atividades diárias, nos passeios, isto é, em momentos em que o indivíduo não pense no problema diretamente, sendo processado no subconsciente.

Outros elementos estudados pela Psicologia Cognitiva são importantes na resolução de problemas. Um deles é a expertise, que significa “habilidades ou realizações superiores que refletem uma base de conhecimentos bem desenvolvida e organizada”. A expertise está relacionada ao acúmulo e à organização de experiências de conhecimentos adquiridos pelo indivíduo, as quais podem superar as dificuldades e gerar novas estratégias de resoluções de problemas.

Outro elemento, ainda, é a criatividade, que pode ser definida “em termos globais como o processo de produzir algo que seja original e válido ao mesmo tempo”, estando presente nas criações das obras, nas diversas descobertas e nas soluções de problemas (STERNBERG e STERNBERG, 2017. p. 402 e 411).

O ciclo de solução de problemas pode ser aplicado nos problemas bem definidos ou mal definidos. Nos bem definidos, podemos ter os problemas de movimento, nos quais os algoritmos e as heurísticas são estratégias que podem ser utilizadas na busca de sua resolução, como também os problemas isomórficos, aplicados em pesquisas da Psicologia Cognitiva.

Os problemas mal definidos são considerados mais difíceis de serem solucionados, por não apresentarem, de início, um procedimento de resolução conhecido; em seus vários momentos de resolução, podem acontecer geralmente *insights*. As dificuldades e os auxílios na resolução de problemas são destacados, como as representações mentais e seus tipos de transferências, que estão presentes ou são aplicados em qualquer tipo de problema. Ressaltamos que nem todos os elementos apresentados irão fazer parte de nossa análise, mas a sua apresentação torna-se necessária para uma compreensão do ciclo de solução de problemas.

[65] "a break in problem solving allows unproductive fixations to weaken and more useful associations to surface"(DAVIDSON, 2003, p. 162).

## 2.5. O Percurso de Estudo e Pesquisa e o Ciclo de Solução de Problemas

Nas aulas de Matemática, é comum os professores recorrerem a problemas que possibilitem os alunos a mobilizarem o maior número de conceitos matemáticos possíveis, muitas vezes buscando uma situação real ou próxima da realidade, com a intenção de articulá-los ou relacioná-los com conhecimentos de outras áreas.

O Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) e o Ciclo de Solução de Problemas (CSP) apresentam estas características nos seus contextos teóricos e práticos, constituindo em áreas de pesquisa que podem contribuir, de maneira efetiva, para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Inicialmente, apresentaremos algumas pesquisas acadêmicas que buscaram relacionar a Teoria Antropológica do Didático e a Psicologia Cognitiva no campo do ensino da Matemática, com a finalidade de fazer uma mínima contextualização da aproximação dessas duas áreas, e, consequentemente, as possíveis relações entre o PEP  o ciclo de solução de problemas, justificando e apresentando alguns elementos teóricos que farão parte da análise de nossa pesquisa.

Começamos pela pesquisa de Fonseca e Barros (2016), que analisou a transição do ensino das noções de funções trigonométricas do Ensino médio para o ensino superior, no Brasil e na França, utilizando, para a sua análise, a TAD e a neurociência cognitiva. A análise da pesquisa foi realizada em duas partes: a primeira analisou os documentos oficiais do sistema de ensino, as macroavaliações e a organização matemática dos livros didáticos dos dois países, observando os objetos ostensivos e não ostensivos. Na segunda parte, foram analisadas atividades da disciplina de Cálculo I aplicadas a estudantes do nível superior de ambos os países, com a finalidade de identificar os níveis de funcionamento do conhecimento[66] e a possibilidade de existência da memória de longo prazo. A pesquisa concluiu que a transição do ensino médio para o ensino superior do ensino das noções de funções trigonométricas acontecem de modo diferente nos dois países: de forma lenta no Brasil e média, na França, pelo fato de existir uma ruptura no processo de transição motivada pela mudança de técnicas de um nível para outro, sem estarem fundamentadas pelo mesmo discurso tecnológico, influenciando negativamente

[66] Os níveis do funcionamento do conhecimento podem ser compreendidos como um conjunto de ferramentas desenvolvidas por Aline Robert para constituir uma análise epistemológica e didática e, com isso, organizar a hierarquia dos conhecimentos matemáticos que serão apresentados aos alunos, tanto do ensino médio como os do ensino superior (FONSECA; BARROS, 2016, p. 7).

o processo de transição. A pesquisa ressaltou a importância da articulação da TAD com a Neurociência Cognitiva, possibilitando a construção de elementos analíticos para responder à questão de pesquisa.

O estudo de Quintana (2005), parte da questão levantada por Georg Pólya (1957) relaciona as dificuldades que os alunos apresentam na resolução de problemas matemáticos e cita algumas figuras históricas que contribuíram para a discussão na aplicação da resolução de problemas, tais como: Sócrates (469aC-399aC); René Descartes (1596-1650); e John Dewey (1859 – 1952).

Também ressalta o papel da Psicologia Cognitiva desenvolvida pela escola Gestáltica, destacando o *insight* e algumas propostas de procedimento na resolução de problemas: a proposta de Graham Wallas, baseada na introspecção; a de Richard E. Mayer, que destaca os tipos de pensamentos cognitivos na resolução de problemas; e as etapas de resolução de problemas propostas por Georg Pólya.

A sua pesquisa teve o objetivo de analisar como melhorar as instruções matemáticas para facilitar a capacidade dos alunos na resolução de problemas matemáticos. Inicialmente, o estudo realizou uma pesquisa das dificuldades apresentadas pelos alunos e relacionadas à resolução de problemas matemáticos, constatando a importância da metacognição no processo, até chegar na solução.

Em seguida, foi elaborado um modelo de resoluções de problemas matemáticos com a intenção de diminuir as dificuldades dos alunos relacionadas no processo de resolução, utilizando e desenvolvendo um percurso de estudo e pesquisa como referência metodológica. A questão geratriz no qual o PEP se baseava tratava da comparação de tarifas telefônicas de celulares utilizadas no país pesquisado. Para a sua análise, utilizou a TAD e os níveis de conhecimento metacognitivos, que permitiram descrever alguns desses aspectos presentes na completude crescente das praxeologias matemáticas.

A pesquisa destaca a eficiência do PEP relacionado à resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, o qual proporciona um aumento e uma ampliação dos processos metacognitivos, fazendo com que os alunos tenham uma maior liberdade e autonomia nas resoluções dos problemas.

Em seguida, temos a pesquisa de Cavalcante (2018), que caracterizou o lugar do sujeito cognitivo na TAD ao se estabelecer um sistema didático no ensino de probabilidade na Licenciatura em Matemática, tomando por base para esta caracterização a aprendizagem situada.

Foram analisados os textos de Chevallard e os textos da antropologia social de Jean Lave, Etiene Wengel, Marcel Mauss e Mary Douglas, alicerçados nas noções fundamentais da TAD, e que estabeleceram uma discussão teórica fundamentada sobre a sua dimensão psicológica, como também possibilitou a construção de categorias para a análise da pesquisa, fortalecendo elementos teóricos para uma aproximação com a TAD.

A pesquisa foi realizada com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, na qual foi construído um processo empírico de observação participante, para analisar o funcionamento do sistema didático em torno do ensino da probabilidade. Para complementar as análises foram utilizadas as noções do contrato didático, no sentido de identificar, nos sujeitos envolvidos, as dificuldades, os obstáculos didáticos e as possíveis relações cognitivas com a probabilidade.

A pesquisa desenvolveu uma proposta de modelo epistemológico de referência (MER) direcionada para a formação de professores de Matemática no que diz respeito ao ensino da probabilidade, ressaltou a existência do sujeito cognitivo na TAD, caracterizada pelo efeito de uma dissonância[67] entre os discursos internos e externos presentes nas instituições que fazem parte da licenciatura de matemática, e por último, propôs três níveis de análise da dimensão cognitiva presente na TAD: 1) dimensão institucional, que corresponde à análise do contexto situado; 2) análise do funcionamento do sistema didático como uma prática social onde se encontra o didático e o cognitivo, de forma densa; 3) dimensão pessoal, que se materializa através da análise da participação e do engajamento dos sujeitos das instituições.

Além da existência de outras pesquisas que abordam, conjuntamente, a TAD e as teorias da Psicologia Cognitiva, os trabalhos de Fonseca e Barros (2016), Quintana (2005) e Cavalcante (2018) apresentadas anteriormente, trazem elementos que convergem para uma aproximação das duas áreas, nas quais se fortalecem as análises e que proporcionam uma visão mais detalhada do processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, possibilitando, também, uma reflexão relacionada à formação de professores de Matemática.

---

[67] No funcionamento do sistema didático nas instituições de ensino, essas interferências podem se traduzir, para nós, como dissonâncias no discurso institucional. A dissonância institucional ocorre quando as disparidades entre discursos e práticas institucionais agem como restrições explícitas ou não no funcionamento dos sistemas didáticos. Dizemos que essas dissonâncias, tendo origem no contrato institucional, interferem na formação dos contratos didáticos que se formam na instituição (CAVALCANTE; BRITO LIMA; ANDRADE, 2018, p. 205).

### 2.5.1. Os Passos do Ciclo da Solução de Problema e a TAD

Direcionaremos a nossa discussão para a análise das relações teóricas entre o ciclo de solução de problemas (CSP) e a TAD, como também utilizaremos alguns elementos do contrato didático para complementar a nossa discussão. Para destacar as possíveis relações, iremos discutir cada passo proposto no CSP, levantando os pontos pertinentes da nossa pesquisa.

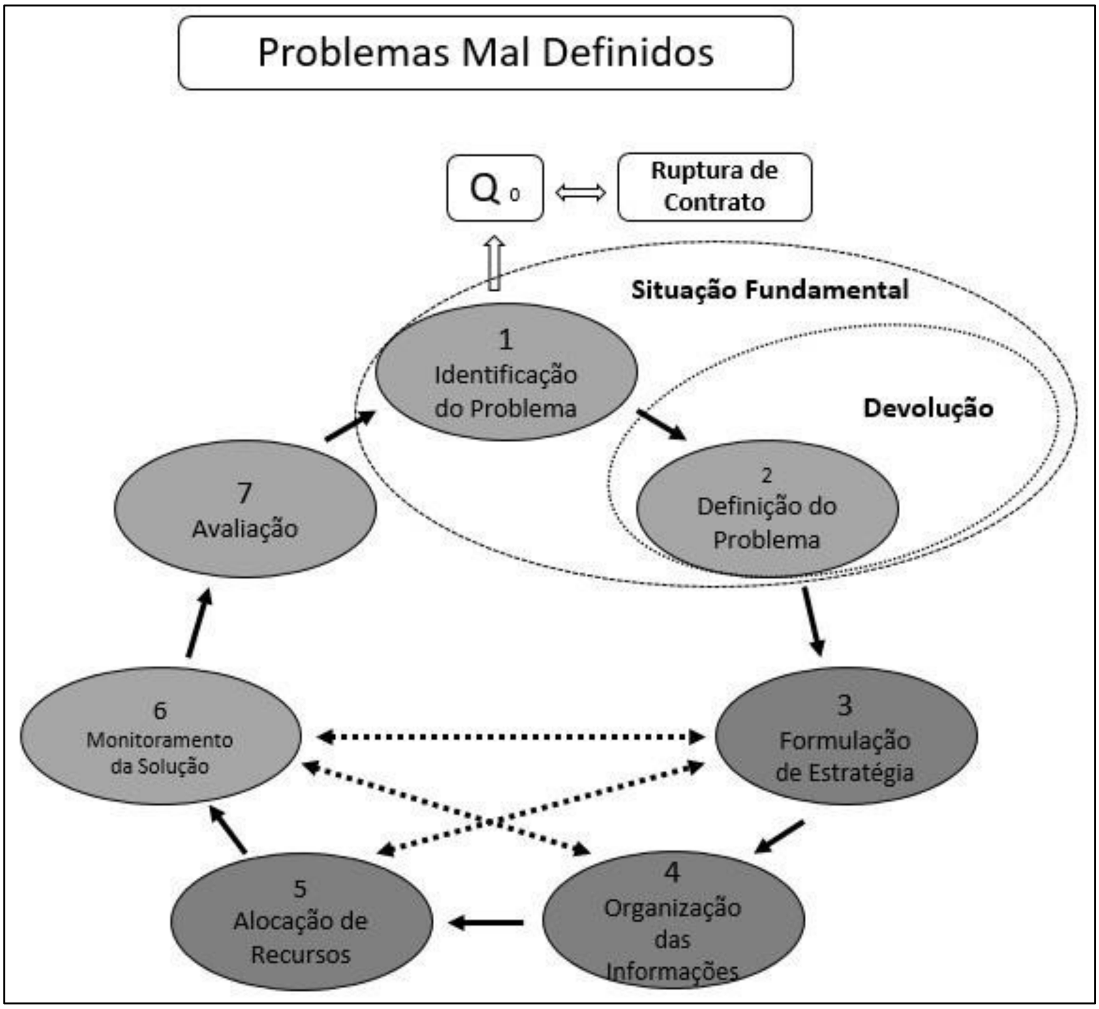
No primeiro passo, temos a identificação do problema, o qual podemos relacionar com o primeiro encontro do aluno com a questão geratriz $(Q_0)$. Apesar de o primeiro passo do ciclo de solução de problemas indicar que o indivíduo tem que identificar se existe ou não um problema a ser resolvido, geralmente, na aplicação do PEP, a questão geratriz é apresentada como um problema existente, excluindo a possibilidade de análise da existência ou não de um problema pelo aluno.

Neste momento, pode ser estabelecida uma regra de contrato didático (BROUSSEAU, 1996) pelo professor, que se caracteriza na apresentação de um problema aos alunos, que terão que resolvê-lo, como também de uma regra de contrato didático estabelecido pelos alunos que recebem o problema para ser resolvido. Outra questão a ser destacada, nesse primeiro passo, é a quebra do contrato didático no que diz respeito à apresentação da questão geratriz, a qual deve ser "“viva”" para a comunidade de estudo e cuja resposta não aparece diretamente acessível"(BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 84), ocasionando uma outra forma de apresentação do problema, diferentemente dos apresentados corriqueiramente nos livros e textos de ensino.

Na sua maior parte, a questão geratriz é representada por problemas contextualizados, abordando temas que fazem parte do cotidiano dos alunos ou problemas que mobilizem temas variados, como também problemas sem a identificação inicial da solução e dos conteúdos matemáticos abordados, neste caso relacionados com os problemas mal definidos (STERNBERG; STERNBERG, 2017), não apresentando inicialmente uma solução do problema.

O segundo passo trata da definição do problema. Destacamos que, neste momento, torna-se necessário que aconteça o processo de devolução (BROUSSEAU, 1996), pelo fato da possibilidade de o aluno iniciar as construções de suas configurações mentais (STERNBERG; STERNBERG, 2017) da resolução da questão geratriz, ocasionando a sua aceitação do problema, o que o torna responsável pela sua resolução. Outro elemento importante a ser destacado é a situação fundamental (BROUSSEAU, 1986), que deve estar presente nos dois primeiros passos, com a essencial função de ser um dos elementos para constituir o sistema didático $S(X;Y;\ Q_0)$ e para uma continuação do processo de ensino idealizado inicialmente pelo professor.

Figura 8 - Relações Existentes entre o Primeiro e Segundo passos do CSP




Fonte: Sternberg e Sternberg, (2017), adaptado pelo autor.

Ressaltamos que o processo de devolução e a situação fundamental não estão presentes exclusivamente nos dois primeiros passos do CSP, mas podem acontecer nos demais passos repetidamente. A nossa opção de representá-las nos dois primeiros passos está relacionada a sua presença marcante e essencial no início do processo da aplicação do PEP.

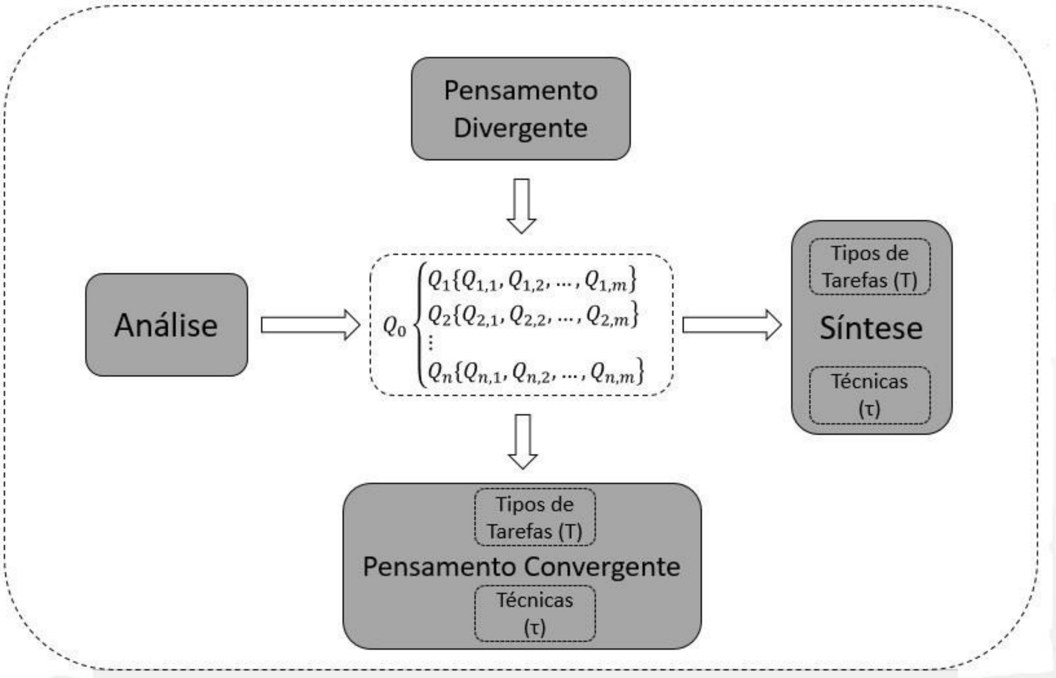
No passo 3, temos a formulação ou o desenvolvimento da estratégia de resolução, a qual apresenta como alternativa dois caminhos: o primeiro se inicia no momento da análise, e, consequentemente, vai até o momento da síntese; o segundo parte do pensamento divergente para o pensamento convergente. Ao utilizarmos o momento da análise na resolução do PEP, podemos fragmentar a questão geratriz em outras questões menores, isto é, estamos gerando questões derivadas. Parra, Otero e Fanaro (2013, p. 850) comentam que "os PEPs são gerados por uma pergunta $Q$ viva e rica, com forte poder gerador, denominada "pergunta geratriz", isto é, capaz de impor numerosas perguntas derivadas" (tradução nossa)[68].

Ao desmembrar a questão geratriz em outras questões derivadas, partimos para a síntese, que é o agrupamento de elementos que podem contribuir para a resolução das questões derivadas. No caso, temos os tipos de tarefas e técnicas utilizadas em outros problemas semelhantes que podem apresentar equipamentos praxeológicos necessários para a resolução.

Na segunda alternativa de resolução, iniciamos pelo pensamento divergente, o qual é mobilizado um estudo de várias soluções possíveis, podendo acontecer o processo de fragmentação da questão geratriz (CHEVALLARD, 2007) como uma das alternativas, e, consequentemente, mobilizando todos os elementos necessários para a sua resolução; no caso, os tipos de tarefas (T) e técnicas (τ) (CHEVALLARD, 2007a, 2007b; BOSCH e GASCÓN, 2010; BON; CASAS; BOSCH; GASCÓN, 2009).

[68] Los REI se generan por una pregunta Q viva y rica con un fuerte poder generador, denominada pregunta generatriz, es decir, capaz de imponer numerosas preguntas derivadas (PARRA; OTERO; FANARO, 2013, p. 850).

Figura 9 - Representação do Processo de Resolução do PEP pelo terceiro passo do Ciclo de Solução de Problemas




Fonte: próprio autor (2019)

A Imagem 09 representa a relação construída entre as estratégias sugeridas no Passo 3 do CSP, com a questão geratriz e suas derivadas. No caso, qualquer das duas estratégias apresentadas levam à fragmentação da questão derivada, mobilizando no processo tipos de tarefas, técnicas fundamentadas pelas suas tecnologias e teorias.

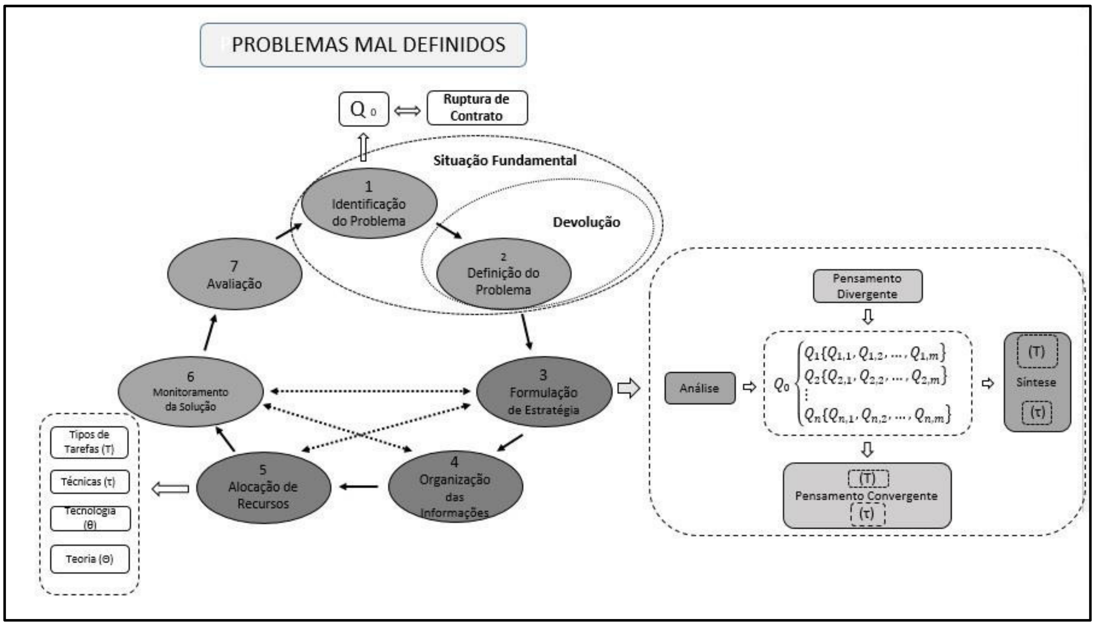
No passo seguinte do CSP, temos a organização das informações coletadas. Este Passo acontece quase que conjuntamente com o Passo 3. Neste momento, as informações são organizadas para buscar uma articulação entre si, com a finalidade de determinar o caminho a ser utilizado na resolução da questão. Existe uma relação direta com o modelo epistemológico de referência (MER) no qual o PEP se fundamenta para aplicar uma complexidade crescente nas organizações matemáticas (BOSCH; GASCÓN, 2010; LUCAS, 2015), contendo os tipos de tarefas, as técnicas, as tecnologias e as teorias que fazem parte do modelo. Esta relação acontece na medida em que o aluno organiza as suas informações para iniciar a sua resolução, a qual podemos comparar com o levantamento dos equipamentos praxeológicos disponíveis, realizando, simultaneamente, um monitoramento dos caminhos escolhidos para realizar as suas resoluções, existindo uma ligação direta com o Passo 6 do CSP. O MER tem uma influência considerável nas escolhas e decisões tomadas pelos alunos ao tentarem resolverem a questão geratriz, pelo fato de o PEP estar fundamentado pelo MER, como também por possibilitar ao professor vigilâncias e intervenções fundamentadas.

No Passo 5, acontece a alocação de recursos necessários para resolver o problema. Ele é desenvolvido simultaneamente com o Passo 3, isto é, no momento em que a estratégia está sendo formulada ou construída, os recursos estão sendo coletados e organizados através de suas configurações mentais (STERNBERG; STERNBERG, 2017), utilizando suas anotações, seus registros nos livros e textos de ensino, e outras informações coletadas através de outras fontes de pesquisas, como, por exemplo, nas fontes confiáveis da internet. Como nos passos 3 e 4, a presença dos blocos práticos e teóricos que formam as praxeologias estão presentes fundamentando as decisões tomadas pelos alunos.

Os passos 6 e 7 estão relacionados ao monitoramento da resolução escolhida pelo aluno, para que se possa verificar se as escolhas das técnicas (τ) para a resolução das questões são adequadas para a solução do problema, como também se a verificação da solução encontrada convém com a resposta esperada, no caso, a $R^{\heartsuit}$. Ressaltamos que podem existir outras relações entre o PEP e a CSP, como as análises dos momentos didáticos (CHEVALLARD, 1997, 1999) e os níveis de codeterminação (CHEVALLARD, 2001, 2004, 2007), porém estas possíveis relações não serão analisadas nesta pesquisa, mas futuramente, por entendermos que os elementos apresentados até o momento são suficientes para os nossos objetivos de pesquisa.

Diante de algumas relações apresentadas, chegamos à seguinte representação:

Figura 10 - Algumas Relações entre o PEP e o CSP

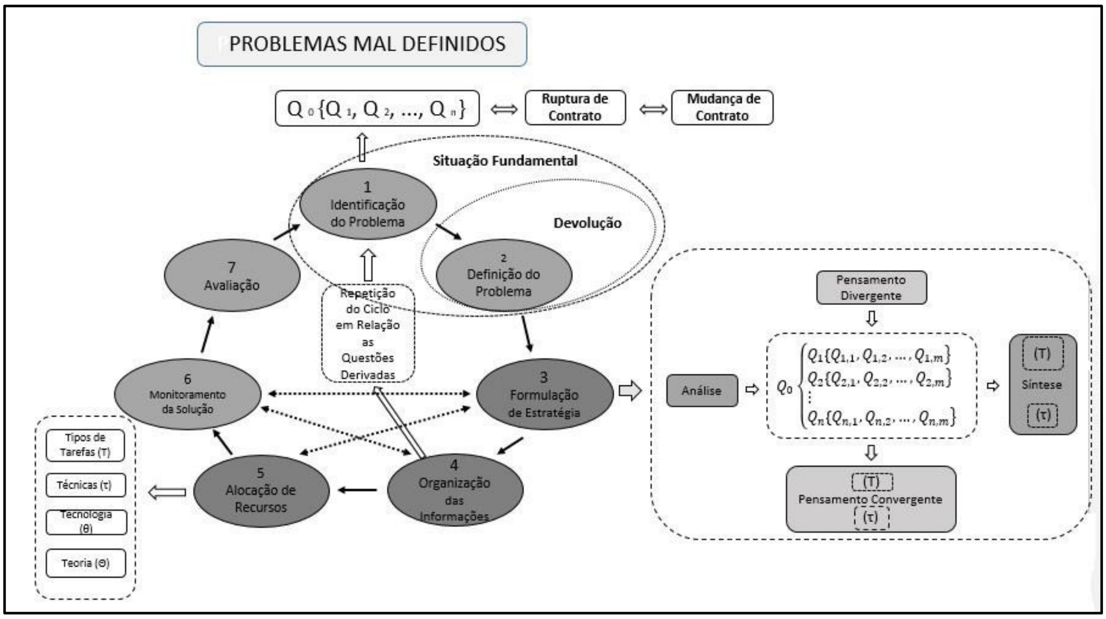



Fonte: Sternberg e Sternberg, (2017), adaptado pelo autor.

A Imagem 10 apresenta as relações existentes entre o PEP e o CSP, as quais justificam a aproximação teórica entre as duas áreas e os elementos que serão utilizados nas nossas análises; também apresenta alguns elementos do contrato didático que contribuem para a aproximação teórica. Observamos que, a partir da apresentação da questão geratriz, pelo professor, se inicia o processo de resolução de problemas baseado no CSP, no qual podem acontecer rupturas de contrato didático ou mudanças no mesmo.

A situação fundamental e a devolução são elementos igualmente importantes nos dois primeiros passos, podendo ocasionar uma articulação entre os blocos práticos e teóricos das praxeologias presentes e desenvolvidas no processo, possibilitando o monitoramento e a avaliação do caminho de resolução escolhida. Ressaltamos que o processo do CSP é repetitivo durante a aplicação do PEP, fazendo com que se inicie pela questão geratriz e se repita pelas suas questões derivadas, o que torna o processo cíclico a partir do Passo 4.

Figura 11 - Repetição do CSP na aplicação do PEP

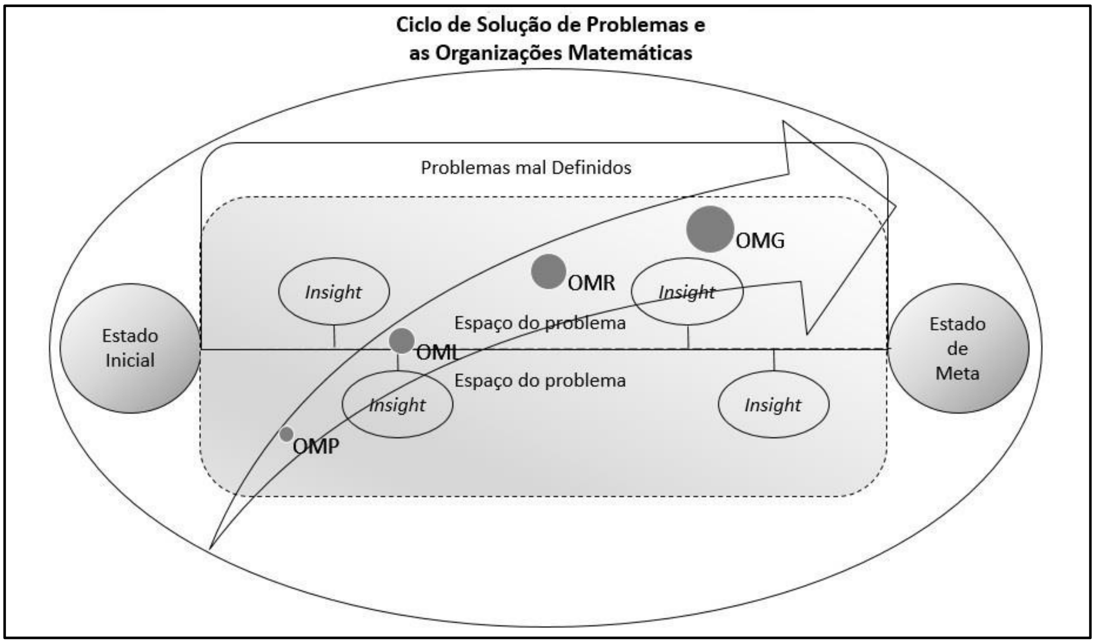



Fonte: Sternberg e Sternberg, (2017), adaptado pelo autor.

A imagem 11 apresenta a repetição do CSP durante o desenvolvimento de resolução da questão geratriz. Observamos que, no momento em que o aluno segue para o Passo 4, a questão geratriz tem proporcionado uma geração de outras questões derivadas, na qual o processo do CSP tende a se iniciar novamente. No momento da repetição, não existirá possivelmente uma ruptura de contrato gerada inicialmente pela questão geratriz, pelo fato de o aluno já estar inserido no sistema didático e ter existido o contato inicial com o tipo de problema representado pela $Q_0$, porém uma mudança ou adequação do contrato didático estabelecido pode existir no estabelecimento de cada questão derivada.

Outro elemento importante que pode estar presente no desenvolvimento do PEP e que faz parte do desenvolvimento do CSP são os *insights* (REIMÃO; MADUREIRA; MUÑOZ, 1978; STERNBERG; STERNBERG, 2017), nos quais são os momentos de resolução de um problema que possibilitam resolver situações pontuais ou gerais. Os *insights* são necessários para o andamento ou a conclusão do problema, e podem surgir durante a articulação dos conhecimentos adquiridos pelo indivíduo. O PEP é aplicado e desenvolvido tomando por base a complexidade crescente das organizações matemáticas, isto é, a partir de uma organização matemática pontual (OMP), espera chegar a uma organização matemática local (OML), e, consequentemente a uma organização matemática regional (OMR) e a uma organização matemática global (OMG). Durante esse processo, podem existir um ou vários *insights*, que podem acontecer no momento de mudança de uma organização matemática para outra.

Figura 12- Representação do Estado Inicial ao Estado de Meta com as Organizações Matemáticas




Fonte: Próprio autor (2019)

A Figura 11 representa a evolução crescente das organizações matemáticas presentes no desenvolvimento do PEP, juntamente com o CSP, partindo do estado inicial para o estado de meta, e apresentando, no processo, o possível surgimento dos *insight*s.

Smith (1996, p. 231) destaca que a pesquisa de R. W. Weisberg concluiu que "os problemas de *insights* são resolvidos por meio de um acúmulo crescente de conhecimento relevante para a solução" (tradução nossa)[69]. Neste caso, nós os relacionamos à complexidade crescente das organizações matemáticas, nas quais a sua evolução é ocasionada pelo acumulo de técnicas de maneira articulada, de forma a promover um aumento na compreensão das tecnologias e de suas teorias.

Os *insights* podem acontecer no momento da passagem de uma organização matemática para outra, quando, por exemplo:  o professor apresenta um problema o qual pode ser resolvido por um sistema de equações do primeiro grau, porém o aluno não sabe, inicialmente, que conceito matemático será utilizado para a sua resolução.

[69] "insight problems are solved via an incremental accumulation of knowledge relevant to the solution" (SMITH, 1996, p. 231).

No decorrer de suas tentativas, o aluno consegue representar parte do problema em funções do primeiro grau, as quais podemos relacionar com uma OMP. Consequentemente, o aluno, ao tentar resolver separadamente as funções sem relacioná-las, não consegue evoluir na sua resolução, necessitando articular técnicas já conhecidas para resolver o problema. Com isso, depois de pensar durante um determinado tempo, ele percebe que pode utilizar as técnicas de resolução de sistemas de equações do primeiro grau[70]. Neste momento, podemos dizer que ele teve um *insight*, além de encaminhar a solução e evoluir para uma OML.

> As estruturas cognitivas que representam as tentativas iniciais de solução têm em comum o fato de não produzirem soluções satisfatórias para os problemas; se conduzissem a soluções, a reestruturação não seria necessária para obter insight. Uma estrutura para resolver um problema pode ser pensada como um plano, que usa um conjunto de operações, e prevê o tipo de solução que será produzida pelo plano. Os planos podem variar em sua especificidade, mas até mesmo planos vagos podem ser usados para atingir um tipo de objetivo esperado. Proponho que a estrutura cognitiva revelada em uma experiência de *insight* é aquela que não se encaixava em um plano anterior (SMITH, 1996, p. 234, tradução nossa)[71].

Ao exemplificarmos uma situação em que pode acontecer um *insight,* destacamos que as informações anteriores são importantes para evoluir na solução de um problema. No caso, ao propormos um PEP, a evolução crescente das organizações matemáticas deve considerar a compreensão dos conceitos matemáticos de forma articulada e aumentando de maneira progressiva a compreensão dos conceitos, de maneira que promovam a aprendizagem, ocasionando uma mudança de contrato didático por parte do professor e de seus alunos.

Portanto, os elementos teóricos apresentado da TAD, do CD e do CSP, assim como as suas possíveis articulações, discutidas anteriormente, foram utilizadas para fundamentar a nossa análise dos dados coletados. Também com base nestas teorias e

---

[70] No caso, pode utilizar o método da soma, o método da substituição ou o método da comparação.

[71] The cognitive structures representing initial solution attempts have in common the fact that they do not produce satisfactory problem solutions; if they did lead to solutions, restructuring would not be necessary to achieve insight. A structure for solving a problem can be thought of as a plan, one that uses a set of operations, and it envisions the type of solution that will be produced by the plan. Plans may vary in their specificity, but even vague plans can be used to attain an expected type of goal. I propose that the cognitive structure revealed in an insight experience is one that did not fit an earlier plan (SMITH, 1996, 234).

noções, construímos uma proposta de Modelo Epistemológico de Referência (MER) para o ensino da noção de função e elaboramos um PEP, aplicado em uma Licenciatura em Matemática da Educação do Campo, com a finalidade de observar a formação continuada do professor da disciplina Funções I e, ao mesmo tempo, verificar se o PEP promove indícios de aprendizagem do conceito de função.

# Capítulo III: Proposta do Modelo Epistemológico de Referência para o Estudo do Conceito de Função para a Licenciatura em Matemática

Abordaremos neste capítulo, a nossa proposta do Modelo Epistemológico de Referência (MER) para a aplicação do conceito de função a ser utilizado no curso de Licenciatura em Matemática. Ressaltamos que nossa proposta deve ser aprofundada nos aspectos teóricos e epistemológicos, como também, para outras modalidades de licenciaturas em Matemática. Todavia, a proposta apresentada em nossa pesquisa torna-se suficiente para o nosso objetivo. A proposta é voltada para aplicação no estudo das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, porém apresentaremos uma preliminar, limitada ao estudo da noção de função e da função afim, a qual futuramente iremos fundamentar para outras funções elementares. O objetivo é apresentar todos os elementos que constituíram, inicialmente, a construção do nosso MER, que serviu de fundamentação para a o desenvolvimento e aplicação do PEP em nossa pesquisa.

## 3.1. O Conceito de Função

Apresentaremos uma discussão acerca do conceito de função, com destaque para alguns pontos históricos de sua formalização; para a forma como esse conceito é organizado e apresentado pelos documentos oficiais da educação brasileira; para as dificuldades de ensino e aprendizagem levantadas por pesquisadores; para uma análise do conceito de função e da função afim presentes num livro didático utilizado nos cursos de Licenciatura em Matemática, com a finalidade de verificar as praxeologias presentes.

Estes pontos analisados foram utilizados para construir o Modelo Epistemológico de Referência (MER) que fundamentou o nosso Percurso de Estudo e Pesquisa e que está direcionado para a compreensão da noção de função e da função afim. Destacamos que, por motivo de adequação à nossa pesquisa, as outras funções elementares, a exemplo das quadráticas, exponenciais e logarítmicas, não tiveram as suas praxeologias analisadas.

### 3.1.1. Um Pouco da História da Definição do Conceito de Função

Neste tópico são abordados alguns fatos históricos relacionados à definição do conceito de função tal qual o conhecemos hoje e que está presente nos livros didáticos de

Matemática utilizados nas instituições de ensino brasileiras. Ressaltamos que se trata de um breve histórico, para dar ao leitor a ideia da evolução do referido conceito, com alguns fatos que permearam a sua formalização. A finalidade é apresentar o conceito de função como um processo de estudo, cooperação e discussões até a sua formalização, indo de encontro à ideia de que um conceito matemático surge pronto no meio escolar. Esse conceito também influencia a construção do Modelo Epistemológico de Referência (MER), em cujo Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) alguns elementos levantados foram utilizados.

O conceito de função no decorrer do tempo sofreu mudanças, e sua compreensão foi ficando mais ampla à medida que as contribuições de matemáticos foram sendo incorporadas; consequentemente, a sua aplicação também foi expandida para novos campos de estudos, a exemplo do Cálculo Diferencial e Integral.

A noção de função foi utilizada implicitamente antes de sua formalização no século XVIII, passando por mudanças significativas até a sua representação e aplicação atual. O primeiro a utilizar o nome "função" foi o matemático Leibniz (1646-1716), em 1673, para expressar qualquer quantidade a uma curva (EVES, 2004). Com o passar dos anos, o matemático Jean Bernoulli (1667 – 1748) apresentou um conceito vago de função como "uma quantidade composta de qualquer modo de uma variável e constantes quaisquer". Consequentemente, Bernoulli, em uma tentativa de expressar a função por uma notação, utilizou o $\phi x$ para representá-la.

Os resultados das pesquisas de Bernoulli, no sentido de conceituar a noção de função, possibilitaram a outros matemáticos ampliar e refinar a noção. Um desses matemáticos foi Euler (1707-1783), que definiu função como "qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números de quantidades constantes". A definição apresentou limitação por não explicar o que é a expressão analítica. Euler, dentre as suas várias contribuições para a matemática, criou o símbolo $f(x)$, utilizado por nós, hoje, para representar uma Função (BOYER, 1996).

Na busca de aprimorar e superar as limitações conceituais de sua época, o matemático Lejeune Dirichlet (1805-1859) apresentou a seguinte definição de função:

> Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por uma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x. (EVES, 2004, p. 661)

A definição de Dirichlet retira a necessidade de utilizar a forma de uma expressão analítica em relação a x e y, incluindo a ideia de relação entre dois conjuntos numéricos. Mas foi com a Teoria dos Conjuntos desenvolvida por Georg Cantor (1845-1918) que o conceito de função foi formalizado e ampliado, não limitando as relações só a números, mas a qualquer outro tipo de relação que possa existir entre objetos, obtendo-se a seguinte definição:

> Uma função $f$ é um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos, pares esses sujeitos à condição seguinte: se $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$ e $a_1 = a_2$, então $b_1 = b_2$. O conjunto de $A$ dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se *domínio* da função e conjunto $B$ de todos os segundos elementos dos pares ordenados chama-se *imagem* da função. Assim, uma função é simplesmente um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano $AXB$ (EVES, 2004, p. 661).

A definição de função apresentada pela Teoria dos Conjuntos está presente nos livros didáticos de matemática e em muitos livros utilizados na formação inicial e continuada dos cursos de Matemática. Podemos, nesse sentido, citar o livro de Cálculo de Stewart (2006, p. 12), que traz a seguinte definição: "Uma função $f$ é uma lei a qual para cada elemento $x$ em um conjunto $A$ faz corresponder exatamente um elemento chamado $f(x)$, em um conjunto $B$".

O livro A Matemática do Ensino Médio (LIMA; CARVALHO; WAGNER e MORGADO, 2004), produzido pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e utilizado nos cursos de formação inicial e continuada de Matemática, utiliza a seguinte definição:

> Dados os conjuntos $X, Y$, uma função $f: X \rightarrow Y$ (lê-se "uma função de $X$ em $Y$") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto $X$ chama-se *domínio* e $Y$ é o *contra-domínio* da função $f$. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se *imagem* de $x$ pela função $f$, ou valor assumido pela função $f$no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \longmapsto f(x)$ para indicar que $f$ transforma (ou leva) $x$ em $f(x)$ (LIMA; CARVALHO; WAGNER; MORGADO, 2004, p. 38).

Notamos que esta última definição é um pouco mais detalhada por figurar em um livro adotado na formação de professores de Matemática, definindo, também, o domínio e a imagem de uma função.

O livro didático Fundamentos de Matemática Elementar, de Iezzi e Murakami (2004), é igualmente utilizado por alunos e professores nos cursos de Licenciatura em Matemática, nas disciplinas de Matemática Básica. O livro apresenta a seguinte definição de função: "Dados dois conjuntos $A\ e\ B$, não vazios, uma relação $f$ de $A\ em\ B$ recebe o nome de aplicação de $A\ em\ B$ ou função definida em $A$ com imagens em $B$ se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$, tal que $(x, y) \in f$" (IEZZI; MURAKAMI, 2004, p. 81). Ele apresenta uma definição menos detalhada em relação à definição anterior, utilizando uma quantidade mínima de notações.

As definições de função apresentadas no decorrer da sua história até sua abordagem nos livros didáticos trazem a sua evolução conceitual e de aplicação na área da Matemática, assim como em outras áreas de conhecimento. Percebemos, na sua apresentação nos livros didáticos, que existiu a necessidade de deixar a função mais compreensível para os alunos que estudam na educação básica, como também no ensino superior, com a intenção de permitir a compreensão de sua importância no campo da Matemática. Segundo Eves (2004),

> O conceito de função permeia grande parte da matemática e, desde as primeiras décadas do século presente, muitos matemáticos vêm advogando seu uso como princípio central e unificador na organização dos cursos elementares de matemática. O conceito parece representar um guia natural e efetivo para a seleção e desenvolvimento do material de textos de matemática. Enfim, é inquestionável que quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para a sua formação (EVES, 2004, p. 661).

Observamos que o conceito em estudo sofre mudanças no decorrer dos tempos, partindo de uma noção vaga até a sua formalização com a Teoria dos Conjuntos. A esse processo de construção, muitos matemáticos contribuíram, de maneira indireta e direta, fazendo com que a ideia fosse expandida e a definição refinada, consequentemente, dando suporte a outras áreas de estudo da Matemática e ampliando a sua aplicação de maneira prática e teórica. Neste sentido, a compreensão da razão de ser do conceito torna-se importante para os estudantes de Matemática, a fim de aplicá-lo de maneira consciente, seja para resolver problemas propostos pelo professor, seja para resolver problemas do seu cotidiano.

O ensino de função é baseado, em muitos casos, em livros didáticos de Matemática da educação básica e do ensino superior, os quais seguem orientações dos documentos oficiais da educação brasileira. Discutiremos, a seguir, como os documentos oficiais brasileiros orientam o ensino do conceito de função e qual o seu papel no ensino da Matemática no Brasil.

### 3.1.2. O Conceito de Função e os Documentos Oficiais Brasileiros

Uma das finalidades dos documentos oficiais da educação brasileira é orientar as conduções conceituais e didáticas das instituições de ensino, destacando os principais pontos considerados essenciais no processo de ensino e aprendizagem. Dentre os documentos, podemos citar os Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino médio (PCNs), o terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental, as orientações curriculares para o ensino médio, os pareceres do Conselho Nacional de Educação (CNE) e a recente Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Iremos dar ênfase a alguns dos documentos oficiais e faremos uma introdução sobre o tema, observando as orientações estabelecidas para o ensino de função. Iniciaremos com os Parâmetros Curriculares do terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental da área de Matemática; depois, abordaremos a recente Base Nacional Comum Curricular dos anos finais do ensino fundamental; em seguida, os parâmetros curriculares do ensino médio, especificamente a Parte III, em que se encontra uma discussão sobre o conteúdo de função; depois analisaremos as orientações curriculares para ensino médio, na área de ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias; e, por fim, vamos verificar o conceito de função na Licenciatura em Matemática.

A análise desses documentos nos deu uma visão das orientações curriculares do conteúdo de função na educação básica e no ensino superior, o que permitiu comprovar a sua importância conceitual em Matemática, como também na aplicação em outras áreas de conhecimento, compondo mais elementos a serem considerados na construção do nosso MER.

#### 3.1.2.1. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Terceiro e Quarto Ciclo

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o terceiro e quarto ciclo, que, atualmente, equivalem ao 6ª ao 9ª anos do ensino fundamental, são organizados em quatro blocos de conteúdos: números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas, e tratamento da informação, no qual o conteúdo de função está no bloco de números e operações. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), o bloco de números e operações orienta que, no decorrer do ensino fundamental, o aluno perceberá o surgimento de diferentes números e de seus significados, compreendendo a utilidade histórica dos números em resolver problemas. Ao estudar as operações, terá o entendimento dos diferentes significados, e também terá essa compreensão no estudo dos tipos de cálculos: exato, aproximado, mental e escrito. O conteúdo de função é discutido a partir da Álgebra, com vistas à generalização de padrões aritméticos, à relação entre grandezas e à resolução de situação-problema, fazendo com que essa noção seja utilizada na interação com os outros blocos.

Recomenda-se que, no terceiro ciclo, os conceitos e procedimentos algébricos sejam abordados de maneira introdutória, a partir da noção de variável e buscando relacionar as expressões algébricas a uma relação entre duas grandezas. No caso específico do conceito de função, existe uma abordagem introdutória para a identificação da sua principal finalidade na resolução de situações-problemas. No quarto ciclo, os conceitos algébricos partem de ideias mais elaboradas na medida em que as generalizações e representações matemáticas foram exploradas no ciclo anterior. Neste caso, a Álgebra torna-se fundamental para a compreensão de variável e sua relação com a noção de função, explorando a representação gráfica; e a resolução de problemas utiliza equações, bem como as suas regras.

Da mesma forma que na interação com os outros blocos, é recomendado relacionar a proporcionalidade, analisando as situações que são proporcionais e as que não são proporcionais, observando a interdependência entre duas grandezas e explorando os tipos de funções presentes nesse bloco: a função afim e a quadrática. As funções devem ser expressas por sentenças algébricas e no plano cartesiano (BRASIL, 1998).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o terceiro e quarto ciclo, a compreensão do conceito de função deve partir do entendimento inicial da noção de variável e da relação entre grandezas, cabendo ao professor utilizar as resoluções de problemas na aplicação e na consolidação do conceito, explorar as representações e construções gráficas nas situações, relacioná-las aos conteúdos dos demais blocos.

#### 3.1.2.2. Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental

Outro documento que trata do ensino fundamental é a recente Base Nacional Comum Curricular, que "é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica" (BRASIL, 2017, p 7). Este documento tem a função de normatizar os principais conteúdos a serem trabalhados nos anos do ensino fundamental da educação básica, em todo o território nacional.

Na área de Matemática, a Base apresenta o conhecimento necessário para que os alunos da educação básica se tornem cidadãos críticos na resolução de problemas e no entendimento das questões sociais. Não se limita o seu entendimento na quantificação, mas se recomenda o estudo das incertezas ligadas aos fenômenos aleatórios. Busca a articulação com a aritmética, a álgebra, a geometria, a estatística e a probabilidade, constrói sistemas matemáticos relacionados a fenômenos do espaço, das formas, do movimento e dos números, buscando representações e argumentações para a compreensão dos inúmeros contextos. O documento está organizado em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística. Essas unidades temáticas orientam as habilidades a serem desenvolvidas no ensino fundamental.

Dentre as unidades temáticas, iremos abordar a da Álgebra, pois é nela que encontramos o conteúdo de função, ressaltando que sua noção pode, também, ser utilizada nas outras unidades temáticas. A finalidade da unidade é o desenvolvimento do pensamento algébrico na utilização de modelos matemáticos, para compreender, representar e analisar as relações quantitativas de grandezas e as estruturas matemáticas, identificando regularidades e padrões de sequências numéricas ou não, interpretando as representações algébricas e gráficas. Tem como ideias vinculadas a equivalência, a variação, a interdependência e a proporcionalidade, enfatizando a linguagem matemática, a generalização, a interdependência de grandezas e a resolução de problemas (BRASIL, 2017).

Nos anos finais do ensino fundamental, que se inicia no 6ª ano e vai até o 9ª, a unidade temática da Álgebra retoma mais profundamente o que foi estudado nos anos iniciais do ensino fundamental, buscando compreender os diferentes significados das variáveis, a generalização de uma propriedade, a análise de regularidades de sequências numéricas, a identificação do valor desconhecido e o estabelecimento da variação entre duas grandezas.

Relacionado ao conteúdo da função, o campo temático da Álgebra ressalta a necessidade de estabelecer conexões entre variável e função, observando a relação existente na compreensão de sua finalidade conceitual, com a utilização das representações gráficas no plano cartesiano. A noção de função é proposta a ser trabalhada no 7º ano, com o objetivo de compreender a linguagem algébrica, através do entendimento de variável e da incógnita, para distingui-las entre si. No 8ª ano, associa-se uma equação linear de 1° grau a uma reta no plano cartesiano e, em seguida, aborda-se um sistema de equações lineares de 1° grau, buscando sua interpretação e utilização na resolução de problemas do cotidiano. No último ano do ensino fundamental, o conteúdo função explora as suas representações numéricas, algébricas e gráficas, para compreender as relações de dependência unívoca entre duas variáveis e para analisar situações que possuam relações funcionais. A noção de função é abordada no 7º e 8º anos, sendo formalizada no 9ª ano, com a utilização das representações algébricas e gráficas para compreender e resolver os problemas.

#### 3.1.2.3. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, a Matemática e suas Tecnologias

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio, em sua terceira parte, referente às Ciências da natureza, à Matemática e a suas tecnologias, orientam para uma interação dos conteúdos trabalhados com o contexto dos alunos, proporcionando a construção e consolidação dos conceitos.

No caso do ensino da Matemática, espera-se uma interação com as disciplinas de Química, Física e Biologia, no sentido de construir abstrações matemáticas e utilizar algoritmos nas resoluções de problemas, evitando a memorização de fórmulas e de procedimentos mecânicos. A Matemática do ensino médio busca adequar as necessidades dos alunos ao explorar as suas motivações e os seus interesses, criar condições para o desenvolvimento de capacidades para a inclusão na vida social e profissional; utiliza-se, assim, a Matemática na compreensão dos problemas, na tomada de decisões e na argumentação de situações do cotidiano, isto é, o saber pensar Matemática e o fazer Matemática (BRASIL, 2000).

No caso do conceito de função, os Parâmetros Curriculares do ensino médio recomendam que o processo de ensino não seja isolado e tenha a capacidade de integrar outros temas matemáticos, a exemplo da Trigonometria e da Geometria. A utilização de expressões algébricas e a representação gráfica são exploradas na interpretação do comportamento de fenômenos e nas resoluções de problemas de outras áreas, como, por exemplo: na Física, ao abordar os conceitos da cinemática; na Economia, ao expressar a lei de oferta e demanda; na Biologia, na observação de crescimento populacional de bactérias ou de plantas; na Geografia, ao identificar as coordenadas de localização ou no estudo de curvas de níveis; na Química, ao expressar as equações de ondas ou no estudo comportamental das moléculas.

Neste sentido, o conceito de função pode ser aplicado em diversas situações, podendo sua aplicação ser utilizada em diferentes áreas, incentivando o aluno a construir sua resposta através do recurso a expressões algébricas e representações gráficas em um processo de investigação.

#### 3.1.2.4. Orientações Curriculares para o Ensino Médio

Para complementar os Parâmetros Curriculares, foram elaboradas as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM). Sua finalidade é, pois, a de contribuir e de esclarecer pontos do primeiro documento que necessitavam de uma discussão profunda, contribuindo para uma melhor prática docente e para um maior diálogo entre o professor e a escola da qual ele faz parte. As Orientações Curriculares surgiram das necessidades dos gestores da educação e das instituições de ensino de discutir alguns pontos dos Parâmetros Curriculares que não estavam claros, promovendo uma discussão detalhada e buscando proposições de alternativas didático-pedagógicas que pudessem auxiliar escolas e professores na organização curricular (BRASIL, 2006).

Segundo Brasil (2006), as Orientações Curriculares para o ensino médio estão divididas em três volumes. Neste estudo, focaremos nossa atenção no segundo volume que aborda as Ciências da Natureza, a Matemática e suas tecnologias, em meio aos quais se insere, enquanto conteúdo, a função.

O segundo volume contém orientações para questões de conteúdo, propostas metodológicas e de avaliação para o ensino da Química, Física, Biologia e Matemática. No caso da Matemática, o documento aborda três pontos: a escolha, a forma de trabalhar e o projeto pedagógico.

Na escolha dos conteúdos, além de considerar a finalidade da formação Matemática para a educação básica, espera-se que o aluno, ao final do ensino médio, consiga resolver problemas do cotidiano com a capacidade de modelar os fenômenos em outras áreas, compreendendo que a Matemática tem um papel importante no desenvolvimento científico.

Na forma de trabalhar, o raciocínio matemático deve ser valorizado buscando-se desenvolver a formulação de questões, a criação de hipóteses, a generalização de situações, a construção de modelos, entre outras habilidades.

No caso do projeto pedagógico e da organização curricular, eles devem estar alinhados com os dois aspectos anteriores, a fim de proporcionar uma execução possível e priorizar o processo de ensino, e não a quantidade de conteúdo.

A Orientação Curricular para o Ensino Médio da Matemática está dividida em quatro blocos: números e operações; funções; geometria; e análise de dados e probabilidade. Observamos, nesse documento, que o conteúdo função é apresentado como um dos blocos, refletindo a sua importância para o ensino da Matemática. O documento indica que o estudo de função pode ter um caráter qualitativo, quando se utiliza a relação entre duas grandezas nas mais diversas situações, como, por exemplo, para mensurar o tempo e o crescimento populacional. O documento também ressalta o estudo dos gráficos dessas funções, observando o seu crescimento ou decrescimento, como também a utilização da forma algébrica para facilitar a compreensão nas diversas situações, buscando relacionar a forma algébrica e gráfica, e analisar as mudanças de parâmetros.

Para as ideias de crescimento, o documento sugere utilizar a função linear $f(x) = a.x$, relacionada à proporcionalidade direta; para as ideias de decrescimento, a função $f(x) = \frac{a}{x}$, é relacionada à proporcionalidade inversa.

Na função quadrática, temos $f(x) = ax^2 + bx + c$, que permite a realização do estudo dos pontos máximos e mínimos, e dos zeros da função, relacionando-os com a representação gráfica e algébrica, como também a exploração da sua forma fatorada na resolução dos problemas. O documento ressalta, no estudo de funções, a identificação de diferentes representações que devem ser explorados além dos aspectos já estudados no ensino fundamental: linear e quadrático. As funções exponencial e trigonométrica devem ser estudadas em diferentes áreas e nas diversas situações do cotidiano, acompanhadas da construção e interpretação gráfica no auxílio das resoluções dos problemas.

As funções trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e polinomiais também devem ser exploradas no ensino médio. Nas funções trigonométricas, inicia-se o estudo da função seno, cosseno e tangente, e se analisam a sua construção gráfica e sua finalidade na resolução de problemas do cotidiano. A função exponencial tem grande aplicação nas diversas áreas do conhecimento; é utilizada para estudar crescimento de taxas, os juros, o crescimento populacional e, em diversas situações em cuja resolução a sua inversa pode ser utilizada, função logarítmica. As funções polinomiais, além da função afim e da quadrática, podem ser apresentadas de maneira introdutória, analisando-se a sua representação gráfica, observando-se a simetria em relação ao eixo das abscissas e identificando-se os zeros da função.

O conceito de função está presente nos três anos do ensino da Matemática do ensino médio, com destaque para sua importância, sua funcionalidade e sua interação com outras áreas. No primeiro ano, com estudo das funções afim, quadráticas, exponenciais, logarítmicas. No segundo ano, com as funções trigonométricas. No terceiro ano, com as funções polinomiais.

A noção de função é utilizada em outros conteúdos, tais como: progressões aritméticas e geométricas; na geometria plana, espacial e analítica; no estudo dos números complexos; na probabilidade e na matemática financeira, entre outros. A construção da compreensão do conceito de função e de sua aplicabilidade na resolução de problemas é um dos objetivos a ser alcançado no ensino médio, pelo professor, porque possibilitará ao aluno o entendimento da razão de ser desse conceito, como também uma consolidação conceitual frente aos assuntos do ensino superior.

A seguir apresentaremos como o conceito de função está inserido na Licenciatura em Matemática, tomando por base a resolução do Conselho Nacional de Educação para os cursos de Matemática.

### 3.1.2.5. O Conceito de Função na Licenciatura em Matemática

Os conteúdos e as orientações curriculares para o ensino superior são apresentados pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) através de seus pareceres. No caso dos cursos de Matemática, são regidos pelas Diretrizes Curriculares Nacionais, que englobam as habilitações de bacharelado e licenciatura, tomando por base o parecer CNE/CES 1302/2001, que regula e orienta os projetos político-pedagógico nessa área do conhecimento.

Segundo o CNE (2001) os cursos de bacharelado são direcionados para a formação de profissionais destinados ao ensino superior e à pesquisa, enquanto, nas licenciaturas, o seu objetivo principal é a formação de professores da educação básica, porém a preparação do licenciando pode ser direcionada à pesquisa, como também para o ensino superior. O documento estabelece que os programas de graduação devem ser flexíveis para direcionar os diferentes interesses na formação, orientando e conduzindo para uma preparação contínua da aprendizagem matemática, mesmo após a finalização do curso.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática apresentam que o licenciado deve compreender o seu papel social como educador, inserindo-se nas diversas realidades dos seus alunos e utilizando a Matemática no exercício da cidadania, para superar a visão segundo a qual a Matemática é para poucos. No caso das habilidades e competências, estão direcionadas para a capacidade de escrever e falar com clareza, de trabalhar em equipe, de ser crítico, de utilizar as tecnologias, de produzir conhecimento, de formular e resolver problemas, de estabelecer relações com outras áreas de conhecimento, de formular propostas de ensino e aprendizagem, de produzir e analisar materiais didáticos, de elaborar projetos, entre outros.

Considerada a experiência do aluno adquirida na educação básica, a construção dos conceitos matemáticos necessita de ser aprofundada via contextualização dos conteúdos, o que ocorre nas universidades. Esses conhecimentos construídos na educação básica devem ser considerados durante a formação do aluno para uma organização curricular e pedagógica, fazendo com que ele construa um significado teórico e uma visão geral da Matemática.

Os conteúdos curriculares para a Licenciatura em Matemática estão distribuídos em cálculo diferencial e integral, álgebra linear, fundamentos da análise, fundamentos da álgebra, fundamentos da geometria e a geometria analítica. Além desses conteúdos, também devem ser incluídos, nos cursos de licenciatura, os conteúdos matemáticos da educação básica nas áreas de álgebra e geometria, os conteúdos de áreas afins da Matemática com aplicações teóricas e a presença da ciência, história e filosofia da Matemática (CNE, 2001).

A noção do conceito de função está presente nos conteúdos específicos do ensino superior, quando são estudadas as propriedades dos anéis isomorfos, as superfícies cônicas, o limite de função, entre outros.

O conteúdo de função, no ensino superior, geralmente está presente nas disciplinas de Matemática Básica, Fundamentos da Matemática, Princípios da Matemática ou em outras semelhantes. A função é trabalhada a partir de sua noção até ao estudo dos vários seus tipos, as suas representações e as suas aplicações. O conceito é importante para a compreensão de vários conteúdos que fazem parte do currículo da Licenciatura em Matemática, proporcionando uma visão mais ampla dos conceitos matemáticos e de sua aplicação.

Notamos que o ensino superior não se desvincula totalmente da educação básica; é, antes, uma continuidade curricular proporciona uma visão mais ampla e fundamentada dos conceitos matemáticos. Na Licenciatura em Matemática, são trabalhados esses conceitos, direcionados para o ensino e a aprendizagem, buscando uma interação com o meio do aluno, como também no meio em que ele irá trabalhar. Portanto, uma visão articulada com os documentos curriculares do ensino médio, com as diretrizes do ensino superior torna-se importante para ações pretendidas no ensino e na aprendizagem da Matemática, no ensino superior.

Os documentos oficiais do ensino da Matemática nos orientam para ações que promovam efetivas conduções metodológicas, organizando os conteúdos matemáticos e conduzindo as escolas e os professores no processo de ensino e aprendizagem.

O conteúdo função é apresentado como importante por servir de base para a compreensão de outros conceitos, por proporcionar aplicações no cotidiano nas resoluções de problemas matemáticos, como também em outras áreas da ciência. A trajetória de trabalhar, inicialmente, com a sua noção até chegar a formalização está presente no ensino fundamental, assim como a sua ampliação na forma de tipos de funções elementares no ensino médio, e, consequentemente, o aprofundamento do seu estudo no ensino superior, o que dará base para outros conteúdos.

Logo, a identificação e análise das principais dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do conceito são importantes, para a construção e aplicação de conduções metodológicas que possam combater essas dificuldades. Neste sentido, iremos apresentar algumas das dificuldades da construção do conceito de função, tomando por base algumas pesquisas realizadas.

### 3.1.3. Dificuldades do Processo de Ensino e Aprendizagem do Conceito de Função

A importância de identificarmos e entendermos alguns dos problemas que dificultam a compreensão e aplicação do conceito de função é essencial para propormos outros caminhos de ensino alternativos que atuem na diminuição dos problemas em sala de aula. Faremos a identificação de alguns desses problemas, tomando por base algumas pesquisas realizadas a partir de 2010, por entendermos ser um tempo satisfatório para o nosso levantamento. As pesquisas são oriundas de uma tese e de alguns artigos publicados em revistas de Qualis A e B da área de ensino em foco.

Iniciamos com Espita, Cruz e Ochoa (2011), que apresenta resultados relacionados à caracterização das influências do contrato didático na aprendizagem do conceito de função, no ensino médio e superior, como também a identificação dos obstáculos didáticos e epistemológicos que dificultam a compreensão do conceito a partir da evolução histórica, das concepções dos professores e da transposição didática do saber matemático acadêmico ao saber escolar. Os autores destacam o fracasso escolar e o baixo rendimento dos estudantes nas aulas de Matemática, que muitos casos o ensino do conceito de função é superficial fazendo que a sua aplicação não seja compreendida.

Espita, Cruz e Ochoa (2011) destacam a importância da compreensão do conceito de função no desenvolvimento do cálculo, cuja ampliação proporcionou aplicações na Física, Engenharia, Química, Economia, entre outras áreas de conhecimento, tornando-se um instrumento que permite modelar e resolver diferentes problemas do cotidiano.

Uma das questões de compreensão conceitual sobre a função está relacionada ao modo como os livros didáticos apresentam o ensino das tabelas, gráficos e esquemas algébricos, de forma particular e sem conexão, fazendo o aluno a ter um aprendizado mecânico e sem sentido. Outra dificuldade destacada é a utilização do diagrama de flechas, sem uma discussão conceitual apropriada e aprofundada, limitando o seu entendimento a uma compressão estática, dificultando uma visão evolutiva do conceito.

Ressaltam, também, que o estudo histórico do conceito permite entender a Matemática como uma construção da humanidade, existindo um processo de consolidação de formas distintas de representações e interpretações. Concluem que as diferentes formas de apresentar o conceito de função nos livros didáticos, devem ser observadas e estudadas para uma aplicação adequada e articulada com outros conceitos. (ESPITA; CRUZ; OCHOA, 2011).

Relacionada às diferentes formas de apresentar o conceito de função, temos a pesquisa realizada por Lourenço e Oliveira (2014), com o objetivo de identificar as contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas no processo de ensino e aprendizagem na educação básica. Os autores ressaltam que esse conceito matemático gera dificuldades de interpretação em alunos de nível fundamental, médio e superior, prejudicando a compreensão de outros conceitos, a exemplo dos de cálculo diferencial e integral.

A pesquisa de Lourenço e Oliveira (2014), buscou teses e dissertações que constam no banco de dados do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), no período de 1996 a 2012. A pesquisa foi dividida em duas partes: a primeira com categorias de análise da modalidade do Programa (mestrado ou doutorado), ano de publicação, título, autor e orientador; a segunda cujos resultados foram organizados através de quadros, tomando por base a ordem cronológica dos níveis abordados nas pesquisas.

Os quadros apresentados tratam de trabalhos direcionados para o ensino fundamental e médio. A maioria dos trabalhos analisados pelos autores abordaram temas relacionados à função afim e quadrática, nos quais as dificuldades relatadas estão relacionadas ao reconhecimento e às articulações entre distintos registros de representações e à dependência entre as variáveis. Outro ponto destacado é a utilização de *softwares* para combater essas dificuldades, apresentando-se como um importante recurso a ser utilizado na visualização gráfica e na possibilidade de observar o seu comportamento.

A pesquisa de Tenório, Penna e Tenório (2015) destaca a importância de utilizar os *softwares* no ensino de função. O trabalho analisou a utilização de jogos educativos da plataforma *Mangahigh*, a serem aplicados no estudo de função polinomial do 1º grau por alunos do 1º ano do ensino médio de um curso de formação de professores (Curso Normal). O objetivo foi identificar a existência de correlação entre os escores obtidos pelos alunos e as suas notas nos testes tradicionais, analisando, ao final, as suas percepções sobre os jogos da plataforma.

A pesquisa centrou-se em aulas expositivas, atividades individuais no laboratório de informática, com a utilização de jogos digitais da plataforma, avaliação tradicional e questionário sobre os jogos. Foi iniciada com discussão sobre o conteúdo de função polinomial do 1º grau, no qual a noção de função, zero da função e análise de gráficos foram abordados. A principal dificuldade identificada durante a pesquisa está relacionada à função polinomial. Os alunos não conseguiam compreender a relação de dependência entre as variáveis, isto é, a dependência da variável *'y'* pelo valor atribuído pela variável *'x'*. Outras dificuldades foram a interpretação gráfica como representação de um conjunto de pares ordenados no plano cartesiano e a utilização da função do 1º grau na resolução de uma situação-problema.

Segundo Tenório, Penna e Tenório (2015), a utilização de jogos digitais educativos é um meio de ensino importante e eficiente no processo para diminuir as dificuldades de compreensão do conceito de função, como também de outros conteúdos matemáticos. Foi destacado que a utilização de jogos digitais não deve ser a única opção do professor, mas outras metodologias de ensino devem ser por ele adotadas.

Uma das metodologias de ensino utilizadas são as sequências didáticas, que podem proporcionar a aprendizagem de conceitos matemáticos. Chamamos a atenção para o trabalho de Neves e Resende (2016), que apresentam como objetivo analisar o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função nos anos finais do ensino fundamental, a partir de uma sequência didática desenvolvida e analisada, tomando por base a Teoria Histórico-Cultural. A justificativa do trabalho está alicerçada na visão de Caraça (1984), para quem o conceito de função é um dos mais importantes e fundamentais, como também nos baixos índices de aproveitamento dos alunos dos anos finais do ensino fundamental, nas avaliações externas.

Ao analisar um livro didático do 9º ano, constatou-se que ele não traz orientações de como explorar os conteúdos algébricos nem faz relações do conceito de função como um conceito fundamental e lógico-histórico. Também não destaca a sua importância na evolução da Matemática e na resolução de problemas do cotidiano. A presença do excesso de regularidades, nas atividades para buscar a generalização pelo aluno, é um dos problemas levantados pelos autores; isso leva a uma aprendizagem mecânica e sem a compreensão de sua aplicação. Na busca de combater essas dificuldades, os autores analisaram a aplicação de uma sequência didática a partir da realização um experimento com o objetivo de desenvolver o pensamento cognitivo do aluno na construção do conceito de função.

A sequência foi desenvolvida em três conjuntos de atividades que abordavam os conceitos de relações e funções, as expressões algébricas das funções afim e quadrática e as expressões gráficas. Foi constado, após a aplicação dessas atividades, que os alunos possuem, em sua maioria, o conceito de relações e variáveis relacionados a suas experiências, identificando dificuldade ao representar a expressão analítica da função, a compreensão dos significados das notações $f(x)$, $y = f(x)$ e a leitura de sua representação gráfica. Outro ponto destacado na pesquisa foi a utilização do *software* chamado de *Kmplot*, efetivo para o estudo e a construção das sequências de gráficos, possibilitando meios para superar as dificuldades.

Uma das pesquisas direcionadas a buscar a compreender as dificuldades de representações do conceito de função foi a realizada por Andrade e Saraiva (2012). Seu objetivo foi analisar como os alunos estabelecem as possíveis representações de uma função, mobilizando e interligando os conceitos, definições e imagens na resolução de problemas, e utilizando calculadora gráfica com a mediação pelo professor. Este estudo foi fundamentado no registro de representações semióticas de Durval (2006) e na ideia de imagem e conceito definição de Vinner (1983). A pesquisa foi realizada durante os anos de 2008 e 2009, em uma turma do 10º ano de uma escola básica e secundária de uma região do interior de Portugal.

Os autores destacam a importância de estabelecer várias representações de uma função no processo de ensino e aprendizagem, com a finalidade de desenvolver vários tipos de conexões e compreensão do conceito. Tomando por base outros pesquisadores, destacam dificuldades relacionadas à compreensão do conceito de função, que são: sua natureza dupla, na medida em que também pode ser utilizada para calcular o valor da função em casos particulares; o conjunto de símbolos utilizados; a conexão entre os diferentes tipos de representações.

Ao longo da pesquisa foram utilizados questionários, registros escritos dos alunos, entrevista e anotações dos investigadores. Foram abordadas funções polinomiais e as modulares, explorando respostas analíticas, gráficas e numéricas. A análise baseou-se em registros de duas alunas que desenvolveram as atividades propostas pelos pesquisadores utilizando calculadora gráfica. Elas analisaram as correspondências das diferentes representações, justificando-as algebricamente e graficamente, e estudaram as conexões das funções com as suas famílias de funções. As dificuldades da representação gráfica e de sua conversão para a algébrica tornaram-se presentes mesmo após as atividades propostas, porém em menor intensidade. Logo, os autores destacam que a utilização de diferentes registros de representações, compartilhados com o uso da calculadora gráfica, gera uma ampliação conceitual e permite ao aluno resolver problemas mais complexos.

Diante das diferentes formas de representar o conceito de função, os pesquisadores Santos e Barbosa (2017) apresentam uma análise das possíveis configurações do conceito na organização do ensino, apresentando suas potencialidades e limitações. Comentam que o conceito de função é fundamental na Matemática contemporânea, obtendo uma centralidade na estruturação dos conteúdos escolares nos diferentes níveis, como também é considerado desafiante para o ensino e aprendizagem das várias formas de representar as relações possíveis.

Na pesquisa, os autores apresentam e discutem as seguintes formas de representação do conceito: função como tabela; função como máquina de transformação; função como diagrama; função como expressão algébrica; função como generalização; função como gráfico; função como definição. Os autores comentam que a aprendizagem do conceito de função articulado com as suas diversas representações viabiliza uma perspectiva ampla de atuação do conceito, combatendo uma visão fechada e sem finalidade para a resolução de problemas.

Na pesquisa realizada por Lima (2014), com o objetivo de identificar e analisar as dificuldades enfrentadas por estudantes na realização de procedimentos algébricos utilizados no estudo da função afim, os problemas estão relacionados à dificuldade de compreensão dos conteúdos algébricos; esses problemas são citados nos Parâmetros Curriculares Nacionais e identificados nas avaliações de larga escala, como, por exemplo, no SAEB, no ENEM e no ENCCEJA. Os dados foram coletados de atividades aplicadas a oitenta alunos do ensino fundamental de uma escola pública no ano de 2013. Foi elaborado um instrumento de avaliação diagnóstica com o objetivo de identificar as dificuldades dos alunos do ensino médio ao utilizarem procedimentos algébricos estudados no ensino fundamental. O pesquisador tomou por base discussões sobre ensino da álgebra, com um olhar para a função afim, as recomendações do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio e a proposta curricular do estado brasileiro de Santa Catarina.

O pesquisador destaca algumas dificuldades comentadas em outras pesquisas que fazem parte de sua fundamentação teórica, ressaltando: a ausência de significados algébricos na formulação e na resolução de problemas; a quantidade excessiva de exercícios repetitivos sem uma finalidade para a aprendizagem; a falta de atividades que promovam uma aproximação com situações-problemas e a mudança de representação, no caso da algébrica para gráfica. A pesquisa de Lima (2014) identificou erros ao desenvolver cálculos aritméticos e algébricos, existindo dificuldades na resolução dos problemas propostos. Os erros mais frequentes foram: somar monômios não semelhantes, somar erroneamente os números inteiros e frações, aplicar propriedade distributiva na resolução de operações aritméticas básicas e interpretar erradamente os enunciados dos problemas. Tomando por base os problemas, o pesquisador recomenda a aplicação de atividades que revisem os procedimentos aritméticos e algébricos, identificando os erros dos alunos, com a finalidade de aplicar o ensino de função afim de maneira contextualizada.

A partir das dificuldades apresentadas no processo de ensino e aprendizagem do conceito de função, observamos a necessidade de utilizarmos propostas metodológicas que busquem desenvolver, no aluno, a compreensão do conceito, buscando o seu entendimento, a fim de aplicá-lo nas diversas situações na própria Matemática, como também em outras áreas das Ciências. O levantamento dessas dificuldades foi considerado para a construção do nosso MER, com a finalidade de compreendermos os problemas relacionados ao ensino do conceito de função.

#### 3.1.4. Análise do Livro Didático Utilizado nas Licenciaturas de Matemática

Complementando a discussão para a construção da nossa proposta do Modelo Epistemológico de Referência (MER), apresentaremos a análise do livro didático Fundamentos da Matemática Elementar - volume 1 (IEZZI; MURAKAMI, 2004), o qual é utilizado em vários cursos de licenciatura em Matemática e está presente nas referências das ementas de disciplinas que abordam conteúdos dos fundamentos da Matemática, a exemplo do conceito de função.

Os capítulos analisados são os que tratam da introdução de função e função afim, com a finalidade de identificar a praxeologia adotada, observando as tarefas, técnicas, tecnologias e teorias presentes. Ressaltamos que não serão abordadas, neste momento da pesquisa, outras funções elementares, como a função quadrática e a função exponencial, por entendermos que a análise apresentada é suficiente para fundamentarmos o nosso MER, como também que estas outras funções farão parte de pesquisas futuras para complementar o nosso MER. Esta análise constitui mais um elemento na construção do nosso MER, identificando as práticas dominantes utilizadas no processo de ensino do conceito de função e de suas aplicações.

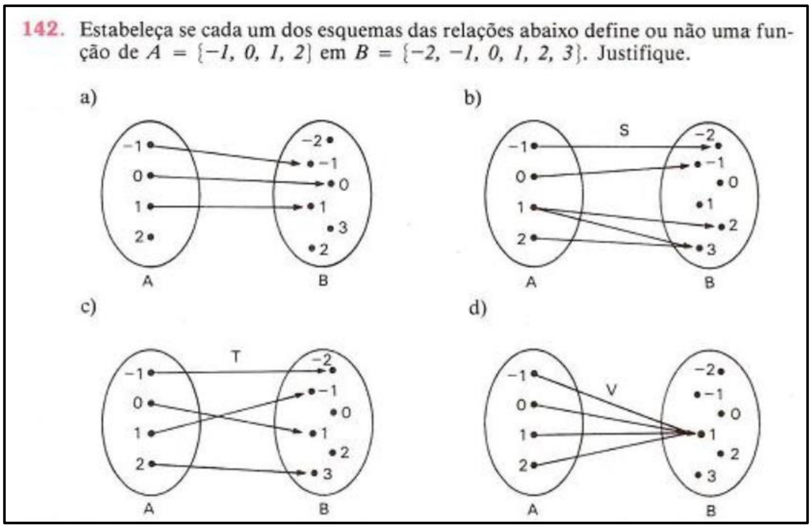
#### 3.1.4.1. Introdução do conceito de Função

O capítulo que aborda a noção de função toma por base o conceito de relação explorado no capítulo anterior e se inicia com a apresentação de dois conjuntos numéricos e finitos. Consequentemente, apresenta cinco exemplos de relações, com base nos conjuntos. As relações são representadas por notações algébricas e por esquemas de flechas; em seguida, são citadas as que representam função.

A definição de função é apresenta formalmente: “Dados dois conjuntos $A$ e $B$, não vazios, uma relação $f$ de $A$ em $B$ recebe o nome de aplicação de $A$ em $B$ ou função definida em $A$, com imagens em $B$ se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.” (IEZZI; MURAKAMI, 2004). Com a sua definição por representação simbólica: $f$ é aplicação de $A$ em $B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists y \in B/(x, y) \in f)$.

Reforçando a explicação da definição de função, é utilizado o esquema de flechas na tentativa de generalizar a sua aplicação. Em seguida, para a identificação gráfica de função, são apresentados três exemplos que caracterizam os casos de função ou de sua não existência. Na identificação do gráfico que representa função, é utilizada a técnica das retas paralelas ao eixo das ordenadas, observando-se a quantidade de pontos de interseção com o gráfico. Após essa introdução, são apresentados alguns exercícios através de que identificamos os tipos de tarefa: (T), técnica $(\tau)$, tecnologia $(\theta)$ e teoria $(\Theta)$.

Figura 13 - Tipo de tarefa ($T_1$)




Fonte: Iezzi e Murakami (2004)

Quadro 3 - Tipo de Tarefa 1 ($T_1$)

| | |
|---|---|
| $T_1$ | Identificar se as relações binárias são funções. |
| $\tau_{1,1}$ | Observar o esquema de flechas para determinar se é ou não função. |
| $\tau_{1,2}$ | Observar a quantidade de pontos de interseção nas retas paralelas ao eixo das ordenadas. |
| $\theta$ | Domínio e imagem de uma relação binária.<br>Plano cartesiano e representação de f(x). |
| $\Theta$ | Relação funcional |

Fonte: próprio autor (2019)

O conceito de função é introduzido com uma breve apresentação e com base na noção de relação. Os exemplos utilizados dão uma visão limitada do conceito, restringindo a utilização de conjuntos com elementos discretos e finitos. Ao tentar explicitar o conceito formalmente, com a utilização dos números reais, são apresentados poucos exemplos e não é explorada a diversidade de conjuntos numéricos que podem ser utilizados. As técnicas usadas limitam-se à análise do esquema de flechas e à observação da interseção de pontos com o gráfico da função, não sendo explorados outros tipos de representações, tais como o uso de tabelas, como ressalta Andrade e Saraiva (2012). Outra dificuldade comentada por Tenório, Penna e Tenório (2015) é a falta de exploração da relação de dependência entre as variáveis, dificultando a compreensão de sua aplicação.

Ao tratar da notação da função, o livro didático destaca que toda função é uma relação binária de dois conjuntos, representada por um conjunto de pares ordenados. Em seguida, introduzem a lei de correspondência utilizando a representação $y = f(x)$, consequentemente a noção de imagem $f(a) = b$ e a técnica de substituição de $x$ por um valor numérico. Com essa análise, são identificados dois tipos de tarefas:

Figura 14 - Tipo de Tarefa ($T_2$)

**145.** Qual é a notação das seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$?

a) $f$ associa cada número real ao seu oposto.
b) $g$ associa cada número real ao seu cubo.
c) $h$ associa cada número real ao seu quadrado menos *1*.
d) $k$ associa cada número real ao número *2*.

**146.** Qual é a notação das seguintes funções?

a) $f$ é função de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$ que associa cada número racional ao seu oposto adicionado com *1*.
b) $g$ é a função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ que associa cada número inteiro à potência de base *2* desse número.
c) $h$ é a função de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$ que associa cada número real ao seu inverso.

Fonte: Iezzi e Murakami (2004)

Quadro 4 – Tipo de Tarefa 2 ($T_2$)

| | |
|---|---|
| $T_2$ | Identificar a notação da função |
| $\tau_{2,1}$ | A partir da relação binária, utilizar a lei de correspondência $y = f(x)$. |
| $\theta$ | Representação de $f(x)$ |
| $\Theta$ | Relação funcional |

Fonte: próprio autor (2019)

Consequentemente, o tipo de tarefa $T_3$:

Figura 15 - Tipo de Tarefa ($T_3$)

**147.** Seja $f$ a função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 3x - 2$. Calcule:

a) $f(2)$ b) $f(-3)$ c) $f(0)$ d) $f\left(\frac{3}{2}\right)$

**148.** Seja $f$ a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Calcule:

a) $f(2)$ c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ e) $f(\sqrt{3})$

b) $f(-1)$ d) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ f) $f(1 - \sqrt{2})$

Fonte: Iezzi e Murakami (2004)

Quadro 5 - Tipo de Tarefa 3 ($T_3$)

| | |
|---|---|
| $T_3$ | Calcular o valor numérico da função |
| $\tau_{3,1}$ | Substituir o valor de $x$ por um valor numérico em $y = f(x)$. |
| $\tau_{3,2}$ | Substituir o valor de $y$ por um valor numérico em $y = f(x)$. |
| $\theta$ | Resoluções de expressões numéricas/algébricas |
| $\Theta$ | Relação funcional |

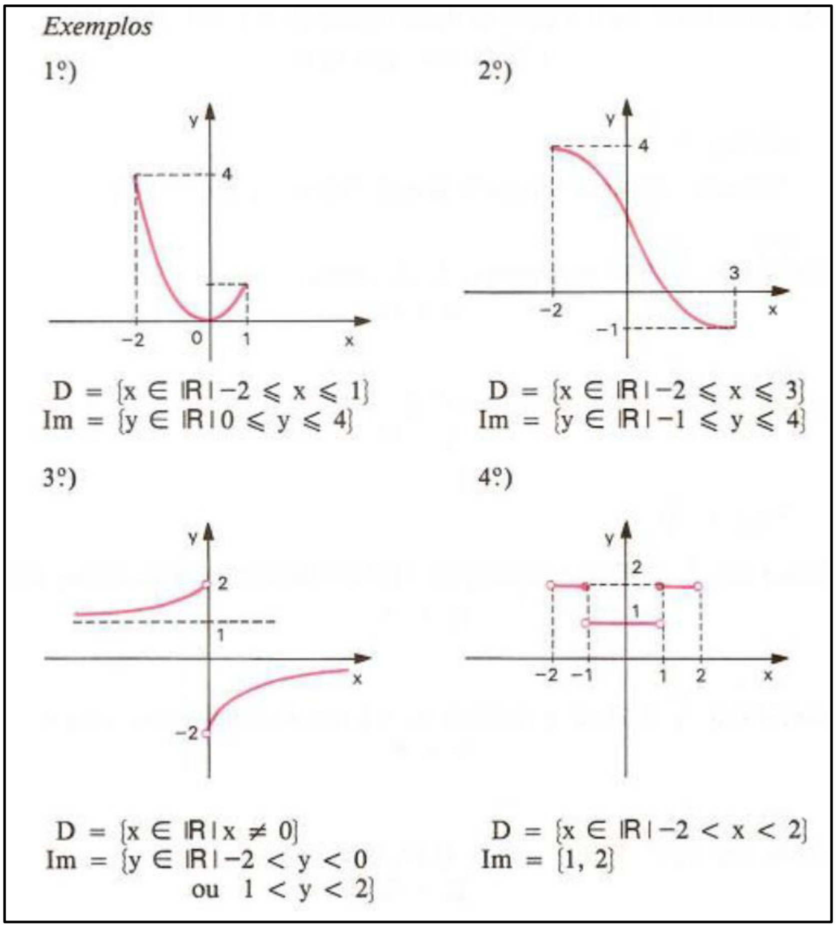
Fonte: próprio autor (2019)

Observamos que a utilização excessiva de símbolos, sem uma articulação com o conceito, aumenta a dificuldade de sua compreensão e de sua aplicação (ANDRADE; SARAIVA, 2012), assim como a utilização de exercícios repetitivos e resolvidos mecanicamente (NEVES; RESENDE, 2016). Os tipos de tarefas e as técnicas presentes nos quadros 2 e 3 nos mostram procedimentos de resoluções mecânicos e repetitivos.

Ao conceituar o domínio e a imagem de uma função, o livro didático apresenta as suas definições. O domínio como um “conjunto D dos elementos $x \in A$ para os que existe $y \in B$, tal que $(x, y) \in f$.” (IEZZI; MURAKAMI, 2004, p. 88), chamando o domínio de conjunto de partida e representando por D = A. Na imagem, “o conjunto Im dos elementos $y \in B$ para os que existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$” (IEZZI; MURAKAMI, 2004, p. 88), ressaltando que a imagem é um subconjunto do contradomínio representado por Im ⊂ B.

Em seguida, a partir de uma representação no plano cartesiano, é definido o domínio D como “o conjunto das abscissas dos pontos tais que as retas verticais conduzidas por esses pontos interceptam do gráfico $f$”. E a imagem Im corresponde a como “o conjunto das ordenadas dos pontos tais que as retas horizontais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico $f$” (IEZZI; MURAKAMI, 2004, p. 89).

Figura 16 - Tipo de Tarefa ($T_4$)




Fonte: Iezzi e Murakami (2004)

No quadro 6, é expresso mais um tipo de tarefa identificada, relacionado ao domínio e à imagem de uma função:

Quadro 6 - Tipo de Tarefa 4 ($T_4$)

| | |
|---|---|
| $T_4$ | Determinar o domínio e a Imagem de $f(x) = y$. |
| $\tau_{4,1}$ | Utilizar o esquema de flechas |

| | |
|---|---|
| $\tau_{4,2}$ | Observar o conjunto das abscissas (retas verticais) dos pontos do gráfico. |
| $\tau_{4,3}$ | Observar o conjunto das ordenadas (retas horizontais) dos pontos do gráfico. |
| $\theta$ | Domínio e Imagem de relações binárias.<br>Representação gráfica no plano cartesiano.<br>Conjunto dos números reais. |
| $\Theta$ | Relação funcional |

Fonte: próprio autor (2019)

Apesar de utilizar alguns exemplos, com a intenção de apresentar a aplicação das definições do domínio e da imagem, a abordagem é superficial por não explorar outras situações, principalmente na resolução de problemas.

Na sequência, no livro didático afirma-se que as funções numéricas apresentam maior interesse na Matemática e que são chamadas também de funções reais de variáveis reais, possuindo domínio, contradomínio e a lei de correspondência. Esta afirmação leva a entender que todos os próximos conjuntos utilizados são de números reais.

O capítulo é finalizado com o tópico que trata de funções iguais, apresentando a definição e suas propriedades; os exemplos utilizam conjuntos com elementos discretos e finitos, como também exemplos com conjuntos reais.

Figura 17 - Tipo de Tarefa ($T_5$)

164. Sejam as funções $f$, $g$ e $h$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3$, $g(y) = y^3$ e $h(z) = z^3$. Quais delas são iguais entre si?

165. As funções: $f$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = x$ são iguais? Justifique.

166. As funções $f$ e $g$ cujas leis de correspondência são

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ e $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$ podem ser iguais? Justifique.

Fonte: Iezzi e Murakami (2004).

Nesse tópico, identificamos o seguinte tipo de tarefa:

Quadro 7 - Tipo de Tarefa 5 ($T_5$)

| | |
|---|---|
| $T_5$ | Identificar se as funções são ou não iguais. |
| $\tau_{5,1}$ | Substituir o valor de $x$ por um valor numérico em cada função e comparar os resultados. |
| $\theta$ | Resolução de expressões numéricas/algébricas |

| | |
|---|---|
| Θ | Relação funcional |

Fonte: próprio autor (2019)

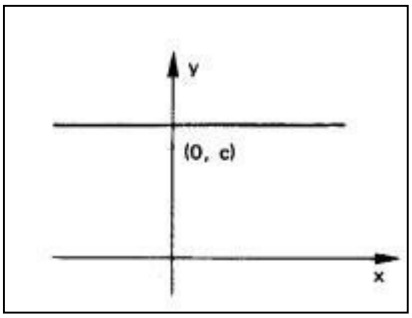
Os exemplos e os exercícios propostos não dão margem para utilizar outras técnicas nem proporcionam uma compreensão do conceito abordado. A falta da utilização de uma representação gráfica e a utilização de técnicas repetitivas limitam o entendimento de sua aplicação (LIMA, 2014).

### 3.1.4.2. Função Constante e Função Afim

A partir de agora, faremos uma análise da função afim apresentada no livro didático, mas os tópicos relacionados a inequações do 1° grau não serão abordados em nossa discussão, por entendermos que não fazem parte diretamente da nossa pesquisa.

O capítulo se inicia com a definição da função constante como "uma aplicação $f$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que recebe o nome de função constante quando cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa-se sempre ao mesmo elemento $c \in \mathbb{R}$" (IEZZI; MURAKAMI, 2004, p. 97). A definição é complementada com a utilização da representação algébrica $f(x) = c$, acompanhada pela gráfica:

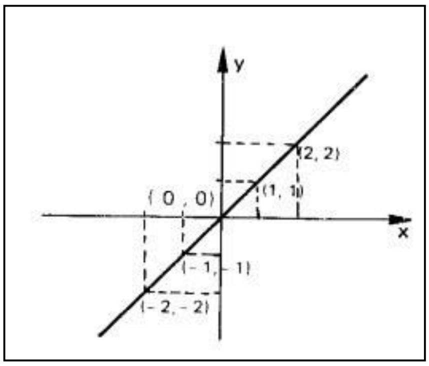
Figura 18 - Gráfico da Função Constante




Fonte: Iezzi e Murakami (2004)

Em seguida, é apresentada a função identidade como "uma aplicação $f$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ , que recebe o nome de função identidade quando cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o próprio $x$" (IEZZI; MURAKAMI, 2004, p. 98). A representação algébrica utilizada é $f(x) = x$ juntamente com gráfica:

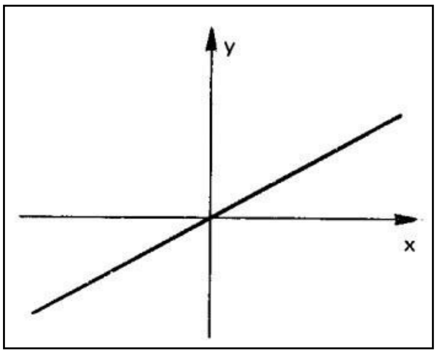
Figura 19 - Função Identidade




Fonte: Iezzi e Murakami (2004)

No caso da função linear, é definida como “uma aplicação $f$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R},$ que recebe o nome de função linear quando cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa ao elemento $ax \in \mathbb{R}$ em que $a \neq 0$ é um número real dado” (IEZZI; MURAKAMI, 2004, p. 98).

Figura 20 - Função Linear




Fonte: Iezzi e Murakami (2004)

As apresentações das definições dessas funções tiveram uma abordagem superficial sem qualquer discussão de suas possíveis aplicações; os exemplos e exercícios propostos levam o aluno à limitação na utilização de técnicas e, consequentemente, dificultam a utilização das noções nas resoluções de problemas escolares ou não. A figura 21 representa os tipos de tarefas baseadas no conceito da função linear:

Figura 21 - Tipo de Tarefa ($T_6$) e Subtipos

**170.** Construa, num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = 3x$ d) $y = \frac{x}{2}$

Fonte: Iezzi e Murakami (2004)

O quadro seguinte nos mostra mais um tipo de tarefa ($T_6$) e seus subtipos[72] ($T_{6,1}$), ($T_{6,2}$) e ($T_{6,3}$):

Quadro 8 - Tipo de Tarefa 6 ($T_6$)

| | |
|---|---|
| $T_6$ | Construir o gráfico da função no sistema cartesiano |
| $T_{6,1}$ | Construir o gráfico da função constante $f(x) = c$. |
| $T_{6,2}$ | Construir o gráfico da função identidade $f(x) = x$. |
| $T_{6,3}$ | Construir o gráfico da função linear $f(x) = ax$. |
| $\tau_{6,1}$ | Substituir o valor de $x$ na função por um valor numérico. |
| $\tau_{6,2}$ | Representar o gráfico da função no plano cartesiano. |
| $\theta$ | Resolução de expressões numéricas/algébricas. Representação gráfica no plano cartesiano. |
| $\Theta$ | Relação funcional (função afim) |

Fonte: próprio autor (2019)

O tipo de tarefa e seus subtipos levam à utilização de técnicas que exploram a construção do gráfico para sua visualização, mas não fazem qualquer relação com o capítulo anterior nem propõem exemplos ou exercícios que explorem situações hipoteticamente reais que possam levar ao sentido de sua aplicação.

Ao apresentar as funções que podem auxiliar na compreensão da função afim, partem para a definição, sem qualquer discussão prévia, como "uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função afim quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$ em que $a \neq 0$ e $b$ são números reais dados" (IEZZI; MURAKAMI, 2004, p. 100). Em seguida, apresenta a sua representação algébrica: $f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$.

Introduzindo o conceito de função afim dessa forma, proporcionam uma abordagem formal sem destaque para o significado dos coeficientes, mesmo que, após apresentar alguns exemplos com a finalidade de identificar quem são os coeficientes, não explorem as suas funcionalidades. Em seguida, para tratar da sua representação gráfica enunciam e demostram o seguinte teorema: o gráfico cartesiano da função $f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$ é uma reta[73].

[72] Tomaremos como base a definição de subtipo de tarefa utilizada por MENEZES (2010).
[73] A demonstração do teorema se encontra no livro Fundamentos de matemática elementar, volume 01, nas páginas 100 e 101.

Por ocasião da demonstração, são utilizadas propriedades da semelhança de triângulos e da proporcionalidade, com finalidade de chegar à conclusão de que na escolha de três pontos distintos pertencentes a mesma função afim eles estão alinhados, provando que a função é representada por uma reta no plano cartesiano.

No tópico que trata da aplicação da função afim, o livro direciona para a construção do gráfico, utilizando, no mínimo, dois pontos quaisquer no plano cartesiano.

Figura 22 - Tipo de Tarefa ($T_6$)

**172.** Construa o gráfico cartesiano das funções de IR em IR:

a) $y = 2x - 1$

b) $y = x + 2$

c) $y = 3x + 2$

d) $y = \frac{2x - 3}{2}$

e) $y = -3x - 4$

f) $y = -x + 1$

g) $y = -2x + 3$

h) $y = \frac{4 - 3x}{2}$

Fonte: Iezzi e Murakami (2004)

Com esse tipo de procedimento, mais um subtipo de tarefa ($T_{6,4}$) e mais uma técnica ($\tau_{6,3}$) são identificadas:

Quadro 9 - Tipo de Tarefa 6 e Subtipos ($T_6$)

| | |
|---|---|
| $T_6$ | Construir o gráfico da função no sistema cartesiano |
| $T_{6,4}$ | Construir o gráfico da função afim $f(x) = ax + b$. |
| $\tau_{6,1}$ | Substituir o valor de $x$ na função por um valor numérico. |
| $\tau_{6,3}$ | Representar o gráfico da função no plano cartesiano utilizando dois pontos quaisquer (x, y). |
| $\theta$ | Resolução de expressões numéricas/algébricas. Representação gráfica no plano cartesiano. |
| $\Theta$ | Relação funcional (função afim) |

Fonte: próprio autor (2019)

Os exercícios propostos na sequência ampliam a utilização das técnicas a solicitar soluções analíticas e gráficas através de sistemas de equações.

Figura 23 - Tipo de Tarefa ($T_7$)

**174.** Resolva analítica e graficamente os sistemas de equações.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -14 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 7x + 4y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 5y = 2 \\ 6x + 7y = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

Fonte: Iezzi e Murakami (2004)

Com isso, temos o seguinte tipo de tarefa:

Quadro 10 - Tipo de Tarefa 7 ($T_7$)

| | |
|---|---|
| $T_7$ | Resolver analiticamente e graficamente o sistema de equações. |
| $T_{7,1}$ | Resolver o sistema de equações pelo método da substituição. |
| $\tau_{7,2}$ | Resolver o sistema de equações pelo método da adição. |
| $\tau_{7,3}$ | Construir duas retas no mesmo gráfico cartesiano e identificar o ponto de interseção. |
| $\theta$ | Sistema de equações lineares.<br>Resolução de expressões numéricas/algébricas.<br>Representação gráfica no plano cartesiano. |
| $\Theta$ | Relação funcional (função afim) |

Fonte: próprio autor (2019)

A abordagem superficial, a utilização de símbolos sem explicitar seus significados, a exploração excessiva de procedimentos mecânicos e a falta da utilização de situações-problemas podem dificultar a compreensão do conceito da função afim e de sua aplicação, conduzindo os alunos a resolver os exercícios sem entender a técnica utilizada.

O livro aborda a imagem da função, utilizando o teorema[74], que diz que "o conjunto imagem da função afim $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com a $\neq 0$, é $\mathbb{R}$" (IEZZI; MURAKAMI, 2004, p. 105). Em seguida, são resumidamente discutidos os

[74] A demonstração se encontra no livro Fundamentos de matemática elementar, volume 1.

coeficientes da função afim, no caso o coeficiente $a$, nomeado de coeficiente angular ou declividade e o coeficiente $b$, nomeado de coeficiente linear. Não é apresentada a funcionalidade dos coeficientes nem o que acontece graficamente ao serem mudados os seus valores em uma função afim. Com a explicação apresentada no livro, são sugeridos exercícios e alguns problemas, nos quais identificamos mais um tipo de tarefa ($T_8$) e o seu seguinte subtipo ($T_{8,1}$):

Quadro 11 - Tipo de Tarefa 8 ($T_8$)

| | |
|---|---|
| $T_8$ | Obter a equação da reta. |
| $T_{8,1}$ | Obter a equação da reta da função afim. |
| $\tau_{8,1}$ | Utilizar $y = ax + b$, substituindo $x$ e $y$ por dois pontos quaisquer $(x, y)$ que pertença à função e, em seguida, utilizar uma das técnicas $\tau_{7,1}$ ou $\tau_{7,2}$. |
| $\theta$ | Sistema de equações lineares.<br>Resolução de expressões numéricas/algébricas. |
| $\Theta$ | Relação funcional (função afim) |

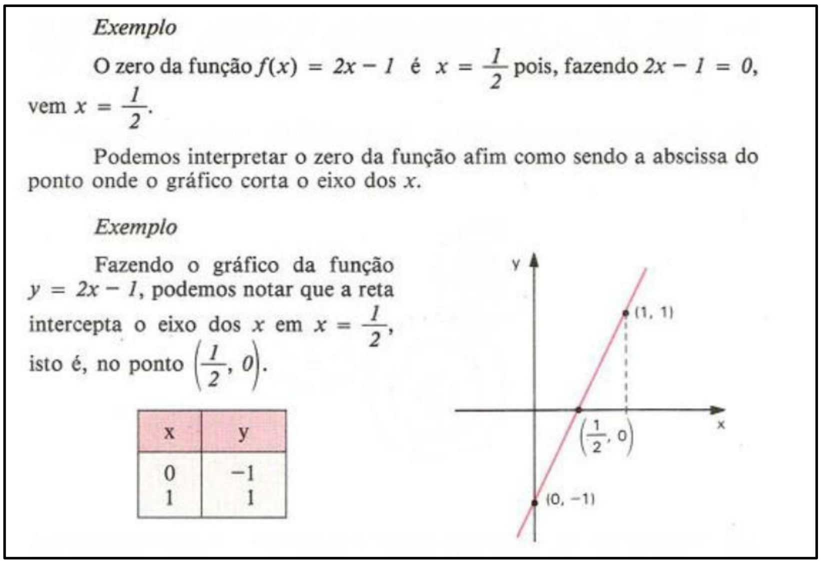
Fonte: próprio autor (2019)

As atividades propostas levam ao aluno a obter a equação da reta da função afim na sua representação algébrica, a partir de dados numéricos apresentados nos exercícios ou em gráficos já construídos. Não é estabelecida qualquer relação entre as duas representações de maneira distinta. Porém, existe um avanço na utilização das técnicas, o que permite ao aluno utilizar técnicas anteriores nas resoluções dos exercícios, compondo uma nova técnica a partir da união de outras.

O conceito do Zero da função é apresentado como "todo número $x$ cuja imagem é nula, isto é, $f(x) = 0$." Em seguida, é fornecida a definição algébrica: "x é zero de y = $f(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$" (IEZZI; MURAKAMI, 2004, p. 108). O livro promove uma ligação com a equação do 1° grau, que é utilizada para encontrar o ponto da abscissa que gráfico corta o eixo $x$, e demonstra que a equação tem solução única[75]. A partir daí, apresenta o seguinte exemplo:

[75] A demonstração se encontra no livro Fundamentos da matemática elementar, volume 1 na página 108.

Figura 24 - Exemplo do Tipo de Tarefa ($T_9$)



*Exemplo*

O zero da função $f(x) = 2x - 1$ é $x = \frac{1}{2}$ pois, fazendo $2x - 1 = 0$, vem $x = \frac{1}{2}$.

Podemos interpretar o zero da função afim como sendo a abscissa do ponto onde o gráfico corta o eixo dos $x$.

*Exemplo*

Fazendo o gráfico da função $y = 2x - 1$, podemos notar que a reta intercepta o eixo dos $x$ em $x = \frac{1}{2}$, isto é, no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

| x | y |
|---|---|
| 0 | −1 |
| 1 | 1 |



Fonte: Iezzi e Murakami (2004)

Ao verificarmos essa organização praxeológica, identificamos o tipo de tarefa ($T_9$) e seu subtipo ($T_{9,1}$):

Quadro 12 - Tipo de Tarefa 9 ($T_9$)

| | |
|---|---|
| $T_9$ | Determinar o zero da função |
| $T_{9,1}$ | Determinar o zero da função afim |
| $\tau_{9,1}$ | Substituir $y$ por zero na função e resolver a equação do 1° grau |
| $\theta$ | Propriedades da Igualdade<br>Representação gráfica no plano cartesiano |
| $\Theta$ | Relação funcional (função afim) |

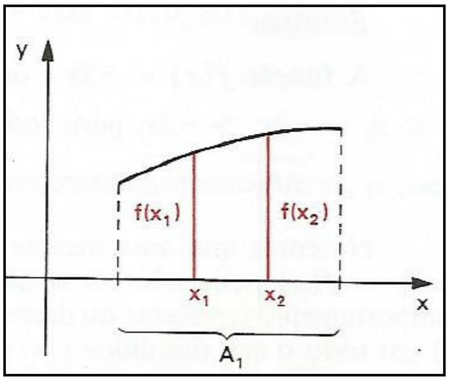
Fonte: próprio autor (2019)

Apesar de indicar a utilização da técnica ($\tau_{9,1}$) para encontrar o valor do zero da função afim, os problemas apresentados, em seguida, nos exercícios, não são resolvidos com o uso dessa mesma técnica. Segundo o Manual do professor do livro didático analisado, deve-se utilizar proporcionalidade, razão, igualdade de expressões algébricas na formação de equações e o mínimo múltiplo comum. Esse procedimento adotado pelo livro quebra, de maneira brusca, o possível contrato didático estabelecido na sala de aula, de acordo com o qual os exercícios apresentados após as definições e exemplos nomeiam as técnicas a serem utilizadas e que devem ser reproduzidas nos exercícios seguidamente propostos.

Em seguida, o livro define a função crescente de maneira geral, isto é, para todas as funções, enunciando que "a função $f: A \longrightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é crescente no conjunto $A_1 \subset A$ se, para dois valores quaisquer $x_1$ e $x_2$ pertencentes a $A_1$, com $x_1 < x_2$, tivemos $f(x_1) < f(x_2)$" (IEZZI; MURAKAMI, 2004, p. 110). Em sua representação algébrica, define que $f$ é crescente quando $(\forall x_1, x_2)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Complementando e ampliando a definição, apresenta outra forma algébrica seguida de uma representação gráfica:

$$(\forall x_1, x_2)\left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0\right)$$

Figura 25 - Função Crescente

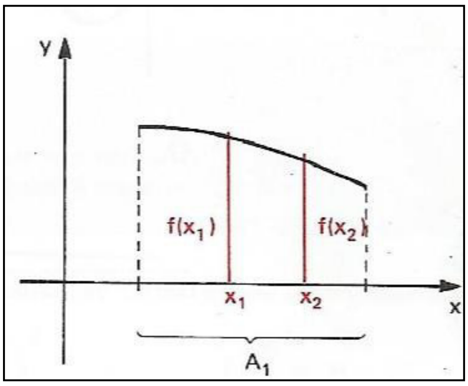



Fonte: Iezzi e Murakami, 2004

No caso da função decrescente, também a define de maneira geral, enunciando que "A função a função $F: A \longrightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é decrescente no conjunto $A_1 \subset A$ se, para dois valores quaisquer $x_1$ e $x_2$ pertencentes a $A_1$, com $x_1 < x_2$, tivemos $f(x_1) > f(x_2)$" (IEZZI; MURAKAMI, 2004, p. 110). Na representação algébrica, define que $f$ é decrescente quando $(\forall x_1, x_2)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Apresenta outra forma algébrica e gráfica similar à crescente:

$$(\forall x_1, x_2)\left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0\right)$$

Figura 26 - Função Decrescente




Fonte: Iezzi e Murakami (2004)

No caso de tratar especificamente do crescimento e do decrescimento da função afim, o livro enuncia os seguintes teoremas[76]:

1) A função afim $f(x) = ax + b$ é crescente se, e somente se, o coeficiente angular $a$ for positivo.
2) A função afim $f(x) = ax + b$ é decrescente se, e somente se, o coeficiente angular $a$ for negativo.

Ao escolher esse tipo de organização praxeológica para introduzir funções crescentes e decrescentes, é apresentado um excessivo uso de símbolos sem qualquer explicação de sua funcionalidade (ANDRADE; SARAIVA, 2012). As representações algébricas e gráficas têm uma abordagem superficial, dificultando a compreensão da relação entre as duas representações (LOURENÇO; OLIVEIRA, 2014; SANTOS; BARBOSA, 2017). Com isso, apresenta uma das seguintes atividades:

Figura 27 - Tipo de Tarefa ($T_{10}$)

**196.** Especifique, para cada uma das funções abaixo, se é crescente ou decrescente em $\mathbb{R}$.

a) $y = 1 + 5x$ c) $y = x + 2$ e) $y = -2x$
b) $y = -3 - 2x$ d) $y = 3 - x$ f) $y = 3x$

Fonte: Iezzi e Murakami (2004)

Nesse caso, identificamos o seguinte tipo de tarefa ($T_{10}$) e seu subtipo de tarefa ($T_{10,1}$):

[76] As demonstrações dos teoremas estão no livro Fundamentos de matemática elementar, volume 1, página 113.

Quadro 13 - Tipo de Tarefa 10 ($T_{10}$)

| | |
|---|---|
| $T_{10}$ | Determine se a função é crescente ou decrescente. |
| $T_{10,1}$ | Determine se a função afim é crescente ou decrescente |
| $\tau_{10,1}$ | Identificar se o valor do coeficiente $a$ é positivo ou negativo. |
| $\tau_{10,2}$ | Separar o gráfico por intervalos e utilizar dois pontos quaisquer pertencentes ao intervalo para aplicar a definição. |
| $\theta$ | Teoremas para determinar o crescimento de decrescimento da função afim.<br>Funções definidas por várias sentenças abertas.<br>Representação gráfica no plano cartesiano. |
| $\Theta$ | Relação funcional (função afim) |

Fonte: próprio autor (2019)

Para determinar se uma função é crescente ou decrescente, o livro utiliza exemplos que não têm a necessidade de separar a função em intervalos, mas, nos exercícios propostos, o aluno é orientado a utilizar uma técnica para separar as funções em intervalos e determinar se é crescente ou decrescente. No caso particular da função afim, limita-se a observar se o valor do coeficiente angular é positivo ou negativo, não abordando graficamente a variação do coeficiente e limitando a compreensão de sua aplicação.

Ao apresentar o estudo do sinal da função o livro inicia com uma definição geral: "seja a função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$". Em seguida solicita a resolver o problema "para que os valores de $x$ temos $f(x) > 0, f(x) = 0$ ou $f(x) < 0$?". É destacado que, ao resolver esse problema, o aluno estará estudando o sinal da função e que, "quando a função está representada no plano cartesiano, basta examinar se é positiva, nula ou negativa a ordenada de cada ponto da curva" (IEZZI; MURAKAMI, 2004, p. 114).

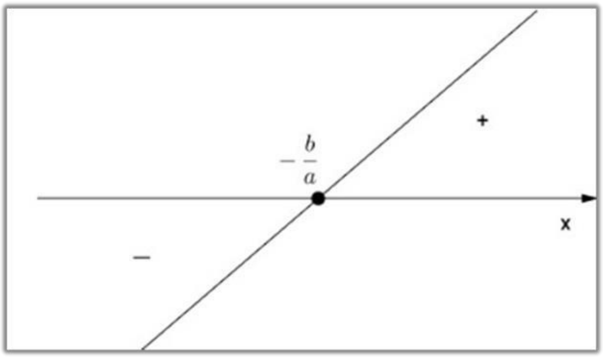
Com essa introdução, a função afim é particularizada; considerando $x = -\frac{b}{a}$ como a representação algébrica do zero da função afim, parte para análise das situações em que $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$. Na sequência, são considerados dois casos nos quais o valor do coeficiente $a$: $a > 0$ e $a < 0$. Para o caso $a > 0$, apresenta duas situações:

1) $f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$

2) $f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$

Consequentemente, apresenta a representação gráfica utilizando o eixo das abscissas:

Figura 28 - Representação gráfica quando a > 0



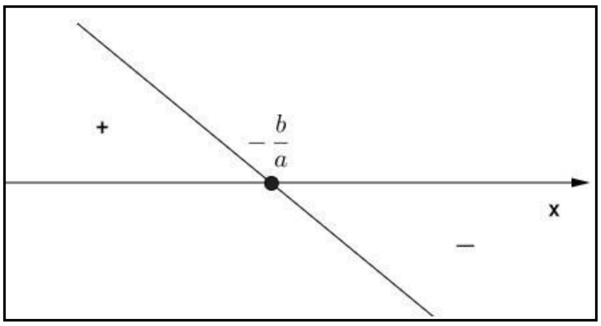

Fonte: próprio autor (2019)

No comentário relacionado à representação gráfica, o livro ressalta que a função é crescente pelo fato de o coeficiente angular ser positivo, relacionando ao tópico anterior. A finalidade dessa representação é para o aluno compreender que, para os valores maiores que $-\frac{b}{a}$, obtemos valores positivos de $f(x)$; e, para os valores menores que $-\frac{b}{a}$, obtemos valores negativos de $f(x)$. Para o caso de $a < 0$, o livro apresenta as seguintes situações:

1) $f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$
2) $f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$

Consequentemente, apresenta a sua representação gráfica:

Figura 29 - Representação gráfica quando a < 0




Fonte: próprio autor (2019)

Nesse caso, é feito o comentário segundo o qual a função é decrescente pelo fato de o valor do coeficiente angular ser negativo. Em seguida, é apresentado um resumo das situações possíveis para o estudo do sinal da função afim, afirmando-se que, ao se determinar o valor do zero da função e representá-lo no eixo das abscissas, dois procedimentos podem ser aplicados a partir do valor do coeficiente angular:

1) Se for positivo, números que estão à direita do zero da função $\left(x = -\frac{b}{a}\right)$ terão $f(x)$ o sinal de $a$. Caso positivo, os números reais que estão à esquerda do zero da função $\left(x = -\frac{b}{a}\right)$, terão $f(x)$ o sinal de $-a$.

2) Se for negativo, números que estão à direita do zero da função $\left(x = -\frac{b}{a}\right)$ terão $f(x)$ o sinal de $a$. Caso positivo, os números reais que estão à esquerda do zero da função $\left(x = -\frac{b}{a}\right)$, terão $f(x)$ o sinal de $-a$.

A abordagem adotada pelo livro sobre o estudo do sinal da função, especificamente do sinal da função afim, dá ênfase à representação algébrica em detrimento das representações gráficas, para explicar algumas situações no estudo do sinal.

Figura 30 - Tipo de Tarefa ($T_{11}$)

**200.** Estude os sinais das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $y = 2x + 3$

b) $y = -3x + 2$

c) $y = 4 - x$

d) $y = 5 + x$

e) $y = 3 - \frac{x}{2}$

f) $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{2}$

g) $y = 2x - \frac{4}{3}$

h) $y = -x$

Fonte: Iezzi e Murakami (2004)

Nesse sentido, identificamos um tipo de tarefa ($T_{11}$) e o seu subtipo ($T_{11,1}$):

Quadro 14 - Tipo de Tarefa 11 ($T_{11}$)

| | |
|---|---|
| $T_{11}$ | Estude o sinal da função. |
| $T_{11,1}$ | Estude o sinal da função afim. |
| $\tau_{11,1}$ | Determinar o zero da função afim ($\tau_{9,1}$) + Identificar se o valor do coeficiente $a$ é positivo ou negativo ($\tau_{10,1}$) + representar graficamente + utilizar um dos procedimentos do resumo relacionado ao estudo do sinal da função afim. |
| $\theta$ | Propriedades das Inequações (resolução)<br>Teoremas para determinar o crescimento e decrescimento da função afim.<br>Representação gráficas no plano cartesiano. |
| $\Theta$ | Relação funcional (função afim) |

Fonte: próprio autor (2019)

A organização praxeológica utilizada pelo livro didático valoriza a representação algébrica sem fazer relação com a representação gráfica, levando o aluno a entender que são dois campos distintos sem conexão, o que pode ocasionar dificuldades na compreensão dos conceitos e de suas aplicações. Na tentativa de diminuir as dificuldades apresentadas e discutidas sobre o conceito de função, apresentaremos o nosso MER, que fundamentará o PEP proposto para a compreensão da aplicação do conceito de função.

### 3.2. Modelo Epistemológico de Referência para o Conceito de Função na Licenciatura em Matemática

O MER tem uma funcionalidade importante e essencial para a aplicação dos modelos didáticos de referência no papel de fundamentar e orientar. Para darmos uma visão detalhada do nosso modelo, apresentaremos a construção da formulação do nosso problema didático e os passos para sua construção. Para detalhar a construção do nosso MER, apresentaremos os estágios de modelação matemática, os níveis de modelação funcional e a proposta desenvolvida por Lucas (2015) ao apresentar um MER direcionado para o cálculo diferencial elementar. O motivo de detalhar esses pontos teóricos é para justificar a nossa proposta do MER para aplicação da noção de função, em um curso de licenciatura em Matemática.

### 3.2.1. Formulação do Problema Didático

A compreensão do problema a ser enfrentado em qualquer área é uma das condições para propor caminhos, com a finalidade de construir soluções. Os caminhos escolhidos podem proporcionar rapidamente as soluções ou, simplesmente, aumentar os problemas. Por esse motivo, uma descrição detalhada do problema torna-se necessária. Nesse sentido, iremos caracterizar o nosso problema didático, tomando por base as três dimensões fundamentais apresentadas por Gascón (2011). A caracterização está estritamente relacionada com o nosso MER, no qual fundamenta os caminhos escolhidos.

Gascón (2011) apresenta três dimensões relacionadas ao problema didático, que são: a epistemológica, a econômica-institucional e a ecológica. Para o autor, as dimensões são fundamentais para definir os problemas de investigação da didática da Matemática e que se encontram relacionados à TAD. Para esquematizar o desenvolvimento do problema didático, é utilizada a seguinte representação:

$$\{[(P_0 \oplus P_1) \subset P_2] \subset P_3\} \subset P_\delta$$

Gascón (2011, p. 206) explica que $P_1$, $P_2$ e $P_3$ são as dimensões fundamentais do problema didático, e que o $P_0$ tem um papel especial, pelo fato de representar a formulação do problema inicial; problemas podem ter características “pré-científicas”, que geralmente são visíveis e presentes em todos os problemas didáticos. O símbolo $\oplus$ indica que o $P_0$ é incompleto, existindo a necessidade de ser adicionado à dimensão epistemológica $P_{1,}$ para, pelo menos, ser considerado um problema. Então, a existência só do $P_0$ não é suficiente para que seja caracterizado um problema. No caso de $\subset$, é entendido como inclusão, indicando que cada uma das dimensões $P_i$ é logicamente anterior a $P_{i+1}$, caracterizando um hipotético desenvolvimento do problema. Finalmente, o $P_\delta$ é denominado de problema didático, contendo as três dimensões fundamentais.

Para esclarecer o nosso problema didático, descreveremos cada tipo de dimensão associado ao conceito de função e com o nosso MER. O problema $P_0$ tem seu ponto de partida à medida que o professor inicia um conteúdo matemático junto a seus alunos; os problemas são formulados sob a influência da cultura escolar existente, podendo ser fundamentados nos documentos escolares, em que, muitas vezes, não são questionadas pelos professores. Nesse sentido, representaremos $P_0$ pela seguinte pergunta:

$P_0(F)$: Como ensinar os alunos o conceito de função?

Ao propor o problema inicial, outros problemas específicos também podem ser enunciados:

$P'_0(F)$: Como posso motivar os alunos a aumentar o interesse em estudar o conceito de função? Como utilizar os recursos das TIC para o ensino de função? Como fazer com que cada aluno compreenda o conceito de função?

Gascón (2011) destaca que todo problema didático se inicia por um problema construído pelo professor, no caso, por um problema docente.

A dimensão epistemológica $P_1$ está ancorada em um modelo epistemológico de referência (MER) que é provisório e, com base nele, pode-se analisar, construir ou reconstruir as praxeologias presentes na instituição a ser analisada. Os modelos epistemológicos de referência são hipóteses de trabalho, podendo ser constantemente questionados e revisados, o que possibilita a análise do saber matemático antes de ser ensinado, no caso do conceito de função. O modelo pode proporcionar uma visão dos principais problemas de compreensão conceitual, e apresentar possíveis caminhos para a solução desses problemas. Gascón (2011) destaca que a dimensão epistemológica é um componente essencial na construção do problema didático, pelo fato de tratar de questões epistemológicas do saber em jogo, como também que não se desvincula das outras dimensões. Algumas perguntas relacionadas à dimensão epistemológica direcionada ao conceito de função podem ser formuladas:

$P_1(F)$: O que é função e qual a sua aplicação na Matemática? Como construir a compreensão do conceito de função tomando por base o MER? Como relacionar a dependência entre as variáveis de uma função? Como proporcionar a compreensão da mudança de registro de uma função? Como aplicar as definições de função crescente ou decrescente em qualquer tipo de função?

Gascón (2011) comenta que a dimensão econômica-institucional gira em torno de perguntas relacionadas às Organizações Matemáticas (OM) e às Organizações Didáticas (OD) existentes em uma determinada instituição, como também desenvolve, experimenta e analisa novas ODs. Ao introduzir novas ODs, existirá a possibilidade de análise dos fatos didáticos produzidos no sistema docente, fatos ocasionados por essas novas ODs, assim como a análise de sua viabilidade. Lucas (2015) comenta, a esse respeito:

> Que as questões relativas da dimensão econômica de um problema didático são as que se refere ao resultado produzido pela transposição didática (em um período histórico determinado) ao atuar sobre as praxeologias matemáticas e didáticas (LUCAS, 2015, p. 106) (tradução nossa).

Consequentemente, temos as seguintes perguntas:

$P_2(F)$: Como é interpretado e compreendido o conceito de função nos cursos de Licenciatura em Matemática atualmente? Como se apresenta a rigidez e a desarticulação das OMs ao se abordar o conceito de função nos cursos de Licenciatura em Matemática? Quais as principais orientações dos documentos oficiais ao tratarem do ensino de função na educação básica? Quais os principais momentos da transposição didática quando o conceito de função passa da comunidade científica para a comunidade escolar? Quais OMs e ODs são utilizadas no ensino de função nas licenciaturas em Matemática? Quais novas praxeologias podem ser utilizadas nas licenciaturas em Matemática ao se abordar o conceito de função?

A dimensão ecológica de um problema didático possui questões relacionadas às restrições e condições praxeológicas diante dos níveis de codeterminação didática. Os níveis de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2001, 2002) permitem estudar e compreender as influências e restrições das OMs e ODs, criando condições para reestruturar e reorganizar as condições de ensino e aprendizagem, a partir do nível mais genérico (civilização) ao mais específico (problema matemático). Gascón (2011, p. 219) resume a dimensão ecológica de um problema didático, a qual "envolve questões que pretendem indagar que tipo de restrições e de que nível provêm, são cruciais para a ecologia das praxeologias matemáticas e didáticas". Compreender as restrições e suas origens é essencial para criar condições ao desenvolvimento das praxeologias, isto é, à sua existência e razão de ser. Portanto, temos as seguintes questões:

$P_3(F)$: Quais são as restrições que dificultam o desenvolvimento da Modelação Funcional aplicado ao conceito de função e que condições são necessárias para superar essas dificuldades? Como construir e aplicar um PEP fundamentado no MER do conceito de função? Quais as condições necessárias para aplicar um PEP? Quais restrições podem existir no desenvolvimento de um PEP direcionado ao conceito de função? Quais os meios e recursos necessários para o desenvolvimento do PEP direcionado ao conceito de função?

Ao caracterizarmos as dimensões do nosso problema didático relacionado ao conceito de função, apresentaremos e aplicaremos um Percurso de Estudo e Pesquisa diretamente fundamentado pelo Modelo Epistemológico de Referência, no sentido de proporcionar respostas às dimensões, principalmente à dimensão ecológica.

### 3.2.2. Construção do Diagrama do Ensino do Conceito de Função

A organização teórica para a construção do diagrama do conceito de função terá por base o caminho seguido por Lucas (2015), ao propor o diagrama de atividade de modelação funcional como esquema do MER. A proposta de Lucas (2015) é direcionada para o conceito do cálculo diferencial elementar, que utiliza a Modelação Matemática (Chevallard, 1989; Gascón, 2001) e os níveis de Modelação Funcional (Ruiz-Munzón, 2010). A seguir, apresentaremos a ideia de cada base teórica utilizada para a construção do nosso diagrama, com a finalidade de esclarecer alguns pontos conceituais utilizados. Ressaltamos que a tese de Lucas (2015) é direcionada para o cálculo diferencial elementar, que é uma ampliação da tese de Ruiz-Munzón. Em nosso caso, a pesquisa será direcionada para o ensino do conceito de função para a Licenciatura em Matemática, fundamentado o processo de aplicação do PEP proposto na pesquisa.

#### 3.2.2.1. A TAD e o Processo de Modelação Matemática

A Didática da Matemática discute o processo de modelação matemática destacando sua importância e aplicação, o qual, no decorrer dessas discussões, ocasiona a sua ampliação conceitual, a exemplo da TAD. Barquero (2009) comenta dois pontos a serem evitados, geralmente, ao se propor um problema didático: a análise da dimensão epistemológica e a análise da dimensão ecológica. As ausências dessas análises proporcionam lacunas na compreensão do conceito trabalhado e nas condições de aplicação das atividades matemáticas propostas.

Para enfrentar o problema da ausência das dimensões, a TAD propõe reformular os processos de Modelação Matemática, interpretando-os dentro de um modelo geral de construção e divulgação dos conhecimentos matemáticos nas instituições (BARQUERO, 2009). Nesse processo, a atividade matemática assume um papel essencial destacado por Chevallard, Bosch e Gascón (2001), segundo os quais a atividade matemática tem a finalidade de construir um modelo matemático da realidade que se pretende estudar, aplicando e analisando os resultados apresentados no processo, podendo servir para questionar e rever as perguntas levantadas inicialmente. Constrói-se a ideia de que "grande parte da atividade matemática pode identificar-se, portanto, como uma atividade de modelação matemática".

Nesse sentido, a seguinte citação de Barquero (2009) sintetiza a ideia da modelação matemática no âmbito da TAD:

> Situar explicitamente no âmbito da Teoria Antropológica do Didático (TAD) para tratar a problemática da modelação matemática, supõe reformular os processos de modelação para interpretá-los dentro de um modelo geral de construção e ampliação institucional dos conhecimentos matemáticos (BARQUERO, 2009, p. 61) (tradução nossa).

A modelação matemática no âmbito da TAD tem a função de proporcionar a construção de atividades que articulem as organizações matemáticas do saber em jogo, possibilitando, de maneira progressiva, a sua ampliação.

Com a finalidade de organizar e representar as ideias da modelação matemática no âmbito da TAD, Chevallard (1989) apresenta um esquema simplificado do processo de modelação elementar, descrito em três etapas:

1) Definimos o sistema que queremos estudar, especificando os aspectos do sistema a que nos propomos estudar e o simbolizando mediante um conjunto de variáveis.
2) Construímos o modelo propriamente estabelecido e definimos as relações entre as variáveis identificadas na primeira etapa. O modelo do sistema a estudar é o conjunto destas relações.
3) Trabalha-se com o modelo definido, com o objetivo de produzir conhecimento relativo ao sistema; esses conhecimentos tomam a forma de novas relações entre as variáveis do sistema. Esta terceira etapa é sempre uma fase propriamente matemática, e as etapas anteriores são competência do domínio da realidade.

Tomando por base o esquema proposto por Chevallard (1989), Gascón (2001), propõem-se quatro estágios para a modelação matemática, sem existir necessariamente uma ordem a ser seguida:

1° Estágio: Delimitação ou construção do sistema a modelizar em que formula questões problemáticas e conjecturas. É o ponto de partida da modelação matemática, constitui-se de uma situação problemática que proporcionam formulações de perguntas e conjecturas preliminares sem precisão, podendo identificar e formular provisoriamente problemas matemáticos.

2° Estágio: Construção dos modelos e formulação das questões iniciais. Envolve a definição ou a delimitação do sistema provisório elaborado anteriormente, elaborando o modelo matemático correspondente. Neste estágio, propõe-se a escolha de técnicas próprias e mais precisas a serem utilizadas nas questões propostas, e descrevem-se as possíveis relações existentes no sistema.

3° Estágio: Utilizar o modelo e interpretar. É o trabalho técnico dentro do modelo, a análise do trabalho e de seus resultados no sistema modelizado. Esse estágio observa e decide a melhor aplicação e adequação do modelo e de suas técnicas utilizadas.

4° Estágio: Novo processo de modelação para novas questões. Neste estágio, existirá a formulação de novos problemas, cujas resoluções possibilitarão responder a novos questionamentos relativos ao sistema dificilmente formulados antes da elaboração do modelo matemático, utilizando novas organizações matemáticas e novos modelos.

#### 3.2.2.2. Níveis de Modelação Funcional (Ruiz-Munzón, 2010)

A modelação Matemática tem um papel importante no campo da didática da Matemática, no sentido de proporcionar bases conceituais, com a intenção de construir caminhos que identifiquem as restrições e proponham condições para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Seguindo essa ideia, os três níveis de modelação funcional de Ruiz-Munzón (2010) vêm como proposta para superar as dificuldades e restrições da vida escolar no processo de algebrização da Matemática. Essa modelação serviu de base para a construção do MER proposto por Lucas (2015), com a finalidade de apresentar uma sucessão de praxeologias cuja complexidade e completude tornam-se crescentes, e cujo desenvolvimento toma por base os três níveis de modelação funcional de Ruiz-Munzón (2010). Tais níveis estão relacionados à modelização de funções e seu desenvolvimento é progressivo. Em seguida, apresentaremos os três níveis, de maneira que o leitor tenha a ideia da sua funcionalidade:

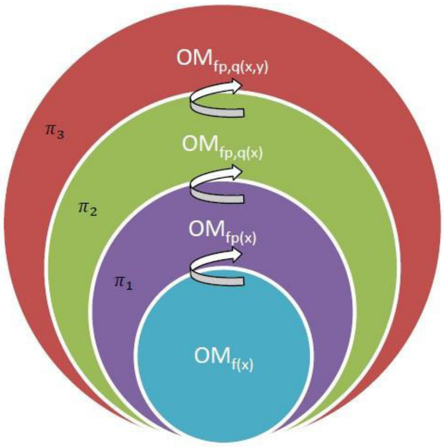
1° Nível: funções isoladas de uma única variável. Esse nível inclui as equações (ou inequações) associadas e as etapas de modelação algébrica propostas por Bolea (2003), em que se procura responder às questões que fazem referência à variação de uma variável em função da outra. A utilização de técnicas só algébricas é superada pela necessidade de utilização de técnicas novas, como a utilização de representações gráficas para estudar as variações de crescimento, decrescimento, estudo do sinal etc.
Esse estudo detalhado da função permite analisar o seu comportamento em situações particulares, proporcionando uma visão geral da sua funcionalidade.

2° Nível: família de funções de uma variável. Na limitação da compreensão do estudo dos símbolos presentes nas funções, privilegia-se o papel das incógnitas e das variáveis em detrimento da funcionalidade dos parâmetros e de sua aplicação. Essa limitação dificulta o trabalho com as expressões analíticas de funções elementares no momento em que é abordado o estudo de famílias de funções, como modelos de sistemas a serem utilizados em níveis diferentes de ensino. Ruiz-Munzón (2010) denomina o segundo nível como a materialização de modelos que se expressam precisamente através das famílias de funções de uma variável e suas equações (ou inequações) paramétricas associadas, deixando claro a distinção entre parâmetros e variáveis.

3° Nível: família de funções de duas ou mais variáveis. Segundo Ruiz-Munzón (2010), esse nível se materializa em modelos que se expressam através das famílias de funções de duas ou mais variáveis e suas correspondentes fórmulas associadas. O papel dos parâmetros e das variáveis são substituídas pelo estudo das variações conjuntas das duas ou mais variáveis de uma função. O estudo, neste nível, parte tomando por base os modelos utilizados no segundo nível, mas, para uma resolução completa, necessitará de desenvolvimento ou da utilização de novas técnicas.

Na mudança crescente dos níveis de modelação funcional (RUIZ-MUNZÓN, 2010), verifica-se a necessidade de utilização de técnicas novas e, consequentemente, a presença de outras tecnologias e teorias. Para representar os níveis, Lucas (2015, p. 30) apresenta o seguinte esquema:

Figura 31 - Representação dos três Níveis de Modelação Funcional




Fonte: Lucas (2015)

Na Figura 31, estão representados os níveis $(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ de modelação funcional com as suas respectivas organizações matemáticas, e é apresentado o seu desenvolvimento progressivo e crescente.

#### 3.2.2.3. O Modelo Epistemológico de Referência para o Ensino do Cálculo Diferencial Elementar

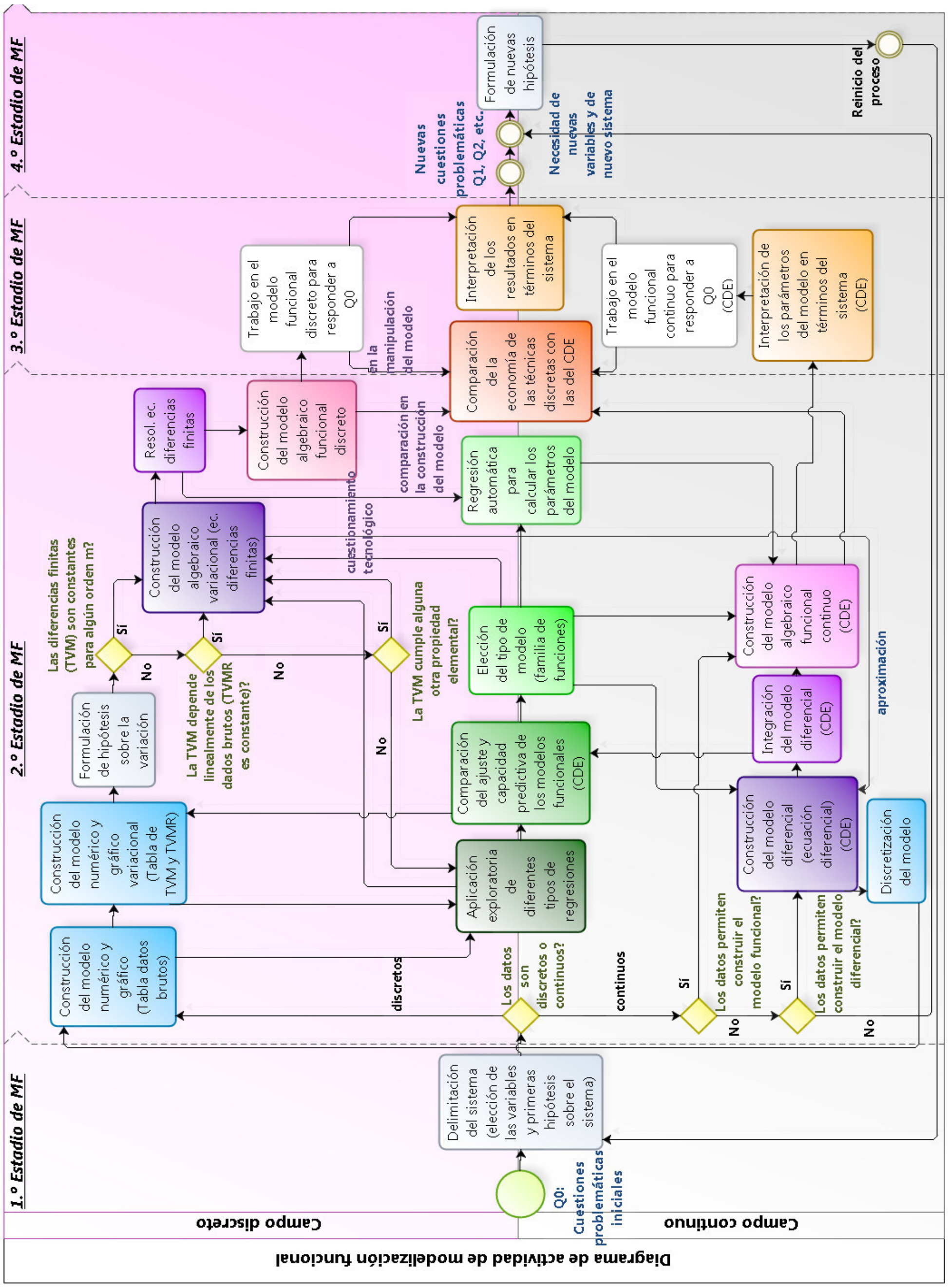
O trabalho de Lucas (2015) traz uma análise detalhada das condições institucionais necessárias para aplicar uma experimentação através do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), para o ensino do cálculo diferencial elementar, em um curso de Licenciatura de Medicina Nuclear do ensino universitário português. O PEP proposto está sustentado pelo Modelo Epistemológico de Referência (MER), no qual iremos abordar algumas características relacionadas a sua construção proposta por Lucas (2015), com base nos estágios de modelação matemática (CHEVALLARD, 1989; GASCÓN, 2001) e nos níveis de modelação funcional (RUIZ-MUNZÓN, 2010).

A construção do MER, como sistema de referência provisório, fundamentou os diferentes recorridos matemáticos; formulou-se, com precisão, o seu problema de investigação didática, interpretou-se a evolução histórica do papel do cálculo diferencial elementar da escola secundária portuguesa, relacionando-o à modelação funcional. Foram formuladas as conjecturas relacionadas à incompletude e à desarticulação das OMs em torno da modelização funcional, foram formuladas perguntas relacionados aos documentos oficiais, para caracterizar a razão de ser do sistema oficial português para o ensino do cálculo diferencial elementar como caminho à universidade, e constatou-se a existência da falta de visibilidade escolar e da modelação funcional.

O MER proposto por Lucas (2015) apresenta diversas características e funcionalidades que partem de questões epistemológicas do saber em jogo, até à análise da transposição didática em todo o processo. O MER propõe identificar as restrições a esse modelo e a construir condições para direcionar e fundamentar propostas materializadas nos MDR que possam possibilitar meios para o processo de ensino e aprendizagem; neste caso, o cálculo diferencial elementar.

Em sua reformulação da noção da modelização funcional e da ampliação dos níveis de Ruiz-Munzón, Lucas (2015. p. 93) apresenta um esquema detalhado dos tipos de tarefas como componentes dos quatro estágios do processo de modelização matemática. O esquema do MER é apresentado através de um diagrama de atividades chamado de atividade de modelização funcional. O diagrama apresenta os diferentes caminhos matemáticos a serem utilizados na resolução de uma questão, relacionando funções elementares discretas e contínuas. No desenvolvimento do estudo, outras questões podem surgir, integrando o processo de modelação, e até reformular as já existentes, manifestando um “caráter recursivo do processo de modelação matemática”.

Figura 32 - Esquema proposto por Lucas (2015)




Fonte: Lucas (2015)

O diagrama possui quatro estágios de modelação matemática, não existindo uma sucessão linear entre eles. O primeiro estágio trata da delimitação ou construção do sistema a ser modelação e das formulações das questões problemáticas, levantando algumas conjecturas. O segundo envolve a construção do modelo matemático. O seguinte é o trabalho técnico do modelo, a sua interpretação e a análise dos resultados obtidos. E, por último, há a formulação de novas questões que vão conduzir a um novo processo de modelação.

O diagrama está dividido no campo discreto e contínuo em que uma atividade pode permitir o trabalho em um deles ou transitar de um campo para o outro, além de ter atividades interligadas em campos diferentes. No decorrer do processo, as organizações matemáticas são utilizadas e desenvolvidas, e é apresentada uma completude e crescente utilização das técnicas, com a consequente mobilização de novas tecnologias e teorias.

#### 3.2.2.4. Diagrama de Atividades para o Ensino do Conceito de Função para a Licenciatura em Matemática

O diagrama proposto que representa o MER para o ensino do conceito de função para a Licenciatura em Matemática também foi utilizado nesta pesquisa, para o estudo do conceito da função afim. O nosso MER possibilitará, em pesquisas futuras, a aplicação das funções quadráticas, exponenciais e logarítmicas, as quais são abordadas na disciplina de Matemática Básica (ou fundamentos da Matemática) dos cursos de Licenciatura em Matemática. O MER do ensino do conceito de função vem como uma possível resposta à incompletude e à rigidez das praxeologias adotadas no referido curso. A proposta toma por base a modelação Matemática (CHEVALLARD, 1989; GASCÓN, 2001) e os níveis de Modelação Funcional (Ruiz-Munzón, 2010), assim como a proposta do diagrama de atividades de modelação funcional (LUCAS, 2015).

Para construir o nosso diagrama relacionado ao ensino do conceito de função, tomamos por base: o contexto histórico do seu surgimento; a sua apresentação e abordagem nos documentos educacionais brasileiros; as dificuldades no seu ensino apresentadas por alguns pesquisadores; a análise praxeológica realizada no livro didático Fundamentos[77] da Matemática Elementar; e a formulação do problema didático discutido por Gascón (2011).

O estudo da evolução histórica do conceito de função foi essencial para representá-lo como uma construção do homem, servindo para elaborar um percurso que abordasse a construção do conceito por etapas interligadas, buscando evitar a ideia de que

[77] Fundamentos da Matemática Elementar vol. 1 (IEZZI; MURAKAMI, 2004)

conceito nasce pronto. O estudo histórico foi igualmente importante para a análise da transposição didática do conceito para os livros didáticos, guiando-nos para a identificação dos possíveis problemas no seu ensino.

Nos documentos educacionais oficiais brasileiros, as observações das propostas e conduções do ensino de função foram analisadas, com a finalidade de verificar como elas se adequam ao que propõe o sistema de educação do Brasil, principalmente na Licenciatura em Matemática. Os documentos orientam e sugerem que o conceito de função necessita ser compreendido e aplicado em outros temas matemáticos, como também em outras áreas de conhecimento (BRASIL. 1998, 2000, 2006, 2017). Assim, deve-se trabalhar, de forma efetiva: a compreensão e a funcionalidade da variável e da incógnita; a utilização de situações-problemas; as suas diversas representações no gráfico cartesiano e algébrico; a sua relação na proporcionalidade direta e inversa; as relações de dependências entre as variáveis; e sua relação com outros conceitos abordados no ensino superior.

Em relação às dificuldades no ensino de função, a sua identificação foi necessária para propormos outra alternativa de ensino, a fim de combater: a discussão superficial do conceito e a falta de conexão entre as suas representações (ESPITA; CRUZ; OCHOA, 2011); a dificuldade em relacionar os tipos diferentes de registros (LOURENÇO; OLIVEIRA, 2014); a falta de compreensão da dependência entre as variáveis (TENÓRIO; PENNA; TENÓRIO, 2015); a dificuldade em relacionar o conceito de Função como fundamental e lógico-histórico, sem uma relação com os problemas do cotidiano (NEVES; RESENDE, 2016); e a dificuldade em compreender a funcionalidade dos símbolos matemáticos relacionados ao conceito de função (LIMA, 2014).

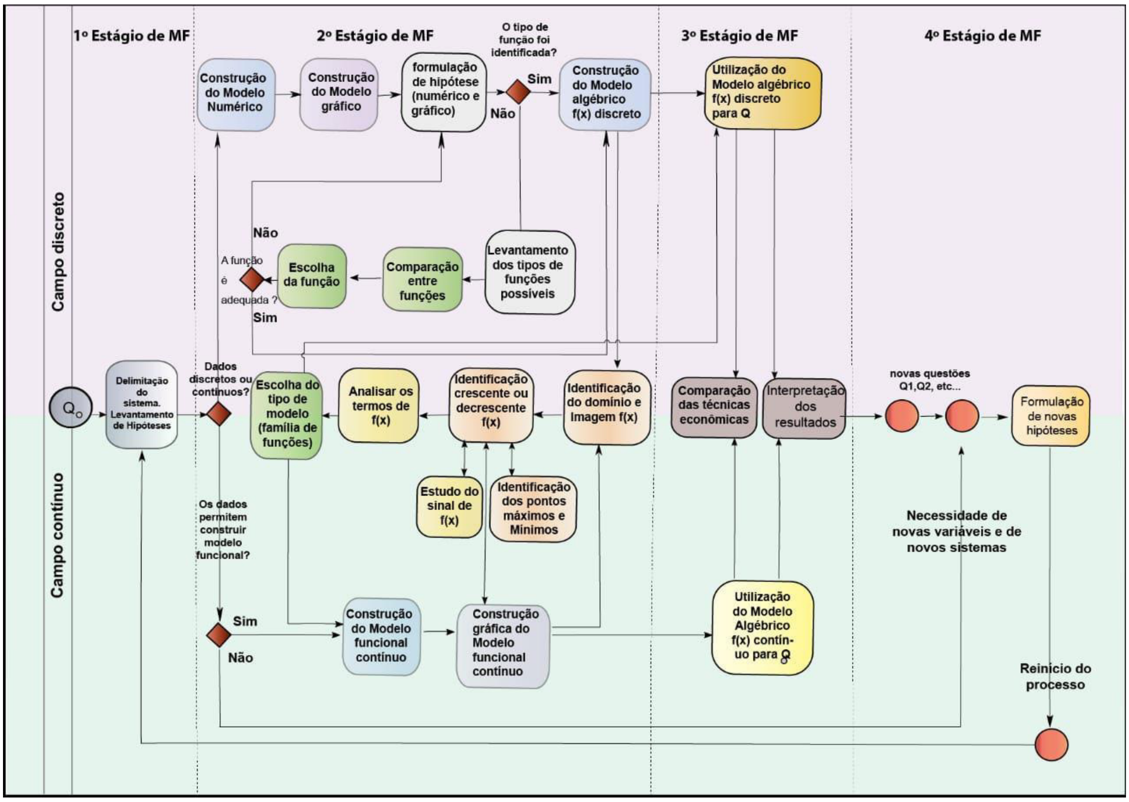
A análise praxeológica do conceito de função e de função afim, abordados no livro indicado, nos possibilitou observar alguns problemas encontrados: repetição excessiva de técnicas; apresentação superficial do conceito; falta de articulação entre os conceitos e suas representações; excesso de símbolos matemáticos sem uma discussão da sua funcionalidade; utilização inadequada de problemas; e valorização da representação algébrica. Alguns destes problemas foram relacionados às dificuldades levantadas pelos pesquisadores, nos quais utilizamos estas informações para elaborarmos o nosso MER, no sentido de combater estas dificuldades.

Por último, na esquematização geral do nosso quadro, tomamos por base a formulação do problema didático discutido por Gascón (2011), considerando: a dimensão epistemológica para a formulação do nosso problema didático, relacionado ao ensino de função; sua dimensão econômico-institucional, abordando as OMs e ODs; e a dimensão ecológica, identificando as restrições para construir as condições do sistema didático.

Portanto, para a construção do nosso MER foi importante a contextualização histórica do conceito de função, a sua apresentação nos documentos educacionais brasileiros, as pesquisas relacionadas ao seu ensino e à identificação das praxeologias presentes no livro didático utilizado em muitas licenciaturas em Matemática. Com estas informações, propormos um esquema que tenta diminuir as dificuldades no ensino da noção de função, na Licenciatura em Matemática como uma outra alternativa de ensino.

A seguir, apresentamos a nossa proposta de esquema para o nosso MER, representado pelo seguinte diagrama:

Figura 33 - Diagrama de Atividades da Noção de Função




Fonte: próprio autor (2019)

Este diagrama está organizado em dois principais campos: o contínuo e o discreto. A determinação inicial do tipo de dados a serem utilizados nos conduzirá pelos caminhos possíveis apresentados no diagrama. Os “retângulos” são as possíveis tarefas que os alunos deverão utilizar durante o processo; estão identificadas com as ações e agrupadas por cores, como por exemplo: as que possuem a cor azul estão ligadas às tarefas que têm como objetivo a construção de modelos. Os losangos representam decisões a serem tomadas pelos alunos no decorrer do processo, os círculos são questões desenvolvidas e suas derivadas. Destacamos que o diagrama representa um esquema provisório que pode ser alterado no decorrer do processo ou por sugestões apresentadas pela comunidade de professores ou pesquisadores.

#### 3.2.2.4.1. Descrição das Atividades do Diagrama de Atividades de Funções Elementares

Descreveremos as atividades buscando detalhar as tarefas e questões que fazem parte do diagrama, com a finalidade de compreender as fases para a construção e aplicação dos modelos a serem utilizados, assim como os possíveis caminhos seguidos na resolução da questão principal (ou geratriz). Optaremos por descrevê-los, a partir dos estágios da modelação funcional, explicando os pontos de questões e atividades inseridas em cada um, e tomando por base algumas definições apresentadas por Lucas (2015).

**Primeiro Estágio de Modelação Funcional: construção do sistema a modelizar**

Primeiramente apresentaremos a questão problemática representada pela questão geratriz $(Q_0)$. Ao iniciar um processo de estudo em que existem várias questões problemáticas, nem sempre essas questões são precisas, existindo a possibilidade de serem geradas outras questões derivadas $(Q_1, Q_{2,}Q_3, \ldots)$, com diferentes caminhos para a resolução do problema inicial. Eis alguns exemplos das questões problemáticas iniciais: Como representar genericamente o sistema de aposentadoria atual? Como prever o aumento populacional de uma determinada cidade? Como representar e articular, de maneira viável, o fluxo dos carros de um bairro? Como prever o consumo de alimentos de uma escola?

Em seguida, temos a delimitação do sistema e o levantamento de hipóteses. Nesse ponto, existe a escolha de qual sistema será utilizado e das variáveis presentes e que são pertinentes para responder à questão geratriz, especificando-se qual variável será dependente da outra. Nesse momento, as hipóteses são formuladas sobre o sistema que será utilizado relacionado às variáveis a serem utilizadas.

**Segundo Estágio de Modelação Funcional: construção do modelo**

Nesse segundo estágio, existe a definição da utilização dos dados contínuos ou discretos. Dados contínuos são relações entre variáveis que podem ser do tipo funcional, representadas e condicionadas aos dados presentes no problema, ou uma descrição verbal da relação. No caso dos dados discretos, estão condicionados à variação dos dados mediante um número finito de valores da variável dependente com os valores prefixados das variáveis independentes.

**Partindo de Dados Contínuos**

Caso os dados sejam contínuos terá que se responder à seguinte pergunta:

Os dados permitem construir o modelo funcional?

Se a resposta for "não", existirá a necessidade de propor novas questões que apresentem novas variáveis no sistema e, consequentemente, novas hipóteses irão surgindo, levando ao início do processo.

Se a resposta for "sim", parte-se para a construção do modelo a partir das informações apresentadas no problema, ou, simplesmente, o modelo é apresentado. Com o modelo da função contínua definida, parte-se para a sua construção gráfica. Caso exista a necessidade de mais informações relacionadas ao sistema funcional definido, outro caminho é realizado, identificando-se e se analisando o domínio e a imagem, o seu crescimento e decrescimento, o que pode desdobrar-se para o estudo do sinal e dos seus pontos máximos e mínimos, o estudo dos termos para estudar a família de funções; na necessidade de reformulação da representação algébrica ou geométrica da função contínua, pode-se retornar à atividade da construção do modelo funcional.

**Partindo de Dados Discretos**

Com os dados discretos apresentados, no problema inicia-se com a organização dos dados e valores que constam no enunciado, na tentativa de representá-los, utilizando-se tabelas ou quadros de informações; os dados, em sua maioria, são finitos e com valores discretos, buscando uma regularidade e a definição da dependência entre as possíveis variáveis.

Com o modelo numérico organizado, utilizam-se os dados para construir um modelo gráfico possível. Nessa atividade, a utilização do GeoGebra ou de qualquer *software* que venha auxiliar na construção do gráfico será uma ferramenta importante no processo.

A atividade seguinte formulará hipóteses sobre os modelos construídos; no caso, o numérico e o gráfico, ocasionando na seguinte pergunta: O tipo de função foi identificado? Caso a resposta seja afirmativa, parte-se para a construção do modelo algébrico. Caso seja negativa, parte-se para o levantamento das funções possíveis, realizando a comparação entre elas, até a escolha da possível função que representa a situação ligada ao problema. Com isso, chega-se a mais uma pergunta: A função é adequada? Se a função é adequada, parte-se para a construção do modelo algébrico. Caso contrário, formulam-se novas hipóteses a partir da representação numérica e gráfica, repetindo o processo anterior.

Com o modelo algébrico definido a partir de dados discretos, existe a possibilidade de se seguir um caminho para determinar o seu domínio e imagem, se é crescente ou decrescente. Porém, ao chegar nesse ponto do processo, pode-se transformar uma função com dados discretos em uma função contínua, com o auxílio de *software*, a exemplo do GeoGebra. Com a função contínua definida, pode-se realizar o estudo do sinal, identificando os pontos máximos e mínimos, pode-se analisar os termos da função, com a possibilidade de escolher o tipo de modelo (família de funções).

**Terceiro Estágio de Modelação Funcional: utilização do modelo e interpretação dentro do sistema**

Com a definição do modelo a ser utilizado, parte-se para a sua utilização explicitando o trabalho técnico dentro do modelo e a análise do trabalho de seus resultados no sistema modelado. Esse estágio analisa e decide a melhor aplicação e adequação do modelo e de suas técnicas utilizadas.

Construída a representação gráfica e algébrica, busca-se responder diretamente à questão geratriz e às suas derivadas, comparando as técnicas e interpretando os resultados. Pode-se, então, iniciar o ciclo novamente, a depender dos resultados adquiridos.

**Quarto Estágio de Modelação Funcional: novo processo de modelação para novas questões**

Com os resultados e as interpretações do trabalho desenvolvido com base no modelo funcional proposto, serão geradas novas questões $(Q_1, Q_{2,} Q_3, \ldots)$ a partir da $Q_0$, redefinindo novas técnicas matemáticas e, consequentemente, um novo discurso tecnológico- teórico, a exemplo da necessidade de trabalhar com famílias de funções com mais de um parâmetro, com base em novos modelos (FONSECA; GASCÓN; LUCAS, 2014). Da existência de novas variáveis delimitando um novo sistema surgirá a necessidade de formular novas hipóteses, reiniciando o processo.

O modelo epistemológico de referência para o ensino da noção de função proposto está voltado para a Licenciatura em Matemática. Busca-se, através de sua utilização, promover a compreensão do conceito de função e de sua aplicação nas diversas situações de ensino. A sua proposta está inicialmente direcionada ao ensino do conceito de função e de função afim, existindo a possibilidade de, futuramente, ser aplicada às funções quadráticas, exponenciais e logarítmicas, caracterizando as funções elementares. A seguir, iremos discutir a nossa abordagem metodológica, apresentando alguns elementos conceituais relacionados à aplicação do PEP.

# Capítulo IV: Percurso Metodológico

Neste capítulo iremos apresentar e discutir alguns pontos do nosso desenho metodológico, destacando: a abordagem da pesquisa; local e sujeitos; os instrumentos utilizados para coleta dos dados; a estrutura da proposta aplicada do PEP; os momentos da aplicação do dispositivo didático; e os elementos utilizados na análise dos dados.

Antes de descrevermos os pontos de nossa abordagem metodológica, vamos relembrar o nosso objetivo geral de pesquisa, que é analisar as influências na formação do professor de matemática e o processo de ensino e aprendizagem na aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa, observando as suas praxeologias e suas possíveis rupturas de contrato didático em uma disciplina de Matemática básica da licenciatura em Matemática ao abordar o conceito de função.

Para auxiliar a nossa pesquisa temos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar e analisar as organizações matemáticas e didáticas do professor da disciplina de Matemática básica durante a aplicação do Percurso de Estudos e Pesquisa no processo de compreensão e aplicação do conceito de função;
- Identificar as organizações matemáticas dos alunos da disciplina de Matemática básica durante a aplicação dos Percursos de Estudos e Pesquisa no processo de compreensão e aplicação do conceito de função;
- Analisar os contratos didáticos estabelecidos, as suas negociações, as suas renegociações, os seus efeitos e as suas possíveis rupturas na aplicação dos Percursos de Estudos e Pesquisa no processo de compreensão do conceito de função na disciplina de Matemática básica;
- Analisar a aprendizagem do conceito de função na aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa na disciplina de matemática básica da licenciatura em matemática, utilizando o ciclo de solução de problemas fundamentado na psicologia cognitiva, como também, os possíveis *insights* durante as mudanças das organizações matemáticas.

Para alcançar os objetivos propostos, utilizamos a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1996), a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986) e o Ciclo de Solução de Problemas (PRETZ; NAPLES; STERNBERG, 2003; STERNBERG; STERNBERG, 2017). No caso da TAD, tivemos uma atenção maior para os tipos de praxeologias, o Modelo Epistemológico de Referência (MER) e o PEP, observando a possível evolução praxeológica ao aplicarmos o dispositivo didático. A TSD teve como foco a identificação dos contratos didáticos estabelecidos, os seus efeitos e as possíveis rupturas didáticas que surgiram durante a aplicação do PEP. No do CSP, centralizamos as análises nos passos sugeridos e nos *insights* que podem surgir ao se depararmos na resolução de um problema. Ressaltamos, que a partir dos elementos teóricos apresentados em nosso trabalho buscamos estabelecer relações entre as teorias para fundamentar os nossos instrumentos de análises utilizados. Para a coleta dos dados foi aplicado o PEP em duas turmas diferentes na disciplina de Funções I pelo mesmo professor, nos quais caracterizamos em dois estudos empíricos: no primeiro, foi observado tomando por base os elementos teóricos da TAD e do CD; e no segundo, foi acrescentado o CSP nas análises. No decorrer dos tópicos seguintes iremos detalhar o nosso caminho metodológico, descrevendo os procedimentos e instrumentos de análise.

## 4.1. Abordagem da Pesquisa

O desenvolvimento do conhecimento cientifico é direcionado para a construção de ideias exequíveis, ocasionando em aplicações teóricas ou/e práticas na busca de resolver os problemas gerais ou específicos da humanidade nas diversas áreas de conhecimento. Para tanto, o aprofundamento das teorias ou noções já existentes torna-se um caminho as ser explorado como um dos objetivos de fundamentar a aplicação prática, como também, a tentativa de buscar uma proximidade teórica de áreas diferentes que existem hoje consolidadas cientificamente. A tentativa de buscar uma convergência de teorias diferentes, não significa que existirá uma outra a partir da junção, mas podemos entender também que é uma união de ideias para buscar uma solução parcial ou total de um determinado problema. Dentro do campo da didática da matemática podemos exemplificar as convergências de ideias que existem, como por exemplo: a engenharia didática com a teoria das situações didáticas; ou com a teoria antropológica do didático, nas quais trazem elementos importantes para a discussão referente a didática da matemática.

Em uma escala bem menor, para a condução de nossa pesquisa apresentaremos alguns pontos de convergência teórica da Teoria Antropológica do Didático (TAD), especificamente do percurso de estudo e pesquisa (PEP) com o ciclo de solução de problemas (CSP) fundamentado na psicologia cognitiva, auxiliado com alguns elementos que fazem parte do contrato didático. Destacamos, que não é a intenção buscar uma união teórica mais ampla, mas elementos preliminares para complementar a nossa fundamentação teórica, e consequentemente, construir uma base para a nossa análise de modo que responda as nossas questões de pesquisa.

A nossa pesquisa seguiu referências de uma abordagem qualitativa, na qual existe a perspectiva da descrição das complexidades do problema com uma análise das variáveis e de sua atuação, possibilitando uma compreensão e classificação dos níveis de problematização, obtendo uma ideia da situação em questão. Segundo Oliveira (1997), explica:

> As pesquisas que utilizam a abordagem qualitativa possuem a facilidade de poder descrever a complexidade de uma determinada hipótese ou problema, analisar a interação de certas variáveis, compreender e classificar processos dinâmicos experimentados por grupos sociais, apresentar contribuições no processo de mudança, criação ou formação de opiniões de determinado grupo e permitir, em maior grau de profundidade, a interpretação das particularidades dos comportamentos ou atitudes dos indivíduos. (OLIVEIRA, 2002, p. 117).

Acrescentamos que a nossa pesquisa foi dada ênfase em todo processo, refletindo e analisando os acontecimentos e não no produto final ou nos resultados. André (1995) reforça a ideia de uma metodologia que busque uma interpretação dos acontecimentos dos objetos pesquisados, e não uma mensuração dos fatos. Procuramos não apenas identificar as praxeologias do professor e dos alunos, ou mesmo observar os elementos do contrato didático que foram estabelecidos, como também, apenas identificar os passos da solução de problemas e seus possíveis *insights*, mas analisar o processo de aplicação do PEP de maneira conjunta, no sentido de compreender as suas particularidades. Bogdan e Biklen (1994, p. 49), apresentam algumas características sobre a pesquisa qualitativa, na qual uma delas é que "os investigadores qualitativos se interessam pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos".

A nossa condução metodológica também tomou por base as abordagens propostas pelo PEP, como também, outras pesquisas realizadas na área da didática da matemática, nas quais citamos algumas: Almeida (2016), que analisou as relações entre o contrato didático e as organizações matemáticas e didáticas, no qual utilizou uma abordagem qualitativa de cunho etnográfico; Silva (2016), teve como objetivo identificar as relações institucionais esperadas e existentes para o ensino e a aprendizagem das noções de áreas, de perímetro e de suas relações, utilizando uma abordagem qualitativa auxiliadas por técnicas de análise documental, estudos de múltiplos casos e a engenharia didática do PEP; Santos Junior (2017), elaborando e propondo analisar atividades baseadas em um PEP, relacionadas às necessidades dos profissionais dos cursos superiores de tecnologia, na área de gestão e negócios, no ensino das noções de juros simples e compostos, com os resultados construídos tomou por base uma análise ecológica dentro do contexto da TAD, desenvolvendo um modelo epistemológico de referência para verificar o domínio da matemática financeira relacionado aos pontos discutidos na pesquisa.

Complementando a nosso condução metodológica, tomamos por base também: Barquero (2009), aborda o problema da ecologia do ensino universitário da modelização matemática, analisando os restrições que dificultam as condições das atividades de modelações matemáticas, aplicando e utilizando os princípios teóricos do PEP para realizar as suas análises; Lucas (2015), realizou uma análise das condições institucionais que são necessárias para aplicar um PEP para o ensino do cálculo diferencial elementar em um curso de licenciatura de medicina nuclear, na qual construiu um modelo epistemológico de referência que gerou um diagrama de atividades de modelização funcional que fundamentou a análise e aplicação do PEP proposto; Cavalcante (2018), com o objetivo de caracterizar o lugar do sujeito cognitivo da TAD, tomando por base uma perspectiva da cognição como fenômeno situado no contexto institucional ao se estabelecer um sistema didático em torno do ensino de probabilidade na licenciatura em matemática, utilizando uma abordagem qualitativa nas análises de sua pesquisa. Portanto, estas e outras pesquisas consolidaram o caminho metodológico escolhido em nossa pesquisa.

### 4.2. Local e Sujeitos da Pesquisa

O local da pesquisa e a escolha dos sujeitos foram direcionados considerando dois pontos: o primeiro foi a modalidade do curso de matemática, no caso licenciatura; o outro ponto foi a disponibilidade da instituição em ceder o ambiente de pesquisa, como também do professor e de seus alunos a participarem como sujeitos de maneira voluntária.

A finalidade da escolha do curso de Matemática na modalidade de licenciatura, está diretamente ligada aos nossos objetivos de pesquisa e também por nosso MER está desenhado para ser aplicado para o conceito de função nos cursos de licenciatura em Matemática. Após conversa em lócus com os responsáveis explicitando e explicando todo o processo de realização e a finalidade da pesquisa, eles disponibilizaram as aulas e os espaços necessários na instituição.

Os sujeitos de nossa pesquisa foram o professor e seus alunos da disciplina de Funções I do terceiro semestre da Licenciatura em Educação do Campo com habilitação em Matemática[78]. A licenciatura é um dos cursos superiores do Campus de Canguaretama do Instituto Federal do Rio Grande do Norte, localizado na cidade de Canguaretama do estado do Rio Grande do Norte (RN). O campus possui três cursos técnicos integrados (eletromecânica, eventos e informática), dois cursos técnicos subsequentes (eventos e mecânica) e dois cursos superiores: Tecnologia em gestão de turismo e licenciatura em educação do campo com habilitação em ciências humanas e sociais ou matemática.

O curso de licenciatura tem uma duração de 4 (quatro) anos com carga horária de 3.314 horas, com o objetivo de formar professores para atuar nas escolas do campo dos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio nas áreas de ciências humanas e sociais ou de Matemática, para atuar também em espaços não-escolares no campo.

O professor participante da pesquisa é licenciando em Matemática e tem mestrado profissional em Matemática pelo PROFMAT e foi escolhido por lecionar na disciplina que o conceito de função é abordado, como também, disponibilizou o espaço em suas aulas para realizar a pesquisa. Os alunos foram os matriculados na disciplina de Funções I, nos quais residem na cidade de Canguaretama – RN e nas cidades circunvizinhas. Ressaltamos que o professor e os alunos se disponibilizaram para a pesquisa de forma voluntária.

A disciplina faz parte da matriz curricular do curso de Licenciatura em Educação do Campo com habilitação em Matemática e apresenta em sua ementa o conteúdo de função. A disciplina tem uma carga horária de 60 horas (4 créditos) com o objetivo de operacionalizar conjuntos, utilizar o conceito de função na modelagem em situações do

[78] Segundo o Ministério da Educação e Cultura (MEC) do governo brasileiro, as licenciaturas em educação do campo, tem o objetivo de “apoiar à formação inicial de professores em exercício na educação do campo e quilombola, assegurando condições de acesso aos cursos de licenciatura destinados a atuação docente nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio.”(MEC, 2019).

cotidiano, identificar, analisar e aplicar a representação gráfica em tendências conceituais sócio-econômicos e científicos. Durante as aulas os conteúdos de conjuntos, noção de função, função afim, quadrática e modular devem ser abordados nos momentos denominados de: tempo-espaço-acadêmico, que são as aulas presenciais; no tempo-espaço-comunidade, que são os momentos realizados nas comunidades; e no tempo-espaço-retorno, são as socializações das atividades aplicadas nas comunidades.

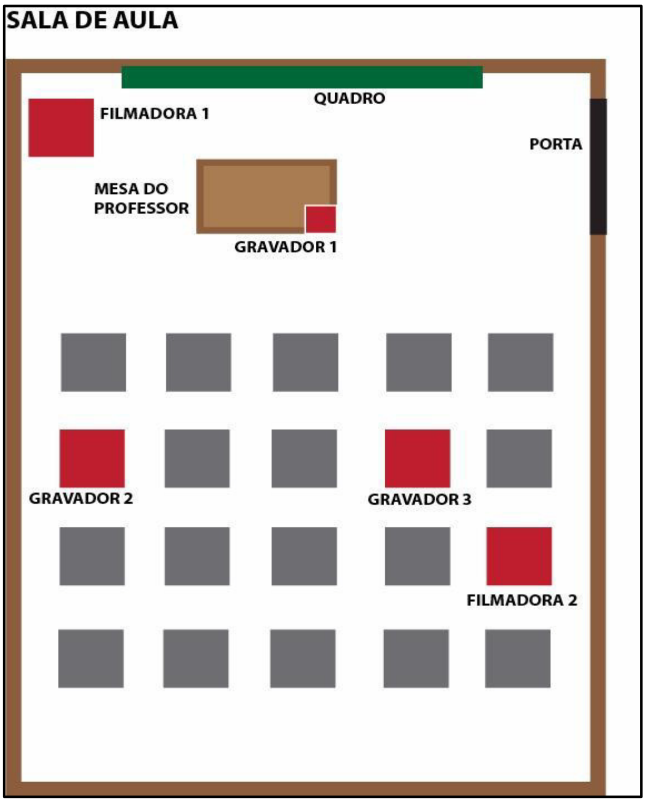
### 4.3. Instrumentos de coleta de dados da Pesquisa

Na coleta dos dados utilizamos filmagens, gravações de áudio, protocolos e o caderno de anotações. Em seguida faremos uma breve descrição de cada meio de coleta e de seus pontos de análise.

Para as filmagens utilizamos duas câmeras posicionadas em ângulos diferentes: uma focada no professor e no quadro, posicionada no final da sala no lado esquerdo; a outra focada nos alunos posicionada na frente da sala no lado direito.

Para captação dos áudios foram utilizados três gravadores: um posicionado na mesa do professor, posicionando-se no centro da sala; outro no lado esquerdo da sala e o outro no lado direito. A imagem 19, representa o posicionamento dos instrumentos de coletas de imagens e sons:

Figura 34 - Composição dos Instrumentos de Pesquisa




Fonte: próprio autor (2019)

O posicionamento das câmeras e dos gravadores eram fixados antes do início das aulas, no qual o posicionamento dos gravadores era adequado de acordo com os lugares que os alunos sentavam antes do início da aula.

As filmagens e gravações de áudio auxiliaram nas análises relacionadas a alguns pontos a serem observados da teoria das situações didáticas, especificamente o contrato didático, ruptura de contrato e os seus possíveis efeitos que possam emergir durante a aplicação do PEP. Buscamos identificar os contratos didáticos estabelecidos no início do processo e os novos que poderiam surgir durante a aplicação do dispositivo didático, assim como os momentos de rupturas, observando se os novos contratos são gerados a partir dos antigos ou são formulados outros sem relação com os antigos. Nesse processo a identificação dos efeitos de contrato durante o processo nos auxiliaram para analisar a conduta do professor e dos alunos frente esse novo dispositivo didático, observando também, a sua mudança praxeológica durante o processo. As imagens e as gravações de vozes, também nos auxiliaram na análise do ciclo de solução de solução de problemas, analisando as estratégias utilizadas pelo professor e por seus alunos, verificando as suas falas e registros que aparecerem nas imagens, na qual foram incorporadas para uma análise conjunta.

Os protocolos relacionados a resoluções individuais e coletivas das questões foram coletados e analisados, assim como, o desenvolvimento na busca da resposta satisfatória da questão geratriz. Foi estimulado aos alunos a deixarem registrados todo o procedimento o mais detalhado possível para identificarmos a praxeologia inicialmente utilizada e suas mudanças, como também, os procedimentos de resolução utilizados para verificar a sua relação como o ciclo de solução de problemas. No decorrer da aplicação do PEP, os alunos utilizaram o software chamado de GeoGebra para auxiliar nas suas resoluções.

Em relação ao caderno de anotações, teve a finalidade de registrar todos os momentos relevantes da pesquisa, principalmente descrevendo acontecimentos que a filmagem e a gravação de áudio não deixaram claro, como também, relacionando momentos das aulas com pontos das teorias utilizadas na pesquisa.

A coleta e análise dos dados aconteceram em todo o período de aplicação do PEP, registrando todos os pontos relevantes que possam complementar e auxiliar nas conclusões da pesquisa. Todos os instrumentos utilizados, possibilitou ter uma análise do nosso MER, da nossa proposta do PEP, do processo de ensino e aprendizagem do conceito de função e das possíveis influências do PEP na formação do professor na disciplina de Funções I.

### 4.4. A Estrutura do Percurso de Estudo e Pesquisa para Função Afim

O Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) é formado por um conjunto de Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP), que buscam desenvolver a compreensão das técnicas utilizadas e desenvolvidas durante o processo de aplicação do PEP, proporcionando crescimento das organizações matemáticas (OM). O nosso PEP foi aplicado abordando o conceito de função afim, fundamentado pela nossa proposta de Modelo Epistemológico de Referência (MER) de função para o curso de licenciatura em Matemática.

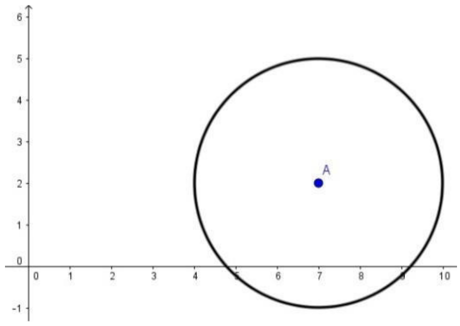
### 4.4.1. Descrição do PEP na Disciplina de Funções I

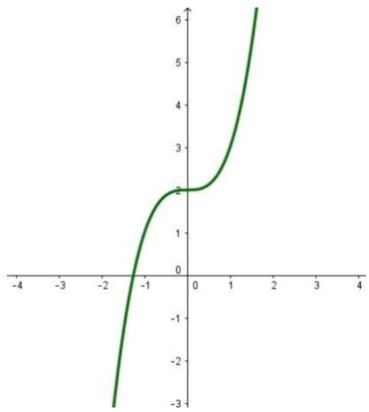
O material utilizado para aplicação do PEP consta: da ficha diagnostica; da ficha de trabalho e da questão geratriz a ser desenvolvida. Esse material foi direcionado ao aluno da disciplina de Funções I do curso de licenciatura da educação do campo na habilitação em Matemática. No desenvolvimento desse material os percursos matemáticos (PM) foram desenvolvidos juntamente com o MER, com a finalidade de serem utilizados como referência na resolução da questão geratriz. No caso das fichas, a sua elaboração foi fundamentada nos livros didáticos de Guidorizzi (2011), Iezzi e Murakami (2004), Lima; Carvalho; Wagner e Morgado (2004), Morettin; Hazzan e Bussab (2003) e Tinoco (2009), que foram direcionadas para rever as técnicas usuais e outras técnicas mais elaboradas para auxiliar nas resoluções das questões apresentadas. Em seguida, vamos apresentar de maneira detalhada as fichas utilizadas e a questão geratriz com o percurso matemático proposto.

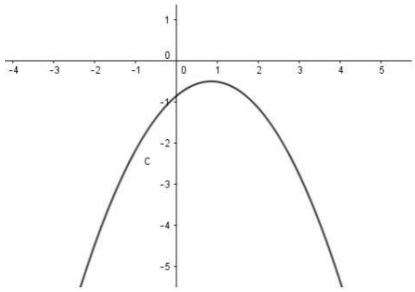
#### 4.4.1.1. Ficha diagnóstica

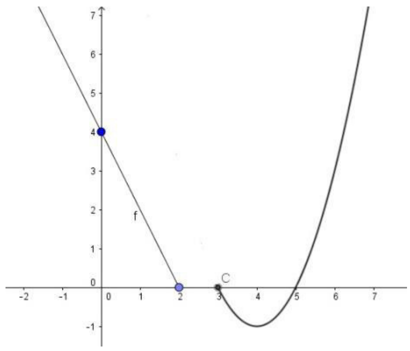
Ao propor a aplicação da ficha diagnóstica com 8 itens aos alunos de maneira individual, buscamos identificar as técnicas utilizadas na resolução. A ficha consta da identificação gráfica de uma função, do valor numérico de sua imagem a partir de uma função dada, da simplificação de expressão algébricas ou numéricas, da identificação do domínio e da imagem, da identificação se é crescente ou decrescente, da construção da representação algébrica e gráfica de uma função a partir de dados discretos, da construção da representação algébrica e gráfica de uma função a partir de dados contínuos, assim como, partindo de dados discretos para uma função contínua. A seguir apresentaremos cada item da ficha diagnostica com sua justificativa:

1) Quais das seguintes relações de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}$, representadas abaixo são funções? Justifique a sua resposta.






Esse item busca identificar no aluno a sua capacidade de reconhecer a representação gráfica de uma função nas suas diferentes formas. A justificativa dos alunos pode deixar claro as possíveis dificuldades que existe na compreensão de aplicação do conceito, assim como, na utilização de técnicas de reconhecimento.

2) Seja $f$ uma função de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}$ definida por $f(x) = x^2 - \frac{x}{3} + 4$, calcule:

a) $f(3)$ b) $f(0)$ c) $f\left(\frac{1}{4}\right)$ d) $f(-5)$

O item ao propor que determine ou calcule o valor numérico da imagem de uma função, faz a relação da correspondência entre os elementos do domínio com os da imagem, relacionando um único elemento do domínio para um elemento da imagem. Ao realizar a substituição o aluno terá que resolver uma expressão numérica, utilizando uma técnica aparentemente não relacionada ao conteúdo de função, mas necessária.

3) Observe a sequência de triângulos formados por palitos

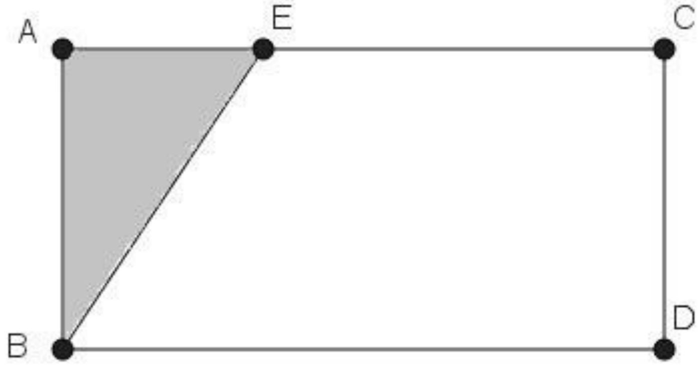
a) Quantos palitos são necessários para montar quatro triângulos?

b) Quantos palitos são necessários para montar sete triângulos?

c) Qual a expressão que fornece a quantidade de palitos para uma sequência com um número $n$ qualquer de triângulos?

Neste item, trata de um problema que solicita para determinar a quantidade de palitos para construir triângulos, começa com um triângulo e vai crescendo a sua quantidade até um número qualquer de triângulos. A partir das informações do item o aluno terá que determinar quem estar em função de quem, para iniciar a construção da representação algébrica. Outro ponto a ser identificado pelo aluno é a utilização de dados discretos.

4) O seguinte retângulo tem lados $BD = 6\ cm$ e $CD = 3\ cm$. Considere um ponto E, cuja posição varia do ponto A até ao ponto C.




a) Se a distância de A até E for $1{,}0\ cm$, qual a área do triângulo ABE?
b) Se a distância de A até E for $2{,}3\ cm$, qual a área do triângulo ABE?
c) Qual o valor máximo que a área do triângulo ABE pode obter?
d) Qual o valor mínimo que a área do triângulo ABE pode obter?

e) Qual a expressão para a área do triângulo ABE em função da distância de A até E?
f) Qual a representação gráfica da área do triângulo ABE em função da distância de A até E?

Este item, já necessita de técnicas mais elaboradas em relação aos itens anteriores. Solicita inicialmente o valor da área em casos particulares, assim como a área máxima e mínima possível, em seguida a expressão algébrica e gráfica em função da distância do ponto A em relação ao ponto E. O seu domínio e sua imagem são números reais com intervalos definidos, necessitando a utilização de outras técnicas até então não utilizadas na ficha diagnostica. O objetivo desse item é o uso de dados contínuos para determinar as representações da função contínua.

5) O número de habitantes de uma cidade é hoje de 15.000 e cresce a uma taxa de 2,5% ao ano.
   a) Qual o número de habitantes daqui a 5 anos?
   b) Qual o número de habitantes a 20 anos?
   c) Qual o número de habitantes a 50 anos?
   d) Qual a expressão que representa esse crescimento?
   e) Qual a representação gráfica desse crescimento?

O item tem um caminho de resolução semelhante em relação ao anterior, parte de situações particulares até chegar à generalização da situação proposta, solicitando a representação gráfica e sua representação algébrica. Parte de dados contínuos (tempo) para a construção da função, que o domínio e a imagem necessitam ser determinados para a compreensão do problema.

6) Dada a função $f(x) = -x^2 - 3x$, simplifique:

   a) $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ b) $\frac{f(x+s)-f(x)}{s}$

Para essa atividade o aluno terá que utilizar técnicas relacionadas a simplificações de expressões algébricas conjuntamente com as técnicas para determinar a imagem de uma função, mas neste caso será representado por uma expressão algébrica. O objetivo está em utilizar técnicas diferentes para um mesmo problema, necessitando da interação de outras técnicas.

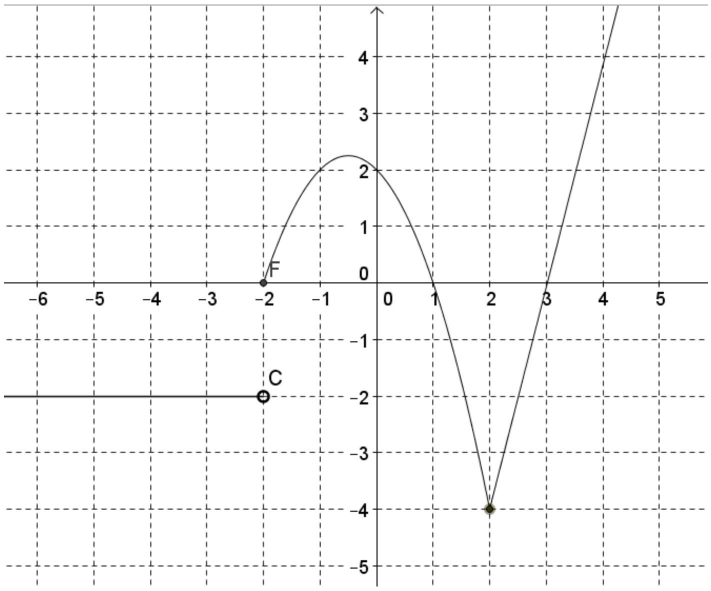
7) Um determinado estudante de matemática anotou a posição, ao longo do tempo, de um móvel sujeito a uma força constante e anotou os seguintes dados:

| Instante (segundos) | Posição (metros) |
|---|---|
| 0 | 17 |
| 10 | 45 |
| 20 | 81 |

a) Qual a posição do móvel nos instantes 7seg e 18 seg?
b) Qual a função que representa a situação?
c) Qual a representação gráfica?

O item inicia com dados discretos dados na tabela, porém o domínio e a imagem possuem valores numéricos contínuos que devem ser observados no decorrer da resolução. Para determinar a representação funcional é utilizado conceitos do sistema de equações lineares, mobilizando outras técnicas. A representação gráfica pode ser analisada observando aspectos relacionados a sua aplicação.

8) Com relação ao gráfico da função $y = f(x)$, representado a seguir, pode-se afirmar que:




a) A função é decrescente no intervalo [2, 4]
b) Se $-2 \leq x \leq 2$, então $f(x) = -x^2 - x + 2$.
c) $f(-5) = 2$.
d) A imagem da função é o conjunto dos números reais.
e) $f(2) = -4 \; e \; f(1) = 2$

Este é um item que cada letra representa uma questão as ser analisada para verificar se é verdadeira ou falsa as afirmações, no caso, a identificação dos intervalos da função se é crescente ou decrescente, como também, a imagem, o domínio e alguns valores numéricos da função, fazem o aluno utilizar técnicas diferentes. O gráfico apresenta uma função que é composta por curvas da função afim, quadrática e constante, levando o aluno a perceber que uma função pode ter representações diferentes. O item pode levar ao aluno articular praxeologias deferentes, nas quais são associadas as propriedades de algumas funções, consequentemente, verificam as condições de suas construções gráficas.

#### 4.4.1.2. Ficha de Trabalho

A ficha de trabalho tem o objetivo de revisar as técnicas utilizadas nas resoluções de problemas relacionadas ao conteúdo de função afim, desde a utilização de técnicas diretas e simples até as que requerem um aparato tecnológico mais amplo. São 10 (dez) itens que abordam a construção de gráficos no plano cartesiano, a análise de parâmetros observando o crescimento ou decrescimento, o zero da função, o estudo do sinal e a resolução de problemas. A seguir, iremos apresentar os itens e em seguida justificar cada um.

1) Construa no mesmo sistema cartesiano, os gráficos das seguintes funções de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$:

a) $y = 2x + 1$ b) $y = -\frac{x}{3} - 4$ c) $y = -4x$ d) $y = \frac{x-2}{3}$

O item solicita a construção dos gráficos da função afim a partir de sua representação algébrica. As técnicas utilizadas são as de construção de gráfico, substituindo dois valores quaisquer pela variável x, no qual o aluno deve saber que a função afim é representada por uma reta.

2) Construa a equação da reta que passa pelos pontos:

a) $(2,3)\ e\ (3,5)$ b) $(1,-1)\ e\ (-1,\ 2)$ c)$(3,-2)\ e\ (2,-3)$ d) $(1,2)\ e\ (2,2)$

Neste item, a construção limita-se a representação algébrica, mas utilizando pontos pertencentes a função. Espera-se que o aluno utilize técnicas associadas ao conteúdo de sistemas de equações lineares utilizando a expressão $y = ax + b$ como ponto de partida. Na substituição das variáveis por valores teremos duas equações que constituirá um sistema, no qual as técnicas da adição ou da substituição são mais utilizadas, existindo a possibilidade de utilização de outras técnicas para determinar os valores de “a” ou “b”.

3) A função $f$ é definida por $f(x) = ax + b$. Considere que $f(-2) = 6\ e\ f(2) = 2$. Encontre o valor de $f(5)$.

A resolução deste item é semelhante ao item anterior, mas utiliza uma representação diferente, já apresenta a função definida e em seguida dar dois pontos pertencentes a ela, por último solicita um valor numérico da imagem, representando um caso particular. As técnicas utilizadas são as mesmas do item anterior, a diferença está na sua apresentação inicial fazendo o aluno observar essa diferenciação, associando aos tipos diferentes de representação de uma função.

4) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(-4, 6)$ e tem coeficiente angular igual a – 5.

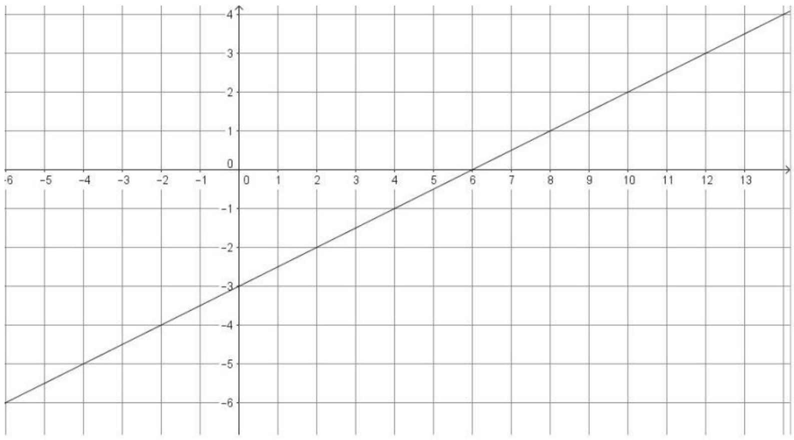
Ao solicitar a equação da reta que é um conteúdo que faz parte da geometria analítica, observa o conceito de função afim presente em outro campo da Matemática, ampliando a compreensão do conceito em outras áreas. Neste caso, outra representação algébrica é utilizada para resolver: $y - y_1 = m(x - x_1)$, na qual possa necessitar de uma ampliação da técnica amparadas por outras tecnologias.

5) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(1, 3)$ e tem coeficiente linear igual a – 4.

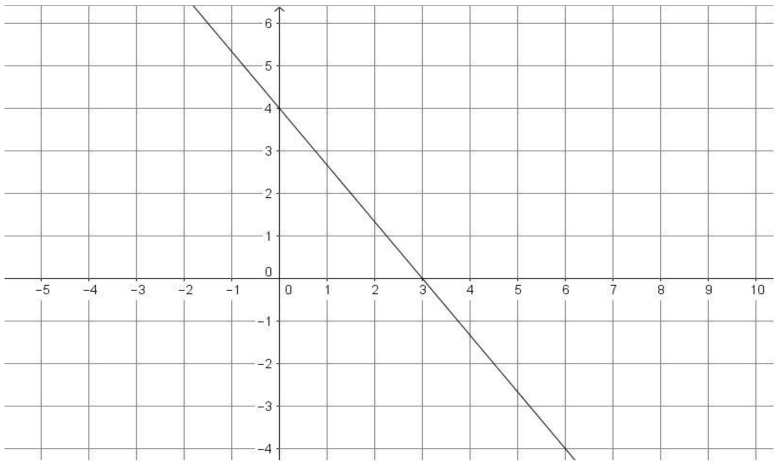
A resolução desse item é semelhante ao item anterior, utiliza a representação da geometria analítica da equação da reta, mas de maneira simplificada: $y = mx + b$. No caso deste item, a mudança que existe é o dado apresentado no enunciado que é apresentado o coeficiente linear para a construção da representação algébrica da reta.

6) Determine as representações algébricas das seguintes funções:

a)




b)




Esse item parte da representação gráfica para a algébrica, possibilitando a visualização e relação entre as duas representações. As técnicas utilizadas são semelhantes às dos itens anteriores, tomando por base o conteúdo de sistemas de equações ou utilizando os conceitos do coeficiente linear, no qual simplifica a utilização de técnicas tornando mais econômicas.

7) Encontre o zero das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = 7x - 1$ b) $f(x) = -4x$ c) $f(x) = -3x + 4$

As técnicas utilizadas na resolução deste item são as de resolver a equação do 1° grau, abordando as propriedades da igualdade. Nesse momento, podem ser trabalhadas as definições de incógnita e variável, assim como a compreensão do zero da função um importante conceito para determinar raízes reais de uma função polinomial.

8) Estude os sinais das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $y = 3x - 2$ b) $y = -x + 4$ c) $y = 5 - \frac{x}{7}$

O estudo do sinal é um conteúdo a ser estudado ao abordar função afim nas aulas de Matemática, sua aplicação está direcionada na identificação dos valores positivos, negativos ou nulo que a imagem assume a partir de um ponto do domínio, que nesse caso é o zero da função. A técnica utilizada habitualmente é uma soma de outras técnicas que envolve a determinação do zero da função, a identificação do valor do coeficiente se é positivo ou negativo e a interpretação da representação gráfica.

9) Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = \frac{5}{4} - \frac{x}{3}$ é positiva?

O item solicita a identificação de quais valores do domínio será positivo da função dada, é uma aplicação do conceito do estudo do sinal de uma função. A resolução utiliza as mesmas técnicas do item anterior, mas em um caso particular.

10) A reta $r$ intercepta os eixos de coordenadas nos pontos $A\ e\ B$. Determine a distância entre $A\ e\ B$, sabendo-se que $r$ passa pelos pontos $(1,2) e\ (5,3)$.

Ao se tentar resolver esse problema de geometria analítica manipulamos técnicas que são utilizadas na construção da representação algébrica da função do 1° grau. O percurso matemático usual para encontrar os pontos A e B, é determinar a equação da reta que passa pelos pontos dados no enunciado do problema, em seguida com a equação determinada aplica-se os conceitos relativos ao coeficiente linear e ao zero da função. O conjunto de técnicas utilizadas nesse item pode fazer o aluno a mobilizar mais de uma técnica usual.

#### 4.4.1.3. Questão Geratriz e os Percursos Matemáticos

Iremos apresentar a questão geratriz $(Q_0)$ e suas derivadas acompanhada dos Percursos Matemáticos (PM) que desenhamos para responder às questões no decorrer da construção da resposta provisória de $(Q_0)$. Tanto as questões como os PM são provisórios caracterizando um possível caminho que o professor irá conduzir durante as aulas, podendo ser alterados no decorrer do processo. A questão geratriz está direcionada para a compreensão da aplicação do conceito de função afim, partindo de uma situação possivelmente real a ser desenvolvida.

Apresentaremos inicialmente a contextualização do problema e em seguida a questão geratriz e suas questões derivadas. As questões serão comentadas resumidamente relacionando com o contexto do problema. Os detalhamentos das questões com os percursos matemáticos serão expostos seguidamente.

**Contextualização do Problema**

> Aposentadoria é um tema que surge de tempos em tempos fazendo parte das discussões dos brasileiros, pois afeta diretamente a vida das pessoas economicamente ativas e de suas famílias. O Congresso Federal brasileiro aprovou a lei 13.183/2015 que trata da mudança de algumas regras para a aposentadoria, na qual um ponto em destaque trata da fórmula 85/95. No caso, a mulher terá que alcançar uma soma de 85 anos, somando tempo da sua contribuição com a sua idade. No caso do homem serão 95 anos, seguindo o mesmo princípio. As idades 85 e 95 anos leva em conta a expectativa de vida dos brasileiros até 2018, para os anos seguintes teremos:
>
> 2019 a 2020: 86 (mulheres) / 96 (homens);
> 2021 a 2022: 87 (mulheres) / 97 (homens);
> 2023 a 2024: 88 (mulheres) / 98 (homens);
> 2025 a 2026: 89 (mulheres) / 99 (homens);
> 2027: 90 (mulheres) / 100 (homens).
>
> Fonte: Agência Senado (CASTRO; VILAR, 2015)

$Q_0$: Como representar a situação atual e futura dos casos de aposentadorias das mulheres e dos homens, tomando por base a lei 13.183/2015 que trata das mudanças em algumas regras para as aposentadorias?

Na apresentação de $Q_0$ a contextualização torna-se necessária para o aluno compreender a situação na qual a questão está inserida, o aluno pesquisa e levanta hipóteses iniciais que poderão o levar a formular novas questões derivadas. As questões derivadas de $Q_0$ podem ser sugeridas pelo professor, mas não antes de realizar uma discussão do tema fazendo os alunos desenvolverem as suas próprias questões, não comprometendo o Percurso Matemático escolhido. Nesse caso, a primeira questão derivada poderá ser:

$Q_1$: Caso você tome por base para aposentar-se na lei 95/85, que idade você terá na sua aposentadoria?

Para construir uma resposta satisfatória ($R_1$), levantamos outras questões a serem discutidas derivadas da $Q_1$:

$Q_{1,1}$: Como podemos relacionar a idade na aposentadoria com o tempo de contribuição nos 10 primeiros anos de trabalho, para um homem ou uma mulher que começa aos 20 anos de idade?

$Q_{1,2}$: De acordo com a lei 95/85, quanto tempo de contribuição será necessário para aposentar caso inicie a contribuir com 20 anos de idade? E que idade terá ao se aposentar?

$Q_{1,3}$: Como podemos generalizar o Tempo de Contribuição (TC) para qualquer idade inicial de contribuição para mulheres ou para homens?

$Q_{1,3,1}$: Como podemos caracterizar o termo dependente, a partir das possíveis idades iniciais de contribuição previdenciária?

$Q_{1,3,2}$: Com a representação de TC definida, quais os elementos que fazem parte?

$Q_{1,3,3}$: Como podemos representar graficamente o tempo de contribuição se a mulher começar a trabalhar depois dos 25 anos?

Para o desenvolvimento de $Q_1$ são geradas outras questões derivadas $Q_{1,1}$ , $Q_{1,2}$ , $Q_{1,3}$, no qual a questão $Q_{1,3}$ gera outras questões derivadas a partir dela $Q_{1,3,1}$ , $Q_{1,3,2}$ , $Q_{1,3,3}$.

Seguidamente temos a questão derivada $Q_2$ que gera outras questões derivadas:

$Q_2$: Como podemos representar as situações para os anos seguintes, sabendo que a soma idade mais tempo de contribuição muda a cada dois anos?

$Q_{2,1}$: Como podemos representar a soma do tempo de contribuição mais a idade de uma contribuinte, sabendo que esta soma poderá tomar os valores 86, 87, 88, 89 ou 90?

$Q_{2,2}$: Como podemos representar graficamente o conjunto das funções TC e Anos Complementares de Contribuição (AC) para cada valor de k?

Na questão $Q_{2,2}$ o TC terá a dependência da variável k, representado o intervalo dos anos que será aplicada a fórmula 85/95, necessitando construir uma função para cada ano de aplicação e consequentemente definindo os seus intervalos, utilizando o conceito de famílias de função. Com isso outras questões são geradas:

$Q_{2,2,1}$: Como podemos representar graficamente o conjunto das funções TC para os valores de k?

$Q_{2,2,1,1:}$ Qual a relação dos coeficientes angular e linear de TC com a sua representação gráfica?

$Q_{2,2,1,2}$: Por que o Domínio e a Imagem de cada função do Tempo de Contribuição têm mudanças nos seus valores máximos?

Consequentemente as questões seguintes também geram questões derivadas:

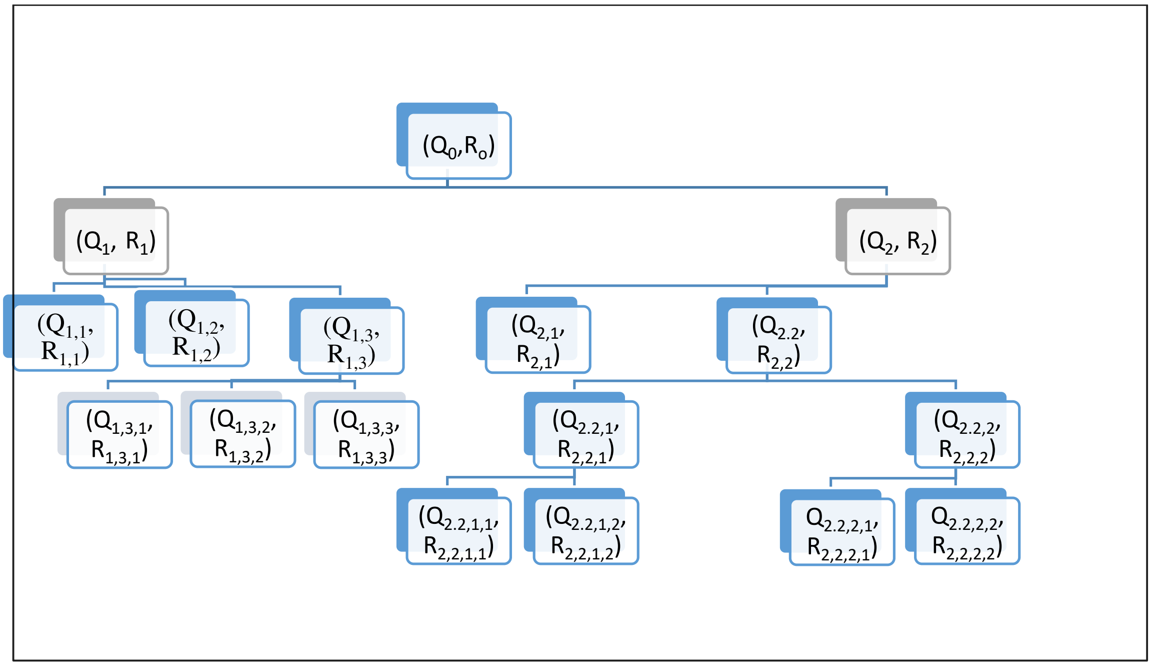
$Q_{2,2,2:}$ Como podemos representar graficamente o conjunto das funções AC para os valores de k?

$Q_{2,2,2,1:}$ Qual a relação dos coeficientes angular e linear de AC com a sua representação gráfica?

$Q_{2,2,1,2}$: Por que o Domínio e a Imagem de cada função AC têm mudanças nos seus valores máximos?

Ao final esperamos ter a seguinte construção das questões derivadas e suas respectivas respostas a partir da questão geratriz:

Figura 35 - Esquema das Questões Derivadas a partir da Questão Geratriz




Fonte: próprio autor (2019)

#### 4.4.1.3.1. Os Percursos Matemáticos

Os Percursos Matemáticos (PM) fundamentam as organizações matemáticas utilizadas para a resolução da questão geratriz na busca de construir uma resposta adequada ao problema. Os PM propõem um aumento gradual do uso dos tipos de praxeologias, levando ao aluno utilizar técnicas conhecidas e mobilizando duas ou mais na busca da resposta.

Iniciaremos o nosso percurso matemático buscando entender a relação existente entre o tempo de contribuição e a idade. Para construir uma resposta satisfatória ($R_1$), levantamos outras questões a serem discutidas derivadas da $Q_1$:

$Q_{1,1}$: Como podemos relacionar a idade com o tempo de contribuição nos 10 primeiros anos, para um homem ou uma mulher que começa aos 20 anos de idade?

$Q_{1,2}$: De acordo com a lei 95/85, com quanto tempo de contribuição será necessário para aposentar caso inicie a contribuir com 20 anos de idade? E que idade terá ao se aposentar?

$Q_{1,3}$: Como podemos generalizar o Tempo de Contribuição (TC) para qualquer idade inicial de contribuição para mulheres ou para homens?

A partir do $Q_1$ foram geradas outras questões que conduzirão para construir $R_1$, nesse sentido teremos: $(Q_1, R_1) = \{(Q_{1,1}, R_{1,1}), (Q_{1,2}, R_{1,2}), (Q_{1,3}, R_{1,3})\}$.

A $Q_{1,1}$ solicita relacionar idade com o tempo de contribuição destacamos a ideia da evolução da soma do tempo de contribuição com o passar dos anos, no qual sugerimos uma idade inicial de 20 anos para construir a relação, deixando claro que poderia ser qualquer outra idade. Então, a construção de uma tabela pode facilitar o estudo da questão observando a evolução da soma:

Quadro 15 - Soma do I + TC

| Anos | Idade inicial de contribuição (I) | Tempo de contribuição (TC) | (I + TC) | Soma | Decomposição |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 20 | 0 | 20 + 0 | 20 | 20 + 2.0 |
| 1 | 21 | 1 | 21 + 1 | 22 | 20 + 2.1 |
| 2 | 22 | 2 | 22 + 2 | 24 | 20 + 2.2 |
| 3 | 23 | 3 | 23 + 3 | 26 | 20 + 2.3 |
| 4 | 24 | 4 | 24 + 4 | 28 | 20 + 2.4 |
| 5 | 25 | 5 | 25 + 5 | 30 | 20 + 2.5 |
| 6 | 26 | 6 | 26 + 6 | 32 | 20 + 2.6 |
| 7 | 27 | 7 | 27 + 7 | 34 | 20 + 2.7 |
| 8 | 28 | 8 | 28 + 8 | 36 | 20 + 2.8 |
| 9 | 29 | 9 | 29 + 9 | 38 | 20 + 2.9 |
| 10 | 30 | 10 | 30 +10 | 40 | 20 + 2.10 |

Fonte: próprio autor (2019)

Com o desenvolvimento dos 10 primeiros anos de contribuição para um homem ou uma mulher, chegamos a seguinte expressão: $20 + 2.TC$. Analisando a expressão vemos que o 20 é um termo fixo, no caso uma constante. O TC é multiplicado por 2, nos leva a concluir que na medida que os anos passam o tempo de contribuição segue na mesma razão. Com esse caminho temos $R_{1,1}$, teremos $(Q_{1,1}, R_{1,1})$.

Para próxima questão $Q_{1,2}$:

$Q_{1,2}$: De acordo com a lei 95/85, com quanto tempo de contribuição será necessário para aposentar caso inicie a contribuir com 20 anos de idade? E com qual idade terá ao se aposentar?

Ao buscarmos uma resposta para essa questão, teremos que igualar a expressão $20 + 2.TC$ ao valor apresentado na lei 95/85, que no caso será 95 para homens ou 85 para mulheres:

$$20 + 2.TC = 95 \text{ ou } 20 + 2.TC = 85$$

Ao responder no caso dos homens, temos:

$$20 + 2.TC = 95$$

$$TC = 37{,}5$$

Nesse caso, 37 anos e 6 meses de contribuição. Analogamente, caso seja mulher temos: $TC = 32{,}5$, que terá que contribuir durante 32 anos e 6 messes.

Para definirmos as idades que terão no início da aposentadoria, chegamos à seguinte conclusão:

Se for homem: $20 + 37{,}5 = 57{,}5$ chegando a sua aposentadoria aos cinquenta e sete anos e seis meses de idade;

Se for mulher: $20 + 32{,}5 = 52{,}5$ chegará a sua aposentadoria com cinquenta e dois anos e seis messes.

Com o procedimento sugerido e apresentado da $Q_{1,2}$ teremos chegado a $R_{1,2}$.

Dando continuidade para buscarmos uma resposta satisfatória da questão derivada, iniciamos o desenvolvimento de uma resposta aproximada da $Q_{1,3}$ e optaremos em utilizar o recurso de um software denominado GeoGebra com a finalidade de auxiliar na questão.

$Q_{1,3}$: Como podemos generalizar o Tempo de Contribuição (TC) para qualquer idade inicial de contribuição para mulheres ou para homens?

Inicialmente temos que delimitar um universo de homens ou mulheres, pois a soma para homens é 95 e para mulheres a soma é 85. Portando, iremos iniciar por opção nossa pelas mulheres, lembrando que para homens o caminho é análogo.

Partindo da equação encontrada inicialmente de uma mulher que começa a contribuir aos seus 20 anos de idade, temos:

$$20 + 2.TC = 85$$

Com isso, podemos formular uma nova questão derivada da $Q_{1,3}$:

$Q_{1,3,1}$: Como podemos caracterizar o termo dependente, a partir das possíveis idades iniciais de contribuição previdenciária?

A partir da equação, iniciamos formulações e resoluções de equações com o início de idades de contribuições diferentes:

Quadro 16 - Tempo de Contribuição

| Idade inicial de contribuição | Equação | TC |
|---|---|---|
| 18 | $18 + 2.TC = 85$ | 33,5 |
| 19 | $19 + 2.TC = 85$ | 33,0 |
| 20 | $20 + 2.TC = 85$ | 32,5 |
| 21 | $21 + 2.TC = 85$ | 32,0 |
| ... | ... | ... |
| n | $I + 2.TC = 85$ | $TC = \frac{85 - I}{2}$ |

Fonte: próprio autor (2019)

Ao observar a evolução das equações vemos que o TC está dependente da idade inicial de contribuição. Ao identificarmos os termos independente e dependente podemos representar através da seguinte expressão:

$$TC = \frac{85 - I}{2}$$

Nesse momento, relembraremos o conceito de função:

**Definição 1:**

Consideremos por uma função $f$ uma terna $(A, B, a \rightarrow b)$, em que A e B são dois conjuntos e $a \rightarrow b$, uma regra que nos permite associar a cada elemento a de A um único elemento b de B. O conjunto A é o domínio de $f$ $(D_f)$, logo A = $D_f$. O conjunto B é o contradomínio de $f$. O único b de B associado ao elemento a de A é indicado por $f(a)$. Uma função $f$ de domínio A e contradomínio B é usualmente indicada por $f\colon A \rightarrow B$ (GUIDORIZZI, 2008, p. 26).

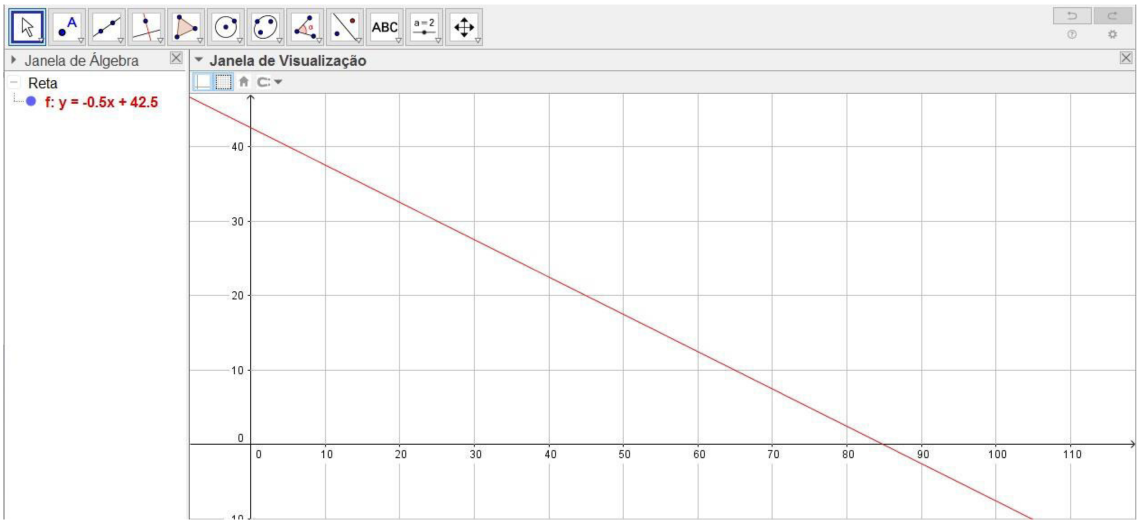
Com o conceito de função definido e relacionando com a expressão, os conjuntos A e B da função TC deverão ser observados identificando o seu Domínio, o seu

Contradomínio e a sua Imagem ($Im_f$), cuja a imagem é caracterizada por elementos pertencentes ao conjunto B, elementos esses que são associados aos elementos a de A. Nesse momento, os dados utilizados incialmente são discretos e a partir deles construímos a nossa expressão funcional, possibilitando a construção de uma função contínua.

O GeoGebra é uma ferramenta que irá auxiliar e buscar inicialmente a generalização do tempo de contribuição para mulheres. A necessidade de um ambiente que possua computadores e um mínimo de instrução dos alunos a manusear o software tem que ser garantido para uma boa execução da atividade, por isso uma preparação prévia do ambiente e dos alunos serão providenciadas caso necessário.

Ao aplicarmos a função TC no GeoGebra temos a seguinte figura:

Figura 36 - Função Tempo de Contribuição (TC)




Fonte: próprio autor (2019)

Para tal ação, determinamos as seguintes igualdades a serem utilizados no software: $I = x$ e $TC = f(x)$. Observamos que é uma função Afim, nesse sentido utilizaremos a seguinte definição:

**Definição 2:**

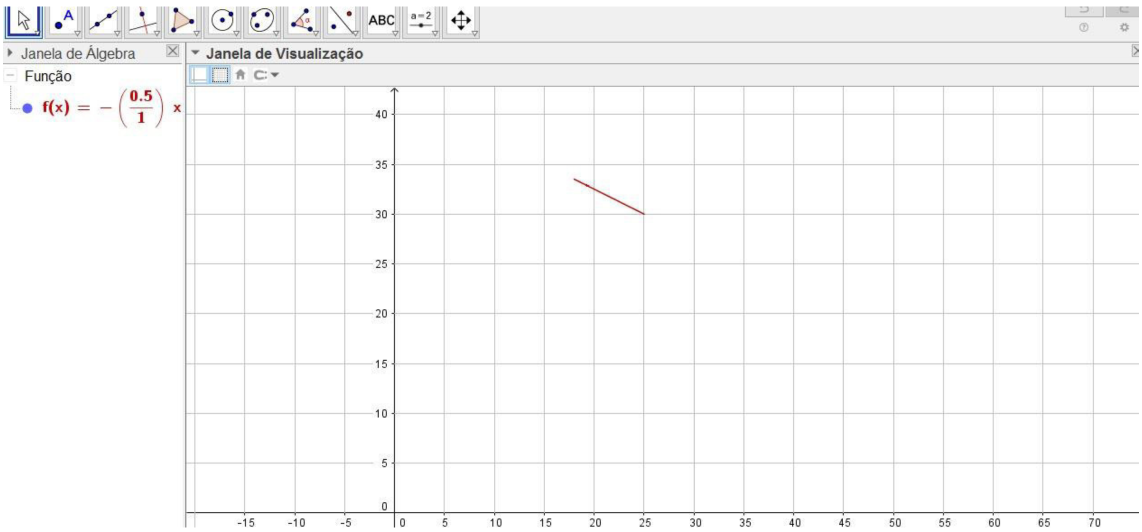
Uma função é chamada de função do 1° grau (ou função afim) se sua sentença for dada por $y = m.x + n$ , sendo $m$ e $n$ constantes reais com $m \neq 0$ (MORETTIN et al, 2003, p. 55).

Ao identificarmos a representação gráfica, o próximo passo será a determinação dos intervalos da função, nesse caso o Domínio e a Imagem de TC. Tal percurso e estudo tornam-se pertinente, pois ao determinarmos uma idade maior que 85 anos teremos um TC negativo ou se considerarmos uma idade inicial de contribuição muito baixa teremos um tempo de contribuição impraticável, como por exemplo, um indivíduo ao iniciar a contribuir aos 5 anos de idade, obtendo respostas incoerentes e impraticáveis perante a lei. Como consequência uma nova questão derivada da $Q_{1,3}$ é construída:

$Q_{1,3,2}$: Com a função TC definida, qual o seu domínio e a sua Imagem?

Ao considerarmos uma idade inicial de contribuição aos 18 anos, quando o indivíduo conquista a sua maior idade, teremos um TC de 33,5 anos. Como a lei estipula também um tempo mínimo de contribuição de 30 anos para mulheres e 35 anos para homens, no caso do tempo mínimo de contribuição para mulheres teremos uma idade máxima para iniciar a contribuição de I = 25 anos, pois uma idade maior que 25 anos teremos um tempo de contribuição menor que 30 anos, fazendo a contribuinte passar mais tempo contribuindo. Para representar a situação graficamente no caso da idade mínima de início de contribuição aos 18 anos e máximo aos 25 anos, temos:

Figura 37 - Tempo de Contribuição (TC) com Intervalos




Fonte: Próprio autor (2019)

Ao analisar a imagem 11, temos o domínio $D(TC) = \{x \in \Re / 18 \leq x \leq 25\}$ e a Imagem $Im(TC) = \{y \in \Re / 30 \leq y \leq 33{,}5\}$.

Pela limitação das idades iniciais de contribuição, outra questão pode ser formulada com a finalidade de ampliar a respostas para as mulheres que comecem a contribuir após os 25 anos de idade.

$Q_{1,3,3}$: Como podemos representar graficamente o tempo de contribuição se a mulher começar depois dos 25 anos?

Para dar início a uma possível resposta dessa nova questão derivada da $Q_{1,3}$, podemos conduzir seguindo a mesma ideia anteriormente da $Q_{1,3,2}$, no caso a construção de uma tabela que represente as situações das mulheres que comecem a contribuir depois dos 25 anos de idade.

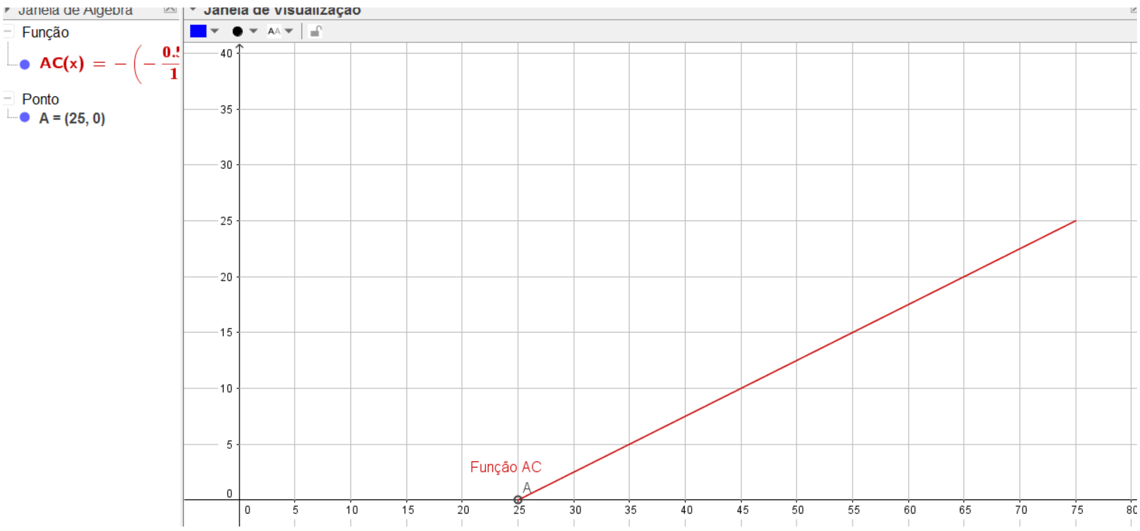
Quadro 17 - Soma do Tempo de Contribuição com Anos Complementares

| Idade inicial de contribuição (I) | Tempo de Contribuição (TC) | Anos complementares de contribuição (AC): | Soma: S = TC + AC |
|---|---|---|---|
| 26 | 29,5 | 0,5 | 30 |
| 27 | 29,0 | 1,0 | 30 |
| 28 | 28,5 | 1,5 | 30 |
| 29 | 28,0 | 2,0 | 30 |
| ... | ... | ... | ... |
| n | $TC = \frac{85 - I}{2}$ | $AC = 30 - TC$ | 30 |

Fonte: próprio autor (2019)

Ao verificar a tabela anterior, observarmos que os anos que faltam para ter o tempo mínimo de contribuição toma por base a função $TC = \frac{85-I}{2}$ na sua constituição, continuando dependente do termo I. Outro ponto que destacamos é que na soma do TC + AC tem um valor constante de 30 anos de contribuição, pois inicialmente é o tempo mínimo necessário para solicitar a aposentadoria. Construindo a função anos complementares de contribuição no GeoGebra temos:

Figura 38 - Função Anos Complementares de Contribuição (AC)




Fonte: Próprio autor (2019)

Na construção da função AC limitamos a idade máxima de aposentadoria em 75 anos de idade de acordo com a lei complementar (LC 152/15), que estipula a idade máxima de 75 anos para a aposentadoria compulsória, no caso dos funcionários públicos, pois na iniciativa privada diminui para 70 anos de idade. A imagem mostra a função AC com o domínio $D(AC) = \{x \in \Re/25 < x \leq 75\}$ e a imagem $Im(AC) = \{y \in \Re/0 < y \leq 25\}$.

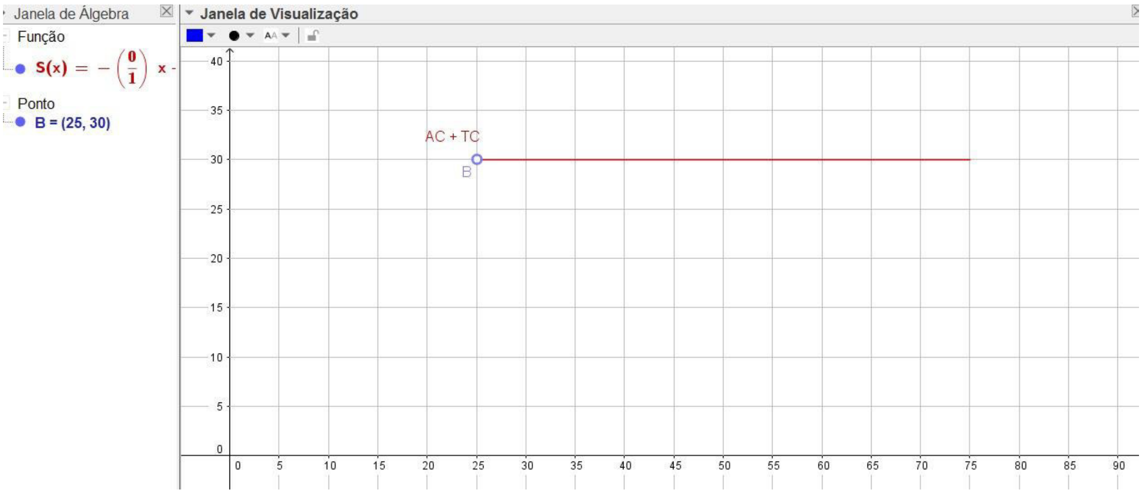
Ao observarmos as funções AC e TC, podemos representar a função AC na dependência de TC:

$$AC = 30 - TC$$

$$AC = 30 - \frac{(85 - I)}{2} = \frac{I}{2} - 12{,}5$$

A função AC continua dependendo da idade inicial de contribuição I. Nesse sentido uma mulher que começa a contribuir aos seus 45 anos de idade terá que contribuir 10 anos a mais em relação ao TC, completando os 30 anos de contribuição exigido por lei, tempo mínimo para solicitar a aposentadoria. No caso teremos TC = 20 anos, mais AC = 10 anos, chegando ao TC + AC = 30 anos. Com essa configuração, temos o seguinte gráfico:

Figura 39 - Soma de TC mais AC




Fonte: próprio autor (2019)

Com essa representação anterior da soma das funções TC e AC, obtemos uma função constante, representando o tempo mínimo de contribuição para solicitar a aposentadoria. A função AC + TC, que já denominamos de S tem $D(S) = \{x \in \Re / 25 < x \leq 75\}$ e $Im(S) = 30$. Resgatando a definição da função constante temos:

**Definição 3:**

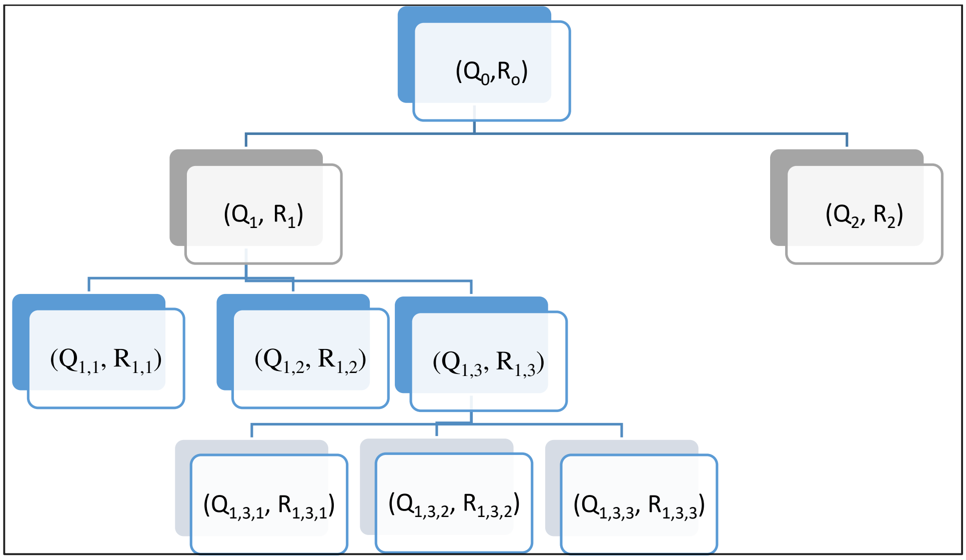
É toda função do tipo $y = k$, em que $k$ é uma constante real. Verifica-se que o gráfico dessa função é uma reta horizontal em relação ao eixo das abcissas, passando pelo ponto de ordenada $k$ (MORETTIN, et al, 2003, p. 55).

Ressaltamos que essa regra deve ser aplicada até uma determinada idade, pois ao aplica-la a uma mulher que inicie a contribuir com uma idade elevada, como por exemplo, 70 anos, não é conveniente tal modalidade de aposentadoria, tendo que a contribuinte optar por outra.

No caso dos homens o percurso será análogo, obtendo as seguintes funções: $TC = \frac{95-I}{2}$ e $AC = 30 - \frac{(95-I)}{2} = \frac{I}{2} - 17{,}5$. O seu percurso segue a mesma trajetória apresentada anteriormente para as mulheres considerando as mesmas observações citadas, mas observando as particularidades.

O percurso traçado até o momento da questão $Q_1$ juntamente com a $Q_2$, nos direciona a uma resposta aproximada da Questão Geratriz. Consequentemente, podemos apresentar até aqui a seguinte configuração:

Figura 40 - Desenvolvimento de $Q_1$




Fonte: próprio autor (2019)

Com o percurso matemático da $Q_1$ construído, passaremos a $Q_2$ com a finalidade de buscarmos a complementação da resposta da questão geratriz:

$Q_2$: Como podemos representar as situações para os anos seguintes, sabendo que a soma idade mais tempo de contribuição muda a cada dois anos?

Ao iniciarmos o nosso percurso matemático da $Q_2$ vamos recordar os intervalos de tempo apresentado na contextualização:

2019 a 2020: 86 (mulheres) / 96 (homens);
2021 a 2022: 87 (mulheres) / 97 (homens);
2023 a 2024: 88 (mulheres) / 98 (homens);
2025 a 2026: 89 (mulheres) / 99 (homens);
2027: 90 (mulheres) / 100 (homens).

Observamos que a primeira mudança ocorrerá a partir do ano de 2019, a próxima 2021 e assim consequentemente até chegar ao ano de 2027, ano máximo apresentado na lei. Para o início do nosso percurso teremos mais uma vez que optar por um sexo do contribuinte, sabendo que ao iniciar com um contribuinte do sexo feminino, para um contribuinte do sexo masculino o caminho será análogo, então, podemos elaborar a seguinte questão:

$Q_{2,1}$: Como podemos representar a soma do tempo de contribuição mais a idade de uma contribuinte, tomando em consideração os valores das somas de 86, 87, 88, 89 e 90?

Para condução de uma resposta satisfatória podemos iniciar utilizando uma tabela representando cada situação anterior.

Quadro 18 - Soma de TC + AC para os Anos Seguintes de 2018

| Ano | TC | AC | TC + AC |
|---|---|---|---|
| 2017 a 2018 | $\frac{85-I}{2}$ | $30-\frac{(85-I)}{2}$ | 30 |
| 2019 a 2020 | $\frac{86-I}{2}$ | $30-\frac{(86-I)}{2}$ | 30 |
| 2021 a 2022 | $\frac{87-I}{2}$ | $30-\frac{(87-I)}{2}$ | 30 |
| 2023 a 2024 | $\frac{88-I}{2}$ | $30-\frac{(88-I)}{2}$ | 30 |
| 2024 a 2026 | $\frac{89-I}{2}$ | $30-\frac{(89-I)}{2}$ | 30 |
| 2027 | $\frac{90-I}{2}$ | $30-\frac{(90-I)}{2}$ | 30 |
| | $TC=\frac{k-I}{2}$ | $AC=30-\frac{(k-I)}{2}$ | 30 |

Fonte: próprio autor (2019)

Nas representações dos intervalos dos anos chegamos a seguinte expressão $TC = \frac{k-I}{2}$, que $k$ representa a variação da soma do tempo de contribuição mais a idade da contribuinte, $\{k \in \mathrm{N}/85 \leq k \leq 90\}$ e I é a idade inicial de contribuição.

Mas a partir dessa questão $Q_{2,1}$, nos leva a elaborar outra questão derivada da $Q_2$:

$Q_{2,2}$: Como podemos representar graficamente o conjunto das funções TC e AC para cada valor de $k$?

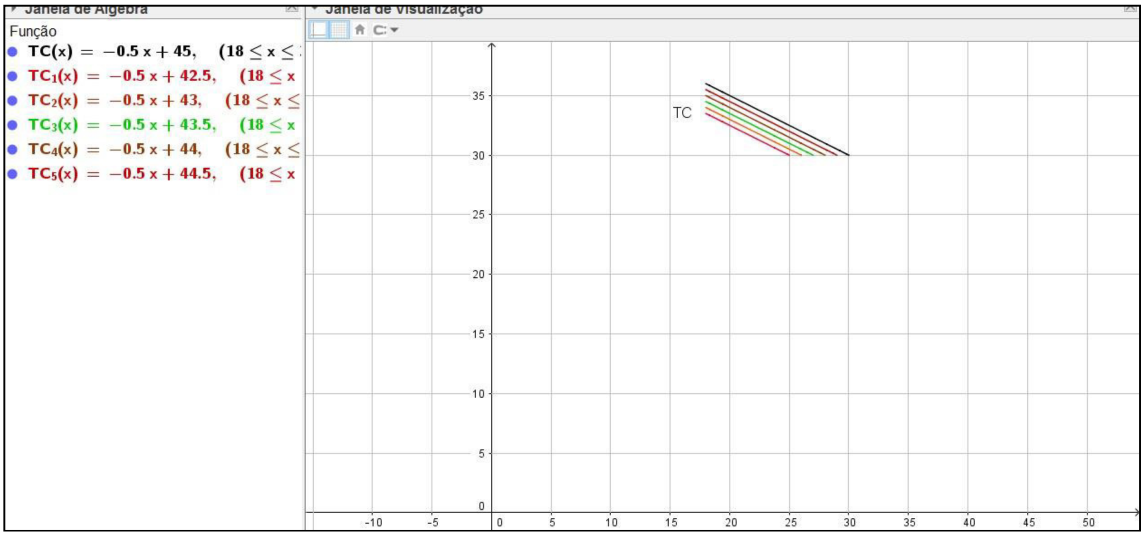
Para tentar buscar uma resposta satisfatória de $Q_{2,2}$, apresentamos duas outras questões derivadas dela:

$Q_{2,2,1}$: Como podemos representar graficamente o conjunto das funções TC para os valores de $k$?

$Q_{2,2,2}$: Como podemos representar graficamente o conjunto das funções AC para os valores de $k$?

O motivo de separar as duas funções está associado ao fato de terem representações diferentes, ficando mais compreensível o estudo de cada uma. Portanto, iniciaremos o estudo da $Q_{2,2,1}$ utilizando o software GeoGebra no auxílio da construção dos gráficos e de sua interpretação, principalmente na observação da variação de k.

Figura 41 - Família de Funções TC




Fonte: próprio autor (2019)

Ao analisar as funções TC observarmos que são funções afins, que no caso das funções TC o coeficiente angular "a" não varia, ficando com o valor de 0,5 ou $\frac{1}{2}$ . O coeficiente linear "b" varia de acordo com cada função. Então, o domínio de TC, $TC_1$, $TC_2$, $TC_3$, $TC_4$ e $TC_5$ sofre variação, no caso o valor máximo vai de 25 a 30. Na Imagem, o valor máximo sofre mudanças na medida em que altera as funções. Com essas novas observações podemos construir outras duas questões derivadas da $Q_{2,2,1}$:

$Q_{2,2,1,1}$: Qual a relação dos coeficientes angular e linear de TC com a sua representação gráfica?

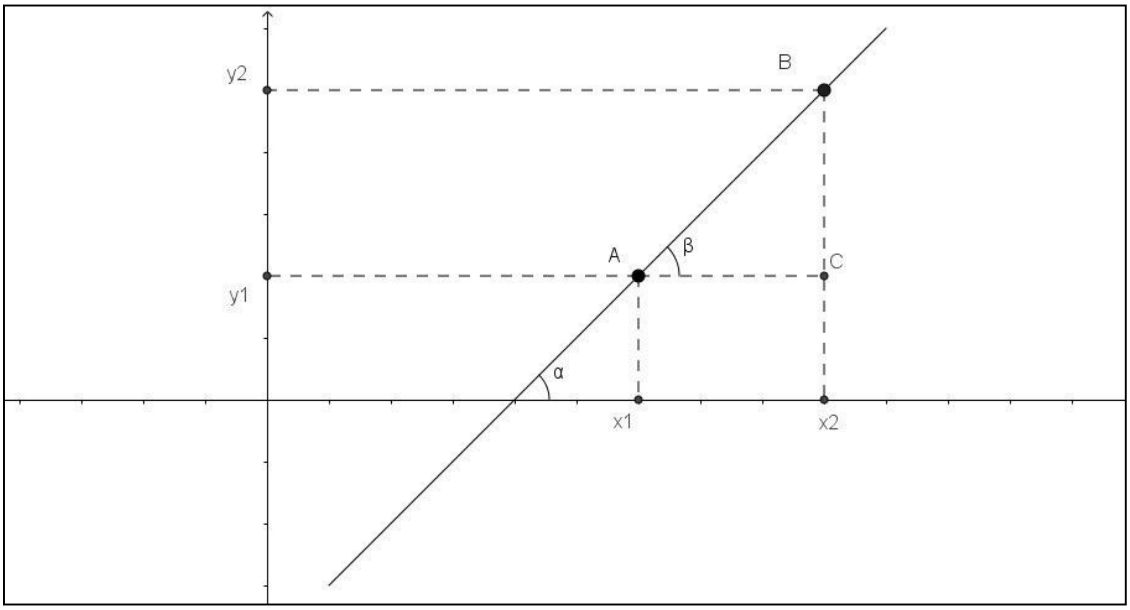
$Q_{2,2,1,2}$: Por que o Domínio e a Imagem de cada função do Tempo de Contribuição têm mudanças nos seus valores máximos?

Ao iniciar o caminho da $Q_{2,2,1,1}$ para chegarmos a uma resposta satisfatória vamos resgatar mais uma definição.

**Definição 4:**

*Se* $P_1(x_1, y_1)$ *e* $P_2(x_2, y_2)$ forem dois pontos distintos sobre a uma reta r, não paralela ao eixo $y$, então a inclinação de r, denotada por $m$, será dada por $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Vamos apresentar a sua interpretação gráfica:

Figura 42 - Gráfico da Função Afim




Fonte: Próprio autor (2019)

Tomando por base o gráfico da imagem 14 temos: $tg\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Temos que $\alpha = \beta$, então $tg\ \alpha = tg\ \beta$ e $m = tg\ \alpha$, portanto $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Tal interpretação é para uma função crescente, para uma função decrescente o desenvolvimento é análogo.

Partindo de $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e multiplicando ambos os membros por $x_2 - x_1$, teremos: $(y_2 - y_1) = m(x_2 - x_1)$. Portanto, geometricamente a inclinação $m$ ou o coeficiente angular representa um valor que determina a sua inclinação, isto é, se a $tg\ \alpha$ tem valor maior, menor ou igual a zero. Então, concluímos que $m = a$ da expressão $y = ax + b$. No caso do coeficiente linear, é o ponto que intercepta o eixo das ordenadas, no qual a coordenada da abscissa é zero, representado por $(0, b)$. Ao definir $m = a$, $(0, b) = (x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2) = (x, y)$ teremos: $(y - b) = a(x - 0)$, simplificando $y = ax + b$.

Observando a imagem 14 vemos que o coeficiente angular tem o mesmo valor, configurando um conjunto de segmentos de retas paralelas. Nesse sentido, como mostrar que todas são paralelas?

Para responder essa pergunta, relembramos o seguinte teorema:

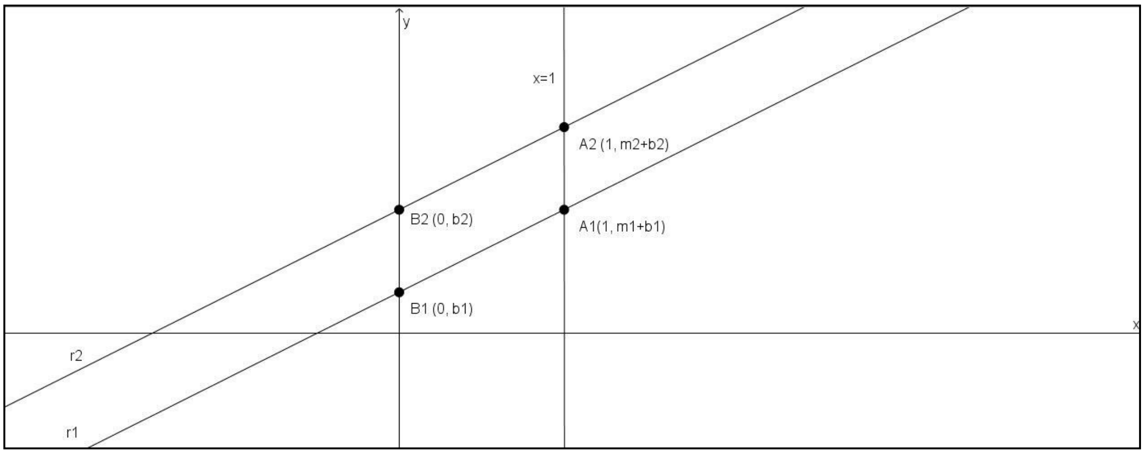
**Teorema 1:**

Se $r_1 e\ r_2$ forem retas distintas não-verticais, tendo inclinações $m_1\ e\ m_2$, respectivamente, então $r_1 e\ r_2$ serão paralelas se e somente se $m_1 = m_2$.

Demonstração:

Sejam as equações de $r_1 e\ r_2$, respectivamente, $y = m_1x + b_1\ e\ y = m_2x + b_2$.

Figura 43 - Gráfico de Retas Paralelas




Fonte: próprio autor (2019)

Na figura 43, mostra duas retas interceptando o eixo y nos pontos $B_1(0, b_1)\ e\ B_2(0, b_2)$. A reta vertical $x = 1$ intercepta $r_1$ no ponto $A_1(1, m_1 + b_1)$ e $r_2$ no ponto $A_2(1, m_2 + b_2)$. Então, $|\overline{B_1B_2}| = b_2 - b_1$ e $|\overline{A_1A_2}| = (m_2 + b_2) - (m_1 + b_1)$.

As duas retas serão paralelas, se e somente se as distâncias verticais $|\overline{B_1B_2}|$ e $|\overline{A_1A_2}|$ forem iguais, no caso, $r_1 e\ r_2$ serão paralelas se e somente se,

$$b_2 - b_1 = (m_2 + b_2) - (m_1 + b_1)$$

$$b_2 - b_1 = m_2 + b_2 - m_1 - b_1$$

$$m_1 = m_2$$

Logo, $r_1 e\, r_2$ serão paralelas se somente se $m_1 = m_2$ (LEITHOLD, 1994, p. 20)

Com a aplicação do teorema 1, podemos verificar que todos os segmentos de retas TC são paralelas, comprovando que os coeficientes angulares possuem valores iguais.

Continuando o nosso percurso matemático para chegar a $R_{2,2,1}$, vamos iniciar a discussão da $Q_{2,2,1,2}$.

O domínio de cada função Tempo de Contribuição tem alterações em seu valor máximo, no caso inicia em 25 e vai até o valor de 30 anos. Essa mudança acontece pelo fato da alteração do valor da soma: I + TC. Por exemplo, no ano de 2020 uma contribuinte que irá solicitar a aposentadoria e iniciando a contribuir aos 25 anos de idade, teríamos a seguinte situação utilizando a função de 2019 a 2020:

$$TC = \frac{86 - 25}{2} = \frac{61}{2} = 30{,}5$$

Nessa situação, a contribuinte teria que trabalhar seis messes a mais do tempo mínimo de contribuição, que é de 30 anos. Então, na medida em que a soma I + TC aumenta o valor máximo do domínio também aumenta na mesma razão.

No caso a Imagem da função iremos associar a mudança do coeficiente linear de cada função TC, em que cada função apresenta um valor para "b" diferente, fazendo com que as funções ocupem pontos diferentes, mas com as mesmas inclinações.

Com os caminhos construídos de $Q_{2,2,1,1}$ e $Q_{2,2,1,2}$ chegamos a uma resposta satisfatória de $Q_{2,2,1}$. Para $Q_{2,2,2}$ seguimos o mesmo percurso matemático, obtendo $Q_{2,2,2,1}$ e $Q_{2,2,2,2}$:

$Q_{2,2,2,1}$: Qual a relação dos coeficientes angular e linear de AC com a sua representação gráfica?

$Q_{2,2,1,2}$: Por que o Domínio e a Imagem de cada função AC tem mudanças nos seus valores máximos.

Relembramos que os percursos matemáticos (PM) apresentados são provisórios e referenciais para a condução do professor para com os alunos na aplicação do PEP, servindo de apoio para os seus encaminhamentos praxeológicos. Em seguida, iremos descrever os estudos e as etapas de aplicação do dispositivo didático.

### 4.5. Estudos e Etapas na Aplicação do PEP

O PEP foi aplicado no Instituto Federal do Rio Grande do Norte no Campus de Canguaretama, localizado a aproximadamente a 80 km da cidade de Natal - RN. Foi direcionado para o curso superior de licenciatura em educação do campo com habilitação em Matemática nas aluas da disciplina de Função I. A justificativa de direcionarmos para este público alvo está ligada a proposta do PEP, no qual a finalidade principal não é buscar a compreensão dos conceitos (função, no nosso caso), mas entender a sua aplicabilidade em diferentes situações cotidianas, levando ao aluno a buscar uma ampliação e entendimento das organizações matemáticas. O PEP se aplica principalmente na falta da compreensão conceitual e funcional dos conceitos matemáticos, isto é, os alunos cursam sem entender os conceitos e sua aplicabilidade em situações diferentes.

A sua aplicação foi realizada em dois estudos empíricos: o primeiro iniciou na primeira semana de Julho de 2017 com a formação do professor, e consequentemente, a aplicação do PEP com os alunos na segunda semana de Agosto até a última semana do mesmo mês de 2017. O segundo estudo, iniciou na primeira semana de Maio até a primeira semana de Julho de 2018. Cada estudo foi composto de três encontros direcionados a formação do professor da disciplina de Funções I e seis referentes a aplicação do PEP, com um total de 9 encontros para cada estudo que foram distribuídos durante as semanas.

#### 4.5.1. Preparação dos Estudos Empíricos para a Aplicação do PEP

Para o desenvolvimento do PEP em cada um dos estudos empíricos tomamos por base três pontos que orientaram e fundamentaram para a preparação, a elaboração e a aplicação do dispositivo didático. Os pontos foram as seguintes:

1) Formação do professor da disciplina de Funções I;
2) Levantamento prévio das condições necessárias para a realização do PEP;
3) Proposta de cronograma para a aplicação do PEP;

A seguir iremos detalhar cada ponto fundamentando e explicitando a sua funcionalidade no sistema didático em questão.

#### 4.5.1.1. Formação do professor da disciplina de Funções I

A capacitação do professor aconteceu em encontros antes e durante as seções presenciais. O local foi em um dos ambientes da instituição e o horário combinado com o professor da disciplina de Funções I. Nos encontros abordamos os seguintes temas:

1) Apresentação geral dos pesquisadores envolvidos e da finalidade da pesquisa;
2) Os objetivos da pesquisa;
3) Alguns pontos teóricos da pesquisa;
4) Nosso Modelo Epistemológico de Referência;
5) Nossa proposta do Percurso de Estudo e Pesquisa;
6) As atividades (diagnostica e atividades I);
7) A questão geratriz e suas derivadas;
8) Os possíveis Percursos Matemáticos;
9) O quadro das seções presenciais;

Os pontos sugeridos foram apresentados e discutidos durante a formação do professor, contando com a sua participação para o levantamento de sugestões relacionadas ao procedimento de aplicação do PEP e a proposta do nosso MER.

#### 4.5.1.2. Levantamento prévio das condições necessárias para a realização do PEP

Ao observarmos as condições prévias para a realização do PEP, direcionarmos a nossa discussão para as dimensões ecológicas e econômica-institucional do nosso problema didático. A ecológica identifica e discute as restrições no processo de ensino e aprendizagem do saber em jogo, com a finalidade de desenvolver condições no sistema didático para o seu desenvolvimento. Nesse ambiente da dimensão ecológica temos a dimensão econômica-institucional, no qual em sua análise observa as OM e OD utilizadas e desenvolvidas. Também são analisadas outras organizações que busquem propostas alternativas para a compreensão da aplicação do saber em jogo. Como resultado do levantamento prévio desenvolvemos o nosso MER para o conceito de função elementares, no qual o PEP é fundamentado.

### 4.5.1.3. Proposta de cronograma para a aplicação do PEP

Nesse momento para a aplicação do PEP de função afim, seguimos um cronograma prévio separado em Seções Presenciais (SP) que constará da atividade diagnóstica sobre o conceito de função, da ficha de trabalho que aborda o conceito de função afim, da questão geratriz e de suas derivadas. As seções não presenciais (SNP) aconteceram em horários diferentes das aulas da disciplina de Funções I, nesses momentos os alunos poderiam utilizar os recursos tecnológicos para a realização de pesquisas, construção dos gráficos e na utilização de cálculos longos. O quadro seguinte apresenta os temas propostos nas SP que fizeram parte dos estudos empíricos:

Quadro 19 - Proposta do Cronograma de Aplicação do PEP

| Seções Presenciais | Questões derivadas | Sessões não presenciais (SNP) |
|---|---|---|
| SP1 | Ficha diagnóstico: O que significa função? | Término da resolução dos itens da ficha diagnóstico. |
| SP2 | Ficha de trabalho 1: Entendimento do que é função afim, suas aplicações e a sua razão de ser, construção de modelos e técnicas de construção algébrica e gráfica e sua interpretação. | Termino das resoluções dos itens da ficha de Trabalho 1 |
| SP3 | Institucionalização das respostas, discussão e comparação das diferentes técnicas utilizadas pelos grupos nas fichas anteriores. | |
| SP4 | Problema: Cálculo da Aposentadoria<br>$Q_0$: Como representar a situação atual e futura dos casos de aposentadorias das mulheres e dos homens, tomando por base a lei 13.183/2015 que trata da mudança de algumas regras para as aposentadorias?<br>$Q_1$: Caso você tome por base para aposentar-se na lei 95/85, com qual idade você terá na sua aposentadoria?<br>$Q_{1,1}$: Como podemos relacionar a idade com o tempo de contribuição nos 10 primeiros anos, para um | Pesquisa dos tipos diferentes de aposentadoria e elaboração das questões derivadas. |

| | | |
|---|---|---|
| | homem ou uma mulher que começa aos 20 anos de idade?<br>$Q_{1,2}$: De acordo com a lei 95/85, com quanto tempo de contribuição será necessário para aposentar caso inicie a contribuir com 20 anos de idade? E com qual idade terá ao se aposentar? | |
| SP5 | $Q_{1,3}$: Como podemos generalizar o Tempo de Contribuição (TC) para qualquer idade inicial de contribuição para mulheres ou para homens?<br>$Q_{1,3,1}$: Como podemos caracterizar o termo dependente, a partir das possíveis idades iniciais de contribuição previdenciária?<br>$Q_{1,3,2}$: Com a função TC definida, qual o seu domínio e a sua Imagem?<br>$Q_{1,3,3}$: Como podemos representar graficamente o tempo de contribuição se a mulher começar depois dos 25 anos? | Elaboração das possíveis respostas e utilização do GeoGebra na elaboração dos gráficos. |
| SP6 | $Q_2$: Como podemos representar as situações para os anos seguintes, sabendo que a soma idade mais tempo de contribuição muda a cada dois anos?<br>$Q_{2,1}$: Como podemos representar a soma do tempo de contribuição mais a idade de uma contribuinte, tomando em consideração os valores das somas de 86, 87, 88, 89 e 90?<br>$Q_{2,2}$: Como podemos representar graficamente o conjunto das funções TC e AC para cada valor de $k$?<br>$Q_{2,2,1}$: Como podemos representar graficamente o conjunto das funções TC para os valores de $k$?<br>$Q_{2,2,1,1}$: Qual a relação dos coeficientes angular e linear de TC com a sua representação gráfica?<br>$Q_{2,2,1,2}$: Por que o Domínio e a Imagem de cada função do Tempo de Contribuição têm mudanças nos seus valores máximos? | |

| | | |
|---|---|---|
| SP7 | $Q_{2,2,2}$: Como podemos representar graficamente o conjunto das funções AC para os valores de *k*?<br>$Q_{2,2,2,1}$: Qual a relação dos coeficientes angular e linear de AC com a sua representação gráfica?<br>$Q_{2,2,1,2}$: Por que o Domínio e a Imagem de cada função AC tem mudanças nos seus valores máximos? | Elaboração das possíveis respostas e utilização do GeoGebra na elaboração dos gráficos. |
| SP8 | Discussão sobre $Q_0$ e de suas derivadas e avaliação do processo. | |

Fonte: próprio autor (2019)

As seções presenciais foram desenvolvidas pelo professor da disciplina sem a intervenção do pesquisador. Ressaltamos que os Percursos Matemáticos (PM)[79] foram incorporados no decorrer das seções, assim como a análise do nosso MER durante todo o processo de desenvolvimento do PEP.

#### 4.5.2. Aplicação do dispositivo didático

A aplicação do PEP foi dividida em duas etapas, nos quais eram compostas de sessões presenciais (SP) e de sessões não presenciais (SNP). Para a sua aplicação, seguimos o cronograma proposto separado em Sessões Presenciais (SP), que consta da atividade diagnóstica sobre o conceito de função, da ficha de trabalho que aborda o conceito de função afim, da questão geratriz e de suas derivadas. As seções não presenciais (SNP) aconteceram em horários diferentes das aulas da disciplina de Funções I, nesses momentos os alunos utilizaram os recursos tecnológicos para a realização de pesquisas, construção dos gráficos com o auxílio do GeoGebra e na utilização de cálculos longos.

##### 4.5.2.1. Primeira etapa: aplicação das fichas diagnostico e de trabalho

As fichas tiveram a finalidade de identificar as técnicas utilizadas pelos alunos, como também, rever e consolidar as técnicas usuais na resolução de atividades que envolvem a noção de função e função afim. A ficha diagnostica foi composta de 8 itens e aplicada

[79] São os possíveis caminhos matemáticos desenvolvidos no decorrer da resolução de um problema matemático ou gerados pelas questões geratrizes e de suas derivadas.

individualmente, no qual têm itens com os conteúdos que abordam o conceito de função. A ficha de trabalho foi elaborada com 10 (dez) itens, no qual abordavam o conteúdo de função afim e a sua aplicação foi realizada em grupo de 3 (três) alunos. A aplicação durou 2 (dois) encontros presenciais, um para cada ficha. As filmagens e as gravações de áudio, juntamente com as anotações realizadas pelo professor foram utilizadas durante as aulas.

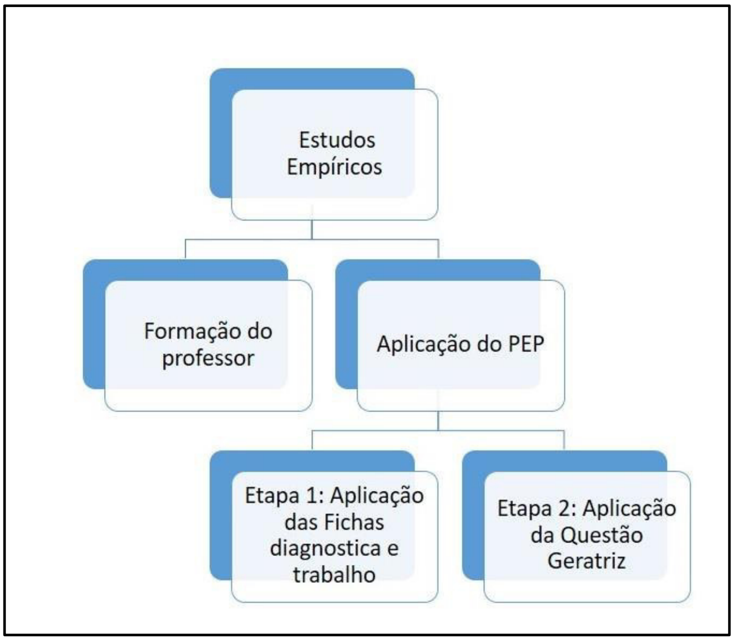
#### 4.5.2.2. Segunda Etapa: aplicação da questão geratriz

A aplicação da questão geratriz durou 4 (quatro) encontros presenciais em cada estudo empírico. A questão constou com um texto que contextualizava o problema e em seguida vinha com a $Q_0$, que trata de um tema atual, no caso, a aposentadoria. A aplicação foi em grupo de 3 (três) alunos, que buscaram responder à questão geratriz e suas derivadas.

Nesta etapa e na anterior realizamos filmagens e gravações de áudio *com transcrição* dos momentos didáticos do professor e seus alunos. Nas etapas foram filmadas as aulas referentes a noção de função e função afim, utilizando duas câmeras de vídeo e três gravadores de áudio. A filmagem permite uma análise mais completa das rupturas, das organizações matemáticas e didáticas do professor de cada disciplina, assim como as rupturas de contrato, juntamente com as gravações com o papel de retirar dúvidas e validar alguns momentos da aula. Esse é um momento em que o pesquisador pode observar tanto os gestos como a fala do professor e seus alunos com o objeto de estudo. No período, as observações do pesquisador também coletaram parte do coletivo dos dados, utilizando o seu caderno de anotações, assim como os registros escritos dos professores e alunos durante o processo de aplicação do dispositivo.

A imagem 27, representa os estudos e as etapas relacionadas a nossa aplicação do PEP:

Figura 44 - Esquema de Aplicação dos Estudos Empíricos




Fonte: próprio Autor (2019)

Escolhemos esse tipo de procedimento por entender que poderemos ampliar nossa análise, com respostas detalhadas para contemplarmos os nossos objetivos.

### 4.6. Estrutura da análise dos dados

Durante a aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa a análise teve duas conduções para cada estudo empírico: uma análise interna e uma análise externa.

A análise interna no primeiro estudo empírico, constitui em observar as organizações matemáticas e didáticas apresentadas durante a aplicação do PEP, como também, a mudança dos tipos de praxeologias matemáticas utilizada pelos alunos e pelo professor no decorrer do desenvolvimento do dispositivo. Durante a observação, também foram identificados os contratos didáticos estabelecidos, as negociações, renegociações e as suas rupturas de contrato dos sujeitos da pesquisa. Na análise interna, no segundo do estudo empírico, foi acrescentado os passos do ciclo de solução de problemas e os *insights*. O motivo destes elementos teóricos serem incorporados no segundo estudo empírico, está relacionado após a aplicação do primeiro estudo identificarmos a necessidade de observamos com mais elementos os indícios de aprendizagem do conceito de função e função afim durante a aplicação do PEP. Os elementos observados em nossa análise interna não foram analisados de maneira isolada, mas buscando relacionar a mudança dos tipos de praxeologias, os tipos de contratos didáticos estabelecidos, os passos do ciclo de solução de problemas e os possíveis *insights* na aplicação do dispositivo didático.

Em seguida iremos apresentar uma tabela com os elementos analisados na análise interna:

Quadro 20 - Elementos Observados na Análise Interna

| Elementos Analisados | Observado | Instrumentos |
|---|---|---|
| Praxeologias | Os tipos de tarefa (T), técnica ($\tau$), tecnologia ($\theta$) e teoria ($\Theta$). | Protocolos |
| Tipos de Praxeologias | OMP, OML, OMR, OMG | Protocolos |
| Contrato didático | Contratos estabelecidos durante a aplicação do PEP | Filmagens, áudios e caderno de anotações |
| Negociação de contrato | Momentos de negociação de contrato | Filmagens, áudios e caderno de anotações |
| Renegociação de contrato | Momentos de Renegociação de contrato | Filmagens, áudios e caderno de anotações |
| Efeitos de contrato | Tópazio, Jourdain, Deslize Metacognitivo, Utilização Abusiva da Analogia e o Envelhecimento das Situações de Ensino | Filmagens, áudios e caderno de anotações |
| Rupturas de contrato | O momento de mudança de contrato | Filmagens, áudios, caderno de anotações e protocolos |
| Ciclo de Solução de Problemas | Evolução dos passos propostos | Filmagens, áudios, caderno de anotações e protocolos |
| *Insights* | Durante a crescente complexidade das organizações matemáticas | Filmagens, áudios, caderno de anotações e protocolos |

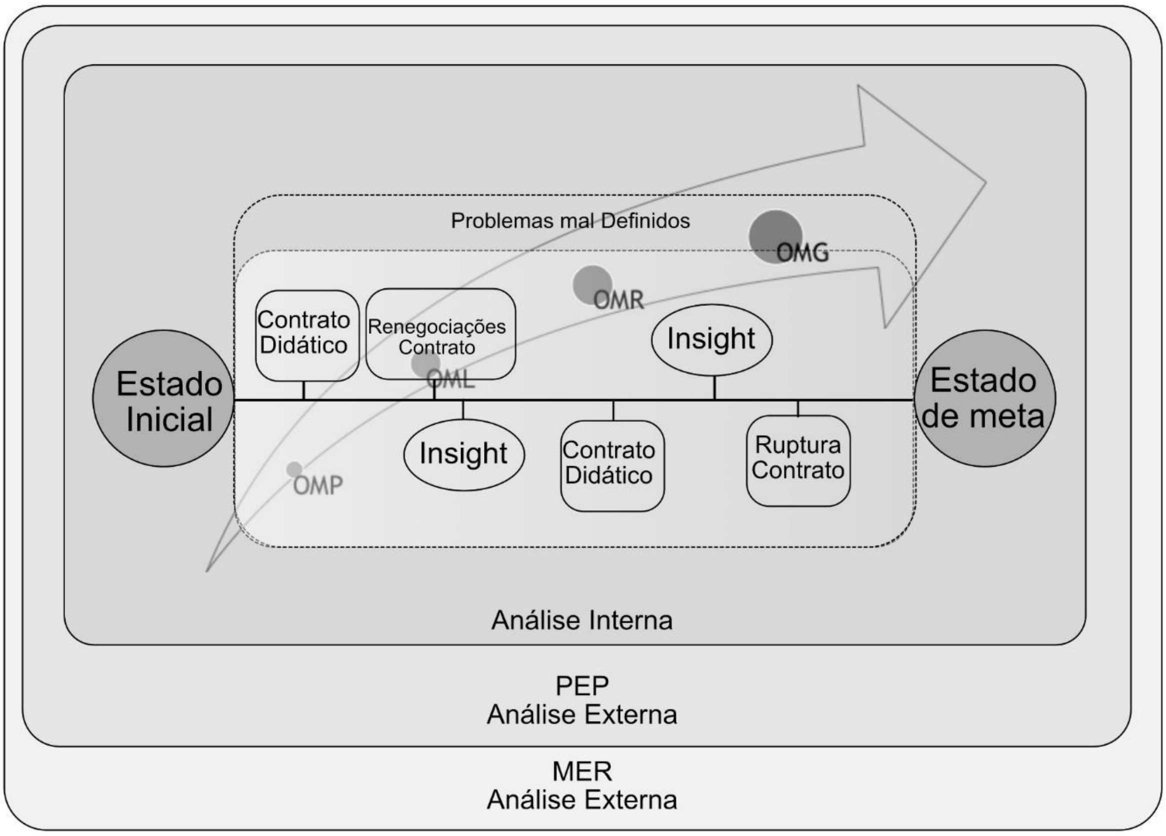
Fonte: próprio autor (2019)

Ressaltamos que cada elemento foi apresentado e discutido nos capítulos anteriores, buscando relacioná-los ao aplicarmos um PEP.

Na análise externa, foi observado o desenvolvimento do PEP e a sua evolução, tomando por base a análise interna e a proposta de cronograma dos encontros, verificando quais os elementos influenciaram na condução do dispositivo. Outro ponto analisado foi o nosso MER, verificando quais percursos utilizados pelos alunos para construir a resposta da questão geratriz, observando o nível de conformidade com o nosso modelo. Para essa análise utilizamos todos os instrumentos destacados na pesquisa, como: os protocolos, as filmagens, os áudios e o caderno de anotações.

A análise interna e externa não aconteceu em momentos diferentes, mas simultaneamente, observando todos os elementos de análise e verificando os pontos relevantes na aplicação e desenvolvimento do PEP, como por exemplo, os pontos de rupturas, a mudança de OM e os possíveis *insights.* A seguir apresentaremos um esquema de nossa análise:

Figura 45 - Esquema de Análise Interna e Externa




Fonte: próprio autor (2019)

O nosso esquema apresenta incialmente a análise interna, com os seus elementos a serem observados e analisados. Em seguida o campo que o PEP é desenvolvido, no caso, pode existir outros PEP de conteúdos que o nosso MER possa fundamentar. Logo após temos o campo do MER, no nosso caso é o direcionado para o estudo de funções elementares para a licenciatura em Matemática.

# Capítulo V: Análise da Aplicação do PEP no Curso de Licenciatura em Educação no Campo com Habilitação em Matemática

Apresentaremos a descrição e as análises da aplicação do PEP no curso de Licenciatura em Educação do Campo com Habilitação em Matemática, ocorridas nas aulas da disciplina Funções I, divididas em dois estudos empíricos, com duas etapas e em semestres diferentes: o primeiro aconteceu no segundo semestre de 2017; e o segundo, no primeiro semestre de 2018. Destacamos que o professor da referida disciplina, participante de nossa pesquisa, manteve-se presente nos dois estudos empíricos, embora com alunos diferentes. Para cada estudo empírico, inicialmente realizamos a formação com o professor da disciplina e, em seguida, aplicamos o PEP sobre o conceito de função e de função afim. Realizamos primeiramente, a análise da formação com o professor da disciplina, e, consequentemente, a análise das etapas de aplicação, com destaque para os elementos metodológicos e de análise utilizados.

## 5.1. Primeiro Estudo Empírico

Para a análise deste estudo, utilizamos os elementos teóricos da Teoria Antropológica do Didático e da Noção do Contrato Didático, com a finalidade de observar a evolução praxeológica do professor da disciplina Funções I, como também dos seus alunos. Para auxiliar nas análises, observamos as relações contratuais didáticas estabelecidas, os seus efeitos, as renegociações e suas rupturas de contrato durante o processo de aplicação e de ensino do dispositivo didático.

### 5.1.1. Formação com o professor da disciplina Funções I no Primeiro Estudo Empírico

A formação do professor foi dividida em dois encontros antes da aplicação do PEP e mais um no decorrer da aplicação do dispositivo, nos quais foram apresentados os elementos teóricos e metodológicos, assim como todo o material a ser utilizado. No primeiro encontro, teve início a preparação do professor da disciplina Funções I para a aplicação do PEP referente ao conceito de função. Nessa ocasião, apresentamos alguns pontos teóricos que fazem parte da nossa pesquisa, abordando o campo teórico ao qual ela faz parte, como a Teoria das Situações Didáticas, a Teoria Antropológica do Didático e o PEP, como também os motivos pelos quais escolhemos para estudo o conceito de função ministrado nas aulas da Licenciatura em Matemática.

No decorrer da apresentação, o professor realizou algumas perguntas, as quais foram respondidas pelo pesquisador, o que resultou numa discussão conjunta, com exemplos do cotidiano escolar. Esse primeiro momento durou em torno de 60 minutos e, ao final, acertou-se uma nova data para o encontro seguinte.

Na segunda sessão, apresentamos e discutimos as propostas do nosso MER e do PEP, verificando os principais elementos utilizados para a construção do modelo, analisando o esquema e verificando o desenvolvimento proposto do PEP. Durante a formação, algumas perguntas foram feitas pelo professor e foi discutido cada ponto levantado por ele. Esse segundo encontro durou em torno de 60 minutos.

Os dois encontros para a formação do professor da disciplina, realizados antes da aplicação do PEP, foram importantes para a familiarização, e, principalmente, a compreensão da proposta do dispositivo didático. Por conseguinte, o terceiro encontro foi essencial para uma adequação da aplicação do dispositivo. No decorrer da descrição dos encontros presenciais, apresentaremos momentos e pontos para os quais o professor apresentou algumas mudanças praxeológicas que, possivelmente, influenciaram a sua formação.

### 5.1.2. Primeiro Encontro Presencial do Primeiro Estudo Empírico

No primeiro encontro presencial com os alunos, foi aplicada a Ficha Diagnóstica, que contém oito itens sobre o conceito de função. A finalidade desse elemento foi relembrar algumas técnicas usuais a serem utilizadas no desenvolvimento do dispositivo didático. A identificação dos alunos se deu pelo nome "Aluno" seguido de um número cardinal, como, por exemplo: Aluno 01, Aluno 02 etc.

A aula se iniciou no segundo horário, às 20h45min, com 15 minutos de atraso e com a participação de cinco alunos; o motivo do atraso foi a espera pelos outros alunos da sala de aula. Alguns alunos que fazem parte da turma faltaram por estarem fazendo avaliação de reposição de outra disciplina, em outra sala, no momento da aplicação do PEP, mas se comprometeram em participar dos outros momentos e em resolver as atividades da Ficha Diagnóstica em um momento diferente das aulas presenciais, trazendo as respostas dos itens no encontro seguinte.

O professor iniciou os trabalhos com a apresentação da atividade, dizendo que se tratava do conceito de Função. Em seguida, distribuiu, para cada aluno, a Ficha Diagnóstica juntamente com a folha-resposta, ressaltando que nela deveriam constar todas as anotações referentes às respostas dos alunos. Lembramos que a aplicação da atividade diagnóstica foi individual, mas, no momento das resoluções, a interação entre eles não foi vetada.

Ao iniciar com a Ficha Diagnóstica, o professor fez a seguinte pergunta: “o que significa função?”. Ao fazer essa pergunta mais de uma vez, a sala ficou em silêncio e, depois de alguns segundos, o professor escreveu a pergunta no quadro. Nesse momento, pudemos destacar a existência de um contrato didático (BROUSSEAU, 1996), na medida em que os alunos aguardaram primeiramente a fala do professor, para depois iniciarem qualquer discussão; sem o aval do professor, não poderiam discutir o conceito. Em seguida, o Aluno 01 tentou iniciar a discussão com a seguinte fala:

ALUNO 01: uma representação de uma relação entre dois conjuntos.

A partir da fala do Aluno 01, o professor repetiu a sua afirmação e percebeu que a explicação não estava completa, daí iniciou uma discussão, incentivando os outros alunos a participarem dela, mas, apesar do incentivo do professor, a discussão ficou entre o professor e o Aluno 01:

PROFESSOR: Ele (Aluno 01) diz que uma representação entre os dois conjuntos? Né isso?
ALUNO 01: De uma relação entre dois conjuntos...
PROFESSOR: De uma relação entre dois conjuntos...
ALUNO 01: Isso!
PROFESSOR: De uma relação qualquer? Ou é uma ...
ALUNO 01: Uma relação especifica, né isso?
PROFESSOR: É isso, não é qualquer relação que recebe o nome de função.

Logo após esse diálogo, o Aluno 02 participou da discussão destacando a existência do domínio e imagem de uma função. O professor perguntou aos outros alunos, mas não responderam, ficando em silêncio prolongado. Pudemos notar a força do contrato didático (BROUSSEAU, 1996) estabelecido inicialmente, graças ao qual os alunos aguardaram a explicação inicial do professor, para poderem prosseguir, existindo uma responsabilidade maior em relação à aprendizagem por parte do professor.

Com a falta de repostas pela turma, o professor foi ao quadro e apresentou a técnica para definir função, utilizando o esquema de flechas ($\tau_{1,1}$), um exemplo que não caracteriza uma função, mas uma relação. O professor perguntou aos alunos como uma relação pode ser uma função, destacando que existe uma especificidade para uma relação ser uma função. No momento do questionamento do professor aos alunos, o Aluno 01 tentava utilizar a definição formal, mas sem defini-la corretamente, resgatando trechos como:

ALUNO 01: dados dois conjuntos A e B...

Com a insistência paciente do professor em construir a definição com os alunos, o Aluno 02 teve uma participação, dizendo:

ALUNO 02: Que cada elemento tem que estar ligado a uma imagem.
PROFESSOR: Isso, mas vamos definir mais um pouquinho. Até aí, tá tudo tranquilo.

Em seguida, o Aluno 01 falou que cada elemento de A tem que estar relacionado a um único elemento do conjunto B. Nesse momento, o professor ressaltou a fala do Aluno 01 e destacou a frase: "relacionado a um único elemento". Então, se dirigiu ao exemplo no quadro e relacionou a fala do Aluno 01 ao exemplo utilizado, destacando que não era função, e, em seguida, apresentou outro exemplo que era função. Na sequência, o Aluno 03 tentou conceituar função, mas sem sucesso. Contudo, o Aluno 02 chegou a defini-la. Após isso, o professor pediu para iniciar a responder o item 01 da Ficha Diagnóstica.

**Análise do Item 01**

O primeiro item é composto de quatro gráficos diferentes. Nessa tarefa, o aluno tem que identificar quais representam funções e o porquê. Para responder a esse item, um dos caminhos é utilizar a técnica das retas verticais e paralelas ao eixo das ordenadas ($\tau_{1,2}$), verificando quantos pontos de intersecção existem na reta vertical com o gráfico. Porém, a técnica explorada pelo professor foi o esquema de flechas ($\tau_{1,1}$).

Os alunos, ao iniciar a resposta do primeiro item, ficaram em silêncio por alguns minutos. Após esse momento, o Aluno 03 perguntou se era para dizer quais gráficos eram funções; o professor reforçou esse raciocínio dizendo que, além de dizer quais são funções, era necessário justificar a resposta. Em seguida, o Aluno 01 fez a mesma pergunta do Aluno 03, e o professor reforçou, mais uma vez, o que o item estava solicitando. Com o passar de alguns minutos sem resposta por parte dos alunos, o professor foi ao quadro e escreveu mais um exemplo, utilizando a técnica do esquema de flechas ($\tau_{1,1}$) e, seguidamente, apresentou no quadro a definição formal do conceito de função, perguntando à turma se a definição era aquela mesma. Então, o professor começou a utilizar os exemplos anteriores para explicar mais uma vez o conceito referido. Nesse momento, pudemos observar uma renegociação de contrato (BROUSSEAU, 1996) por parte do professor, perante os alunos, na medida em que os alunos ficaram em silêncio. O professor tentou explicar, mais uma vez, o conceito em estudo, mas com o auxílio da definição formal. Nesse sentido, verificamos o efeito topázio (BROUSSEAU, 2008) juntamente com a utilização abusiva de analogia (BROUSSEAU, 1996). Um dos motivos da dificuldade dos alunos em justificar qual gráfico era função, pôde estar relacionado à técnica abordada inicialmente pelo professor ($\tau_{1,1}$), segundo a qual, para responder ao item, o aluno poderia utilizar a técnica ($\tau_{1,2}$).

O professor, ao dar início a mais uma renegociação, apresenta no quadro dois gráficos que pertencem ao item para que os alunos consigam compreender o conceito, mas, antes de iniciar esse processo, o Aluno 01 conseguiu justificar que o primeiro gráfico não representava função, o que pode ter sido ser uma consequência positiva da primeira renegociação do professor.

Diante do silêncio dos alunos por alguns minutos, o professor incentivou a interação em sala, mas sem sucesso. Nesse momento, tentou relacionar a representação por esquema por flechas, a definição formal e a representação gráfica, para tentar fazer os alunos compreenderem o conceito de função, mas só o Aluno 01 conseguiu interagir com o professor. Com a utilização do primeiro gráfico do item, o professor utilizou a ($\tau_{1,2}$) para respondê-lo; nesse momento, a renegociação deu ênfase à análise do gráfico, utilizando a técnica ($\tau_{1,2}$). Na explicação do professor, existiu a iniciativa de interação dos Alunos 03 e 04, mas sem chegar à compreensão do conceito de função. Em seguida, o professor chegou à conclusão de que o primeiro gráfico não era função, solicitando aos alunos que utilizassem a mesma técnica para concluir os outros gráficos.

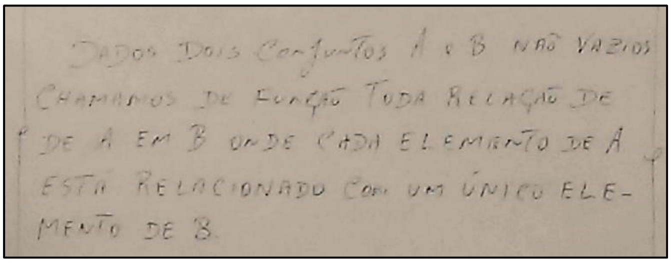
Depois de alguns minutos de silêncio na sala, o professor partiu para o segundo gráfico, perguntando se era ou não função. Nesse momento, o Aluno 01 afirmou ser função e justificou a sua resposta:

PROFESSOR: Essa daqui alguém pode definir se é ou não?
ALUNOS: ... (silêncio por alguns segundos)
ALUNO 01: é... (silêncio por alguns segundos) a definição que você quer?
PROFESSOR: como você justifica se é ou não função?
ALUNO 01: porque todo elemento de A, tá ligado a um único elemento de B. Nesse caso, denotando a abcissa A e a ordenada B.
Professor: Muito bem... (depois o professor gesticulou um sinal de positivo ao Aluno 01).

Em seguida, o professor incentivou, mais uma vez a interação em sala, ressaltando que a construção é conjunta. Ele perguntou a cada aluno se existia dificuldade de identificar se havia ou não função nos outros gráficos. Após a fala do professor, os alunos ficaram em silêncio por alguns minutos para terminar de responder a esse primeiro item.

Ao justificarem se os gráficos do Item 01 era ou não função, os alunos utilizaram a definição apresentada pelo professor no quadro, para fundamentarem as suas respostas. Em seguida, observamos a figura 46 com a definição escrita pelo professor no quadro.

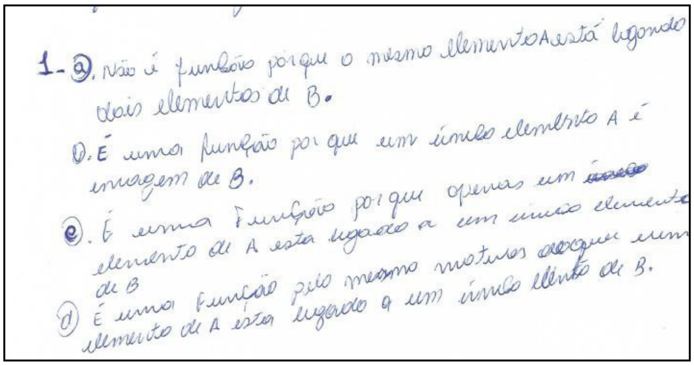
Figura 46 - Definição Escrita no Quadro pelo Professor


DADOS DOIS CONJUNTOS A e B NÃO VAZIOS
CHAMAMOS DE FUNÇÃO TODA RELAÇÃO DE
DE A EM B ONDE CADA ELEMENTO DE A
ESTÁ RELACIONADO COM UM ÚNICO ELE-
MENTO DE B.

Fonte: próprio autor (2019)

Consequentemente, a resposta utilizada pelo Aluno 04:

Figura 47 - Resposta do Item 1 do Aluno 04

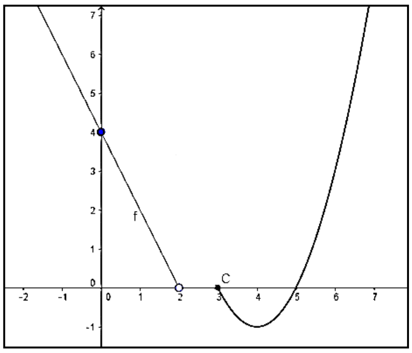

1- a). Não é função porque o mesmo elemento A está ligando dois elementos de B.
b). É uma função porque um único elemento A é imagem de B.
c). É uma função porque apenas um único elemento de A está ligado a um único elemento de B
d) É uma função pelo mesmo motivos que um elemento de A está ligado a um único elemto de B.

Fonte: próprio autor (2019)

Ao analisarmos as respostas dadas pelos alunos na figura 47, juntamente com a imagem 46, verificamos que a reprodução, pelos alunos, da definição apresentada pelo professor está presente na justificativa dos alunos. Com isso, caracterizamos mais um contrato didático, no sentido de que os alunos tendem a reproduzir fielmente a técnica e tecnologia apresentada pelo professor, não construindo seus próprios caminhos. Isso caracteriza uma dependência desses alunos do professor e uma falta de autonomia por parte dos mesmos.

Outro ponto de análise está relacionado a um gráfico do item 01 e que apresenta uma descontinuidade. Nesse caso, os alunos, em sua maioria, acharam que não era função, refletindo uma falta de conhecimento da tecnologia e da teoria ensinadas.

Figura 48 - Gráfico do Item 01




Fonte: Ficha Diagnóstica (2017)

Observamos que a exploração da técnica ($\tau_{1,1}$), no maior tempo da aula, por parte do professor, inibiu a utilização da técnica ($\tau_{1,2}$) que, ao nosso ver. seria a mais conveniente para responder ao Item 01. A organização praxeológica utilizada pelo professor influenciou diretamente as respostas dos alunos, ressaltando a técnica utilizada pelo professor com maior ênfase. Nesse sentido, os contratos didáticos, suas renegociações e seus efeitos são identificados no desenvolver desse item, apresentando a dependência dos alunos em relação ao professor, na busca da resposta.

**Análise do Item 02**

O Item 02 direciona os alunos para o cálculo do valor numérico da imagem de uma função, proporcionando-lhes construir uma relação de correspondência entre os elementos do domínio e da imagem de uma função. A técnica geralmente utilizada é a

$\tau_{3,1}$. Nela, a variável $x$ será substituída por um valor numérico em $y = f(x)$, obtendo-se uma expressão numérica a ser resolvida.

O professor iniciou escrevendo no quadro a função do item 02 e perguntou aos alunos como ficaria a letra "a" do item. Após isso, o professor perguntou mais uma vez, a mesma pergunta, e o Aluno 01 falou que o $x$ é o 3 e o $f(3)$ é o $y$, e, em seguida, juntamente com o professor, fez a relação entre a imagem e o domínio da função. Em seguida, o professor perguntou novamente para a turma qual era a imagem do 3 para essa função; o Aluno 05 respondeu afirmando que era substituir a variável $x$ pelo número 3, confirmando a utilização da técnica $\tau_{3,1}$. Na sequência, o professor fez os cálculos no quadro, mas ressaltou a relação entre o domínio e a imagem da função. Nesse momento, notou-se a presença do contrato didático, quando o professor necessitou iniciar estimulando os alunos para que continuassem a responder o item. Esse contrato foi reforçado pelo professor, pelo fato de ele comentar: "da mesma forma vocês vão aplicar com os outros..." (fala do professor).

Após alguns minutos de silêncio, o professor observou a resolução de alguns alunos e retirou algumas de suas dúvidas relacionadas à potenciação de um número real, no que se referiu à utilização dos parênteses. Logo depois solicitou que o Aluno 01 respondesse no quadro a letra "d".

PROFESSOR: Quer fazer aí, Aluno 01?
ALUNO 01: (silêncio alguns segundos)
PROFESSOR: Quer fazer?
ALUNO 01: A letra d.
PROFESSOR: Como você arma essa questão? Como você faria essa questão?
ALUNO 01: É só substituir, pô!
PROFESSOR: Mas a dificuldade dele (Aluno 02) se tem necessidade de colocar os parênteses...
ALUNO 01: Tem sim...
ALUNO 02: Por quê?
ALUNO 01: Porque, se eu elevar, por exemplo ... se eu retirar os parênteses vai ficar só o 5 ao quadrado aí o sinal vai continuar, entendeu?
ALUNO 02: Como é que eu sei ... eu sei que isso elevado sem os parênteses só está elevando o número, não o sinal, mas como parar, como eu sei que tem que colocar os parênteses ou tem um caso particular? Ou que não precise ou fique desse jeito?
ALUNO 01: Porque esse caso aqui, por exemplo, se aqui fosse... se eu boto os parênteses, se retirasse a raiz ... teria que ser o módulo de ... porque dá o quadrado, raiz quadrada ...
PROFESSOR: Porque você tem aqui Aluno 02, $x$ ao quadrado, então o valor de $x$ que você vai substituir tem que elevar ao quadrado. Se ele é positivo ou negativo, você pode optar em colocar os parênteses sempre ... quando é positivo você pode optar, mas quando for negativo você tem que colocar, porque o valor de $x$ que você vai substituir tem que ser elevado ao quadrado, e, se o valor de $x$ é – 5, então todo esse valor tem que ser elevado ao quadrado, então você coloca os parênteses pra indicar que você está elevando tudo. Tá certo?

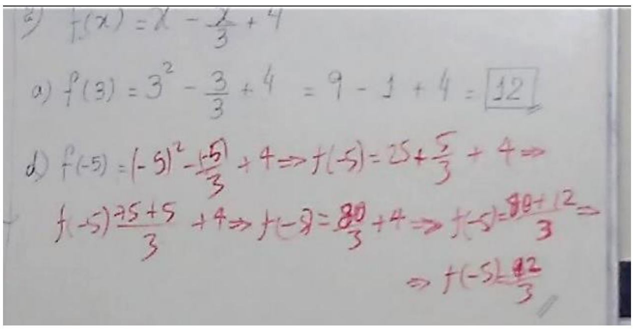
ALUNO 02: (silêncio alguns segundos)
PROFESSOR: Ah?
ALUNO 02: (gesticulou com a cabeça com um sinal de positivo)
PROFESSOR: Quando você tem qualquer coisa, vamos supor $a^2$, e você diz que "a" vale -3, então se você vai elevar $a^2$, então você tem que fazer $(- 3)^2$.
ALUNA 03: Só quando é negativo, no caso?
PROFESSOR: É ... porque os parênteses indicam que todo ele será elevado ao quadrado. Mas, quando é positivo, não; quando é positivo, fica opcional, não faria diferença. Se você não coloca os parênteses, você está excluindo o sinal da potência.

Nesse momento de interação entre os alunos, o Aluno 01 tentou validar a sua explicação, mas foi questionado em alguns momentos pelo Aluno 02, o que gerou momentos de tensão (ARAÚJO; BRITO LIMA; CÂMARA DOS SANTOS, 2011). Mas, quando o Aluno 01 não chegou a uma explicação convincente, o professor interveio, institucionalizando a definição discutida.

Observamos que o professor tem um papel predominante nesse sistema didático estabelecido, ficando com a maior parte da responsabilidade pela condução do saber em sala, reforçando o contrato estabelecido, no qual a dependência dos alunos dele é grande no desenvolvimento do saber em jogo.

Após explicar a utilização dos parênteses na potenciação, o professor voltou a auxiliar o Aluno 01 na resolução da letra "d", corrigindo e institucionalizando a resposta. Em seguida, a figura 49 apresenta a técnica utilizada pelo Aluno 01:

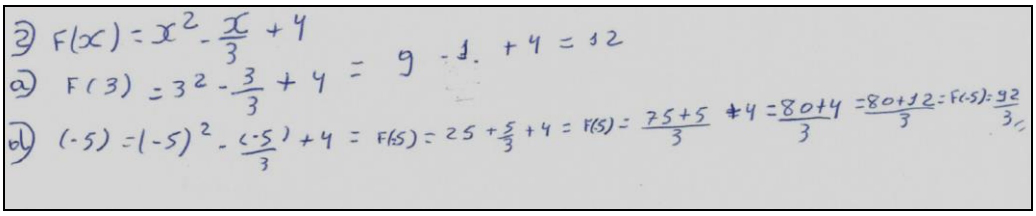
Figura 49 - Técnica Utilizada pelo Aluno 01




Fonte: próprio autor (2019)

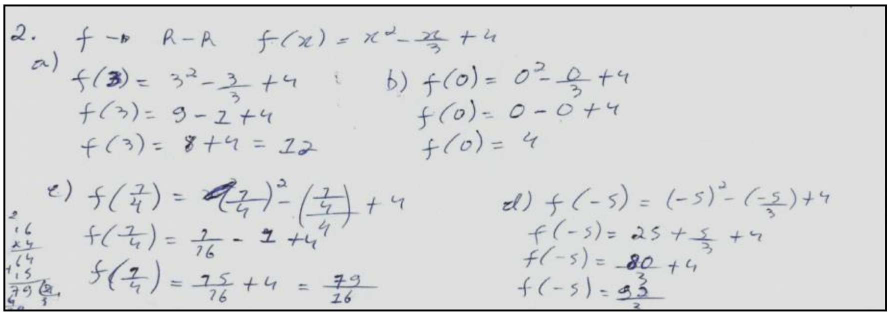
Observamos que a técnica ($\tau_{3,1}$) utilizada pelo professor foi reproduzida pelo Aluno 01. Nesse sentido, temos a identificação do contrato didático estabelecido, no qual o aluno reproduz as técnicas apresentadas pelo professor sem questionar. Tal ponto pode ser constatado nas resoluções dos outros alunos representados nas figuras 50 e 51:

Figura 50 - Resolução do Aluno 03



Fonte: próprio autor (2019)

Figura 51 - Resolução do Item 02 do Aluno 05



Fonte: próprio autor (2019)

As figuras 50 e 51 apresentam a técnica utilizada pelos Alunos 03 e 05 ao resolverem o item 02. Observamos que é a mesma utilizada pelo professor e esse fato reforça o contrato didático, no qual os alunos utilizam estritamente as técnicas apresentadas e utilizadas pelo professor na resolução do item.

**Análise do Item 03**

Esse item permite relacionar a construção de triângulos equiláteros com palitos de fósforo. Inicialmente, partiu-se da construção de um triângulo composto de três palitos; em seguida, de dois triângulos com cinco palitos, e assim por diante. A finalidade do item é levar o aluno a compreender a relação de dependência entre os dados existente em uma função; no caso, o triângulo e os palitos de fósforos.

O professor iniciou o item chamando os alunos para observar e resolver as questões. Após alguns segundos de silêncio, o professor solicitou o Aluno 02 para ler o item. Notamos que esse procedimento tem influência de um contrato didático (BROUSSEAU, 1996) utilizado pelo professor e que, consequentemente, reflete-se em uma ação esperada pelo aluno.

Com a leitura do item realizada pelo Aluno 02, o professor foi ao quadro para reescrever o item. Observamos que essa ação do professor se repetiu nos itens anteriores, caracterizando um contrato didático estabelecido entre as partes.

O professor, após escrever o item no quadro, fez as seguintes perguntas:

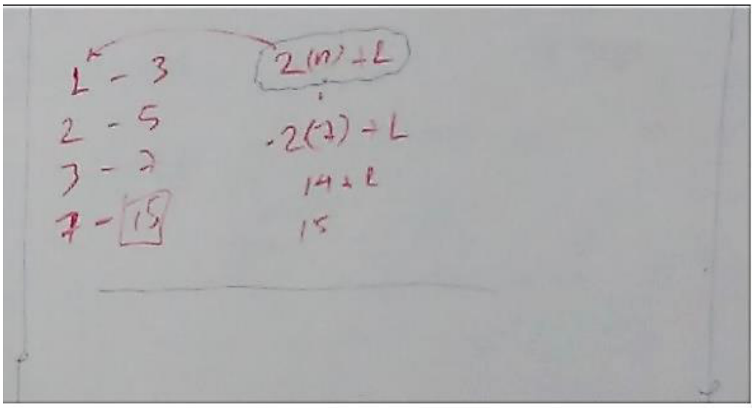
PROFESSOR: e aí ... no primeiro triângulo, quantos palitos são necessários pra construir (o triângulo)?
ALUNOS: ... (silêncio por alguns segundos)
PROFESSOR: (ao escrever no quadro a resposta da letra "a") é isso?
ALUNOS: ... (silêncio por alguns segundos)
PROFESSOR: E o segundo?
ALUNO 02: Cinco...
PROFESSOR: Cinco palitos necessários... E o terceiro triângulo? Desculpe a terceira figura?
ALUNO 03: Sete...
PROFESSOR: E quantos triângulos?
ALUNO 01: Três.

Em seguida, o professor repetiu as respostas apresentadas, institucionalizando os resultados na classe; ele iniciou a discussão para responder à letra "a". Essa praxeologia utilizada pelo professor nos leva a ressaltar o Efeito Topázio presente em vários momentos da aula, quando o docente não aguarda o questionamento do aluno, mas antecipa a resposta.

Ao perguntar a resposta da letra "a" aos seus alunos, o professor tentou buscar uma relação tomando por base a discussão gerada pela figura do item. Como os alunos não responderam, ficando alguns minutos em silêncio, o professor retornou ao quadro e utilizou a resolução construída, com base na figura do item, e retomou aos mesmos questionamentos iniciais. Nesse momento, o Aluno 03 respondeu à letra "a" falando: "nove palitos". Notamos que, para que alguns alunos compreendessem a questão, foi necessário acrescentar dois palitos a cada triângulo seguinte; o professor renegociou o seu contrato, acrescentando mais uma informação, que, no caso, foi: para construir o triângulo seguinte, é necessário acrescentar dois palitos. Em seguida, passou para a letra "b", perguntando à turma quantos palitos eram necessários para construir os triângulos? Como os alunos perceberam que a técnica é acrescentar dois palitos para construir o triângulo seguinte, responderam sem problemas.

O professor passou para a letra "c", repetindo a pergunta aos alunos. Para chegar à resposta dessa letra, os alunos tiveram que utilizar uma técnica mais elaborada que a anterior, porque o problema solicitava uma expressão algébrica que generalizasse para qualquer quantidade de triângulo. Por necessitar de uma técnica mais elaborada, a sala ficou em silêncio por alguns minutos; sua dificuldade pode estar relacionada à mudança de uma organização matemática pontual para uma organização matemática local (CHEVALLARD, 1999), necessitando o aluno da articulação das técnicas. Em seguida, os alunos 01 e 02 chegaram a uma expressão, a qual o professor solicitou que o Aluno 01 representasse no quadro (figura 52):

Figura 52 - Expressão Construída pelo Aluno 01



Fonte: próprio autor (2019)

Notamos que a técnica utilizada pelo Aluno 01 foi construída tomando por base os exemplos dos casos particulares. Essa técnica se inicia a partir dos casos particulares até a sua generalização, e está fundamentada na tecnologia da indução matemática, tecnologia que, naquele momento, não foi mencionada por nenhum dos sujeitos.

Essa falta de fundamentação tecnológica (RODRIGUEZ; BOCH; GASCÓN, 2007), expressa pelos sujeitos, reforça a ideia da utilização da técnica pela técnica, observada quando o Aluno 01 não soube explicar o porquê do $2n + 1$. Na tentativa de explicar essa expressão, o Aluno 02 levou em conta o lado de intersecção dos triângulos, mas não o fundamentando matematicamente e chegando à mesma expressão. Apesar de o professor perguntar para os outros alunos sobre a expressão, não obteve resposta. Esse silêncio pode caracterizar uma falta de argumentação teórica das técnicas utilizadas.

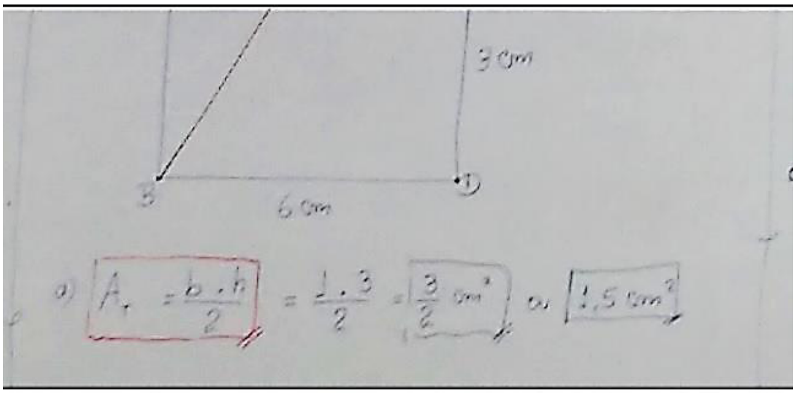
### Análise do Item 04

O item 4 parte de casos particulares para a determinação da área do triângulo retângulo para, em seguida, chegar a uma expressão que generalize a situação apresentada; porém, a determinação do domínio e da sua imagem é necessária para que se possa compreender o problema e construir a resposta.

O professor iniciou sua aula solicitando a leitura do item a um aluno, e, em seguida, escreveu no quadro as informações disponíveis sobre o problema. Depois de o Aluno 01 fazer a leitura do item, o professor desenhou o retângulo com os valores de suas dimensões. Em seguida, perguntou a alguns alunos se compreenderam o item, mas os alunos ficaram em silêncio. Diante disso, o professor explicou o item mais uma vez, mas apresentando mais informações, tais como, a área a ser observada de um triângulo. Logo depois, partiu para responder à letra “a”. Na resolução dessa letra, o professor perguntou à sala qual a área do triângulo, obtendo a resposta do Aluno 01: $A_t = \frac{base\ x\ altura}{2}$.

Um fato interessante foi que, antes de o professor prosseguir com a discussão do Item 04, ele retornou ao item 03 e perguntou se a expressão encontrada era uma função, levando a discussão para relação de dependência entre os termos de uma função. A finalidade do professor foi relacionar esse item ao próximo, no caso, o item 04, levando os alunos a utilizarem a mesma técnica. Logos após, retornou para o item 04 e respondeu à letra “a”, escrevendo a resolução no quadro.

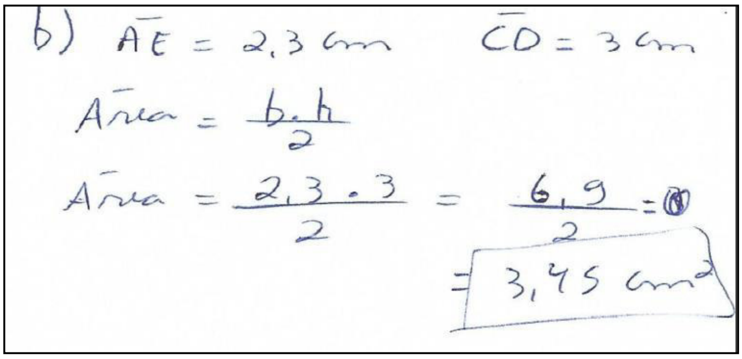
Figura 53 - Resposta do Professor da Letra “a”




Fonte: próprio autor (2019)

O professor utilizou a técnica de substituição das letras por valores numéricos, obtendo a área solicitada. Em seguida, solicitou aos alunos que respondessem à letra “b”. Três alunos conseguiram responder à questão desse item, utilizando a técnica apresentada pelo professor.

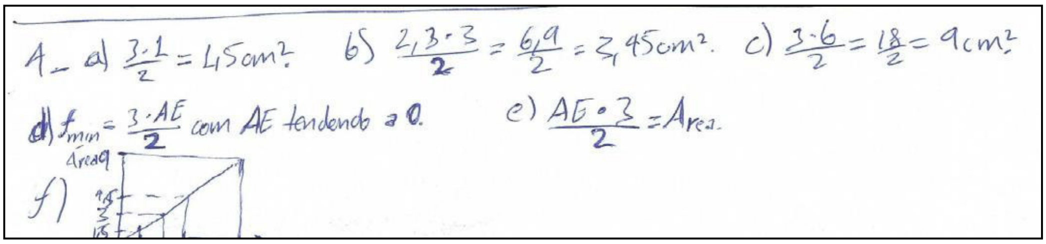
Figura 54 - Resposta do Aluno 05




Fonte: próprio autor (2019)

Ao final da aula, o Aluno 01 conseguiu responder ao item por completo, chegando à expressão que representa a generalização e a sua representação gráfica.

Figura 55 - Resposta do Aluno 01




Fonte: próprio autor (2019)

Notamos que o Aluno 01 possuía o domínio de técnicas mais elaboradas, respondendo aos itens 04 e 05 por completo. Assim, passou de uma OMP para uma OML, mas não podemos afirmar se compreendeu a sua utilização e a sua fundamentação. Esta é uma análise cuja conclusão necessita de uma teoria de aprendizagem, mas destacamos que não é esse o nosso objetivo neste momento de estudo empírico.

Depois de alguns minutos, com a sala em silêncio, o professor encerrou a aula porque havia chegado o final do horário. Ele solicitou que os outros itens fossem resolvidos em casa e apresentados na aula seguinte.

### 5.1.3. Segundo Encontro Presencial do Primeiro Estudo Empírico

No segundo encontro, foi aplicada a Ficha de Trabalho, com o objetivo de revisar as técnicas utilizadas juntamente com as tecnologias que as justificam. A ficha é composta de 10 (dez) itens, contendo o conteúdo função afim e aborda a construção de gráficos no plano cartesiano, a análise de parâmetros observando o crescimento ou decrescimento, o zero da função, o estudo do sinal e a resolução de problemas como conteúdos secundários.

A aula foi realizada no dia 15 de agosto de 2017 e teve nove alunos presentes. Para participar dessa aula, o professor convidou mais três alunos da Licenciatura em Matemática de outro período. Ressaltamos que a presença de outros alunos não interferiu no desenvolvimento da pesquisa, e lembramos que foi dada autonomia ao professor para tomar suas decisões.

A aula iniciou-se às 19h20 minutos e teve a duração de 70 minutos. Os alunos foram divididos em grupo de três integrantes e cada grupo recebeu uma ficha de trabalho. O professor falou que esse seria o material da aula e que iriam trabalhar, especificamente, sobre função afim, ressaltando que todas as respostas deveriam ser registradas. Lembramos, que, antes de começar a preencher a ficha de trabalho, o professor não discutiu os itens que faltaram ser respondidos da aula anterior, mas destacou que seriam abordados em outro momento. Ressaltamos, que durante todas as aulas subsequentes, as discussões dos itens da ficha diagnóstica não foram tratadas pelo professor.

**Análise do Item 1**

Este Item é composto de quatro funções afins e solicita que se construa, no mesmo sistema cartesiano as suas representações gráficas. Após entregar a Ficha de Trabalho para os grupos, o professor iniciou os trabalhos solicitando aos alunos que lessem o Item e, em seguida, ele mesmo refez a leitura e perguntou:

PROFESSOR: Como poderíamos construir o gráfico dessa letra “a” aí?

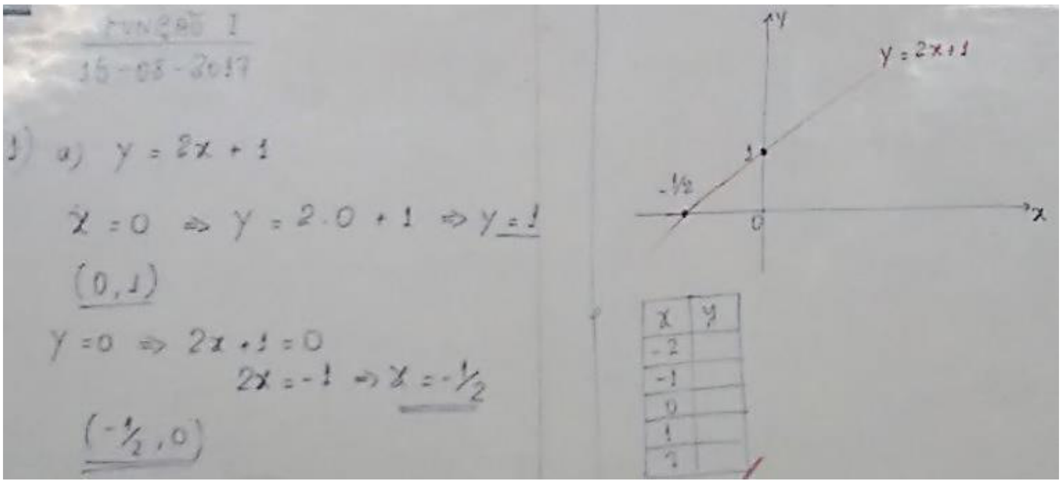
Durante a explicitação do item pelo professor, alguns alunos dividiam a resolução pelo grupo, isto é, cada aluno respondia uma letra do Item:

ALUNO 01: Você faz a letra “a” (Aluno 05), você a “b” (Aluno 04) e eu faço a letra “c”, beleza?
ALUNO 05: Beleza...

A partir dessa ação, podemos levantar dois pontos relacionados aos alunos: o primeiro referente ao sentido que pode caracterizar um processo de devolução, no momento de aceitação do item, na tentativa de respondê-lo; o segundo quanto à atitude de alguns alunos, de responderem ao item individualmente, mesmo compondo um grupo. O PEP tenta enfrentar a atitude individualista presente nas aulas de Matemática, buscando redirecionar as ações para um trabalho coletivo (RODRIGUEZ; BOSCH; GASCÓN, 2007).

Em seguida, o professor responde ao item "a" utilizando a técnica que substitui o valor de x por 0, encontrando o valor numérico de y ($\tau_{6,1}$). Depois, substituiu o valor de y da função por 0 ($\tau_{9,1}$), obtendo o zero da função. Com a utilização dessas duas técnicas, o professor conseguiu determinar dois pontos cartesianos para construir o gráfico. A figura 56, apresenta essas técnicas utilizadas pelo professor.

Figura 56 - Técnicas Utilizadas pelo Professor para Construir o Gráfico da Função Afim



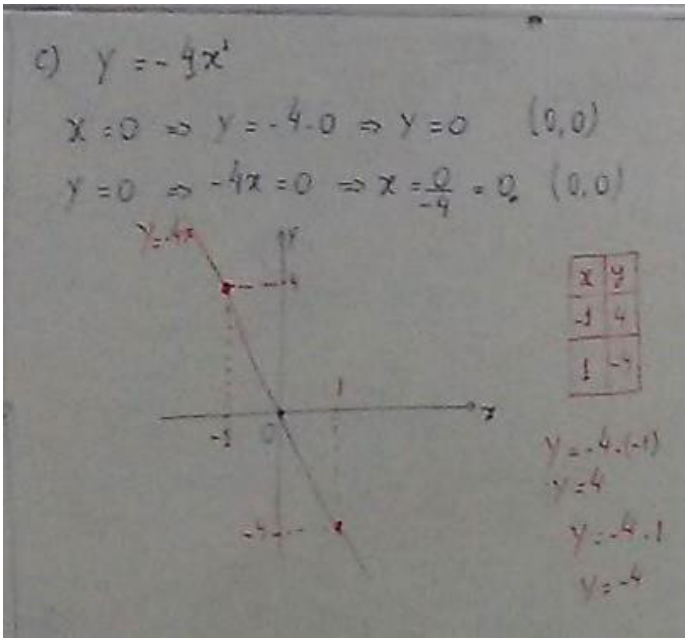

Fonte: próprio autor (2019)

Observamos que essas técnicas diferem da técnica apresentada no livro didático analisado, no qual é sugerida a técnica ($\tau_{6,1}$), no caso, substituir o valor de $x$, na função, por um valor numérico. O professor utilizou duas técnicas na construção, destacando os pontos de intersecção do gráfico nos eixos do plano cartesiano, caracterizando uma proposta de resolução diferente. Logo após, também comentou que o gráfico da função afim pode ser construído utilizando-se somente a ($\tau_{6,1}$), que pode ser observada na figura 56, pela construção de uma tabela.

Na continuidade da aula, o professor solicitou aos alunos que fizessem os itens "b" e "c". Os alunos tentaram responder às letras utilizando as técnicas apresentadas pelo professor. Nesse momento, pudemos notar que a interação entre os membros dos grupos era visível, na tentativa de resolução, caracterizando uma mudança de postura apresentada incialmente. Na ocasião, os alunos interagiram entre si na resolução, que pode ter sido provocada pela formação dos grupos, possibilitando uma interação maior entre os alunos. Durante a discussão dos grupos, o professor os acompanhou e retirou pequenas dúvidas relacionadas ao item estudado.

Após alguns minutos, o professor iniciou a resolução da letra "c", utilizando as técnicas $(\tau_{9,1})$ e $(\tau_{6,1})$. Ao resolvê-la, o professor percebeu que na aplicação das duas técnicas geram os mesmos pontos, no caso (0, 0), necessitando recorrer à técnica $(\tau_{6,1})$, mais uma vez e substituindo o valor de x por outro valor numérico, que pode ser identificado na figura seguinte:

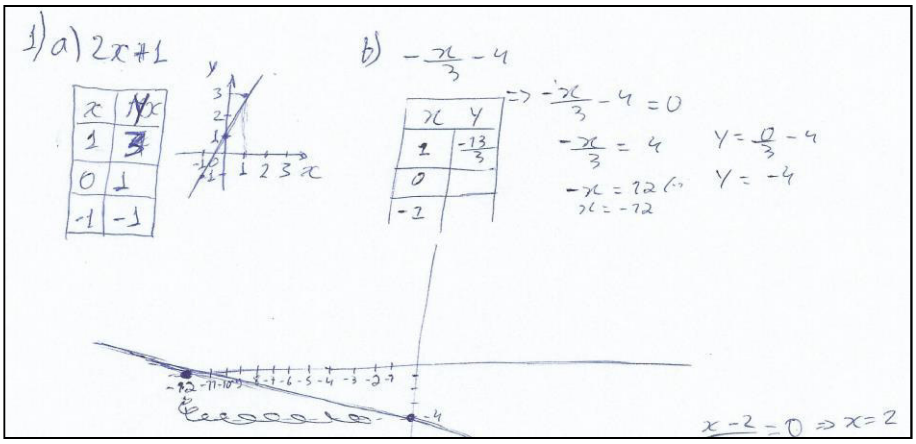
Figura 57 - Resolução da Letra "c" pelo Professor




Fonte: próprio autor (2019)

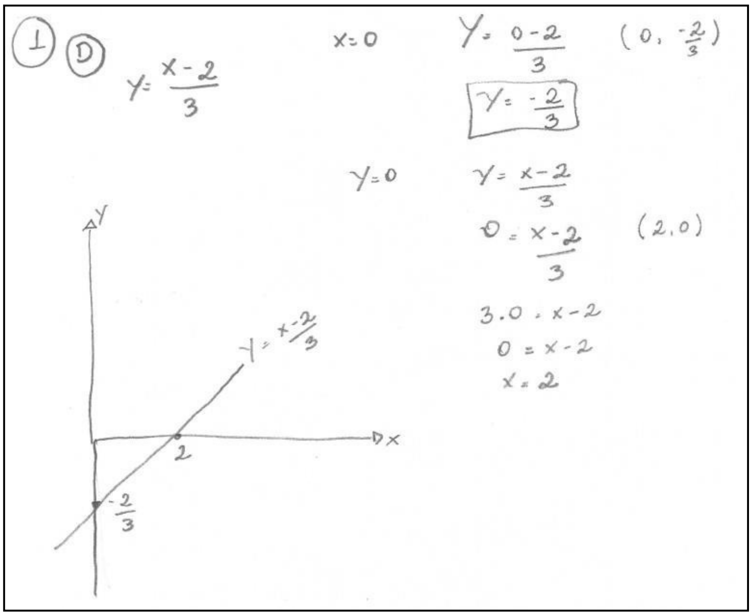
Notamos, pela resolução dos alunos, a tentativa de utilizar as técnicas abordadas pelo professor, não tendo sido apresentado qualquer outro caminho. Essa afirmação pode ser comprovada pelas seguintes figuras:

Figura 58 - Resolução das Letras “a” e “b” por um Grupo



Fonte: próprio autor (2019)

Figura 59 - Resolução do Item 01 Letra “d”



Fonte: próprio autor (2019)

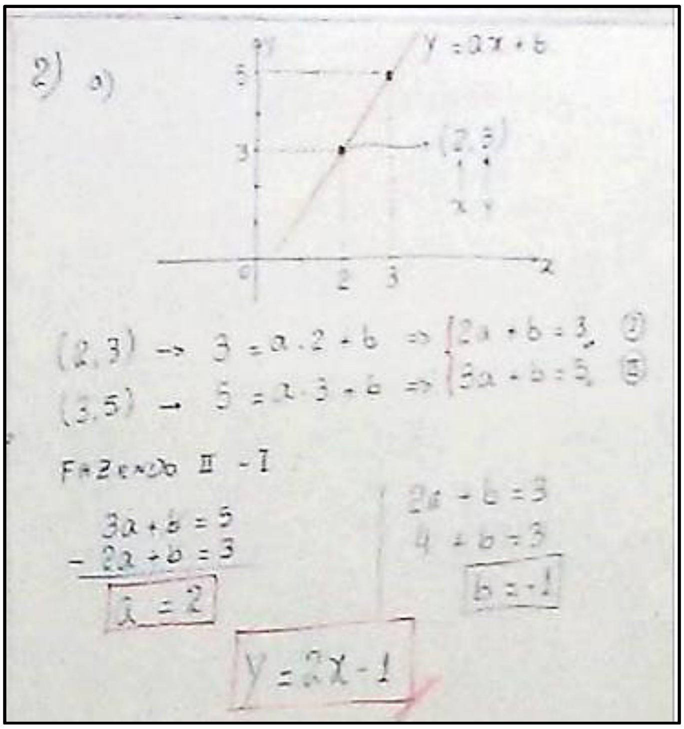
As figuras 58 e 59 apresentam as técnicas utilizadas pelos alunos, as quais seguem as utilizadas pelo professor. Observamos que a dependência dos alunos em relação ao professor era evidente, e que eles esperavam uma ação do professor para responderem às atividades apresentadas.

### Análise do Item 02

Nesse Item, foi solicitada a construção da equação da reta utilizando dois pontos cartesianos. O professor iniciou a explanação lendo o enunciado do item e copiando no quadro a letra “a”. Em seguida, perguntou a seus alunos como se podia determinar a equação da reta. O professor construiu o gráfico utilizando a técnica ($\tau_{6,1}$) e perguntou novamente como determinar a equação da reta. Logo depois, o professor indagou qual função representava o gráfico, solicitando que os alunos respondessem qual era a sua representação algébrica. Como os alunos não responderam, o professor copiou no quadro: $y = ax + b$. Pela recorrência dessa atitude do professor, constatamos mais um contrato didático de sua parte, na medida em que os alunos ficaram em silêncio, e o professor apresentou a resposta.

Diante do silêncio dos alunos, o professor iniciou a resolução, ressaltando que deveriam recorrer ao sistema de equações, por terem que determinar o valor numérico de “a” e o de “b”. Então, utilizou a técnica ($\tau_{7,2}$), que é resolver o sistema de equações pelo Método da Adição (figura 60).

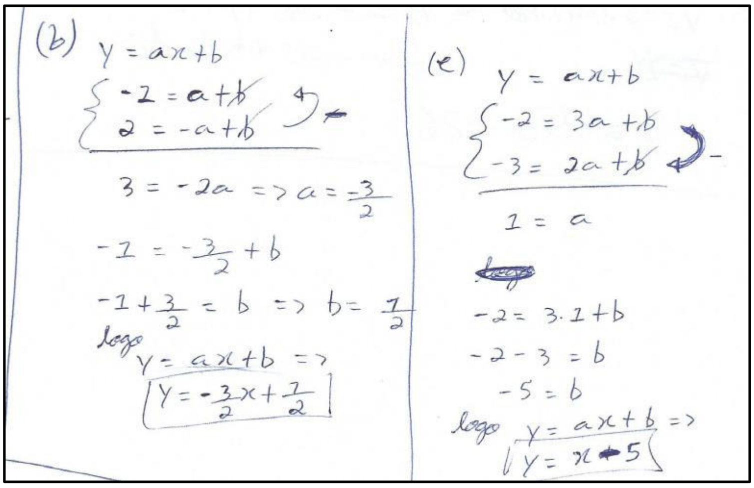
Figura 60 - Resolução do Sistema pelo Método da Adição pelo Professor




Fonte: próprio autor (2019)

Durante a sua explicação, os alunos não fizeram qualquer pergunta, apenas copiaram as anotações do professor. Depois de resolver a letra “a”, o professor solicitou aos alunos que resolvessem as outras letras. Esperou em torno de 10 minutos para que os alunos agissem; nesse tempo, ficou elucidando as dúvidas dos alunos. A dificuldade dos alunos em responder a esse item pode estar relacionada à mudança de uma OMP para uma OML, como também à necessidade de uma maior articulação entre as técnicas, e, consequentemente, de sua compreensão tecnológica.

Figura 61 - Resolução do Grupo que Tentou Responder Todas as Letras do Item




Fonte: próprio autor (2019)

No caso desse grupo, tem um ponto interessante pôde ser observado na resolução da letra “b”: erraram na adição do sistema, cortando a letra que deveria ser somada, isto é, fizeram a subtração no lugar da adição. Nesse caso, eles reproduziram o procedimento apresentado pelo professor, sem estabelecer uma relação entre a técnica e a sua tecnologia.

**Análise do Item 03**

O Item 3 é semelhante ao anterior. Nele são apresentadas uma função afim e uma outra representação de um ponto cartesiano: $f(x) = y$. Os alunos ainda estavam tentando responder ao item anterior quando o professor perguntou sobre o Item 3:

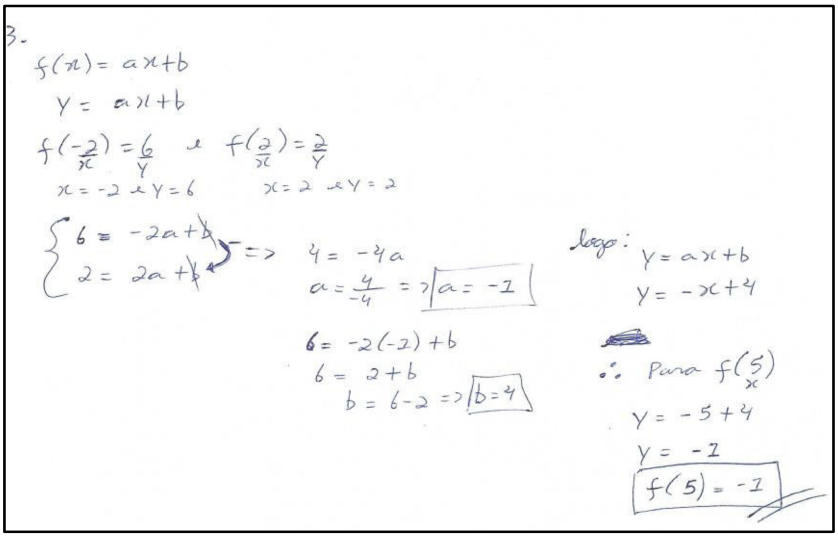
PROFESSOR: E essa questão 3? Quem quer fazer ela pra mim, aqui? Quem vem resolver ela aqui (no quadro)?
ALUNOS: ... (ficaram em silêncio)
PROFESSOR: Vocês conseguem enxergar semelhança com a 2 (item 2)? Sim...?
ALUNO 01: Claro, igualzinha ...
PROFESSOR: Semelhantes... né?

Em seguida, o professor fez a leitura do item e escreveu as informações necessárias, sobre o problema no quadro. A respeito do diálogo anterior, observamos uma dependência forte dos alunos em relação ao professor; eles necessitavam escutá-lo primeiro para, depois, discutir o item. Outro ponto a considerar é o tempo que o professor disponibilizou para os alunos responderem à questão, já passando para o próximo item sem consolidar o atual. Um dos motivos deve estar relacionado à exigência da instituição em que o professor trabalha para que ele cumpra o programa de ensino. Podemos relacionar este fato à necessidade de uma discussão sobre esses aspectos, tomando por base a cronogênese (CHEVALLARD, 2009a, 2009b), dada insuficiência do tempo de interação entre o professor, os alunos e o saber em jogo, que foi neste caso, a função afim.

No andamento da aula, o professor tentou associar a resolução desse item à do item anterior, destacando que as representações eram diferentes, mas os procedimentos eram os mesmos. Apesar da tentativa do professor em buscar uma interação com os alunos, a participação destes foi pequena. Destacamos que, pela insistência do professor em provocar a participação dos alunos, ele perguntou e, logo depois, respondeu à questão, apresentando nesta ocasião o efeito topázio, e, consequentemente, o efeito da utilização abusiva de analogia, ao referenciar várias vezes que este item era semelhante ao anterior.

Dos três grupos, dois conseguiram responder à questão utilizando as mesmas técnicas utilizadas para a resolução do item anterior. A figura seguinte apresenta a resolução de um dos grupos:

Figura 62 - Resolução do Item 3 por um dos Grupos




Fonte: próprio autor (2019)

**Análise do Item 4**

Nesse item, busca-se encontrar a equação da reta que passa por um ponto conhecido e tem o seu coeficiente angular nele apresentado. O professor iniciou a aula perguntando sobre como o item pode ser resolvido. Em seguida, leu o enunciado e fez uma relação com o item 2, por ter utilizado, em sua resolução, a representação geral de uma reta. Consequentemente, escreveu no quadro: $y = ax + b$ e perguntou quais os nomes dos coeficientes "a" e "b".

PROFESSOR: Isso aqui é quem (coeficiente a)? Como é o nome deste coeficiente? Das últimas aluas, quem lembra? O "a" é chamado de quê, Aluno 01?
ALUNO 01: Coeficiente angular.
PROFESSOR: Então vimos isso (coeficiente angular) nas nossas aulas! Chamamos de coeficiente angular. Por que aquilo (coeficiente a) é coeficiente angular?
ALUNOS: ... (silêncio).

A falta de resposta dos alunos sobre a finalidade do coeficiente angular pode estar relacionada à carência da compreensão tecnológica ao utilizarem uma técnica. Depois do silêncio dos alunos, o professor explicou o que é coeficiente angular, resgatando a noção de taxa de variação, assim como do valor fixo que representa o coeficiente "b", destacando que essas noções foram abordadas nas aulas anteriores da disciplina. Em seguida, ressaltou que o coeficiente "a" pode ser chamado de taxa de variação ou de coeficiente angular, como também, o coeficiente "b" pode ser chamado de valor fixo ou de coeficiente linear.

O professor solicitou aos alunos que realizassem uma pesquisa para saber o motivo e a funcionalidade dos coeficientes. Logo depois, tentou relacionar a resolução do item às resoluções dos itens anteriores. Durante a explicação os alunos não interagiram com o professor, fincando em silêncio. A falta de conhecimento tecnológico os limitou, levando-os a reproduzir as técnicas sem compreender a tecnologia que a justifica (CHEVALLARD, 2002).

Observamos que, durante os minutos que o professor disponibilizou para os alunos responderem o item, a interação entre os membros dos grupos aconteceu e retiraram dúvidas entre si e com o professor. Todos responderam o item utilizando as mesmas técnicas dos itens anteriores.

**Análise do Item 05**

Este item é semelhante ao anterior; a diferença é que o valor do coeficiente linear é conhecido. O professor fez a leitura do item e o relacionou ao anterior, destacando a diferença e o conhecimento do coeficiente linear. Ressaltou que as técnicas para o resolver são as mesmas do item anterior e solicitou para os alunos resolverem à questão, mas, logo em seguida, passou a comentar o item 06.

O professor não fez uma discussão mais elaborada desse item, destacando que a funcionalidade do coeficiente linear difere da do coeficiente angular, isto é, não fez a discussão tecnológica que fundamenta a técnica; apenas destacou que se tratava da mesma do item anterior. Essa atitude do professor reforçou a utilização da técnica pela técnica, ponto que o PEP enfrenta em seu desenvolvimento (CHEVALLARD, 2004, 2006, 2009a).

**Análise do Item 06**

Este item solicita a representação algébrica de uma função afim a partir de uma representação gráfica.

O professor iniciou os trabalhos lendo o enunciado e ressaltou que a questão já foi respondida de uma forma diferente; neste caso, o professor estava se referindo aos itens anteriores. Especificamente, ele relacionou este item ao item 2, destacando que um item é o contrário do outro. Em seguida, ele perguntou aos alunos como se poderia obter as informações para responder ao item em estudo:

PROFESSOR: Vocês vão olhar para a reta e tentar retirar dois pontos. Vocês conseguem dizer por onde ela passa?
ALUNA 07: Seis e menos três...
Professor: Vamos lá...
ALUNA 07: Seis...
PROFESSOR: Seis no x, e ...
ALUNA 07: Menos três no y...
PROFESSOR: Não... vejam só o que vocês estão me dizendo: que está passando no ponto seis no x e menos três no y; o menos três estaria aqui em baixo (o professor demonstra no quadro).

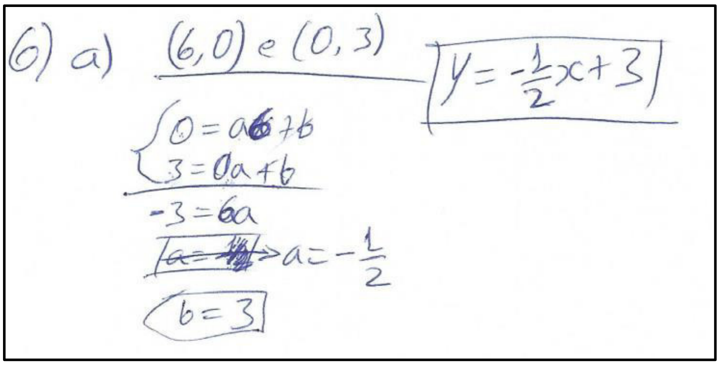
Mais uma vez, a falta de compreensão tecnológica dos alunos comprometeu a resolução do item, fazendo com que tirassem conclusões erradas. Diante dessa situação, o professor renegociou o contrato, tentando abordar de outra forma a sua explicação. O diálogo a seguir transcrito descreve essa renegociação:

PROFESSOR: Me diga uma coisa: se x for 2? Se você for em direção a reta vai bater aonde?
ALUNOS: ... (silêncio).
PROFESSOR: Se o x for 2, se você escolher x igual a 2 e descer para a reta, onde é que vai tocar? Então ela passa por qual ponto?
ALUNOS: Menos dois...
PROFESSOR: Pronto... Só esse é suficiente?
ALUNOS: Não.
PROFESSOR: Então precisa de outro ponto, né?
ALUNOS: Quatro e menos três...
PROFESSOR: Quatro e menos três não...veja direitinho. Se você pegar o quatro e for em direção à reta, você vai tocar no menos um. Né isso?
ALUNOS: É...
PROFESSOR: Muito bem.

Além da renegociação por parte do professor, também identificamos o efeito topázio, no sentido de ele antecipar a resposta para evitar o fracasso dos alunos. Em seguida, os alunos iniciaram a resolução da letra “a”, tomando por base as técnicas utilizadas nos itens anteriores.

O professor não respondeu no quadro a esse item como vinha fazendo; apenas escreveu dois pontos cartesianos. Dos três grupos, dois fizeram e um desses dois respondeu errado, trocando os sinais da função, como apresenta a figura 63:

Figura 63 - Resolução da Letra “a” do Item 6 por um dos Grupos




Fonte: próprio autor (2019)

Outro ponto que destacamos é a falta de exploração de outras técnicas por parte do professor e dos alunos, utilizando a mesma técnica para a resolução de todos os itens. Uma outra técnica que poderia ter sido explorada é a observação da intersecção da reta no eixo das ordenadas, determinando o valor “b”, tornando mais econômico o processo de resolução.

Depois de alguns minutos, o professor encerrou a aula comentando sobre a próxima seguinte. Depois recolheu as resoluções dos alunos, solicitando que respondessem em casa aos itens que faltaram ser respondidos.

### 5.1.4. Análise Conjunta dos dois Primeiros Encontros Presenciais do Primeiro Estudo Empírico

O motivo de fazermos uma análise dos dois primeiros encontros presenciais é pelo fato de eles anteciparem a apresentação da questão geratriz, trazendo elementos importantes para a nossa análise. Ressaltamos que essa é uma parte da análise como um todo, e não uma análise em separado, e que entendemos ser importante destacarmos alguns pontos.

Iniciaremos levantando alguns pontos de nossa análise interna, apresentando alguns contratos didáticos estabelecidos, os efeitos e as técnicas na aplicação das duas fichas. Um contrato didático evidente é a espera dos alunos pela atitude do professor em iniciar as discussões do conteúdo em jogo; esse contrato foi observado em todo o momento das aulas. Outro contrato relacionado ao anterior é a presença do silêncio dos alunos, no qual o professor apresenta logo a resposta do item, estabelecendo, consequentemente, outro contrato didático, que é a reprodução das técnicas pelos alunos, sem questioná-las. Decorrem, desses contratos, o efeito topázio, que apareceu em vários momentos, juntamente com o efeito de abuso de analogia.

As técnicas apresentadas foram poucas diante de outras possibilidades de resoluções. O professor fixou-se nas técnicas mais usuais, limitando uma técnica para cada item, e consequentemente, os alunos reproduziram as técnicas utilizadas pelo professor. Em algumas dessas reproduções, principalmente nos momentos de desenvolvimento de uma OMP para uma OML, a tecnologia que justifica as técnicas não foi compreendida pelos alunos nem discutida pelo professor, caracterizando uma carência tecnológica por parte dos alunos. Outro ponto que PEP enfrenta é a falta da compreensão tecnológica das técnicas utilizadas pelos alunos (RODRIGUEZ; BOSCH; GASCÓN, 2007).

Diante do desenvolvimento das aulas, percebemos uma dependência dos alunos em relação ao professor, embora o desenvolvimento do PEP tenha como finalidade diminuir essa dependência, proporcionando a autonomia do aluno frente à resolução dos problemas, para que o conceito matemático é necessário (LUCAS, 2015).

No caso da análise externa, o Modelo Epistemológico de Referência não foi observado por não estar relacionado ao objetivo das duas fichas. Para o desenvolvimento previsto do PEP, esperávamos cumprir a seguinte proposta:

Quadro 21 – Proposta de Aplicação das Fichas

| Seções Presenciais | Questões derivadas | Seções não presenciais (SNP) |
|---|---|---|
| SP1 | Ficha diagnóstico: o que significa função? | Término das resoluções dos itens da Ficha Diagnóstica |
| SP2 | Ficha de Trabalho 1: entendimento do que é função afim, suas aplicações e a sua razão de ser, construção de modelos e técnicas de construção algébrica e gráfica, e sua interpretação | Término das resoluções dos itens da Ficha de Trabalho 1 |
| SP3 | Institucionalização das respostas, discussão e comparação das diferentes técnicas utilizadas pelos grupos nas fichas anteriores | |

Fonte: próprio autor (2019)

Ao compararmos a proposta com o período de aplicação das duas fichas, observamos que estavam previstas três seções presenciais, mas tivemos apenas duas. O motivo disso foi uma adaptação sugerida pelo professor, para adequar nossa atividade ao tempo disponível da disciplina.

Outro fato foi o acontecimento das seções não presenciais, cuja efetividade não tivemos como verificar, pelo fato de os alunos não darem retorno dos itens não respondidos nessas ocasiões, o que nos levou a entender que as seções não presenciais não tiveram o efeito esperado, devendo ser analisadas com mais atenção.

Diante desses elementos apresentados e a partir do desenvolvimento da resposta da questão geratriz e das questões suas derivadas, podemos verificar os tipos de contratos, os efeitos e as técnicas estabelecidas.

### 5.1.5. Terceiro Encontro Presencial do Primeiro Estudo Empírico

Essa aula o professor iniciou com a apresentação da questão geratriz, disponibilizando o material e apresentando o problema. Foi realizada no dia 21 de agosto de 2017, iniciou-se às 19h20min, com 20 minutos de atraso, e teve a duração de 60 minutos. Participaram dela 5 (cinco) alunos, de um total de 6 (seis), e que foram separados em três grupos, sendo que um grupo ficou com um aluno, na perspectiva da chegada do sexto.

O professor iniciou a aula relembrando todos os conteúdos estudados nas aulas anteriores, como o conceito de função na forma geral, de gráfico de uma função, de função afim, de equação na reta. Em seguida, perguntou se os alunos resolveram os outros itens que não foram resolvidos em sala, ao que os alunos responderam não ter feito, mas o professor solicitou que eles lhe entregassem em outro momento os itens não resolvidos na aula presencial. É importante destacar que a devolução dos itens não aconteceu em nenhum momento durante a aplicação do PEP.

Depois da fala inicial, o professor separou os grupos e entregou-lhes o material com a contextualização do problema e, em seguida, a questão geratriz:

**Contextualização do Problema**

Aposentadoria é um tema que surge de tempos em tempos, e que faz parte das discussões dos brasileiros, pois afeta diretamente a vida das pessoas economicamente ativas e de suas famílias. O Congresso Federal brasileiro aprovou a Lei 13.183/2015, a qual trata da mudança de algumas regras para a aposentadoria, com um ponto em destaque: a fórmula 85/95. No caso, a mulher terá que alcançar uma soma de 85 anos, somando seu tempo de contribuição e a sua idade. No caso do homem, serão 95 anos, seguindo o mesmo princípio. As idades 85 e 95 anos levam em conta a expectativa de vida dos brasileiros até 2018. Para os anos seguintes teremos:

2019 a 2020: 86 (mulheres) / 96 (homens);
2021 a 2022: 87 (mulheres) / 97 (homens);
2023 a 2024: 88 (mulheres) / 98 (homens);
2025 a 2026: 89 (mulheres) / 99 (homens);
2027: 90 (mulheres) / 100 (homens).

**Fonte**: Agência Senado (CASTRO, A; VILAR, I, 2015)

$Q_0$: Como representar a situação atual e futura dos casos de aposentadorias das mulheres e dos homens, tomando por base a Lei 13.183/2015, que trata das mudanças em algumas regras para as aposentadorias?

Logo em seguida, o professor perguntou aos seus alunos quem desejava fazer a leitura. A Aluna 03 leu o material. Em seguida, o professor esclareceu que o problema fazia parte da continuidade do estudo de funções e comentou o tema aposentadoria, ressaltando que ele interessa a todos. Seguidamente, perguntou que relação existe entre a idade e o tempo de serviço, apresentando, para isso, a fórmula 85/95:

PROFESSOR: Pronto, então veja... dando continuação ao nosso assunto "funções", eu estou propondo agora um probleminha pra vocês... ok?! Então, todo mundo leu aí junto, e nós temos um problema que fala da Reforma da Previdência, né? Que foi aprovada em 2015, ... que refaz os cálculos de aposentadoria... ok?! Então, ele tem, incialmente, 85 pra mulheres e 95 pra homens. O que é que significa isso? Esse 85 é o quê?
ALUNO 01: A soma da idade com a idade que trabalhou...
PROFESSOR: Como?
ALUNO 01: A soma da idade da pessoa, com a soma da idade que trabalhou...
PROFESSOR: Todo mundo concorda? A idade da pessoa...
ALUNO 03: Mais a idade trabalhada...
PROFESSOR: Isso... o tempo de contribuição, né? ...que você contribuiu... e o que significa, ele vai aumentando gradativamente né?! Ele faz uma diferença aí ... entre homens e mulheres, tranquilo isso aí? É justo isso?
ALUNO 03: Não ...
PROFESSOR: Não que a mulher trabalhe menos ... para se aposentar e o homem mais um pouco... de tempo de contribuição, as somas.... Tranquilo isso? Qual a opinião de vocês em relação a isso?
ALUNO 03: ... até porque a mulher .... ela se desgasta naturalmente ... toma conta de menino, é quem trabalha e faz tudo...
PROFESSOR: Tem outras atribuições em casa, muitas vezes.
ALUNO 03: MUITAS...

Nesse trecho do diálogo, levantamos três pontos: o primeiro é a participação efetiva do professor na interpretação do problema, destacando continuamente os dados da questão geratriz, não aguardando a interpretação por parte dos alunos. Podemos, portanto, destacar o efeito topázio. O segundo é a troca que os alunos fazem do tempo de contribuição por idade de trabalho, caracterizando uma ausência conceitual ou falta de compreensão tecnológica. Por último, temos a discussão social que o PEP pode proporcionar, em sala, sobre a diferença do tempo de contribuição entre homens e mulheres.

Em seguida, o professor passou a ler a Questão Geratriz e perguntou sobre o que eles entenderam e como eles poderiam resolver à questão:

PROFESSOR: Então vamos lá, pensem um pouquinho aí... como é que vocês vão fazer isso aí pra mim? Como vão responder essa minha pergunta aí?
ALUNO 01: Ele para em 2027, né?
Professor: Não... a partir de 2027, a soma será 90 para as mulheres e 100 para homens.... e vai seguir até ...
ALUNO 03: a princípio seria 30 anos de contribuição ... tomando como base... 55 anos de idade e 30 anos de contribuição... e somando os dois daria 85.
PROFESSOR: Sim... tudo certo... aram, até 2018 tá assim 95, 85. Mas como vou representar isso aí... como vou representar essa questão?
ALUNOS: .... (silêncio)
ALUNO 03: soma?!
PROFESSOR: Em forma de...? O que a gente vem estudando aqui? Em Aluno 04?
ALUNO 04: ... (silêncio).
PROFESSOR: Como posso representar... como posso passar isso para a linguagem matemática? Como você pode representar esse problema, através de que? De uma ...?
ALUNO 04: Função.
PROFESSOR: É de uma função... muito bem .... mas como é que eu chego a essa função?

O diálogo anterior é uma consequência da ruptura do contrato didático (BROUSSEAU, 1986), por parte dos alunos, no sentido de que o problema não está de acordo com os problemas apresentados nas aulas anteriores. Nesse caso, não foram indicados os conteúdos específicos a serem estudados, o que requeria uma reflexão maior por parte do aluno e um encaminhamento dinâmico da aula pelo professor. Destacamos que, por ser um problema fora dos padrões conhecidos pelos alunos, estes, inicialmente, ficaram em silêncio e só responderam à questão com a ajuda do professor.

Logo em seguida, o professor insistiu e perguntou novamente como poderia ser representado o problema:

PROFESSOR: Como eu consigo construir essa função que vocês citaram aí?
ALUNOS: ... (silêncio)
ALUNO 01: A gente tem que ter intervalo, de 2018 a 2019, até 2018 .... (nesse momento, foi interrompido pelo professor)
PROFESSOR: Vamos começar por 2018, certo? Da atual, aprovada em 2015, que vai até 2018. Que é o quê ... 85 ... 95?
ALUNO 01: ... (tentou falar, mas o professor tomou a frente do diálogo)
PROFESSOR: Como posso representar essa situação? Através de quê? Como posso chegar? Aluno 04 disse que podemos representar por uma função. Como posso construir essa função? Como posso construir antes para chegar a essa função?

ALUNOS: ... (silêncio).

No diálogo anterior, observamos um protagonismo forte do professor na elaboração das perguntas, mas esse papel deveria ser partilhado com os alunos (RODRIGUEZ; BOSCH; GASCÓN, 2007). Em alguns momentos, o Aluno 01 tentou formular as perguntas, mas foi interrompido pelo professor, que o inibiu, e os outros ficaram em silêncio. Essa postura do professor caracteriza uma proximidade maior com o saber, em relação aos alunos, fazendo com que não compartilhe responsabilidades aos alunos e assumindo a maior parte da responsabilidade. Destacamos que esse tipo de contrato didático está presente em muitas aulas de Matemática, dificultando a compreensão do sabe dos alunos. Ressaltamos que esse é um dos desafios que o PEP enfrenta no seu desenvolvimento em sala de aula: a mudança desse tipo de contrato por parte do professor.

Depois de um momento de silêncio, o professor tentou incentivar os alunos a discutirem sobre o problema, levantando algumas possibilidades de representações:

PROFESSOR: E aí?
ALUNOS: ... (silêncio).
ALUNO 01: Eu vou chamar de “i” a idade da pessoa e “t” tempo de contribuição. Aí vou colocar que i + 2t ... (interrompido pelo professor)
PROFESSOR: Calma, calma ...
ALUNO 01: ... (tenta falar)
PROFESSOR: É ...vamos ... o que você precisaria, você construir em uma tabela, uma tabela com valores ajudaria?

Apesar de o professor ter incentivado os alunos a participarem da aula, ele mesmo inibiu a participação dos alunos. Entendemos que tal procedimento do professor tem ligação com o efeito topázio, pois o professor interveio em vários momentos da aula, conduzindo para a resposta. Esse é outro ponto a ser superado durante o desenvolvimento do PEP.

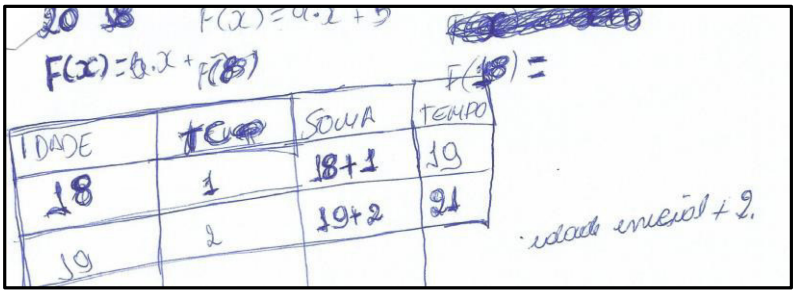
Em seguida, o professor falou da possibilidade de utilizar uma tabela para auxiliar a resposta inicial da questão geratriz, e recordou as aulas anteriores, nas quais utilizaram as tabelas para a construção dos gráficos. Especificamente, o professor relembrou a resolução do item 03 da ficha diagnóstica, que trata da determinação de uma expressão algébrica a partir da construção de triângulos utilizando palitos. Consequentemente, incentivou os alunos a iniciar a resolução do problema, com a seguinte pergunta:

PROFESSOR: Com que idade ele pode iniciar a trabalhar? Com que idade podemos analisar as contribuições?
ALUNO 03: 55...
PROFESSOR: 55 anos vai começar a trabalhar?
ALUNO 01: 45...
PROFESSOR: 55 não fica muito tarde pra começar a trabalhar? Não fica muito tarde, não?
ALUNO 01: Mas aí ele começa a trabalhar com 15...
PROFESSOR: Mas com 15 não pode assinar a Carteira.
ALUNO 03: É 18 ...
PROFESSOR: Que tal com a sua idade? Que tal com a idade de vocês? Hoje?
ALUNO 01: 19...
PROFESSOR: Ficaria ruim fazer cada uma? Quer tentar fazer? Aluna 06 deu outra ideia aí... usar uma idade padrão aí pra todo mundo ... a partir de que idade começamos a assinar a Carteira de Trabalho?
ALUNO 03: 18...
PROFESSOR: ... (fez um gesto concordando) ... Então, vamos começar a nossa análise... com 18 anos...

Até o momento do diálogo anterior, tinham-se passado 15 minutos da aula. Observamos que o PEP proporciona discussões e diálogos entre o professor e os alunos, além do conteúdo matemático, trazendo outros conteúdos de interesses dos alunos, caracterizando, também, um dispositivo codisciplinar. Outro fato é que o professor dá início a uma discussão sobre a questão derivada $Q_1$ e sua derivada $Q_{1,1}$, sem formalizá-las.

Depois de alguns minutos de discussão entre os alunos, foram realizadas as seguintes anotações:

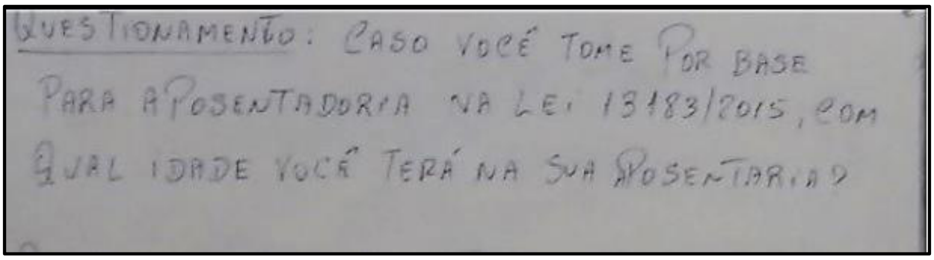
Figura 64 - Anotações do Grupo 1




Fonte: próprio autor (2019)

Observamos que os alunos utilizaram a técnica de somar a idade inicial de contribuição ao valor do tempo de contribuição, com a finalidade de observarem a evolução dos valores. Em seguida, o professor escreveu no quadro a seguinte questão, formulando a $Q_1$ de acordo com a figura 65.

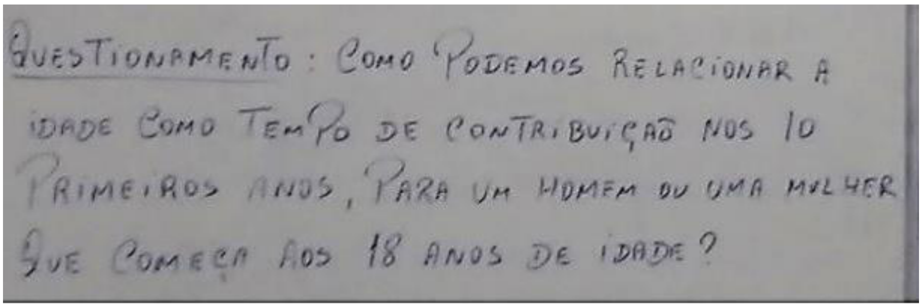
Figura 65 - Formalização da $Q_1$




Fonte: próprio autor (2019)

O professor iniciou a construção da tabela sempre buscando incentivar a participação dos alunos, com perguntas sobre os valores a serem colocados. Mas, apesar da tentativa do professor, os alunos ficaram em silêncio sobre as perguntas. Diante da falta de participação e de compreensão dos alunos em relacionar os valores da tabela, o professor renegociou o contrato estabelecido inicialmente, e escreveu os valores das duas primeiras linhas para que os alunos encontrassem as próximas, como também escreveu no quadro a questão derivada $Q_{1,1}$.

Figura 66- Formalização da $Q_{1,1}$




Fonte: próprio autor (2019)

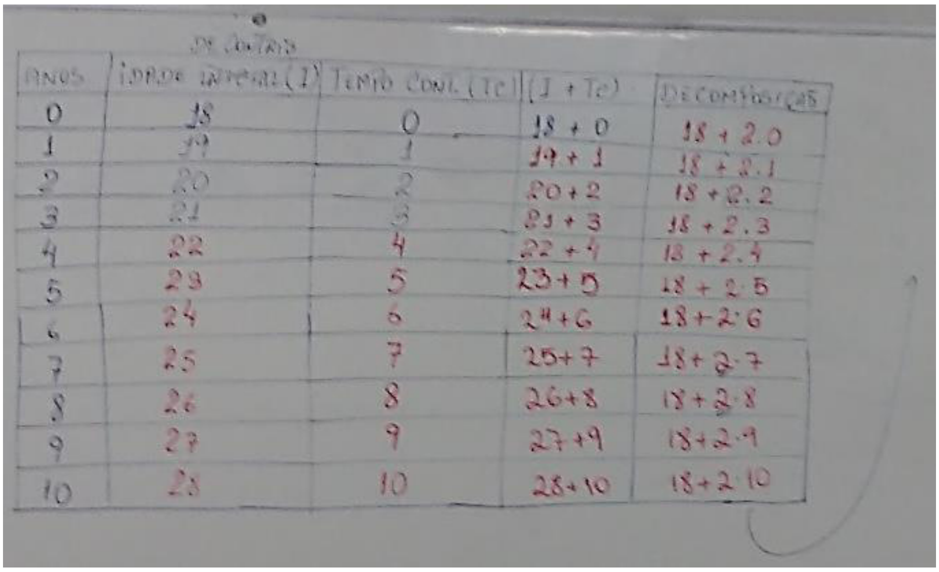
Observamos que o professor fez uma alteração na $Q_{1,1}$ em relação à proposta dos percursos matemáticos apresentados no capítulo anterior: mudou o valor inicial de contribuição de 20 para 18 anos, valor alterado a partir das discussões com os alunos. Ressaltamos que essa alteração se manteve no desenvolvimento dos percursos matemáticos propostos.

Durante o desenvolvimento da tabela, pelos alunos, notamos que as interações percebidas no início da aula não aconteceram nesse momento, devido à existência da dificuldade por parte dos alunos, em eleger as técnicas a serem utilizadas. Daí porque relacionam as técnicas conhecidas na resolução do problema e pouco interagem. Mas, pela insistência do professor, um dos alunos argumentou o seguinte sobre os valores da tabela:

PROFESSOR: Aqui o vai ter ... vai ter um ter um 20... não é?
ALUNO 03: Mais 2 ...
PROFESSOR: Mais 2, não é ...
ALUNO 03: É .... mais 2 que o da contribuição...
PROFESSOR: Que foi o tempo de contribuição ... né?!
ALUNO 03: Exatamente...

Logo depois, o professor preencheu parte da tabela com a técnica de separar: anos; idade inicial de contribuição; tempo de contribuição; idade mais tempo de contribuição; decomposição da soma. Os valores restantes da tabela foram completados pelo Aluno 06. A figura seguinte apresenta a tabela preenchida por ele e pelo professor:

Figura 67 - Tabela Preenchida pelo Professor e pelo Aluno 06



| ANOS | IDADE INICIAL (I) DE CONTRIB. | TEMPO CONT. (Tc) | (I + Tc) | DECOMPOSIÇÕES |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 18 | 0 | 18 + 0 | 18 + 2.0 |
| 1 | 19 | 1 | 19 + 1 | 18 + 2.1 |
| 2 | 20 | 2 | 20 + 2 | 18 + 2.2 |
| 3 | 21 | 3 | 21 + 3 | 18 + 2.3 |
| 4 | 22 | 4 | 22 + 4 | 18 + 2.4 |
| 5 | 23 | 5 | 23 + 5 | 18 + 2.5 |
| 6 | 24 | 6 | 24 + 6 | 18 + 2.6 |
| 7 | 25 | 7 | 25 + 7 | 18 + 2.7 |
| 8 | 26 | 8 | 26 + 8 | 18 + 2.8 |
| 9 | 27 | 9 | 27 + 9 | 18 + 2.9 |
| 10 | 28 | 10 | 28 + 10 | 18 + 2.10 |

Fonte: próprio autor (2019)

O motivo de o professor utilizar a coluna que apresenta a decomposição da soma foi para relacioná-la com a expressão algébrica procurada. Em seguida, o professor perguntou por que o 2 se repete em cada linha na coluna da decomposição. Como os alunos não responderam, o professor explicou que, a cada ano, a idade aumenta um ano e um ano de contribuição. Depois ele perguntou sobre a relação:

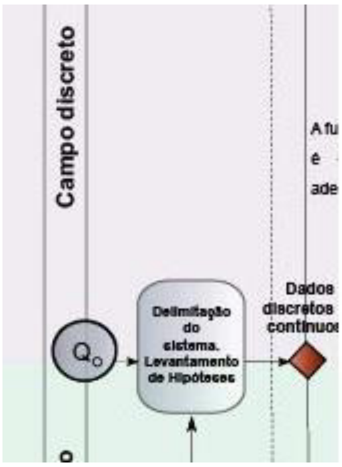
PROFESSOR: Como ficaria aqui Aluno 06, uma relação aqui? (o professor aponta para a última linha da tabela) Para essa pessoa que começou aos 18 anos?
ALUNO 06: ... (silêncio).
PROFESSOR: Como escreve uma relação ... para generalizar ... o tempo de contribuição dela?

ALUNOS: ... (silêncio).
PROFESSOR: Eu fiz aqui os primeiros dez anos dela, mas teria como colocar aqui ...
ALUNO 04: .... (fala muito baixo)
PROFESSOR: ... (faz um gesto positivo balançando a cabeça). Mas como você começou, diga aí como ficaria? (Pergunta ao Aluno 04).
ALUNO 04: ... (silêncio).
PROFESSOR: Você começou com a idade de 18 anos?!
ALUNOS: ... (silêncio).
PROFESSOR: Diz Aluno 05 ... generaliza aí, uma relação para essa pessoa que começou a 18 anos? Como ficaria a fórmula aí?
ALUNO 05: $c = i + 2a$.
PROFESSOR: Que também pode ser escrito: $i + 2TC$. Parece com uma função afim? Parece Aluno 03 e Aluno 05 uma função afim?
ALUNO 05: É ...
PROFESSOR: Quem seria esse aqui ($2TC$)?
ALUNOS: ... (silêncio).
PROFESSOR: seria a... seria a ...
ALUNO 05: seria o “a” e o “b”.
PROFESSOR: Mas como se chama... o nome? Seria a ...
ALUNO 05: Coeficiente angular.
PROFESSOR: Qual o outro nome?
ALUNO 05: Taxa de variação.
PROFESSOR: E o 18?
ALUNO 05: O 18 seria ...
PROFESSOR: Valor fixo.

Conforme o diálogo anterior, o professor tentou relacionar a idade ao tempo de contribuição, com o objetivo de construir uma expressão que representasse essa função. Também recordou os termos da função, a sua nomenclatura, mas sem uma discussão tecnológica. Depois desse diálogo, o professor encerrou a aula e solicitou os registros dos alunos, afirmando que a continuação do problema ocorreria na aula seguinte.

Ao observarmos o nosso MER e relacioná-lo ao desenvolvimento da aula, temos, primeiramente, a realização do primeiro estágio da modelação funcional. Esse estágio inicial é o contato com a questão geratriz e o levantamento de hipóteses, gerando questões derivadas a partir dessa questão.

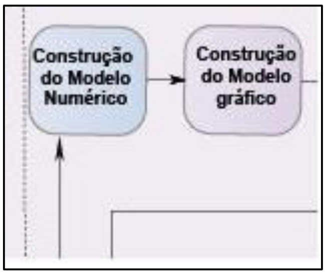
Figura 68 - 1° Estágio da MF




Fonte: próprio autor (2019)

Na aula, o professor apresentou a questão geratriz e, a partir dela, levantou algumas hipóteses geradas nas discussões. A escolha da utilização dos dados discretos caracterizou-se pela utilização inicial de valores discretos da idade e do tempo de contribuição, apesar de serem eles contínuos. Um dos problemas iniciais percebidos no desenvolvimento do dispositivo foi a presença efetiva do professor na elaboração das questões, não deixando muito espaço para os alunos proporem seus próprios questionamentos. Outro ponto a considerar é a elaboração do modelo numérico pelos alunos, no início do segundo estágio de modelação funcional.

Figura 69 - Construção do Modelo




Fonte: próprio autor (2019)

A técnica utilizada pelos alunos para determinar o modelo numérico, foi a mesma técnica do professor. Observamos que, dos cinco alunos que participaram, dois conseguiram construir esse modelo antes da institucionalização do professor, representando uma dificuldade nesse processo.

Em relação à proposta de aplicação do PEP, ela foi contemplada em parte, segundo podemos observar no quadro abaixo:

Quadro 22 – Proposta de Aplicação do PEP na SP4

| | | |
|---|---|---|
| SP4 | Problema: Cálculo da Aposentadoria<br>$Q_0$: Como representar a situação atual e futura dos casos de aposentadorias das mulheres e dos homens, tomando por base a Lei 13.183/2015, que trata da mudança de algumas regras para as aposentadorias?<br>$Q_1$: Caso você tome por base para aposentar-se a Lei 95/85, com qual idade você terá a sua aposentadoria?<br>$Q_{1,1}$: Como podemos relacionar a idade ao tempo de contribuição nos 10 primeiros anos, para um homem ou uma mulher que começa a contribuir aos 20 anos de idade?<br>$Q_{1,2}$: De acordo com a Lei 95/85, quanto tempo de contribuição será necessário para uma pessoa se aposentar caso inicie a contribuir aos 20 anos de idade? E qual idade terá ao se aposentar? | Pesquisa dos tipos diferentes de aposentadoria e elaboração das questões derivadas. |

Fonte: próprio autor (2019)

Em relação à seção presencial 4 (SP4), estava previsto para ser apresentada até a $Q_{1,2}$, mas, pelo fato de o tempo não ser suficiente, essa questão derivada não foi abordada, ficando para a aula subsequente. Outro ponto é que não foi possível verificar a realização da seção não-presencial (SNP).

### 5.1.6. Análise do Quarto Encontro Presencial do Primeiro Estudo Empírico

O quarto encontro foi realizado no dia 22 de agosto de 2017. O ambiente escolhido para dar continuidade ao PEP foi o laboratório de matemática, pelo fato de existirem computadores com o programa GeoGebra nele instalado, um *software* para auxiliar na construção de gráficos. A aula iniciou-se às 20h50min, com a participação de quatro alunos, os quais formaram dois grupos. A aula durou em torno de 60 minutos.

O professor iniciou a aula a partir da questão geratriz, destacando o contexto do problema. Em seguida perguntou à turma:

PROFESSOR: Qual relação a que chegamos ontem?

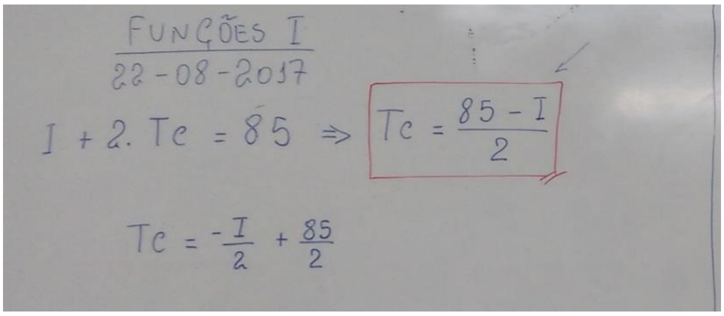
Com essa pergunta, o professor tentou relembrar juntamente com os seus alunos, a construção da expressão desenvolvida no encontro anterior, como podemos perceber no trecho do seguinte diálogo:

PROFESSOR: Quem se lembra da relação que começamos ontem?
ALUNO 01: $2x$ ...
PROFESSOR: A pessoa começando a contribuir aos 18 anos, começando a trabalhar com 18 anos ... Como ficou a relação?
ALUNO 05: $2i + a$ ...
ALUNO 01: Hum!? Duas vezes o tempo de contribuição, mais a idade dele.
PROFESSOR: Foi!? Aqui tá errado, né? Tinha esquecido já isso aqui? Ok?

Observarmos que o protagonismo do professor ainda é evidente, mas percebemos, também, que os alunos já começam a tomar para si a responsabilidade do saber em jogo (BROUSSEAU, 1986), caracterizando uma mudança de contrato didático em relação ao primeiro encontro, como também o aumento de sua autonomia (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001).

Os alunos tinham formulado, conjuntamente com o professor, a expressão que representa a soma do tempo de contribuição mais a idade, obtendo o valor 85. Podemos observar a expressão escrita pelo professor na figura seguinte:

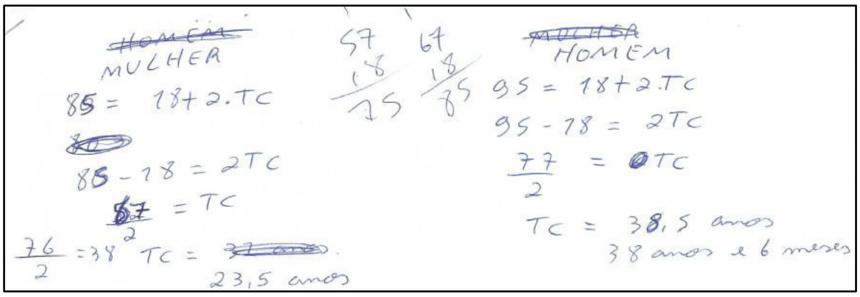
Figura 70 - Expressão Escrita pelo Professor no Quadro




Fonte: próprio autor (2019)

No desenvolvimento da questão, o professor solicita que os alunos determinem o valor do tempo de contribuição e a idade de uma mulher ou de um homem que irá se aposentar caso comece a contribuir aos 18 anos de idade.

Figura 71 - Cálculos Realizados pelos Alunos 04 e 05

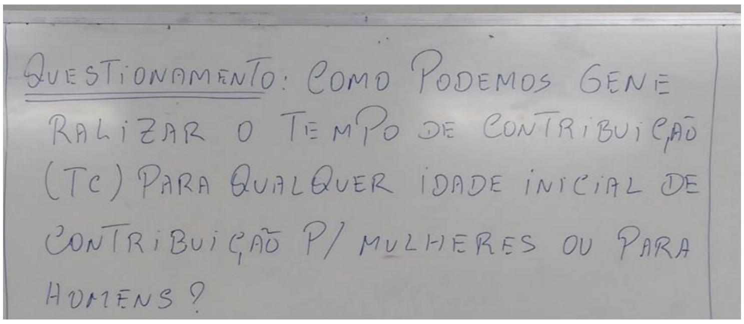



Fonte: próprio autor (2019)

É importante destacar que, na realização dos cálculos desenvolvidos pelos alunos, não houve participação efetiva do professor, caracterizando uma autonomia no desenvolvimento e uma aceitação do problema, nesse caso, relacionamos com a devolução (BROUSSEAU, 1986), no qual os alunos tomaram a responsabilidade para si a resolução do problema. Esse é um ponto a ser observado na aplicação de um PEP, porque, caso não exista a devolução ao professor, pelo aluno, do problema lançado, o desenvolvimento do dispositivo poderá não ser desenvolvido corretamente.

Em seguida, outro questionamento é apresentado aos alunos pelo professor. É perguntado como generalizar o tempo de contribuição para homens ou para mulheres para qualquer idade inicial; no caso, uma idade maior que 18 anos. A figura seguinte apresenta a questão colocada pelo professor:

Figura 72 - Questão Colocada pelo Professor no Quadro

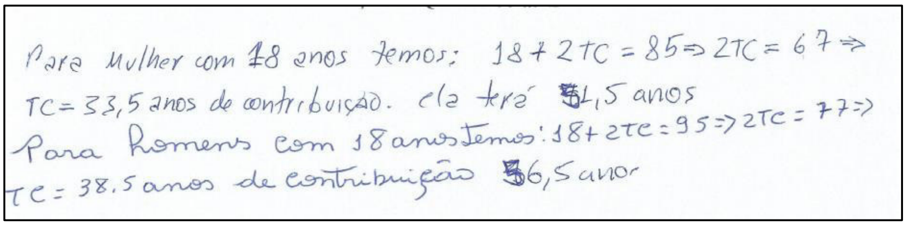



Fonte: próprio autor (2019)

A questão apresentada pelo professor representa a questão derivada $Q_{1,3}$, cuja finalidade é levar os alunos a fazerem generalizações a partir de casos particulares. Ressaltamos que a questão foi apresentada pelo professor, e não pelos alunos, caracterizando a condução predominante dos trabalhos pelo professor, o qual não deu espaço para que os alunos pudessem tentar formular a questão derivada. Nesse sentido, observamos a presença do efeito de topázio (BROUSSEAU, 2008).

No desenvolvimento da questão derivada $Q_{1,3}$, os alunos utilizaram inicialmente as técnicas anteriores para a resolução:

Figura 73 - Resposta Inicial dos Alunos 01 e 03



Para mulher com 18 anos temos: $18+2TC = 85 \Rightarrow 2TC = 67 \Rightarrow$
$TC = 33,5$ anos de contribuição. ela trá 51,5 anos
Para homens com 18 anos temos: $18+2TC = 95 \Rightarrow 2TC = 77 \Rightarrow$
$TC = 38.5$ anos de contribuição 56,5 anos

Fonte: próprio autor (2019)

Na formulação da expressão $I + 2TC = 85$, os alunos utilizaram a técnica de substituir um valor numérico em uma expressão algébrica, e, em seguida, a técnica da resolução de uma equação do 1° grau. Com o uso dessas técnicas, os alunos encontraram o valor do tempo de contribuição e o valor da idade que a mulher teria ao se aposentar. Com isso, as questões derivadas $Q_{1,1}$ e $Q_{1,2}$ foram desenvolvidas.

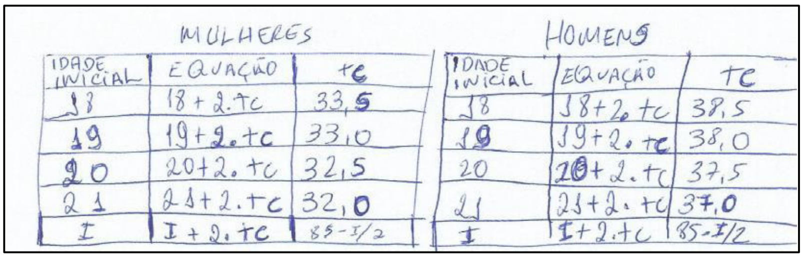
Depois o professor chamou atenção do Aluno 01 para que ele detalhasse a sua resolução, ressaltando que estava cursando Licenciatura em Matemática.

PROFESSOR: Aluno 01, eu queria que você detalhasse os seus passos. Porque uma coisa é você saber... Estamos em curso de licenciatura.
ALUNO 03: Não porque é assim ...
ALUNO 01: É desse jeito assim?! (mostra ao professor a folha com os cálculos)
PROFESSOR: Eu quero analisar a sua construção, eu não tenho como lhe ajudar se você não colocar a forma que você faz. Você quer ser um bom professor ou não?
ALUNO 01: Certeza.
PROFESSOR: Então, como você quer se tornar um bom professor desse jeito? Mas, falando sério, a gente brinca, mas essa sua organização e você (Aluno 03) conversa com ele, e ele é muito bom em matemática. Mas você viu o que aquele professor falou, é o professor baú, ele só quer para ele.
ALUNO 01: (ficou em silêncio)
PROFESSOR: Então, destrinche a fórmula que você fez para ele (Aluno 03).

Podemos entender, a partir do diálogo anterior, que o professor tentou interferir na forma como Aluno 01 registra o saber em jogo, caracterizando uma possível mudança de contrato didático, por parte do aluno. Outra questão é a preocupação do professor com a formação de seus alunos, na medida em que detalha as suas resoluções, para que sejam transpostas aos seus alunos de maneira semelhante.

Em seguida, para responder à $Q_{1,3}$, os alunos continuaram a utilizar essas técnicas até chegarem aos valores procurados com base em valores das idades iniciais diferentes, construindo tabelas para representar os seus resultados:

Figura 74 - Tabelas Construídas pelos Alunos 04 e 05



| MULHERES | | | HOMENS | | |
|---|---|---|---|---|---|
| IDADE INICIAL | EQUAÇÃO | tc | IDADE INICIAL | EQUAÇÃO | tc |
| 18 | 18+2.tc | 33,5 | 18 | 18+2.tc | 38,5 |
| 19 | 19+2.tc | 33,0 | 19 | 19+2.tc | 38,0 |
| 20 | 20+2.tc | 32,5 | 20 | 20+2.tc | 37,5 |
| 21 | 21+2.tc | 32,0 | 21 | 21+2.tc | 37,0 |
| I | I+2.tc | 85-I/2 | I | I+2.tc | 85-I/2 |

Fonte: próprio autor (2019)

A indicação da elaboração das tabelas construídas pelos alunos teve a influência direta do professor, que sugeriu que os resultados deveriam ser organizados em tabelas. Ressaltamos que, durante a construção dessas tabelas pelos alunos, a interação entre os membros dos grupos diferentes aconteceu em vários momentos, ressaltando o processo de formulação e validação (BROUSSEAU, 1986), por parte dos alunos das expressões.

Destacamos que durante a interação do professor com os alunos, o professor levantou em vários momentos a preocupação da transposição do saber em jogo, no qual podemos perceber no seguinte diálogo:

PROFESSOR: Você fez pra homem e pra Mulher?
ALUNO 05: Eu só fiz assim. Eu chamei idade de “i”, substituí tudo e passei o “TC” ... isolei ele...
PROFESSOR: Muito bem ... muito bem! Mas se você fosse ensinar a um garoto, a um garoto lá do seu primeiro ano (primeiro ano do Ensino Médio) com esse problema para ele chegar à função?
ALUNO 05: ... (ficou em silêncio)

PROFESSOR: Ou se é uma função, como você construiria isso?... Ou só dizer isso na cabecinha dele ... hum (o professor faz um gesto representando um entendimento repentino do aluno). Mas, se a gente tentasse construir uma tabelinha para ele tentar generalizar!?

Os questionamentos levantados pelo professor sobre a forma ou maneira de ensinar o saber em jogo são um elemento verificado no desenvolvimento do PEP. Em um curso de licenciatura, as questões só de compreensão e aplicação do conceito não são as únicas, entrando em cena as questões de transposição desse conceito.

Os alunos construíram tabelas conjuntamente com o professor, existindo discussões relacionadas à aposentadoria de um funcionário da rede pública e de outro da rede privada. Foram levantadas as principais diferenças entre esses dois processos, tais como: o tempo de contribuição e idade de aposentadoria, os valores desejados e a institucionalização dos resultados para que se pudesse chegar às generalizações das equações. Outra discussão levantada pelo professor foi a identificação das variáveis independentes e da variável dependente na função. Com essa discussão, o professor tentou levar aos alunos a compreenderem a relação de dependência das variáveis de uma função. Ao final, encontraram as seguintes equações: $TC = \frac{85-I}{2}$ para mulheres e $TC = \frac{95-I}{2}$ para homens. Com esse procedimento, os alunos passaram de uma OMP para uma OML (CHEVALLARD, 1999), na medida em que, a partir de casos particulares, chegaram a generalizar os dados para qualquer idade inicial.

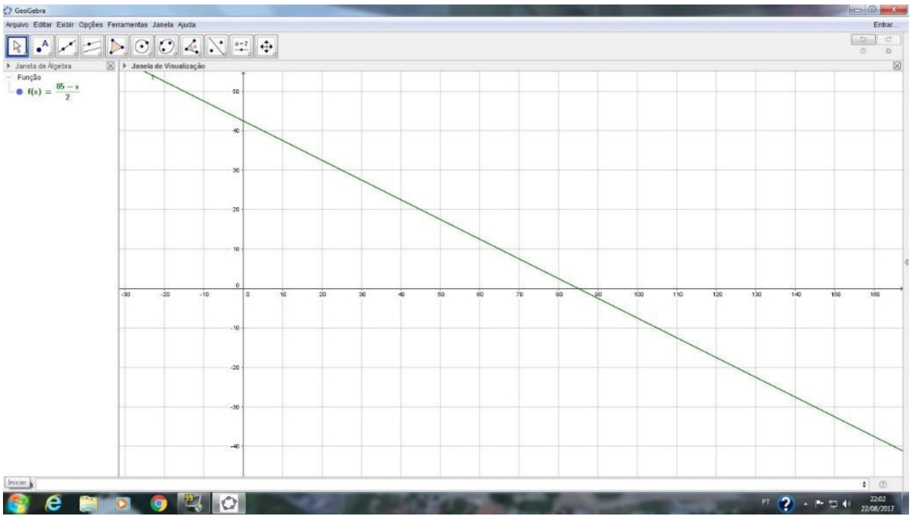
Com a determinação das funções do tempo de contribuição para mulheres e para homens, os grupos passaram a utilizar o GeoGebra, com a finalidade de observar as representações gráficas de cada função. Essa outra representação do saber em jogo fez com que a relação existente entre o professor e seus alunos mudasse, que o professor se distanciasse um pouco da resolução das questões, verificando-se uma interação maior entre os alunos na construção dos gráficos.

ALUNO 01: A gente tá vendo que ela é decrescente, porque ela está inclinada (faz o gesto para representar que está inclinada)... e aqui a angulação dela, tá maior do que noventa graus. Né isso?!
ALUNO 03: Não tem é “i” aí!?
ALUNO 01: Isso aqui é a função sabe? O “x”, o “x” é o que aqui?
ALUNO 03: No caso o “x” é a idade.
ALUNO 01: E o f(x) é o que? A contribuição do quê? Por exemplo, se eu chegar aqui (mostra um valor na tela do computador) e dizer que a minha idade será de 70 anos o meu tempo de contribuição vai ser aqui.

ALUNO 03: 10 ...
ALUNO 01: 10 não é TC, é TC. A interseção está aqui, se eu tivesse que marcar um ponto aqui por exemplo.
ALUNO 03: Mas eu consigo marcar aqui?
ALUNO 01: Então, eu consigo marcar esse ponto, certo?! Vou marcar esse ponto aqui, marquei esse ponto. Agora eu tenho que traçar uma reta, uma reta paralela a esse eixo (eixo das ordenadas).

O diálogo anterior apresenta uma discussão entre dois alunos que tentam representar graficamente a expressão do tempo de contribuição para mulheres. Notamos que é uma interação entre dois alunos, sem a presença do professor, caracterizando um aumento na autonomia de ambos (LUCAS, 2015). A figura seguinte apresenta a construção do gráfico TC de um dos grupos:

Figura 75 - Gráfico Construído pelos Alunos 01 e 03




Fonte: próprio autor (2019)

Diante do gráfico TC construído pelos alunos, o professor faz questionamentos referentes ao mesmo, com a finalidade de fazer os alunos compreenderem o seu significado e a sua adequação, para buscarem a resposta adequada para a questão geratriz.

PROFESSOR: Me diga uma coisa: teria condições olhando para o gráfico?! ... hein, meninos!? Olhando para o gráfico, se teria condições de definir o domínio e a imagem da função?
ALUNOS: ... (alguns segundos em silêncio)
ALUNO 01: O domínio é real, todo número real.
PROFESSOR: Todo número real?
ALUNO 01: É...
PROFESSOR: O cara pode começar a trabalhar com um ano?

ALUNO: Rapaz, de acordo com o gráfico!
PROFESSOR: Tem certeza?
ALUNOS: ... (ficaram observando o gráfico)
PROFESSOR: Você colocou a função direitinho?
ALUNOS: ... (continuaram a observar o gráfico em silêncio)
PROFESSOR: Analisando em si friamente, né?... mas o problema?!
ALUNO 01: “x” varia, “x” o domínio, varia de 0 a... não...
PROFESSOR: Mas, analisando o nosso problema, ele trata de uma função referente à aposentadoria, né? Onde TC é o tempo de contribuição e “i” é a idade. Vocês conseguiram reconhecer que “i” é a variável independente que determina o domínio, e TC é a variável dependente. Mas nós começamos analisar a partir de que ano?
ALUNOS 04 e 03: 18...
PROFESSOR: Então, como poderíamos definir o domínio de uma função como essa?
ALUNO 01: “x” maior que 2, não ... é, “x” pertence...
PROFESSOR: Domínio dessa função?
ALUNO 01: “x” pertence a... aos reais!
PROFESSOR: No caso “i” aí, né?
ALUNO 01: É, “x” pertence aos reais, tal que “x” é maior do que 2...
PROFESSOR: “x” que é a função, que é a idade que é chamada de “x”, né? Como “i” é a idade.
ALUNO 01: Nesse caso “i” é maior ou igual a 18, e...
PROFESSOR: E a imagem? Como definiria a imagem dessa?...
ALUNO 05: TC pertence aos reais, tal que ...
PROFESSOR: A imagem dessa função aqui? TC que é contribuição também é real! Sim ou não?
ALUNOS 05 e 03: É ...
PROFESSOR: Mas ela começa de zero é?
ALUNO 05: Maior ou igual a 33,5.
PROFESSOR: Maior?
ALUNO 01: Menor, não?
PROFESSOR: Você vai aumentando a idade e ...
ALUNO 05: Menor ...
PROFESSOR: O Aluno 04 observou isso bem, vocês observaram isso, vocês dois (Alunos 01 e 03)?? Observem que a idade vai aumentando e o tempo de contribuição vai diminuindo. É isso?
ALUNOS: .... (silêncio).
PROFESSOR: Tá certo isso?
ALUNO 05: Tá certo!
PROFESSOR: Então, se o cara começar a trabalhar com 40 anos, seria bom!
ALUNOS: ... (balançaram a cabeça com o sinal negativo)
ALUNO 01: Não pode! Vai começar velho, macho!
PROFESSOR: Olha aí! Por que não é vantagem se aposentar com 40 anos?
ALUNO 01: Se aposentar com 40 anos é bom ...
ALUNOS: (risos).
PROFESSOR: Desculpe. No caso começar a trabalhar aos 40 anos? Se eu começasse trabalhar com 40 anos, TC aí? Quanto tempo de contribuição ...?
ALUNO 01: Para mulher ou homem?
PROFESSOR: Eu... (risos)
ALUNO 01: 40 anos? Aí seria... 55 dividido por dois, que dá 27,5, mais 40 que é 67,5 anos.

PROFESSOR: Quanto tempo de contribuição?
ALUNO 03: 27, 5.
PROFESSOR: Eu me aposentaria? Se vocês pesquisarem um pouco, o tempo mínimo de contribuição nessa regra é de 30 anos de contribuição. Logo, eu não iria conseguir me aposentar com 67,5 anos.
ALUNO 01: Então, nesse caso, o máximo de idade com que iniciaria a contribuir para poder se aposentar seria 25 anos?! Para começar a trabalhar, seria 25?
PROFESSOR: Olha aí! Por quê?
ALUNO 01: Para ter 25 anos de contribuição.
PROFESSOR: Ele já está começando a analisar uma idade ideal para começar a trabalhar, digamos assim. Compreenderam?

O diálogo anterior apresenta a análise do gráfico feito pelos alunos, com a ajuda do professor, com questionamentos referentes à identificação do domínio e da imagem da função. Os alunos verificaram que, para a função poder representar o tempo de contribuição, é necessário que sejam determinados seu domínio e sua imagem. Além disso, outra questão foi levantada pelo professor, sobre o tempo mínimo de contribuição; no caso, de 30 anos. Ele citou exemplos para comprovar que uma idade muito pequena ou avançada não se adequaria à resposta do problema, sendo necessários valores mínimos e máximos. Em relação à intervenção do professor, em vários momentos, pudemos perceber que o efeito topázio, juntamente com o efeito abusivo de analogia (BROUSSEAU, 1996), permaneceram presentes, mas a autonomia dos alunos foi verificada, na medida em que a participação de todos foi registrada.

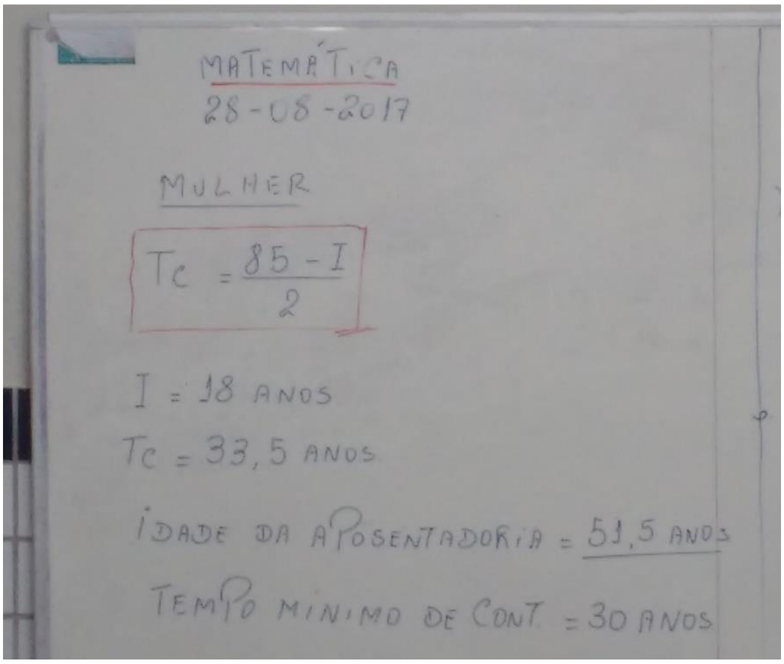
Ao final desse encontro, verificamos uma autonomia maior por parte dos alunos, na medida em que a participação na busca da resposta da questão geratriz foi compartilhada por todos os alunos. Também observamos uma mudança na condução praxeológica do professor, o qual, em sua abordagem, levantou vários questionamentos para fazer o aluno a refletir em sua resposta, apesar de uma interferência excessiva na resposta dos alunos ainda ter sido verificada.

### 5.1.7. Análise do Quinto Encontro Presencial do Primeiro Estudo Empírico

O encontro aconteceu no dia 28 de agosto de 2017, na sala de aula convencional. Teve início às 19h15min, com duração de, aproximadamente, 60 minutos e com a presença de 06 (seis) alunos.

O professor iniciou a aula formando três grupos, mudando os membros dos grupos em relação as aulas anteriores. Em seguida, o professor escreve no quadro a expressão construída na aula anterior, no caso o tempo de contribuição para mulheres: $TC = \frac{85-I}{2}$. Após, o professor retoma algumas informações da aula anterior, tais como: idade inicial; idade máxima e tempo de contribuição em função da idade trabalhada. Ao perguntar a turma sobre os pontos trabalhados na aula anterior, o professor tenta incentivar os alunos a responderem às suas perguntas. O incentivo aconteceu no momento em que o professor criou uma situação utilizando a expressão TC; no caso, com uma idade inicial de 18 anos de idade.

Figura 76 - Informações Iniciais da Aula do dia 28 de Agosto




Fonte: próprio autor (2019)

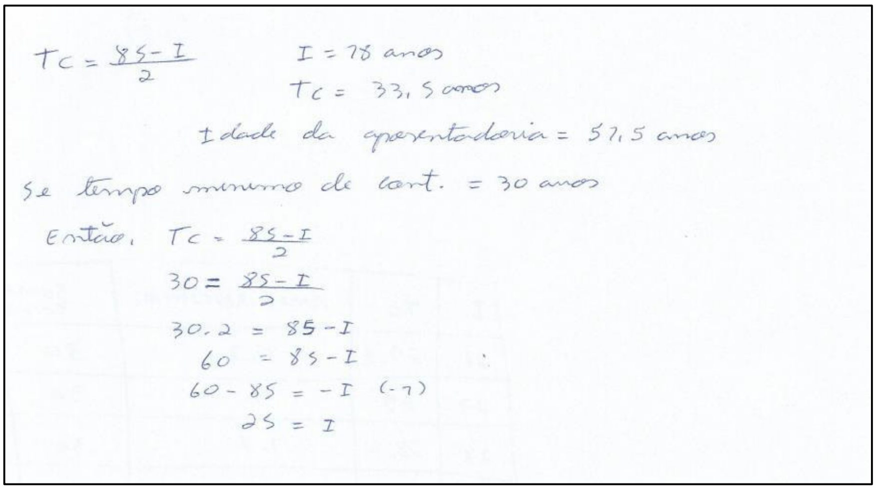
Além da utilização da expressão TC, o professor complementou as informações com a participação dos alunos, escrevendo a idade que a mulher teria ao se aposentar, tendo ela iniciado a contribuir aos 18 anos de idade, sem interrupções, chegando a se aposentar aos 51 anos e 6 messes de idade. Também apresentou o tempo mínimo de contribuição que, no caso, foi de 30 anos.

Ao iniciar a aula, o professor retomou algumas informações construídas na aula anterior, o que é, ao nosso ver, condição necessária para dar continuidade ao PEP, porque sempre existe a necessidade de retomar e reorganizar as informações anteriores, no sentido de formular ou reformular questionamentos referentes ao saber em jogo. Neste caso, o professor fez o seguinte questionamento:

PROFESSOR: Então, até com que idade ela tinha que começar a trabalhar, pra que ela cumprisse esse mínimo aqui? (Nessa hora, o professor apontou para o valor escrito no quadro; no caso, 30 anos).
ALUNOS: ... (em silêncio por alguns segundos)
PROFESSOR: Se o tempo de contribuição fosse de 30 anos, qual a idade máxima com que ela teria que começar a trabalhar, seria preciso que ela cumprisse exatamente esses 30 anos? Faça os cálculos aí pra mim ...

Observamos que o professor, para dar continuidade à aula e com a finalidade de encontrar a resposta de $Q_0$, retoma as informações anteriores e, em seguida, faz um novo questionamento expresso no diálogo anterior, que é uma questão derivada da $Q_{1,3}$. Nesse caso, o professor formula uma questão derivada apresentando uma autonomia na condução da aula, questão que tomou por base a formação realizada para a aplicação do PEP. Depois, os alunos começaram a discutir entre si sobre o questionamento do professor com a intenção de chegar à resposta, realizando alguns registros.

Figura 77 - Resposta de um Grupo para Encontrar a Idade Máxima para Iniciar a Contribuição

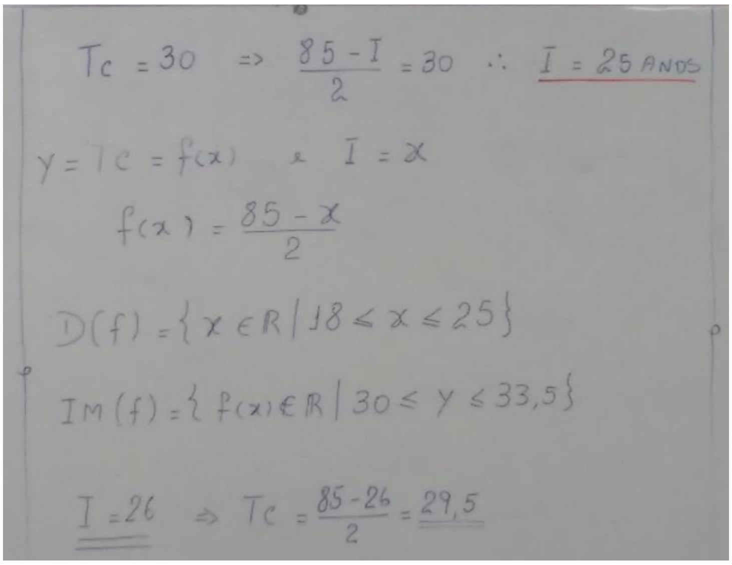



Fonte: próprio autor (2019)

O valor encontrado de $I = 25$ representa a idade máxima com que uma mulher deve começar a contribuir, porque, caso comece após os 25 anos de idade, terá que trabalhar mais de 30 anos para chegar no valor de 85 anos, somando idade e tempo de contribuição. As técnicas utilizadas pelos alunos foram as mesmas usadas nas aulas anteriores, permanecendo a organização matemática pontual.

Em seguida, o professor perguntou qual o domínio da função TC e se era uma função. Face ao silêncio dos alunos, o professor renegociou o contrato e retomou a representação usual da função, chamando de TC de $f(x)$ e de I de $x$. Também discutiu se os valores da função são reais, citando algumas situações relacionadas à variável tempo.

Figura 78 - Construção da Imagem e do Domínio pelo Professor no Quadro




Fonte: próprio autor (2019)

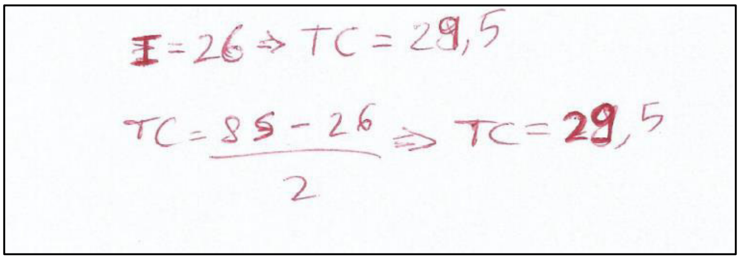
Até esse momento da aula, destacamos dois pontos: o primeiro foi a construção do domínio e da imagem pelo professor, quando ele desempenhou um protagonismo excessivo, fazendo com que a participação dos alunos se tornasse pequena e, muitas vezes, interrompida pelo professor durante a determinação do domínio e da imagem, caracterizando o efeito topázio; o segundo ponto foi a renegociação de contrato realizada pelo professor e ocasionada pelo silêncio dos alunos, o que pode estar relacionado ao primeiro ponto levantado. Nesse momento, pudemos notar que o silêncio pode estar relacionado a uma falta de elementos tecnológicos limitadores do discurso do docente.

Em seguida, o professor fez um novo questionamento a partir das discussões anteriores, a saber:

PROFESSOR: Se essa mulher começar aos 26 anos, o que vai acontecer com o nosso tempo de contribuição? Façam aí, por favor, para mim.

Ao realizar esse questionamento aos alunos, o professor apresentou a questão derivada $Q_{1,3,3}$, que lançou um desafio aos alunos e ampliou uma situação relacionada ao modelo de aposentadoria estudado; no caso, com o início da contribuição depois dos 25 anos de idade, verificando as suas consequências.

Figura 79 - Técnica Utilizada pelos Alunos para determinar o TC com a I = 26 anos




Fonte: próprio autor (2019)

Após alguns minutos de discussão sobre o questionamento entre os alunos sem a intervenção do professor, ele interrompeu a discussão perguntando a resposta aos alunos e o que ela significa. Os alunos ficaram em silêncio e o professor explicou que se uma mulher inicia a contribuir depois dos 25 anos de idade, ela terá que contribuir mais algum tempo para poder chegar ao tempo mínimo de 30 anos de contribuição. No caso específico, ao iniciar a contribuir aos 26 anos, a mulher terá a soma de 85 anos (idade mais TC), mas não terá o tempo mínimo de contribuição, necessitando complementá-lo.

Em seguida, o professor construiu uma tabela no quadro, com a intenção de fazer com que os alunos repetissem as técnicas de cálculo até a idade de 29 anos do contribuinte. Os alunos realizaram os cálculos sem a intervenção do professor, e, depois, apresentaram os resultados juntamente com ele. Diante dos resultados, o professor fez um novo questionamento:

PROFESSOR: Agora me digam uma coisa, qual a idade de $n$ qualquer?

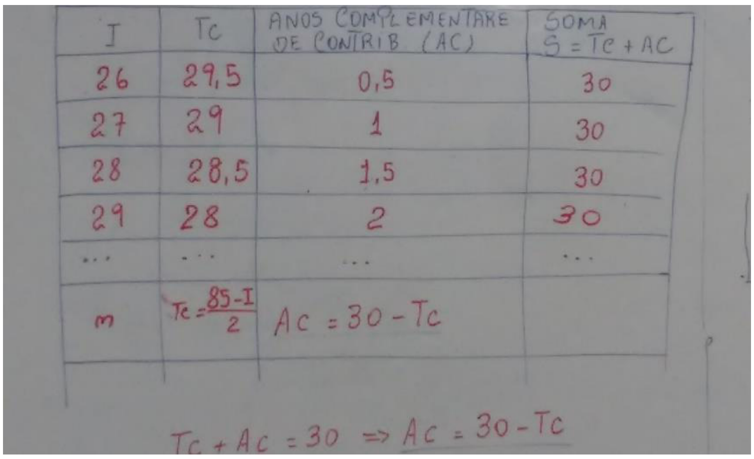
Com esse novo questionamento, o professor solicitou aos alunos que generalizassem o cálculo para qualquer idade depois de 25 anos, exigindo dos mesmos uma ampliação das técnicas a partir de um discurso tecnológico mais elaborado.

PROFESSOR: Esse tempo de contribuição é calculado por $TC = \frac{85-I}{2}$ (o professor escreveu na tabela). Vocês seriam capazes de me dizer como vocês generalizariam essa relação aqui? (no caso, era a generalização do acréscimo do tempo de contribuição (AC)). Pra o acréscimo da contribuição?
ALUNOS: ... (silêncio por alguns segundos)

PROFESSOR: Para esses anos complementares?
ALUNO 04: Generalizaria de meio ano, de seis em seis messes ao ano.
PROFESSOR: Sim, de seis e seis messes, me diga uma coisa?
ALUNO 03: Depende de quanto tempo de acréscimo?
ALUNO 01: É só fazer assim: $TC + AC = 30$.
PROFESSOR: Muito bem! Então, como ficaria $AC$, meus queridos? O Aluno 02 falou que podemos escrever a formação disso aqui $TC + AC = 30$. 'Tá correto isso?
ALUNOS: ... (alguns segundos em silêncio).
PROFESSOR: Não é o nosso objetivo?! E chegar aos 30 anos?! Aí eu pergunto a vocês: o nosso $AC$ seria quem?
ALUNO 01: $AC$ seira $\frac{85-x}{2}$ ...
ALUNO 03: Seria 0,5, né?
PROFESSOR: 0,5 é, no caso, se ela começar a trabalhar aos 26 anos. Mas, para uma idade qualquer, como o Aluno 04 chegou a essa relação aqui? $(TC + AC = 30 \Rightarrow AC = 30 - TC)$. Então, o nosso acréscimo, os nossos anos complementares, e foi o que você fez (Aluno 02). Usou esse 0,5, esse 1, esse 2. Como você fez, Aluno 02?
ALUNO 02: Achava $TC$ e só juntava com o valor para ter 30.
PROFESSOR: Muito bem, a diferença que faltava para chegar em 30.

Observando o diálogo anterior, verificamos que alguns alunos conseguiram apresentar um discurso tecnológico mínimo, passando para uma OML. Verificamos que o processo da passagem de uma OMP para uma OML, provocada pelo PEP, gera, nos alunos, uma evolução no seu discurso tecnológico, articulando mais de uma técnica, mas, também, inibe a participação de alguns alunos, pelo fato de, naquele momento, eles não possuírem um discurso tecnológico suficiente (CHEVALLARD, 2002), influenciando a sua autonomia. A seguir, apresentaremos a tabela construída pelo professor, a qual foi reproduzida pelos alunos:

Figura 80 - Tabela Construída pelo Professor



| I | Tc | ANOS COMPLEMENTARE DE CONTRIB (AC) | SOMA S = Tc + AC |
|---|---|---|---|
| 26 | 29,5 | 0,5 | 30 |
| 27 | 29 | 1 | 30 |
| 28 | 28,5 | 1,5 | 30 |
| 29 | 28 | 2 | 30 |
| ... | ... | ... | ... |
| m | $Tc = \frac{85-I}{2}$ | $Ac = 30 - Tc$ | |

$Tc + Ac = 30 \Rightarrow Ac = 30 - Tc$

Fonte: próprio autor (2019)

Com a tabela construída pelo professor e pelos alunos, surgiu um novo questionamento:

PROFESSOR: Vocês seriam capazes de determinar a imagem e o domínio dessa nossa nova função aqui? (no caso, a função AC)

A partir de $Q_{1,3,3,}$ o professor fez outro questionamento. Com o $Q_{1,3,3,1}$, nesse caso, ele formulou um novo questionamento, além do apresentado em sua formação. Notamos que esse procedimento fez com que ele renegociasse o contrato didático do momento, consequentemente, ampliando a sua organização didática, ponto importante a ser abordado no PEP (CHEVALLARD, 2009a e 2009b). Antes de dar continuidade à resolução de $Q_{1,3,3,1}$ , o professor entrou na seguinte discussão:

PROFESSOR: Antes disso, é o seguinte (determinar o domínio e a imagem de AC), para ficar mais fácil pra a gente definir ... Vejam só o nosso problema da aposentadoria! Está na idade em que começamos a trabalhar, né? Nossa análise está sempre em função da idade; então, o que fizemos aqui (o professor aponta para o quadro), foi analisar se a mulher começar aos 18, tem que contribuir isso (33,5 anos), se é até os 25 até chegar aos 30. Vamos tentar essa relação aqui (AC) em função da idade. Como é que ficaria o acréscimo da contribuição em função da idade com que ela começa a trabalhar?
ALUNOS: ... (silêncio)

Com esse estudo apresentado pelo professor, ele propôs uma articulação entre as técnicas conhecidas pelos alunos; nesse caso, para os alunos chegarem à representação algébrica da função AC, utilizando o conceito de função composta. Com esse procedimento, os alunos consolidaram a mudança de uma OMP para uma OML. O processo de devolução foi apresentado no momento do questionamento do professor, na medida em que os alunos formularam e validaram os seus resultados.

Figura 81 - Cálculos Realizados por um dos Grupos para determinar AC

$$Ae = 30 - 85 = 55$$

$$Ac = 30 - tc \Rightarrow Ae = \frac{30 - 85}{2} - I$$

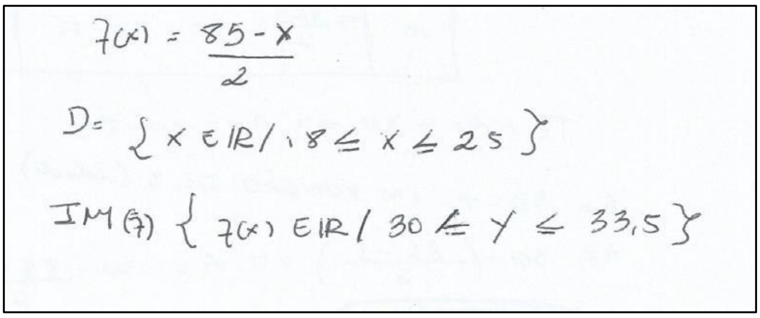
$$AC = \frac{60 - 85 + I}{2}$$

$$Ac = \frac{I - 25}{2} \quad \text{ou } Ae = \frac{I}{2} - 12{,}5$$

Fonte: O próprio autor (2019)

Ressaltamos que todos os alunos realizaram os cálculos, discutiram entre si e entre os grupos. Logo depois, o professor institucionalizou a expressão AC, encontrando: $AC = \frac{I}{2} - 12{,}5$. Em seguida, o professor retomou a discussão com os alunos, para determinar o domínio e a imagem de $AC$.

Figura 82 - Domínio e Imagem de AC Determinados por um dos Grupos


$f(x) = \frac{85-x}{2}$

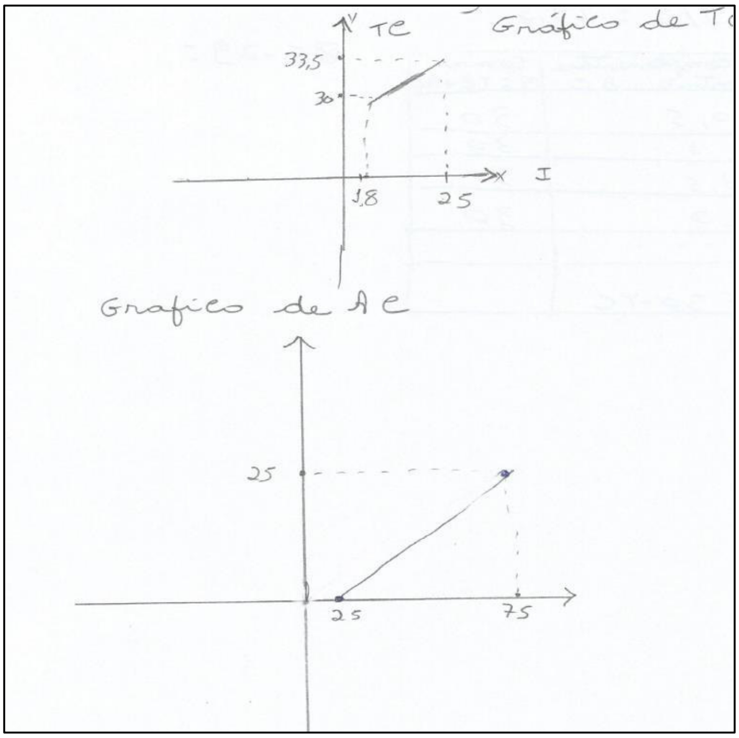
$D = \{x \in \mathbb{R} / 18 \leq x \leq 25\}$

$IM(f)\ \{f(x) \in \mathbb{R} / 30 \leq y \leq 33{,}5\}$

Fonte: próprio autor (2019)

A determinação do domínio e da imagem de $AC$ teve a participação dos alunos e do professor, apesar do protagonismo do professor na condução da resolução. Os alunos tiveram uma participação mais efetiva, aumentando a sua autonomia. No decorrer da determinação do domínio e da imagem, os alunos apresentaram outros elementos teóricos, representando a aquisição de um discurso tecnológico. Logo depois, o professor solicitou a construção dos gráficos das funções $AC\ e\ TC$, fazendo os alunos discutirem entre si a respeito disso, formalizando e validando as construções gráficas das funções.

Figura 83 - Gráficos TC e AC Construídos por um dos Grupos

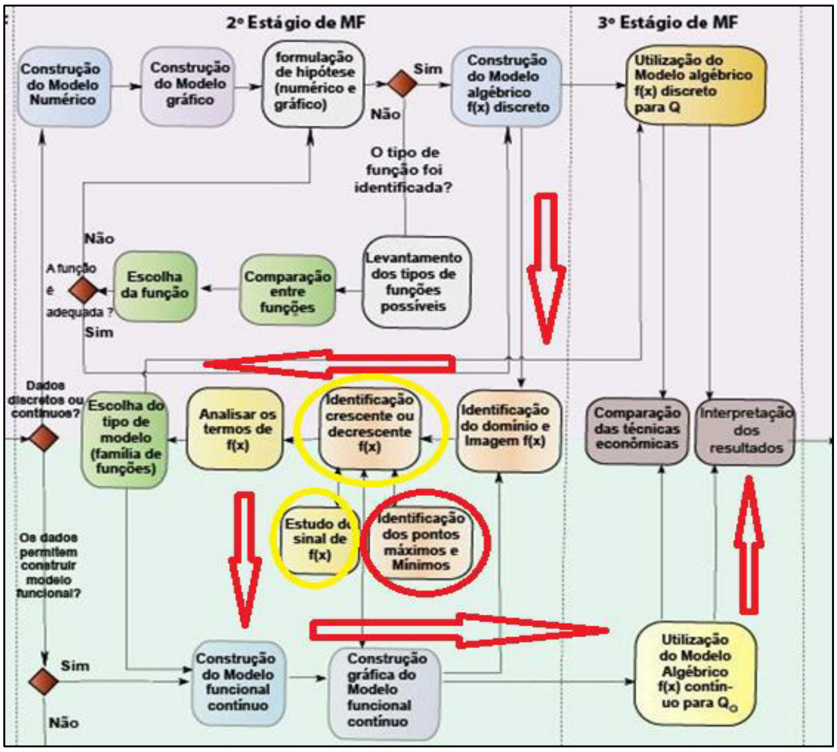



Fonte: próprio autor (2019)

Observamos que os gráficos construídos pelos alunos já são apresentados com os seus intervalos nos eixos das abscissas e das ordenadas. Com a aplicação dos valores máximos e mínimos em cada função, comprovando a aquisição de um discurso tecnológico mais amplo, deu-se o domínio de mais técnicas e a compreensão de sua funcionalidade e aplicação, ponto que o PEP ressalta em sua utilização (FONSECA; CASAS; BOSCH; GASCÓN, 2009). Ao final da aula, o professor lançou mais um questionamento; no caso, a questão derivada $Q_2$, para dar início à aula seguinte.

Ao analisarmos essa Questão, tomando por base o esquema do nosso MER, observamos que, com a função $TC$ definida, o professor partiu para determinar o seu domínio e a sua imagem, e, consequentemente, analisou os elementos da função.

Figura 84 - Parte do MER Representando o Caminho Seguido na Aula




Fonte: próprio autor (2019)

Destacamos que o professor não realizou uma discussão relacionada ao ângulo de inclinação da reta, levando a discutir se a função é crescente ou decrescente, ponto importante ao se tratar de um estudo da função afim. Mas, ao abordar os valores do domínio e da imagem, o professor tratou dos seus pontos máximos e mínimos, adequando a sua representação ao contexto do problema.

Uma questão que deve ser analisada no esquema foi um caminho realizado pelos alunos e não previsto no esquema inicial: a passagem da tarefa de análise dos termos de uma função para a construção do modelo funcional contínuo. Este fato é aceito em qualquer MER, pois o modelo é flexível e cada evolução dele pode ser mudada ou adaptada (BOSCH; GASCÓN, 2010). Com a construção do gráfico funcional contínuo de $TC$, o processo é repetido para a construção do gráfico funcional contínuo de $AC$, concluindo o segundo estágio do modelo funcional do nosso MER. Em seguida, os alunos utilizaram os modelos algébricos $TC$ e $AC$, passando para a interpretação dos resultados e finalizando o terceiro estágio do modelo funcional.

O estudo, a partir das seções presenciais previstas, desse encontro envolveu as questões $Q_{1,3,2}$ e $Q_{1,3,3}$ Mas outras questões foram introduzidas pelo professor durante o desenvolvimento do PEP; no caso, as questões derivadas: $Q_{1,3,3,1}$ : Como podemos representar graficamente os Anos Complementares (AC)?; $Q_{1,3,3,2}$ : Qual o domínio e a imagem de AC?.

Essas questões tratam da determinação do domínio e da imagem de $AC$, e de sua construção gráfica, questões não previstas antes da aplicação, referendando que a aplicação de um PEP não é totalmente pré-definida, existindo espaço para novos questionamentos (CHEVALLARD, 2009a, 2009b).

### 5.1.8. Análise do Sexto Encontro Presencial do Primeiro Estudo Empírico

O sexto encontro presencial foi o último realizado nesse primeiro estudo empírico da pesquisa. A aula foi realizada no dia 29 de agosto e contou com a participação de 5 (cinco) alunos, divididos em 2 (dois) grupos, com uma duração em torno de 60 minutos. O local para realização dessa aula foi o Laboratório de Matemática, pela necessidade da utilização do *software* GeoGebra para a construção dos gráficos.

O professor iniciou a aula com o questionamento deixado no encontro passado, no caso a $Q_2$: Como podemos representar as situações para os anos seguintes, sabendo que a soma idade mais tempo de contribuição muda a cada dois anos? Na ocasião, explicitou a questão e ressaltando as informações contidas nela. Com essa atitude, o professor retomou a discussão sobre a Questão Geratriz ($Q_0$), a partir de sua derivada. Logo após, o professor iniciou o seguinte diálogo:

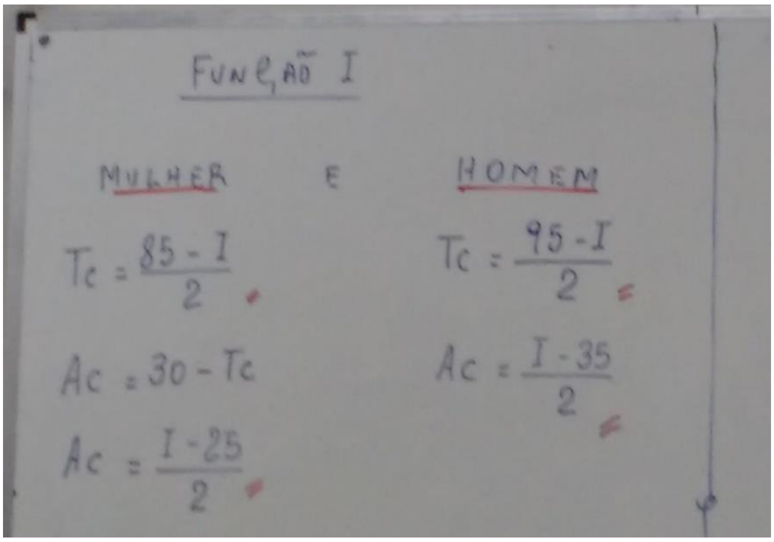
PROFESSOR: E aí, meus queridos, como poderíamos representar o que a gente fez?
ALUNO 01: Eu acho que só a gente substituir o ano, pra homem e pra mulher...
PROFESSOR: E aí, o que vocês acham da resposta do Aluno 01?
ALUNOS: ... (ficaram em silêncio por alguns segundos)
PROFESSOR: O que vocês acham da resposta que o Aluno 01 deu?
ALUNOS: ... (ficaram em silêncio por alguns segundos)
PROFESSOR: Ei, Aluno 02, o que você acha da resposta do Aluno 01? Seria simplesmente substituir os valores para homens e mulheres?
ALUNO 02: ... (ficou em silêncio por alguns segundos)
ALUNO 05: (fez um gesto de positivo)
PROFESSOR: Você (Aluno 05) faria assim? Como você faria? A organização seria como? (o professor se aproximou do aluno para observar a sua resolução).

Esse diálogo nos mostra a dificuldade inicial dos alunos em responder os questionamentos do professor. Observamos que a $Q_2$, para ser respondida, necessita que os alunos tenham mais conhecimento tecnológico e, consequentemente, técnicas mais sofisticadas em relação às de que já tinham conhecimento. Nesse sentido, apresentam-se uma ampliação e uma aplicação do saber em jogo, indicadas pelo silêncio dos alunos em alguns momentos ou na aplicação de respostas simples baseadas nas construções tecnológicas anteriores e que não foram suficientes para responder a um novo questionamento.

Outro ponto a ser destacado é que, no momento em que o professor estava questionando os alunos, eles discutiam entre si as possibilidades de respostas. Então, entendemos que o processo de devolução estava presente no sistema didático estabelecido (CHEVALLARD, 2009a) e, consequentemente, nas situações didáticas e na validação.

Em seguida, o professor foi ao quadro e começou a escrever as principais informações das aulas passadas, realizando perguntas sobre as funções desenvolvidas. Por conseguinte, perguntou sobre o domínio, a imagem, os máximos e mínimos, assim como fez perguntas relacionadas ao tempo de contribuição, às idades possíveis para a aposentaria de homens e mulheres.

Figura 85 - Funções Desenvolvidas Relacionadas a Mulheres e Homens Escritas pelo Professor




Fonte: próprio autor (2019)

Com as funções construídas para representar o tempo de contribuição e os anos complementares para que se possa chegar à aposentaria, o professor parte para construção de uma tabela que represente a composição de TC e AC para cada dois anos, até chegar ao ano de 2027. Nesse momento, os alunos construíram a tabela sugerida pelo professor tomando por base a idade inicial da mulher e, em seguida, complementaram as informações juntamente com o professor.

Figura 86 - Tabela Construída por um dos Grupos

MULHER

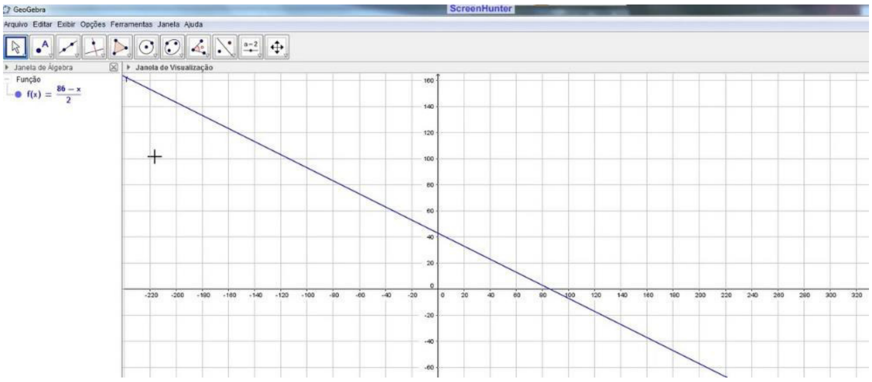
| ANO | Tc | Ac |
|---|---|---|
| 2019-2020 | $Tc = \frac{86 - I}{2}$ | $Ac = \frac{I - 26}{2}$ |
| 2021-2022 | $\frac{87 - I}{2}$ | $\frac{I - 27}{2}$ |
| 2023-2024 | $\frac{88 - I}{2}$ | $\frac{I - 28}{2}$ |
| 2025-2026 | $\frac{89 - I}{2}$ | $\frac{I - 29}{2}$ |
| 2027 | $\frac{90 - I}{2}$ | $\frac{I - 30}{2}$ |

Fonte: próprio autor (2019)

Na construção da tabela anterior, os alunos aplicaram técnicas relacionadas a representações das expressões para anos diferentes, necessitando de um amparo tecnológico maior em relação aos tipos de tarefas e técnicas anteriores. Ressaltamos que, durante a construção da tabela pelos grupos, notou-se o empenho dos alunos em realizar a tarefa com discussões entre si, buscando formalizar e validar as suas respostas. Outro ponto é que, nesse momento, o professor sempre buscava a participação dos alunos, estabelecendo uma organização didática e fazendo emergir outro contrato didático; no caso, o professor tentou compartilhar as responsabilidades na construção do saber em jogo, realizando várias perguntas relacionadas ao saber.

Com as funções definidas e com a tabela construída, o professor levou todos os alunos para representar as funções no GeoGebra (computadores). Como eles já haviam tido contato com o *software* no quarto momento, as dificuldades na sua utilização foram mínimas, mas necessitaram de uma orientação do professor, pelo fato de a construção solicitada não ser uma função, mas várias funções no mesmo gráfico. Porém, inicialmente, o professor solicitou a primeira função representada pela figura 87.

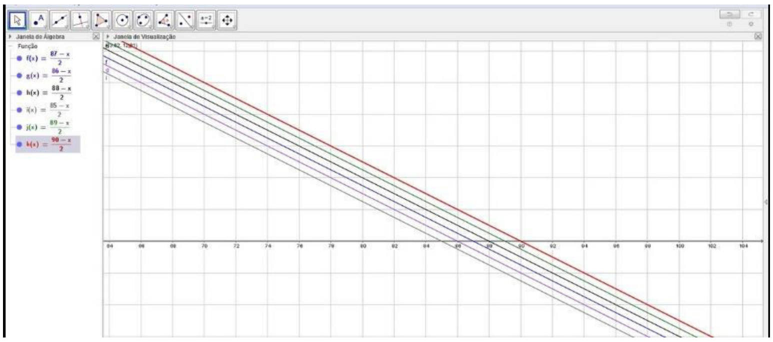
Figura 87 - Construção por um dos Grupos da Primeira função $TC = \frac{86-I}{2}$ solicitada pelo Professor



Fonte: próprio autor (2019)

Com a primeira função construída, o professor solicitou aos grupos a construção das outras funções representadas na tabela em que constam $TC$ e $AC$ para cada dois anos. Um fato de destaque é que, mesmo os grupos estando separados em computadores diferentes, os alunos continuaram com a troca de informações sobre o tipo de tarefa solicitado pelo professor, assim como para pedir auxílio na construção dos gráficos. Esse ponto o PEP procura desenvolver entre os alunos: a interação entre eles.

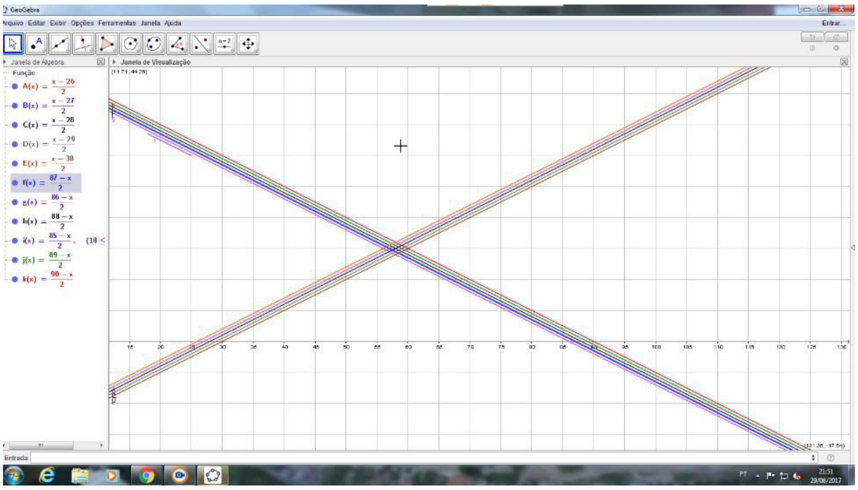
Figura 88 - Construção por um dos Grupos da Família de Funções de TC



Fonte: próprio autor (2019)

Com a construção das representações gráficas de cada função, o professor solicitou a construção, no mesmo plano cartesiano, das funções de $AC$.

Figura 89 - Construção do Grupo 2 das Famílias de Funções de TC e AC



Fonte: próprio autor (2019)

Com as funções construídas no GeoGebra, o professor solicitou que os grupos determinassem o domínio e imagem das funções; nesse sentido, ele relembrou as discussões das aulas anteriores para estabelecer os valores máximos e os mínimos, escrevendo novamente no quadro as seguintes informações: $D = \{I \in \mathcal{R}/18 \leq I \leq 25\}$ e $Im(TC) = \{TC(I) \in \mathcal{R}/30 \leq TC \leq 33{,}5\}$ para $TC = \frac{85-I}{2}$. O professor também retomou as discussões em torno do porquê da escolha da idade inicial de 18 anos e da idade máxima de 70 anos para a aposentaria da mulher.

Em seguida, o professor solicitou que fossem determinados o domínio e imagem de cada função de $TC$ e $AC$, mas, apesar da tentativa dos alunos de resolverem a tarefa determinada pelo professor, foi verificada, nesse momento, uma dificuldade na aplicação da técnica, e, consequentemente, uma falta tecnológica, pelo fato de não haver ali uma função, mas uma família de funções. Logo, seria necessário um amparo tecnológico mais elaborado. Consequentemente, o professor encaminhou a reflexão em torno disso para o final da aula, pela questão do horário, prevalecendo o tempo didático.

Para finalizar a sessão e fazer um fechamento do problema, o professor fez os seguintes questionamentos:

PROFESSOR: Vocês terminaram aí?! O que vocês acharam do problema?
ALUNO 06: Massa, legal todo!
PROFESSOR: Sobre a aula? Sobre a produção do problema? Da resposta? Hein, Aluno 05 e Aluno 04, o que vocês acharam do problema também? Aluno 02, o que achou do problema? Um problema não trivial, assim... foge um pouco do que estamos acostumados, dar uma função

e substituir o valor, dar o domínio da função, geralmente é só isso, né? Nessa vocês vão construindo todo esse conhecimento, né?
ALUNO 01: Isso!
PROFESSOR: A função, a gente representou. Logo a função, Aluno 02?
ALUNO 04: Não, foi construída. Achei interessante o problema!
PROFESSOR: Achou interessante o problema?
ALUNO 04: Que é uma coisa pessoal, uma coisa que interfere na vida de todos e é uma coisa prática.
ALUNO 06: É um tema polêmico para a gente se aposentar, tem todo um contexto...
Alunos e professor: risos ....
PROFESSOR: Depende da idade em que se começa a trabalhar; quando você nascer, já tem que pedir a carteira ... (risos). E aí, Aluno 05, o que você achou? O que achou do problema, você que está em sala de aula!
ALUNO 05: Legal porque dá pra trabalhar muita coisa do conteúdo de função, dá pra trabalhar domínio de função, construção gráfica de uma função, dá pra trabalhar todo o conteúdo de função só com um único problema.
PROFESSOR: Dá para trabalhar gráfico?
ALUNO 05: É ... no caso aí trabalharia de forma contínua com o aluno, não só cada dia colocando uma coisa diferente; é melhor dessa forma por causa disso, porque ele sempre vai lembrar do que viu no dia anterior, é contínuo...
PROFESSOR: Muito bem, garoto (Aluno 05). Aluno 02, emita aí uma opinião sobre o problema!
ALUNO 02: Concordo com o que disse o Aluno 5, é isso aí, mesmo ... É tipo uma coisa contínua, é bem melhor.
PROFESSOR: Do que chegar e dar a função.
ALUNO 02: Isso... E, levando em consideração, também, a maioria de uma cidade pra outra, chegar assim do nada.
PROFESSOR: Você (Aluno 02) definiu o valor numérico da função?
ALUNOS: ... (ficaram em silêncio por alguns segundos).
PROFESSOR: O que é um valor numérico da função?
ALUNO 01: Substituir um valor pela variável.
PROFESSOR: A gente fez isso no problema?
ALUNO 01: Sim ... Fez ...
PROFESSOR: Você (Aluno 01) gostou do problema? Você que ficou falando que o problema é muito fácil, só isso ...
ALUNO 01: ... (risos)
PROFESSOR: Depois começou a ver as dificuldades ...
ALUNO 01: É por isso mesmo, porque não estava acostumado a lidar com o início dele e no desenvolvimento dele e chegar em uma problemática bem interessante, entendeu? Não estava acostumado... É aquela coisa, quando você vê uma coisa com que não se depara...

Nesse momento, o diálogo revelou o reconhecimento dos alunos em relação à metodologia utilizada, quando fizeram uma análise dos conteúdos abordados, retomando conceitos anteriores, de momentos diferentes das aulas, como também ao reconhecerem que não tiveram contato com esse tipo de abordagem. Podemos entender isso como uma ruptura de contrato. Na sequência do diálogo, pontos relacionados à questão curricular foram discutidos:

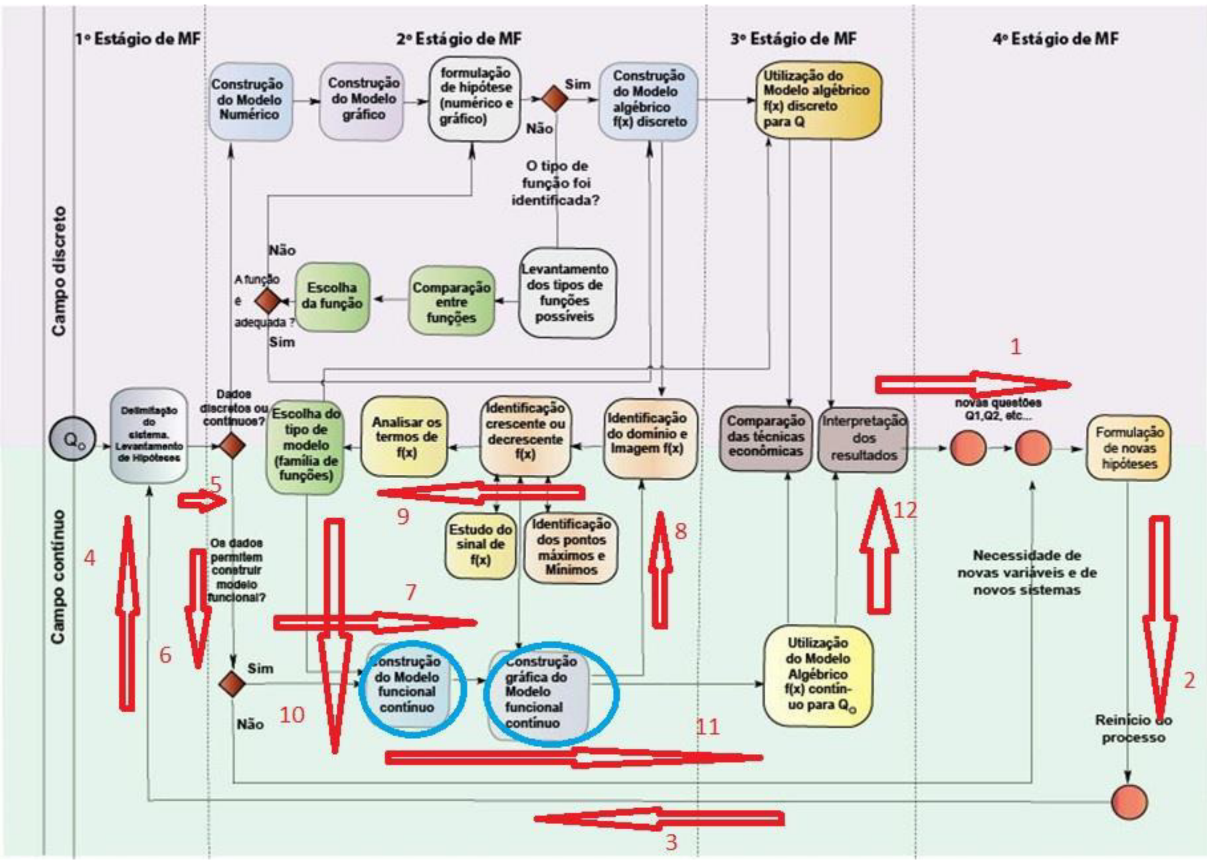
PROFESSOR: Você colocaria esse problema para alunos seu do ensino médio, Aluno 01?
ALUNO 01: Do primeiro ano?!
PROFESSOR: Sim! Ou do nono ano?
ALUNO 01: Do nono não acho muito adequado não; é minha opinião, não, mas, no primeiro ano, vai depender como você aborda...
PROFESSOR: Pronto ... Quem faz o problema ser fácil ou difícil é você (Aluno 01).
ALUNO 01: Quando você iniciou, certo? Você estava tentando perguntar uma coisa que a gente sabia a resposta, mas não sabia do que se tratava, entendeu?... A gente queria responder, mas não sabia a resposta que você (professor) queria, aí dificultou pra a gente também...
PROFESSOR: Aí depois foi desenvolvendo ...
ALUNO 01: Aí depois foi... a gente conseguiu responder.
PROFESSOR: Foi os questionamentos, eu falava os questionamentos, mas não colocava no quadro, né?...Você tá vendo aí o que é?
ALUNO 01: É isso ...
ALUNO 05: É porque eu acho dessa forma mais legal, porque a gente constrói com o aluno o conteúdo em si. Eu trabalho dessa forma também, eu trabalho o conteúdo com ele e, a partir do que eles fazem, da interação de que eles têm na aula, aí vem o conceito das coisas até acabar o assunto. É melhor do que colocar no quadro o conceito e o aluno só ver aquilo sem entender, sem discutir.
ALUNO 01: Agora tem um quesito que achei interessante, professor, que é, por exemplo, esse tempo que a gente levou pra fazer toda essa construção para chegar nesse resultado dessa função. Eu acho que foi muito, muito comprido, entendeu?... E não poderia ser curto, porque é difícil pegar aquele início e chegar onde chegou, ou seja, precisaria de mais tempo, na verdade. Só que eu acho, como estamos falando da educação básica e ensino médio, é difícil você pegar um assunto em si, e tratar com muitas aulas como a gente tratou, aí fica difícil nesse quesito.
PROFESSOR: Mas assim, quantas aulas seriam pra dar função afim? Eu acho que um problema como esse definiria quase tudo ... Você define função afim, você define valor numérico, você define imagem e domínio, você define o gráfico, você faz o estudo do sinal...
ALUNO 02: Você trabalha com muitas coisas.
ALUNO 01: Realmente, se partir por esse lado, realmente ...
PROFESSOR: Ou seja, você dá o conteúdo inteiro, tem que pensar dessa forma também. É porque estamos bitolados a seguir o livro didático e assim ... quem trabalhou em escola particular sabe que é aquela pressão de dar o conteúdo todo, dar algumas aulas... O cara demora mais do que outros, né?... Mas é uma coisa que vai se aperfeiçoando com o tempo, né?... se houve falhas, se demorou em mais de uma aula, você vai conduzindo e tentando melhorar.
ALUNO 01: E a gente estava aplicando resolução de problemas nesse problema ....
Professor: Isso ...

No trecho do diálogo anterior, as questões relacionadas ao tempo didático e curricular são discutidas, levando os atores a refletirem sobre em pontos que vão além da sala de aula. Observamos que o PEP aplicado leva a um nível de codeterminação acima da disciplina, chegando a um nível de escola. Neste sentido, o dispositivo didático segue à sua funcionalidade de discutir temas relacionados aos níveis de codeterminação; nesse caso, de forma crescente, gerando caminhos para a possibilidade de uma mudança praxeológica do professor e dos seus alunos, e, consequentemente, curricular (CHEVALLARD, 2007; RODRIGUEZ; BOSCH; GASCÓN, 2007).

Ao realizarmos a nossa análise externa do dispositivo didático, tomamos por base o cronograma inicial, de acordo com o qual estavam previstos 8 (oito) encontros presenciais, mas toda a aplicação foi finalizada em 6 (seis) encontros. O motivo dessa diminuição está relacionado ao desenvolvimento da resolução da Questão Geratriz pelos alunos, conduzido pelo professor em sala. Lembramos que o cronograma inicial foi uma proposta, a qual será adequada para o próximo estudo empírico, assim como serão adequadas as mudanças do nosso modelo epistemológico de referência para o ensino de função.

Nessa última seção presencial desse primeiro estudo empírico, foi desenvolvida, basicamente, a $Q_2$. Os alunos construíram as famílias de funções utilizando o GeoGebra, assim como discutiram o significado e a aplicação das representações gráficas em situações possíveis, ao se tratar desse tipo de aposentaria. Na imagem seguinte, apresentamos o percurso de estudo e pesquisa realizado pelos alunos ao tentarem resolver a $Q_2$:

Figura 90 - Percurso dos Grupos Durante o Sexto Encontro do Primeiro Estudo




Fonte: próprio autor (2019)

Os alunos, ao se depararem com novas questões geradas pela $Q_0$, formularam novas hipóteses e tentam delimitar o caminho a ser seguido. Como já possuíam o modelo funcional e contínuo, partiram para a identificação do domínio e da imagem, fizeram o estudo do sinal, analisaram os termos da função e utilizaram o modelo da família de função para as construções gráficas; consequentemente, realizaram a interpretação dos resultados.

Os tipos de tarefas marcadas de azul são as etapas que não foram utilizas pelos alunos, pelo fato de não ser necessária a construção do modelo funcional. O registro, no GeoGebra, das limitações dos domínios e das imagens não foi possível de se realizar por causa do tempo didático, ao qual o professor é submetido pela instituição a que ele é sujeitado.

Ao observarmos o percurso seguido pelos alunos, verificamos que foram diversos os conteúdos relacionados ao conceito de função, das suas noções básicas até sua aplicação e interpretação gráfica em um momento presencial. Este fato nos leva a entender que o PEP pode ser aplicado e ter resultado positivos relacionados à compreensão do saber em jogo, assim como pode ser uma alternativa curricular que vai além da questão disciplinar.

### 5.1.9. Análise Preliminar do Primeiro Estudo Empírico

No decorrer dos seis momentos presenciais, os tipos de tarefas propostas pelo PEP levaram os alunos a utilizarem técnicas já conhecidas, tais como: a determinação do zero da função por meio das etapas para resolver uma equação do primeiro grau, o método da adição para a resolução de um sistema de duas variáveis e o método da construção de gráficos de uma função do primeiro grau, com a utilização de dois valores diferentes do domínio.

Também aperfeiçoaram técnicas para determinar as funções de $TC$ e $AC$, apoiados por um amparo tecnológico, no qual a sua funcionalidade foi identificada e aplicada. Nesse primeiro estudo, pudemos perceber o crescimento das organizações matemáticas utilizadas pelos alunos, no ponto que partiram de organizações matemáticas pontuais, passaram para organizações matemáticas locais e chegaram a uma compreensão da organização matemática regional (CHEVALLARD, 1999).

No que se refere ao contrato didático e a seus efeitos, destacamos dois deles que foram predominantes: o efeito topázio e o efeito abusivo de analogia. Tais efeitos foram verificados em todos os encontros desse primeiro estudo, marcado pelo protagonismo excessivo do professor em determinados momento das aulas.

Alguns contratos foram estabelecidos durante esse primeiro estudo, dentre os quais merecem destaque aqueles que mudaram no decorrer da aplicação do PEP, fazendo o professor distanciar-se do saber em jogo e ocasionando um aumento da responsabilidade e autonomia do aluno. Tal processo, foi desenvolvido a partir de várias renegociações e de rupturas, tanto por parte dos alunos com por parte do professor, e provocou mudanças de praxeologias durante o desenvolvimento do PEP.

Ao analisarmos o nosso MER, observarmos que ele sofreu poucas alterações durante a aplicação do dispositivo didático. Foram abordadas a construção, a interpretação e a aplicação das funções discretas, como também a transição de um domínio discreto para um domínio contínuo, buscando-se a compreensão de uma função contínua. Também foi abordado o estudo dos termos de uma função, de famílias de funções, assim como a sua variabilidade.

Uma questão que devemos abordar é a compreensão da relação entre as grandezas de uma função, conceito básico já que, muitas vezes, as técnicas tomam um papel de destaque, ofuscando os conceitos essenciais para compreensão da funcionalidade e aplicação do conceito.

Na aplicação do dispositivo didático, buscamos seguir o planejamento inicial apresentado no cronograma proposto. O professor teve toda a liberdade para alterar e propor mudanças que achasse necessário. Nesse sentido, ele fez as alterações e seguiu a sua própria organização didática, tomando por base a nossa proposta metodológica. Com esse procedimento, sentiu-se à vontade para conduzir os encontros, nos quais surgiram vários momentos produtivos no ensino, através de perguntas realizadas pelos alunos e que foram além do nosso planejamento.

Tal fato é condizente com a proposta do PEP, um desenvolvimento sem as amarras de um planejamento rígido, mas com objetivos para buscar a compreensão do conceito abordado e de sua aplicabilidade (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). Consequentemente, as mudanças praxeológicas apresentadas pelo professor, durante a aplicação do dispositivo didático, caracterizaram uma influência positiva em sua formação. Com a intenção de analisar com mais detalhes o processo de ensino e aprendizagem do PEP, iniciaremos a análise do segundo estudo empírico, com o auxílio do Ciclo de Solução de Problemas (PRETZ; NAPLES; STERNBERG, 2003; STERNBERG; STERNBERG, 2017) e com a finalidade de levantar pontos complementares a nossa análise.

### 5.2 Segundo Estudo Empírico

Para a análise do segundo estudo, utilizamos os elementos da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1997, 1996, 1999, 2002, 2007, 2009) , da Noção do Contrato Didático (BROUSSEAU, 1986, 1996) e do Ciclo de Solução de Problemas (PRETZ; NAPLES; STERNBERG, 2003; STERNBERG; STERNBERG, 2017). Buscamos observar a evolução praxeológica do professor e dos alunos da disciplina Funções I, as relações contratuais estabelecidas, os seus efeitos, as renegociações, suas rupturas de contrato e a evolução do PEP, tomando pôr os passos e os *insights* (SMITH, 1996; STERNBERG; STERNBERG, 2017) apresentados no ciclo de solução de problemas, durante o processo de ensino e aprendizagem do dispositivo didático.

Para a descrição das análises, procederemos de forma semelhante ao primeiro estudo, a partir da descrição da formação do professor da disciplina e, em seguida, em os encontros presenciais. Relembramos que a aplicação do PEP foi realizada com alunos diferentes, mas com a participação do mesmo professor. Para a identificação dos alunos, utilizaremos o Aluno 07, o Aluno 08... lembrando que foram alunos diferentes que participaram do primeiro estudo empírico; no caso, outra turma.

#### 5.2.1. Continuação da Formação com o Professor da disciplina Funções I

O primeiro encontro da formação com o professor da disciplina Funções I foi realizado antes de iniciarmos a aplicação do PEP, no segundo estudo empírico. Aconteceu na primeira semana do mês de maio de 2018 e durou em torno de 60 minutos. Discutimos a condução de sua aplicação e o levantamento das possíveis datas de aplicação.

Com a ficha diagnóstica, revendo os enunciados e observando a possibilidade de alteração de algum item, chegamos à conclusão de que ela não seria alterada para a aplicação com a turma seguinte, mas o professor preferiu fazer uma pré-seleção dos itens a serem aplicados, não seguindo a ordem dos apresentados conforme sua disposição original.

Para a ficha de trabalho, o procedimento utilizado foi o mesmo, ou seja, não foram alterados os itens, seguindo-se a ordem apresentada. Tal procedimento do professor caracteriza uma evolução na sua formação, pelo fato de selecionar com mais cuidado os procedimentos praxeológicos que seriam adotados para seus alunos, com uma possível influência da participação estudo empírico anterior.

Outro ponto destacado foi a preocupação do professor em relação aos seus alunos, no sentido da sua compreensão dos conteúdos presentes nas fichas e, principalmente, na aplicação do PEP; se teriam ou não condições de acompanhá-los. No caso, discutimos e chegamos a uma conclusão conjunta: na medida da necessidade da turma, o professor poderia adequar a aplicação do dispositivo de acordo com as demandas apresentadas pelos alunos, com autonomia nessas eventuais adequações. Durante a aplicação do PEP, tivemos mais dois encontros, um deles antes do terceiro encontro presencial, pelo fato de este anteceder a apresentação da questão geratriz, e outro antes do quinto encontro, por dar início à utilização do GeoGebra. Estes encontros duraram em torno de 30 minutos, nos quais definimos as datas e revisamos os procedimentos de aplicação.

### 5.2.2. Análise do Primeiro Encontro Presencial do Segundo Estudo Empírico

O primeiro encontro presencial foi realizado no dia 17 de maio de 2018. A aula iniciou-se por volta das 19h20min, com a participação de 9 (nove) alunos. Primeiramente, o professor entregou a ficha diagnóstica a cada aluno e ressaltou a importância de deixar registrados todos os cálculos errados ou certos realizados por eles, no material entregue, como também que a resolução dos itens seria individual, mas com a possibilidade de conversarem entre si. Em seguida, o professor deu continuidade à aula, com a seguinte pergunta:

PROFESSOR: O assunto é sobre função! Quem pode me responder à seguinte pergunta: o que significa função? Hein, Aluno 09?
ALUNO 09: Função?!
PROFESSOR: Sim! O que significa uma função?
ALUNO 09: Difícil, né?...
ALUNOS: Silêncio....

O professor, ao iniciar com a pergunta sobre o significado de função e tentar identificar o nível de conhecimento dos alunos sobre o saber em jogo, teve a finalidade de adequar-se para a sua condução praxeológica. Tentou fazer com que os alunos participassem da aula, mas não obteve do Aluno 09 a resposta desejada, identificando que conhecimento em jogo não é o que aparentemente se conhece naquele momento.

Podemos relacionar este procedimento do professor à existência de um contrato didático presente no início da aula, quando professor realizou a apresentação do conhecimento em jogo com uma pergunta, para a qual aguardava uma resposta dos alunos. Por ser um conteúdo que está presente na educação básica, o professor espera que os alunos saibam o seu significado ao ingressarem no ensino superior, mas, neste caso, isso não aconteceu, e foi necessária de uma intervenção do docente para a compreensão do conceito pelos alunos.

Na continuidade da aula o professor insistiu em fazer o mesmo questionamento, afirmando que já havia sido visto algumas vezes, em aulas anteriores. Com isso, surgiu uma pequena discussão sobre o significado de função.

PROFESSOR: Definam o que é função para mim? Me dê a ideia?
ALUNO 15: Rapaz!
PROFESSOR: Rapaz... pode ser... relação de um rapaz com uma moça, pode ser...
ALUNO 15: É ... podemos pegar dois conjuntos A e B, e um elemento de A tem que estar associado a um elemento de B...
PROFESSOR: Certo... de dois conjuntos, é isso?
ALUNO 15: Sim...
PROFESSOR: É isso mesmo? Todo mundo concorda com ele?
ALUNO 07: A ideia específica de que função?
PROFESSOR: Tem a ideia e tem a definição formal do que é função.
ALUNO 07: Quer dizer que tem o conjunto A que tem elementos que partem para um elemento do conjunto B é função....
PROFESSOR: Tem elementos não (conjunto A), todos os elementos.
ALUNO 15: Se tem dois elementos no domínio e na imagem tem dois, e um elemento do domínio, não... dois elementos do domínio associado a um da imagem não é função.
PROFESSOR: Sim... muito bem, pelo menos...

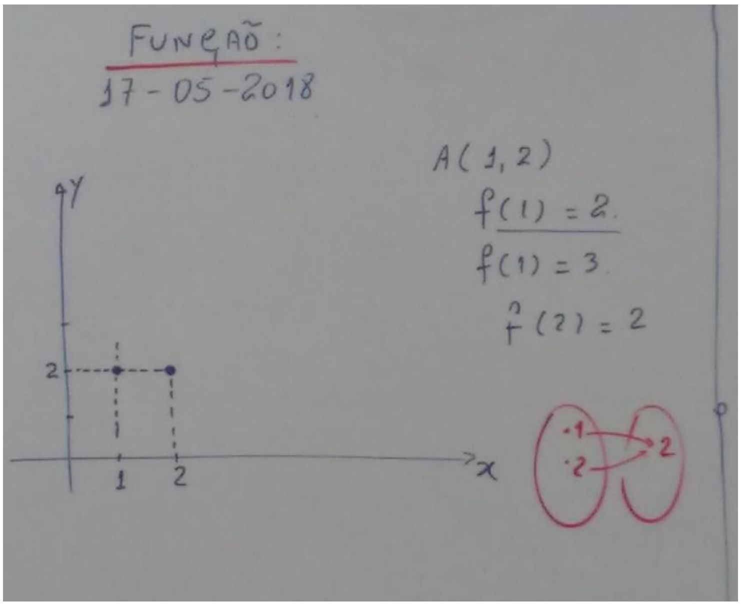
O diálogo anterior representa uma mudança praxeológica do professor em relação ao início da primeira aula do primeiro estudo empírico, pelo fato de conduzir a uma maior discussão antes de apresentar a definição de função, não apresentando o efeito topázio no início da aula.

Seguidamente, o professor continuou a discussão com os Alunos 07 e 15, sobre os conceitos informais e formais de função, como também sobre a ideia intuitiva do conceito, exemplificando-o com o preço da gasolina; no caso, o litro de gasolina está relacionado ao seu preço. Na medida em que são comprados mais litros, o valor aumenta em uma proporção linear, relacionando as grandezas presentes na situação (quantidade de litros e preço). Também foram utilizados outros exemplos, como: o aluguel de DVDs, que são complementados pelo Aluno 11 e relacionados a sua representação gráfica. Em seguida, o professor iniciou a discussão do item 01.

### Análise do Item 01 da Ficha Diagnóstica

Relembrando o item 01, existem quatro gráficos a serem identificados ou não como função. Um ponto a ser destacado no início desse item é que o professor não tinha escrito a definição de função nem como representá-la no quadro, utilizando apenas a discussão com os seus alunos, diferentemente do primeiro estudo. Consequentemente, o professor apresentou o item 01 e escreveu no quadro um exemplo para reforçar a definição de função.

Figura 91 - Exemplo de Função Escrito pelo Professor

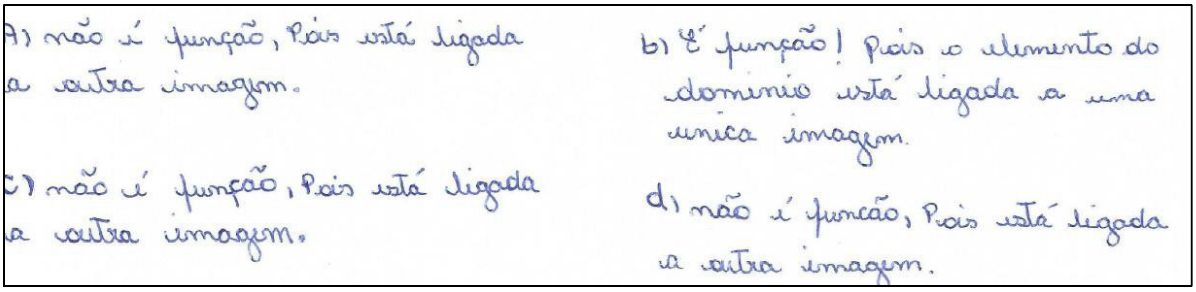



Fonte: próprio autor (2019)

Este procedimento do professor pode estar associado à influência que recebeu durante a sua formação, consolidada pela atuação na docência, com a necessidade de sempre exemplificar os elementos para os alunos, não esperando as suas resoluções. Esse fato foi confirmado porque, logo em seguida, o professor respondeu à letra “a” utilizando a técnica, diferente da utilizada na explicação inicial.

Observamos que a mudança do professor em relação às práticas de ensino é gradual e com resistência, dada a forte influência que foi estabelecida durante a sua formação. Em seguida, o professor pediu para os alunos resolverem as outras letras do item, justificando as suas respostas. A figura seguinte, apresenta algumas dessas respostas:

Figura 92 - Resposta do Aluno 11 do Item 01 da Ficha Diagnóstica




Fonte: próprio autor (2019)

As respostas apresentadas mostram que o Aluno 11 não compreendeu o conceito de função ao observar uma representação gráfica; não lhe foi claro o amparo tecnológico presente na técnica $(t_{1,2,})$, dificultando sua correta aplicação. Esse tipo de obstáculo foi apresentado nos registros de outros alunos, caracterizando em uma dificuldade não pontual.

**Análise do Item 02 da Ficha Diagnóstica**

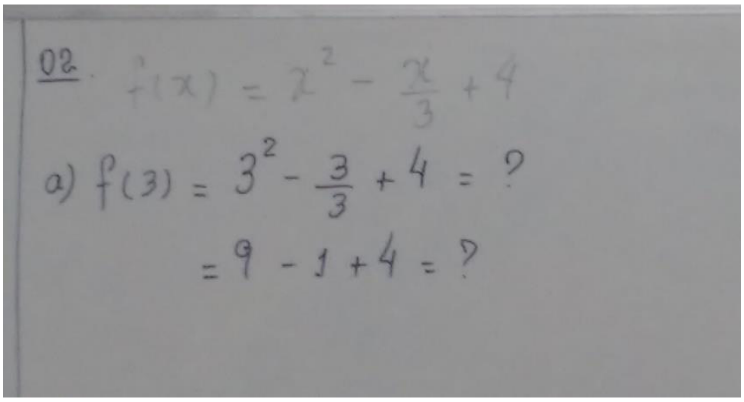
O item aborda o cálculo do valor numérico da imagem de uma função, na tentativa de construir uma relação de correspondência entre os elementos do domínio e da imagem. A técnica $\tau_{3,1}$ é geralmente utilizada, substituindo-se a variável $x$ por um valor numérico em $y = f(x)$. O professor iniciou a discussão do item 02 com a seguinte pergunta: o que significa calcular $f(3)$? Em seguida, leu o item e perguntou novamente à turma:

PROFESSOR: E aí, o que significa $f(3)$?
ALUNO 08: Calcular o y?
PROFESSOR: Calcular o y, é? E o y significa a ...?
ALUNO 08: A imagem ...
PROFESSOR: Muito bem! Então calcular $f(3)$ é calcular a imagem do 3, através daquela função. Então, como se faz isso? Então, como se faz isso, Aluno 14? O Aluno 08 já me falou o que é? Você concorda com ele?
ALUNO 14: ... (ficou em silêncio)

O professor tentou levar os alunos a uma discussão sobre o tema em jogo, com os mesmos argumentando em torno de suas respostas, numa dialética de pergunta e respostas

(FONSECA, CASAS, BOSCH e GASCÓN, 2009). Em seguida, conduziu a uma discussão para a resposta da letra “a”, que estava relacionada à pergunta inicial, e escreveu no quadro a resposta.

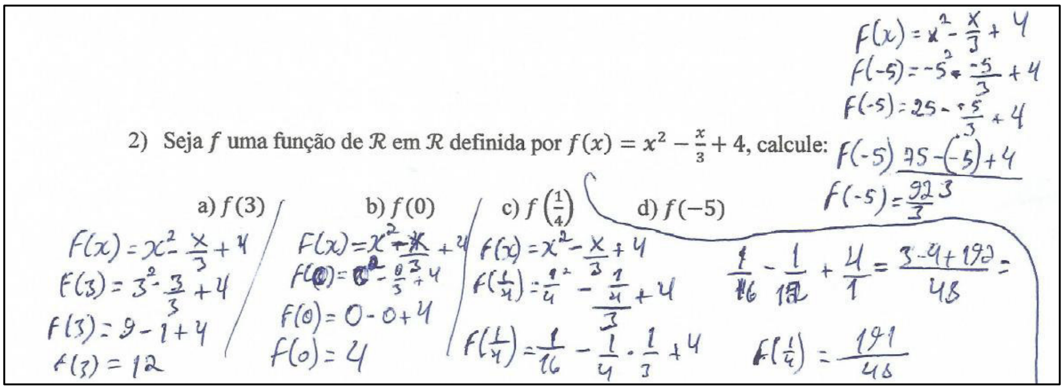
Figura 93 - Resposta do Professor do Item 02 Letra “a”




Fonte: próprio autor (2019)

Notamos que o professor institucionalizou a sua resposta no sentindo de os alunos confirmarem as praxeologias utilizadas. Em seguida, solicitou que os alunos respondessem às outras letras do item. A figura seguinte representa a resposta do Aluno 09 a essa solicitação:

Figura 94 - Resposta do Item 2 Realizada pelo Aluno 09




Fonte: próprio autor (2019)

As técnicas usadas pelo Aluno 09 foram as apresentadas e utilizadas pelo professor. Neste caso, podemos citar o contrato didático que está relacionado à repetição de técnicas pelo aluno e que foi apresentada pelo professor.

A repetição pode ter relevância em alguns casos, mas, em outros casos, essa dependência dos alunos ao professor pode paralisá-los na resolução de determinados problemas, tornando-se necessária a escolha de técnicas (STERNBERG; STERNBERG, 2017).

Durante a discussão sobre o item 02, foi levantada uma dúvida relacionada à letra “c” e relativa ao valor do domínio é uma fração, ocasionando aos alunos realizarem os seus cálculos com valores fracionários. Diante desta situação, o professor teve que intervir se dirigindo ao quadro e respondendo a letra “c”, relembrando conceitos dos divisores, dos múltiplos, dos mínimos múltiplos comuns e da potenciação.

Observamos que o professor tentou sempre relembrar conceitos matemáticos que fazem parte da fundamentação do conceito principal, necessários para a utilização das técnicas disponíveis. Destacamos que, durante a discussão deste item, o professor interagiu mais com os alunos e incentivou constantemente a discussão entre eles, com a finalidade de chegar à resolução, apresentando uma renegociação contratual e uma diminuição do efeito topázio.

**Análise do Item 03 da Ficha Diagnóstica**

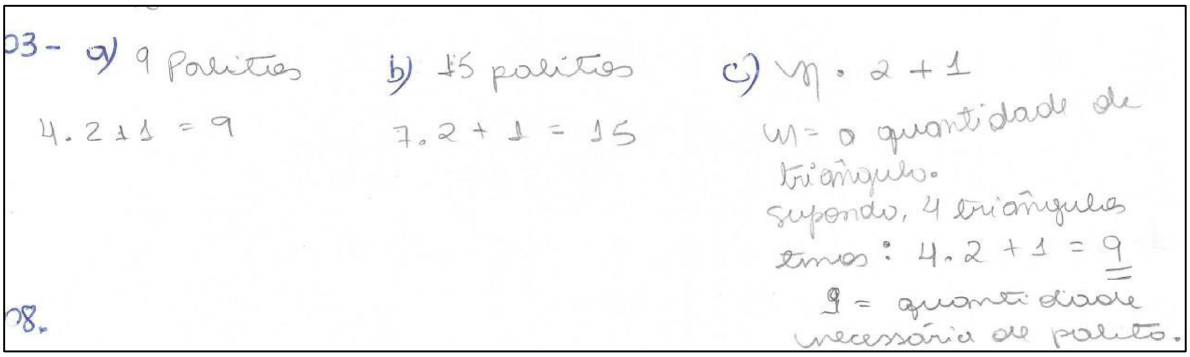
O item 03 tem a finalidade de relembrar a compressão da relação de dependência entre as variáveis. Para isso, utiliza a construção de triângulos equiláteros com palitos de fósforos, buscando, ao final, a construção de uma expressão funcional. A discussão do item tem início no momento em que alguns alunos ainda estavam envolvidos na resolução do item anterior. Tal atitude do professor pode estar relacionada à necessidade de cumprir o tempo didático estabelecido pela instituição, levando o professor a ter que interromper a resolução de alguns alunos para dar andamento ao seu planejamento.

PROFESSOR: Mas, voltando para a função ... Deixando um pouco a parte do cálculo de lado e voltando para a função, que não deixa de ser cálculo também. É ... para formar um triângulo eu preciso de quantos palitos? Um triângulo aqui?
ALUNO 14: Três...
PROFESSOR: Três aqui... (escrevendo no quadro a resposta). Para formar dois triângulos, eu precisei de quantos?
ALUNOS: Cinco...
PROFESSOR: Bem... para formar três triângulos?
ALUNOS: Sete...
PROFESSOR: Eu te pergunto a letra “a”... quantos palitos eu preciso para formar quatro triângulos?
ALUNO 15: Nove ...
PROFESSOR: Simples... E para formar sete triângulos?
ALUNOS: Quinze...

Notamos que os alunos tiveram uma participação maior nas respostas apresentadas, as quais conduziram para uma compreensão da questão e da relação estabelecida entre a quantidade de palitos e triângulos. Em seguida, o professor perguntou a resposta da letra “c”. Neste caso, os alunos tiveram que representar com uma expressão uma relação entre a quantidade de palitos com a de triângulos equiláteros.

No decorrer da aula para encontrar a resposta, os alunos discutiram entre si e mostraram algumas resoluções ao professor. A figura seguinte representa uma das resoluções:

Figura 95 - Resposta do Item 03 do Aluno 13


03 - a) 9 Palitos
4.2+1 = 9
b) 15 palitos
7.2 + 1 = 15
c) n . 2 + 1
n = a quantidade de triângulo.
supondo, 4 triângulos
temos: 4.2 + 1 = 9
9 = quantidade
necessária de palito.
08.

Fonte: próprio autor (2019)

O Aluno 13 apresentou a sua resposta justificando-a com um caso particular. Tal procedimento foi assim realizado devido à falta de conhecimento tecnológico do aluno, o que o impediu de utilizar, ou mesmo de indicar, a indução matemática em tal justificação. Depois de alguns minutos, o professor relembrou que os itens não respondidos em sala deveriam ser observados em outro momento e deveriam ser entregues nas aulas seguintes, Em seguida, iniciou a discussão do item 08.

**Análise do Item 08 da Ficha Diagnóstica**

Por decisão própria, o professor passou para o item 08, acreditando ser ele mais interessante por mobilizar outros conceitos relacionados à compreensão e aplicação de função. Este item trata da identificação dos intervalos da função e se a função é crescente ou decrescente, como também da imagem, do domínio e de alguns valores numéricos da função. O professor iniciou a sua explicação do item reproduzindo o gráfico no quadro a ela correspondente, e, em seguida, pediu a atenção dos alunos que ainda estavam respondendo ao item anterior.

PROFESSOR: Pessoal, pessoal, vamos lá ... Esse Item 08 aqui?! Tentei reproduzir o gráfico aqui, para a gente ir brincando com ele aí ... Tem o gráfico da função representado a seguir, pode representar o quê?
ALUNOS: ... (ficaram em silêncio)
PROFESSOR: A função é decrescente no intervalo de dois até quatro?
ALUNO 07: Decrescente?
PROFESSOR: Ela decresce?
ALUNO 07: É...
PROFESSOR: Ou seja, os valores do domínio vão aumentando e os valores da imagem vão diminuindo; no caso, é uma função decrescente.
ALUNO 07: No caso, de menos dois até....
PROFESSOR: Vamos lá, então vamos verificar esse gráfico, de dois até quatro onde 'tá...

Observamos, no diálogo anterior, que o professor, ao iniciar a discussão, impediu que o Aluno 07 tentasse apresentar a sua justificativa ao ser interrompido durante a explicação do item. Podemos associar essa atitude do professor à iminência do tempo de finalização de sua aula, que dispunha apenas de poucos minutos. Por essa razão, o professor adequou a sua praxeologia, ou seja, por influência das regras da instituição. Para dar a sua explicação, o professor se concentrou em tentar relacionar os valores do domínio aos valores da imagem, um dos princípios fundamentais para a compreensão da função.

Ao final do primeiro encontro presencial do segundo estudo empírico, notamos uma mudança significativa nas práticas de ensino do professor, que apresentou uma preocupação maior com a compreensão do conceito de função por parte dos alunos. Destacamos, também, a utilização de poucas técnicas pelo professor, a qual limitou as opções de resolução dos alunos.

### 5.2.3. Análise do Segundo Encontro Presencial do Segundo Estudo Empírico

O segundo encontro presencial foi realizado no dia 17 de maio de 2018, contou com a participação de 9 (nove) alunos e durou em torno de 60 minutos. Neste encontro, o professor aplicou a Ficha de Trabalho com a intenção de utilizar problemas que abordam o conceito de função afim e de suas aplicações. A ficha é composta de 10 (dez) itens, dentre os quais alguns a serem utilizados pelo professor na sala e outros a serem respondidos pelos alunos, em outro momento.

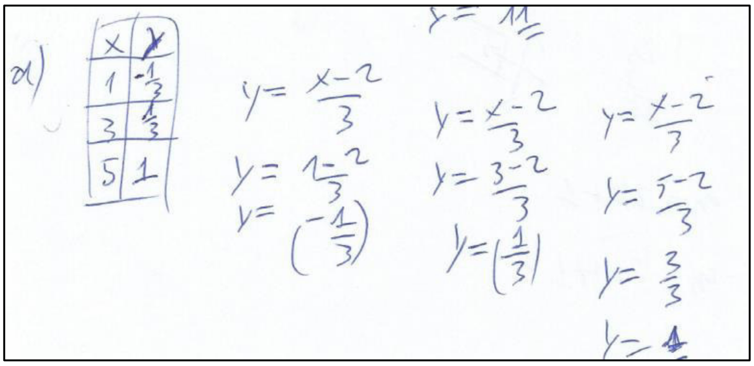
**Análise do Item 01 da Ficha de Trabalho**

Este item solicita a construção de gráficos em um mesmo plano cartesiano, com a intenção de verificar a representação algébrica e gráfica de uma função afim, verificando que se trata de uma reta, assim como de suas diferentes declividades. Antes de iniciar a aula, o professor separou os alunos em grupos e distribuiu o material. Em seguida, leu o enunciado do item 01 e explicou as possíveis formas de representar uma função, dando as seguintes explicações:

PROFESSOR: Tem duas formas de construir uma função, fazer um esboço dela, no caso. Uma é fazer uma pequena tabela, como o nosso amigo (Aluno 08) tinha citado sobre uma função, fazer uma tabela, escolher os valores para “x” substituir na função e encontrar os valores para “y”. Não sei se vocês lembram, mas era assim que estávamos trabalhando para a construção de gráfico, escolhíamos os valores para “x”, substituíamos na função e encontramos os valores para “y”... as imagens, marcávamos os pontinhos e construíamos o gráfico ... é assim que vamos proceder com esse primeiro exemplo ...
ALUNOS: (em silêncio).

Ao iniciar a aula com essa organização didática, o professor apresentou aos seus alunos a sua intenção praxeológica, de forma a induzir o caminho da resolução a ser realizado pelos alunos, destacando existirem duas formas de resolver o problema e que apenas uma maneira dessas maneiras foi apresentada aos alunos. Tal procedimento do professor retomou o contrato didático estabelecido e lhe deu maior proximidade do saber em jogo, determinando a técnica a ser utilizada pelos seus alunos. Em seguida, o professor foi ao quadro e respondeu à letra “a” do Item 01, reforçando a técnica a ser utilizada. Durante a sua explicação, o professor comentou rapidamente a tecnologia que sustenta a técnica por ele utilizada e ressaltou que a sua representação é uma reta. Comentou a correspondência biunívoca existente entre conjuntos infinitos, mas não aprofundou essa discussão, centrando-se na técnica apresentada.

Figura 96 - Resolução do Item 01 por um dos Grupos



Fonte: próprio autor (2019)

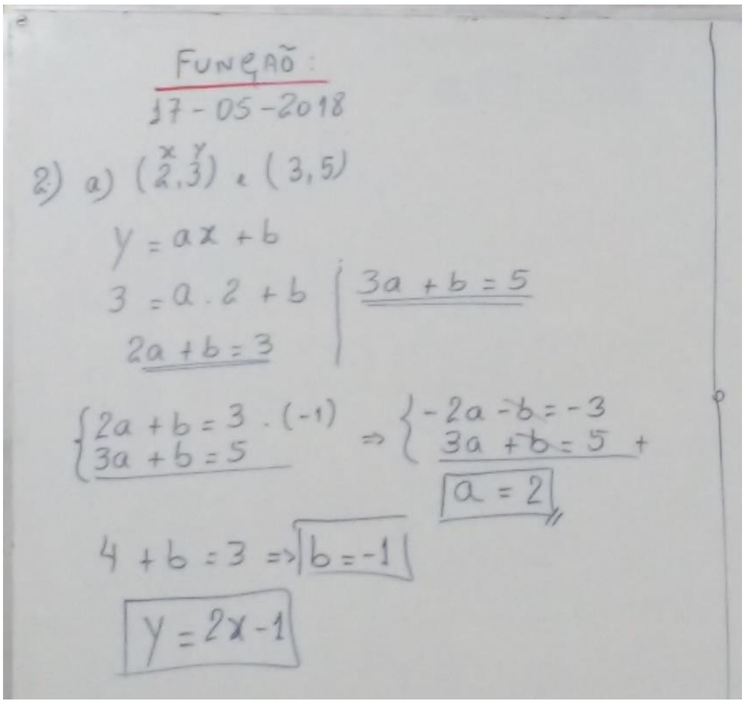
A figura 96 representa a técnica utilizada pelos alunos; no caso, a mesma apresentada pelo professor e que conduziu os alunos a uma repetição da técnica. Durante a resolução, os alunos apresentaram interesse em responder ao item com perguntas e questionamentos em alguns momentos, numa postura que podemos caracterizar como um processo de devolução (BROUSSEAU, 1986), como também com autonomia diante de um problema. Em seguida, o professor iniciou a discussão do item 02.

**Análise do Item 02 da Ficha de Trabalho**

Com relação a este item especificamente, era esperado que os alunos utilizassem técnicas associadas ao conteúdo de sistemas de equações lineares, a partir da expressão $y = ax + b$, assim como os seus métodos de resolução.

O professor iniciou o item 02 sem aguardar que os alunos terminassem o item anterior, alegando que aquele era uma continuação da ideia do conceito de função afim. Observamos que, no momento da explicação do Item 02, grande parte dos alunos não haviam dado atenção à fala do professor, a qual pôde ocasionar dificuldades na resolução, por parte dos alunos.

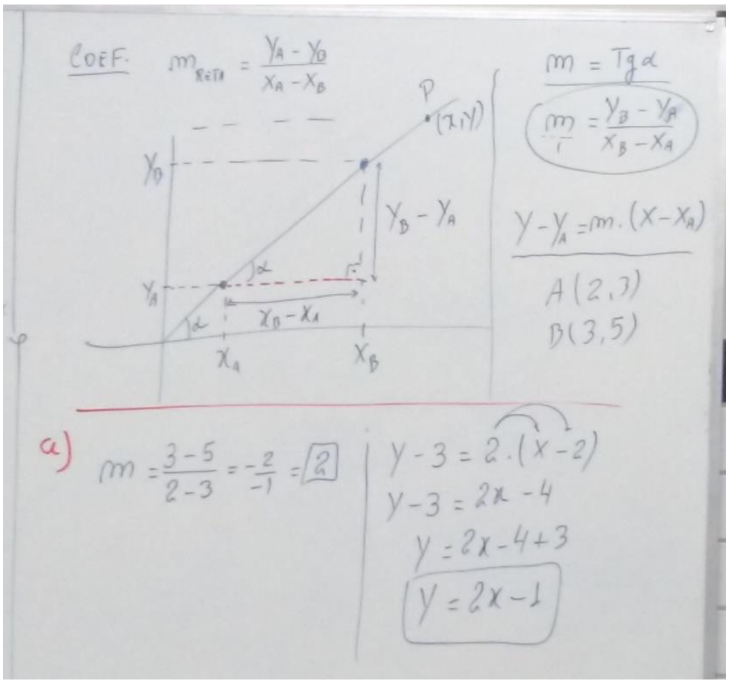
Figura 97 - Técnica Utilizada pelo Professor no Item 02




Fonte: próprio autor (2019)

A figura anterior apresenta a técnica utilizada pelo professor para exemplificar a resolução do item 02, com a utilização do método da adição na resolução de um sistema de equações. Consequentemente, o professor perguntou se existe alguma dúvida por parte dos alunos e relembrou que o item poderia ser resolvido por outro método (Método da Substituição), mas os alunos ficaram em silêncio e tentaram resolver as outras letras do item. Depois de alguns minutos, o professor retomou a discussão e apresentou outra técnica de resolução, expressa na imagem seguinte:

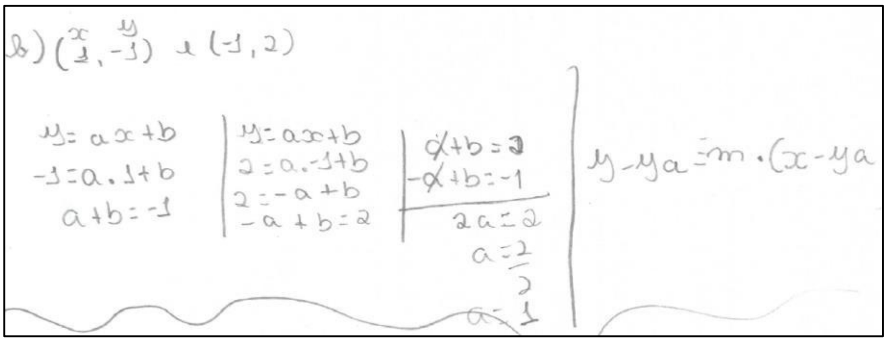
Figura 98 - Segunda Técnica Apresentada pelo Professor




Fonte: próprio autor (2019)

Ao apresentar a segunda técnica aos alunos, o professor promoveu uma discussão tecnológica, justificando essa técnica e relembrando alguns conceitos das relações trigonométricas que não foram abordadas no primeiro estudo. Com isso, registramos uma mudança praxeológica por parte do professor. Consequentemente, ele destacou que, para a resolução do item, poderia ser utilizada uma das duas técnicas. Em seguida, os alunos tentaram resolver as outras letras do item, discutindo entre si e retirando dúvidas com o professor.

Figura 99 - Resolução do Item 02 por um dos Grupos




Fonte: próprio autor (2019)

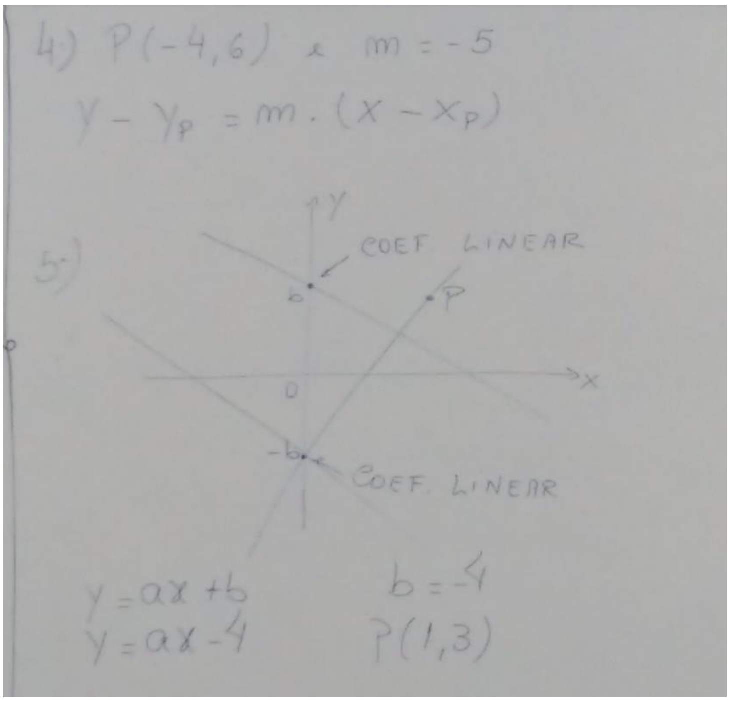
A figura anterior apresenta a resolução realizada por um dos grupos de alunos e mostra que utilizaram a primeira técnica apresentada pelo professor. Essa escolha pode estar relacionada à proximidade com a primeira técnica, a qual é bastante utilizada a partir do sétimo ano da educação básica; no caso da segunda técnica, o primeiro contato dos alunos se dá, geralmente, no ensino médio ou no ensino superior, mas os alunos preferem a técnica mais antiga.

**Análise do Item 04 da Ficha de Trabalho**

O item 04 é semelhante o item 02, com os valores de um ponto, e o seu coeficiente angular é solicitado a sua equação da reta. Foi explorada uma outra forma de determinar a sua representação algébrica.

Inicialmente, o professor tentou discutir o item 05, mas, por intervenção dos alunos, limitou-se ao item 04. Esta apresentou uma renegociação de contrato, com a finalidade de manter a discussão do saber em jogo, e o atendimento da solicitação dos alunos. No decorrer da explicação do item 04, o professor abordou o significado dos coeficientes angular e linear, que são pontos conceituais importantes relacionados à função afim, ressaltando que o coeficiente linear representa o ponto de interseção com o eixo das ordenadas, como também o termo independente da função.

Figura 100 - Explicação do Item 04 pelo Professor




Fonte: próprio autor (2019)

Consequentemente, o professor solicitou aos alunos que concluíssem o item 04 e resolvessem os outros itens da Ficha de Trabalho. Ressaltou a necessidade de estudar em outro horário diferente e avisou que estava à disposição para tirar, juntamente com os monitores das disciplinas, as dúvidas surgidas em sua sala.

### 5.2.4. Análises do Primeiro e Segundo Encontros Presenciais do Segundo Estudo Empírico

A finalidade de fazermos uma análise dos dois primeiros encontros é para observamos os principais pontos que influenciaram as praxeologias do professor e de seus alunos, juntamente com os elementos do contrato didático identificados. Lembramos que a análise dos dois primeiros encontros do primeiro estudo empírico foi realizada antes da aplicação da questão geratriz e que da mesma forma iremos proceder no segundo estudo empírico.

O contrato didático estabelecido pelo professor nestes dois primeiros encontros o aproxima mais do saber em jogo, porém a atitude de iniciar a discussão com uma pergunta pode levar a uma renegociação do contrato didático estabelecido no início da aula, como também à apresentação de exemplos diversos para relacionar às relações funcionais. Tais atitudes podem ocasionar uma diminuição dos efeitos de contrato.

Três pontos foram recorrentes durante os encontros: a repetição das técnicas pelos alunos apresentadas pelo professor, gerando uma imposição na sua utilização; a influência do tempo de aula imposto pela instituição, gerando uma mudança de postura do professor em determinados momentos; e a falta de conhecimento tecnológico pelos alunos, dificultando a compreensão da utilização de algumas técnicas.

Ao relacionarmos este estudo ao primeiro de estudo empírico, a postura do professor teve uma diferença significativa, de modo que a sua condução praxeológica apresentou mudança, com um discurso tecnológico mais amplo em alguns momentos. Houve uma diminuição dos efeitos de contrato (BROUSSEAU, 1996, 2008), principalmente o efeito topázio, ocorrido com menos frequência.

Apesar da limitação das técnicas trabalhadas, algumas foram mais exploradas e discutidas, o que caracterizou uma condução mais centrada na compreensão do conceito, que podemos relacionar à menor quantidade de itens resolvidos no segundo estudo, apesar de terem sido aplicados com a mesma quantidade de tempo.

Na análise externa, o tempo planejado foi cumprido. Lembramos que, na formação com o professor, a execução foi alterada com base no primeiro estudo empírico. Pelo cronograma proposto, a Ficha Diagnóstica seria aplicada no primeiro encontro presencial e a Ficha de Trabalho, no segundo encontro presencial, para em seguida, aplicarmos a questão geratriz. Em seguida, iniciaremos a análise do terceiro encontro presencial, no qual a questão geratriz foi aplicada.

### 5.2.5. Análise do Terceiro Encontro Presencial do Segundo Estudo Empírico

Antes de iniciarmos a apresentação da análise do terceiro encontro presencial, destacamos dois pontos importantes: o primeiro ponto é a formação realizada com o professor da disciplina Funções I antes deste encontro, na qual tratamos de rever e comentar a questão geratriz e os percursos matemáticos, ocasionando pequenas mudanças na condução da aplicação do PEP; o segundo ponto está relacionado ao Ciclo de Solução de Problemas (PRETZ; NAPLES; STERNBERG, 2003), já que, a partir deste encontro, os elementos teóricos passaram a ser utilizados na análise, por se tratar da apresentação e do início do desenvolvimento da questão geratriz.

O terceiro encontro presencial aconteceu no dia 07 de junho de 2018, com a participação de 7 (sete) alunos. Teve início às 19h25min e durou em torno de 45 minutos. No início da aula o professor distribuiu a questão geratriz aos grupos de alunos e as folhas de anotações para registrar os seus cálculos. O professor iniciou a discussão relembrando que, nas aulas passadas, foi apresentado o conceito de função e, consequentemente, o conceito da função afim. O professor comentou que iria dar continuidade ao assunto funções e solicitou ao Aluno 07 fazer a leitura do problema; no caso, a questão geratriz.

Destacamos três pontos para esse início de aula: 1) a apresentação do conceito a ser trabalhado na aula pelo professor, antecipando o conteúdo previsto, a abordado na resolução da questão geratriz; 2) o tipo de problema apresentado aos alunos, que diferiu dos problemas habituais apresentados nos livros didáticos e que ocasionou uma quebra de contrato didático; 3) a relação entre o conceito de função e o primeiro passo do CSP, no qual os alunos passam a identificar o problema a ser resolvido. Depois da leitura do problema, pelo Aluno 07 o professor iniciou o seguinte diálogo:

PROFESSOR: Então, a regra de aposentadoria que está valendo ... a nova reforma será por uma nova lei que só deve ser mudada depois das eleições (eleições presidenciais de 2018), mas a regra que está valendo para a aposentadoria é essa daí (Fórmula 85/95), deixando claro que tem alguns regimes que têm aposentadorias especiais, tipo os professores, que, com trinta anos de trabalho em sala de aula, têm o direito de solicitar a aposentadoria. E tem outras especiais, mas a maioria dos brasileiros são regidos por essa regra de aposentadoria. Para mulheres, é a idade mais o tempo de contribuição... têm que dar 85 anos, e os homens, 95 anos, até 2018, este ano. A partir do ano que vem, de 2019 a 2020, passa a ser 86 para as mulheres e 96 para os homens. E vai aumentado aí até 2021, e vai aumentando 87 e 97... até chegar a 2027 com mulheres, 90, e homens, 100, caso não haja nenhuma outra mudança, ok?!
ALUNO 07: Ok!
PROFESSOR: Baseado nisso, eu faço a seguinte pergunta para vocês (o professor fez a leitura de $Q_0$ ): como podemos representar essa situação? O que poderíamos construir para representar essa situação?
ALUNO 08: Acho que pode ser um gráfico.
PROFESSOR: Um gráfico pode ser uma possibilidade. Que mais podíamos construir para representar essa situação?
ALUNOS: (ficaram em silêncio)
PROFESSOR: O Aluno 08 falou do gráfico, que pode representar e construir essa situação. Mais outra coisa que podemos ...
ALUNO 07: Uma planilha, pode também?
PROFESSOR: Uma planilha ou tabela, não é? São a mesma coisa. Parabéns, Aluno 07! Mas como poderíamos construir essa tabela para visualizarmos essa situação melhor?
ALUNOS: ... (ficaram em silêncio)
PROFESSOR: De que forma vocês iam construir a tabela? Para ir analisando essa aposentadoria, de que forma? Iria ter o quê nessa tabela?
ALUNO 14: Iria ter o ano.
PROFESSOR: O ano?
ALUNO 07: Tempo de contribuição.
PROFESSOR: Tempo de contribuição! Muito bem, muito bem ... O que mais?
ALUNO 15: A idade.
ALUNO 07: O sexo.
PROFESSOR: A idade, o sexo que precisa definir, muito bem! Ok...

No diálogo anterior, verificamos que o professor tentou contextualizar o problema apresentando alguns de seus detalhes e exemplificando com outras situações, apresentando uma considerável mudança positiva em relação à forma como conduziu a aula no terceiro encontro do primeiro estudo empírico. Apesar da participação dos alunos não ter sido grande neste estudo, tal fato pode estar relacionado à ruptura de contrato na apresentação do problema, gerando incertezas nas respostas.

No caso do primeiro passo do CSP, podemos observar que os alunos identificaram que tem um problema a ser resolvido, apesar de não terem definido como resolvê-lo, iniciando o processo de devolução (BROUSSEAU, 1986).

Em seguida, o professor foi ao quadro para iniciar a construção da tabela e a complementou com algumas das informações levantadas pelos alunos. A idade inicial de contribuição, a ser colocada na tabela, foi deixada pelo professor a critério dos alunos, que escolheram a idade de 18 anos para o caso das mulheres.  O professor preencheu as quatro primeiras linhas da tabela para exemplificar aos alunos o seu preenchimento.

Figura 101 - Tabela Construída pelo Professor no Terceiro Encontro Presencial

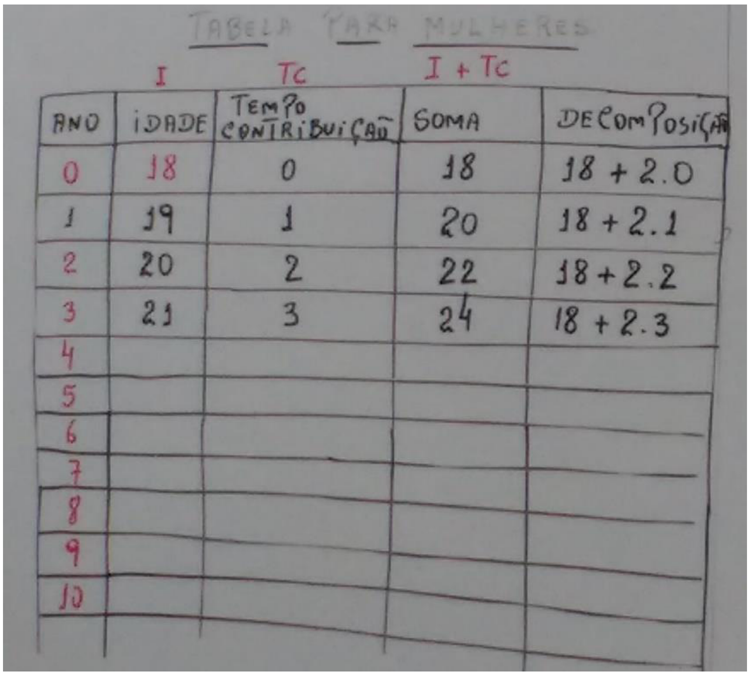


TABELA PARA MULHERES

| ANO | IDADE (I) | TEMPO CONTRIBUIÇÃO (Tc) | SOMA (I + Tc) | DECOMPOSIÇÃO |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 18 | 0 | 18 | 18 + 2.0 |
| 1 | 19 | 1 | 20 | 18 + 2.1 |
| 2 | 20 | 2 | 22 | 18 + 2.2 |
| 3 | 21 | 3 | 24 | 18 + 2.3 |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |
| 9 | | | | |
| 10 | | | | |

Fonte: próprio autor (2019)

A figura anterior representa o procedimento iniciado pelo professor em relação à resposta da questão geratriz e de suas derivadas. Ao solicitar que os seus alunos encontrassem uma representação da situação atual (ano 2018) da aposentadoria para o caso da mulher, ele estava relacionando esse dado à questão $Q_1$, derivada de $Q_0$. Em seguida, solicitou que fosse determinada uma representação para os dez primeiros anos. Assim, tivemos a $Q_{1,1}$, que é uma questão derivada da $Q_1$.

O professor não escreveu as questões derivadas como são apresentadas na nossa proposta, mas comunicou aos alunos o caminho a seguir. Esse procedimento do professor, no início do desenvolvimento da questão geratriz, se repetiu novamente em relação ao primeiro estudo. Com isso, assumiu para si a maior responsabilidade na condução do PEP, dificultando a partilha das responsabilidades com os alunos.

É importante destacar que o PEP conduz para uma partilha de responsabilidades entre o professor e seus alunos na resolução da questão geratriz, com a finalidade de proporcionar, de maneira equilibrada, o ensino e aprendizagem do saber em jogo (LUCAS, 2015).

Depois de alguns minutos de silêncio reservados aos cálculos realizados pelos alunos, para o preenchimento da tabela (figura 101), o Aluno 08 fez o seguinte comentário:

ALUNO 08: Pela tabela é que nós percebemos os padrões (aparentemente surpreso), vão aparecendo os padrões...
PROFESSOR: É essa a ideia... é essa a ideia.... Eu quero que vocês construam aqui (o professor apontou para a tabela construída no quadro)... Porque vamos construir aqui uma relação, e a relação entre quem e quem, é isso que vocês irão saber já já... É essa a ideia Tudo isso para chegar em uma Função.

Podemos relacionar o comentário do Aluno 08 à possibilidade da existência de um *insight* (SMITH, 1996), pelo fato de ele ter percebido e compreendido a existência de padrões matemáticos na construção de tabelas. O fato é confirmado pelo professor, em seguida, ao apresentar a sua intenção com a construção da tabela. Minutos depois, os alunos preencheram a tabela com o auxílio do professor.

Figura 102 - Preenchimento da Tabela por um dos Grupos

Tabela Para Mulheres / Homens

| | I | TC | I+TC | |
|---|---|---|---|---|
| Ano | Idade | Tempo contribuição | Soma | Decomposição |
| 0 | 18 | 0 | 18 | 18+2.0 |
| 1 | 19 | 1 | 20 | 18+2.1 |
| 2 | 20 | 2 | 22 | 18+2.2 |
| 3 | 21 | 3 | 24 | 18+2.3 |
| 4 | 22 | 4 | 26 | 18+2.4 |
| 5 | 23 | 5 | 28 | 18+2.5 |
| 6 | 24 | 6 | 30 | 18+2.6 |
| 7 | 25 | 7 | 32 | 18+2.7 |
| 8 | 26 | 8 | 34 | 18+2.8 |
| 9 | 27 | 9 | 36 | 18+2.9 |
| 10 | 28 | 10 | 38 | 18+2.10 |

Fonte: próprio autor (2019)

Ao observarmos a tabela construída por um dos grupos (figura 102) e os diálogos anteriores, podemos relacionar esses elementos aos quatro primeiros passos do CSP (PRETZ; NAPLES; STERNBERG, 2003).

No caso, ocorreu a identificação, pelos alunos, da existência de um problema a ser resolvido (passo 1), a sua representação através dos valores e expressões numéricas (passo 2), a geração de questões derivadas a partir da $Q_0$, iniciando uma estratégia de resolução (passo 3) e o início da organização dos dados com a intensão de articulá-los.

É importante frisar, que, no momento em que os alunos concluíram o preenchimento da tabela para os dez primeiros anos, finalizaram a questão derivada $Q_{1,1}$, levando o processo do ciclo de solução de problemas de volta ao início para responderem à $Q_{1,2}$, confirmando o processo cíclico do CSP na resolução da questão geratriz.

Também destacamos o processo de devolução ocasionado pela situação fundamental (BROUSSEAU, 1986) gerada pelo professor, iniciando-se, assim, o processo de crescimento das organizações matemáticas proporcionada pelo PEP, em uma organização matemática pontual (CHEVALLARD, 1999). Em seguida, o professor iniciou o seguinte diálogo:

PROFESSOR: Eu coloquei, pessoal, o nome "tabela para mulheres", mas, para os homens, essa tabela iria influenciar em alguma coisa? Essa tabela em si...
ALUNOS: (ficaram em silêncio)
PROFESSOR: Se tem alguma diferença nessa tabela que estamos chamando para as mulheres?
ALUNO 07: Se a regra é mesma ou não, né?...
PROFESSOR: Sim, se a regra é mesma ou não. Muito bem. O que vai diferenciar um do outro?
ALUNOS: É o tempo final, o tempo de contribuição? Contribuição...
PROFESSOR: É, muito bem, mas é.... é em relação à soma, não é?... que está diferenciando...
ALUNOS: É... é a soma.
PROFESSOR: Mas todo mundo concorda que, para essa tabela, não há diferença? Se é para homens e mulheres essa tabela que estamos construindo? Porque, essa regra de somar idade e tempo de contribuição pode usar para qualquer um dos dois; então, melhorando um pouco aqui (o professor complementou com o nome "homens" no título da tabela).
ALUNO 07: Agora é só a soma, temos que trabalhar mais...

Observando o diálogo anterior, verificamos que o professor tenta alertar os alunos para o fato de os valores apresentados na tabela poderem ser utilizados para mulheres e homens, com a finalidade de construir uma expressão que generalize uma situação para o caso das mulheres e para o caso dos homens. Em seguida, o professor perguntou se podemos generalizar esses elementos tomando por base as expressões apresentadas na última coluna da tabela (Imagem 86).

Neste momento, o professor ressaltou não ser preciso preencher dezenas ou centenas linhas na tabela para chegar a uma generalização, mas que, com algumas linhas preenchidas, pode-se tentar chegar a uma expressão genérica. Tal procedimento do professor remeteu a um discurso tecnológico ligado à indução matemática; ele tentou, dessa forma, disponibilizar ferramentas praxeológicas para proporcionar uma mudança de organização matemática; no caso, para uma organização matemática local.

Destacamos, que, durante a discussão para chegar às expressões que representassem o caso das mulheres e o caso dos homens, o professor tentou explicar de formas diferentes como fazer isso, mas evitando apresentar a resposta diretamente e aguardando as respostas dos alunos. Tal fato, nós o relacionamos à renegociação do contrato didático estabelecido, na medida em que tentou conduzir à compreensão do saber em jogo, sem apresentar a resposta diretamente, ocasionando uma diminuição dos efeitos de contrato, principalmente do efeito topázio, de presença significativa no primeiro estudo empírico.

Destacamos que o professor abordou, na discussão, a ideia de constante e variáveis que são elementos essenciais para a compreensão conceitual da função. Em seguida, institucionalizou a expressão escrevendo no quadro: $18 + 2TC$.

Para tentar concluir a construção da expressão, o professor perguntou aos alunos por quanto tempo o homem e a mulher teriam que trabalhar. Para se obter essa resposta, era necessário igualar a expressão $18 + 2TC$ ao valor da soma 85, para o caso das mulheres, e 95, para o caso dos homens, porém, até este momento da aula, os alunos não tinham expressado esta igualdade. Após alguns minutos, o professor interveio comentando:

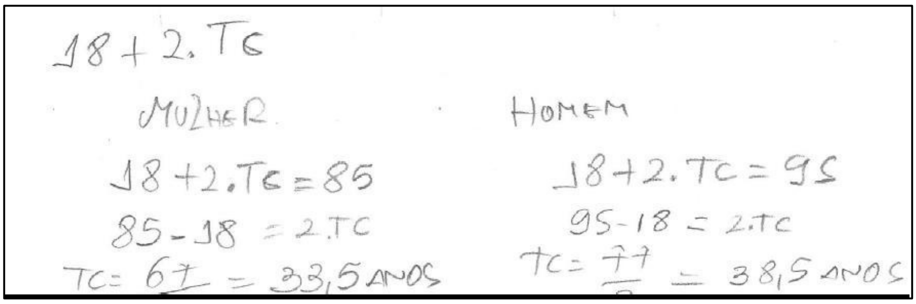
PROFESSOR: Então, com quantos anos o homem ou mulher iria se aposentar? Começando aos 18 anos, no caso dessa expressão? E aí, Aluno 07?
ALUNO 07: ... (ficou em silêncio)
PROFESSOR: O que eu tenho que fazer? O que tenho que fazer?
ALUNO 15: 85 igual à fórmula que temos que fazer, $18 + 2TC$!?
PROFESSOR: Mas o que é... quero achar... qual a minha pergunta aqui? Eu quero saber qual o tempo de contribuição para uma mulher se ela começasse a trabalhar aos 18 anos? Então, qual a pergunta que você precisa saber? Qual a regra dela, da mulher, a que está valendo para 2018? Ela se aposenta quando o quê?
ALUNOS: (vários falaram ao mesmo tempo sobre a soma da idade e da contribuição)
PROFESSOR: Muito bem! O que tem que acontecer, esse resultado aqui ($18 + 2TC$) para mulher tem que dar quanto?
ALUNO 08: 85...
PROFESSOR: Então, o que temos que fazer?
ALUNO 08: $18 + 2TC = 85$

PROFESSOR: Muito bem!!

Ao analisarmos o diálogo anterior, levantamos dois pontos. O primeiro deles diz respeito às formas de apresentar a expressão pelos Alunos 15 e 08. O Aluno 15 apresentou a expressão $85 = 18 + 2TC$, e o Aluno 08 apresentou a expressão $18 + 2TC = 85$. As duas formas estão corretas matematicamente, porém o professor considerou correta apenas a expressão do Aluno 08, o que representou uma rigidez na resposta, por parte do professor. O PEP tenta conduzir para uma flexibilização nas respostas e nas suas representações, para viabilizar uma variedade de caminhos até a $R^{\heartsuit}$ (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). O procedimento didático realizado pelo professor pode estar relacionado a sua formação, de considerável influência em sua condução didática.

O segundo ponto refere-se à possibilidade da existência de *insights* de alguns alunos, evidentes nos Alunos 15 e 08, no momento de expressarem a expressão algébrica. Consequentemente, o professor institucionalizou a expressão $18 + 2TC = 85$ como uma equação do primeiro grau e solicitou aos os alunos que determinassem o tempo de contribuição para o caso dos homens e para o caso das mulheres.

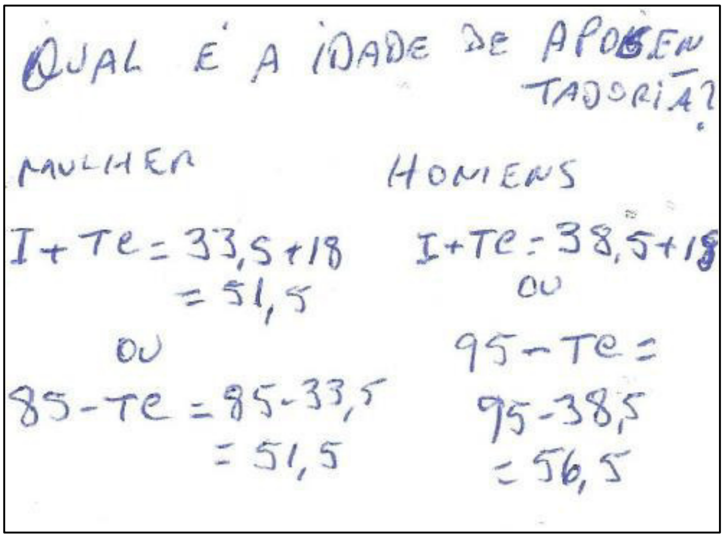
Figura 103 - Determinação do Tempo de Contribuição para Homens e Mulheres Desenvolvida por um dos Grupos




Fonte: próprio autor (2019)

A Imagem 87 apresenta a praxeologia utilizada por um dos grupos, ao determinar uma expressão que representa o tempo de contribuição para homens e para mulheres, graças à articulação de técnicas. Em seguida, o professor perguntou com qual idade a pessoa, homem ou mulher, irá aposentar-se, tomando por base a expressão encontrada. No caso, os alunos encontraram 51,5, para as mulheres, e 56,5, para os homens.

Figura 104 - Resposta de um dos Grupos Relacionada às Idades de Aposentadoria

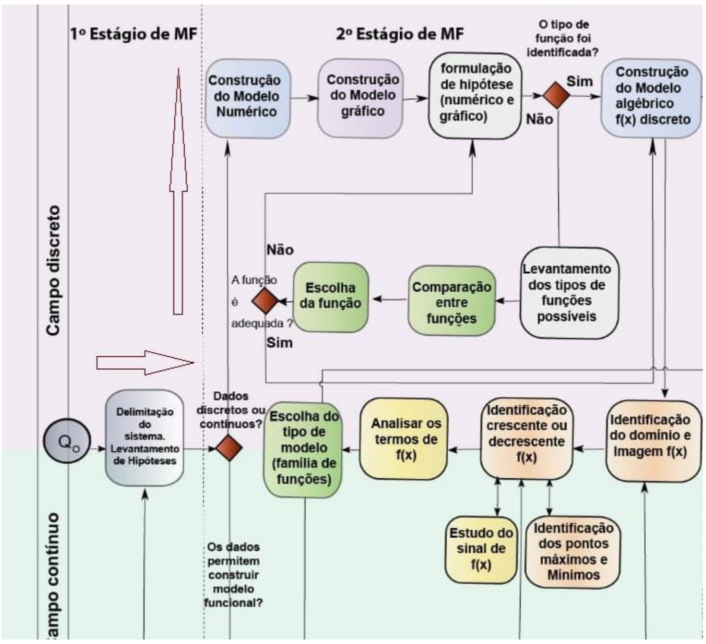



Fonte: próprio autor (2019)

A imagem anterior, representa a conclusão da $Q_{1,2,}$ na qual os passos do CSP podem ser relacionados aos da praxeologia utilizada, obtendo-se os quatro primeiros passos articulados ao passo 5. Para essa situação, os alunos identificaram e definiram o problema, utilizaram uma estratégia para resolvê-lo, que, possivelmente, foi a estratégia heurística (STERNBERG; STERNBERG, 2017), e consequentemente, organizaram e utilizaram as técnicas disponíveis para resolver a questão derivada. Lembramos que os outros passos do CSP, como o 6 e 7, a nosso entender, aconteceram simultaneamente aos demais, o que dificulta a indicação dos seus momentos durante a resolução das questões derivadas.

Nossa análise externa é referente à verificação do nosso modelo epistemológico de referência representado pelo nosso diagrama, para o ensino da função e do cronograma previsto para a aplicação do PEP. No caso do diagrama para o ensino de função, tivemos a seguinte progressão:

Figura 105 - Análise do Diagrama no Terceiro Encontro Presencial do Segundo Estudo Empírico




Fonte: próprio autor (2019)

A figura anterior representa o caminho seguido pelos alunos no terceiro encontro presencial do segundo estudo empírico, no desenvolvimento do PEP. Na apresentação da questão geratriz, os alunos delimitaram o seu percurso, conduzido para o campo discreto. Em seguida, se depararam com o tipo de tarefa que leva à construção do modelo numérico, finalizando o primeiro estágio da modelação matemática e iniciando o segundo estágio. Em relação ao estudo anterior, o percurso foi o mesmo, não havendo qualquer diferença. Quanto ao cronograma de aplicação do PEP, o professor seguiu a alteração realizada com base no primeiro estudo e manteve o seu planejamento didático.

Ao final desse encontro, destacamos a relação existente entre a condução do PEP, com os passos do CSP, a presença de possíveis *insights*, a quebra de contrato realizada pela questão geratriz, o contrato didático estabelecido com as suas renegociações, a diminuição da presença do efeito topázio e a articulação de algumas técnicas, proporcionando um início de mudança de uma organização matemática pontual para uma local, como também de mudanças na organização didática do professor.

### 5.2.6. Análise do Quarto Encontro Presencial do Segundo Estudo Empírico

O quarto encontro presencial aconteceu no dia 07 de junho e teve início por volta das 20h50min, no Laboratório de Matemática, que é localizado no mesmo prédio onde a pesquisa foi realizada. Participaram 7 (sete) alunos e a aula teve uma duração de 50 minutos. O professor a iniciou retomando a discussão da aula anterior, relembrando as expressões: $18 + 2TC = 85$ e $18 + 2TC = 95$. Em seguida, perguntou como se pode generalizar esse cálculo para qualquer idade inicial.

PROFESSOR: O tempo de contribuição (TC), tá certo?... Para qualquer idade inicial, tanto para homens e para mulheres, aquela generalização?! A gente fez esse cálculo aqui do TC (apontou a expressão escrita no quadro), para uma idade inicial de 18 anos. Então, como é que a gente pode construir e generalizar esse TC para uma idade qualquer? Uma idade qualquer inicial?
ALUNO 08: Então ficaria I, igual dois vezes TC...
PROFESSOR: (faz um sinal de positivo com a cabeça)... Posso, então, substituir (idade pela letra I). Como eu quero generalizar? Como o Aluno 08 falou, eu posso chamar isso aqui, né?! (escreveu: $I + TC$), mas aí eu vou igualar a quanto?
ALUNOS: (ficaram em silêncio)
PROFESSOR: Igualar a quanto? Isso aqui ($I + TC$) seria a generalização, né? Mas, como ficaria essa generalização para os homens e para as mulheres? Será que uma tabela iria nos ajudar? Para generalizar?

O diálogo anterior representa o início da questão derivada $Q_{1,3,}$ começando novamente o processo dos passos do CSP (PRETZ; NAPLES; STERNBERG, 2003). Também destacamos o protagonismo do professor ao iniciar a resolução da questão derivada.

Esse procedimento do professor está relacionado à necessidade de conduzir o PEP de acordo com o seu planejamento, para assegurar o possível sucesso dos alunos. Tal fato é confirmado pela última fala do professor no diálogo anterior, a qual indica o próximo procedimento para resolução. Em seguida, iniciou o preenchimento da tabela com vistas a uma generalização, para o caso da mulher.

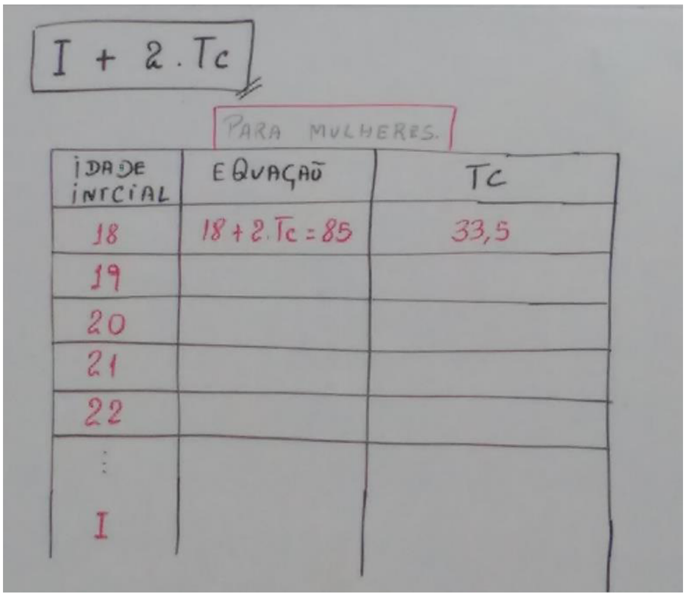
PROFESSOR: Uma pessoa que começa a trabalhar com 18 anos?
ALUNOS: ... (ficaram em silêncio)
PROFESSOR: Como ficaria a nossa equação que a gente já conhece?
ALUNOS: ... (ficaram em silêncio)
PROFESSOR: Ficaria dessa forma assim ... (preencheu um campo da tabela com $18 + 2TC = 85$). Então, como ficaria o nosso TC, já que você encontrou o tempo de contribuição aqui (o professor aponta para o valor 33,5), o cálculo que você fez, que representa o tempo de contribuição?
ALUNO 08: (tentou explicar)
PROFESSOR: Mas qual foi o tempo de contribuição? 33,5. Tem que definir esse aqui, esse é importante definir, sim ou não? Se é para homem ou para mulher.
ALUNO 15: Sim, pode variar?

PROFESSOR: Por que que é importante definir nessa tabela? Aquela ali (aponta para a tabela construída anteriormente), e essa aqui não é por quê?
ALUNO 15: Por que varia o TC?
PROFESSOR: Mas varia o TC, por quê?
ALUNO 15: Porque, para homem, vai ser 38,5 anos e, para mulher, 33,5 anos?
PROFESSOR: Mas o que é que causa essa diferença? O que é que está causando essa diferença?
ALUNOS: (ficaram em silêncio)
PROFESSOR: A soma não é?! O total final aqui...

No diálogo anterior, observamos um forte protagonismo do professor na condução inicial da resolução da questão derivada. Essa postura é verificada em cada início de uma questão, caracterizando em um contrato didático gerando o efeito topázio. Outra questão a ser ressaltada é a considerável mudança do professor na condução da aula, em relação ao primeiro estudo, incentivando mais vezes os alunos a responderem às questões relacionadas ao problema.

Na imagem seguinte, é apresentado o início do preenchimento da tabela pelo professor, a determinar a técnica a ser utilizada. Em seguida, ele solicitou aos alunos preencherem as linhas seguintes.

Figura 106 - Tabela para Mulheres Preenchida pelo Professor

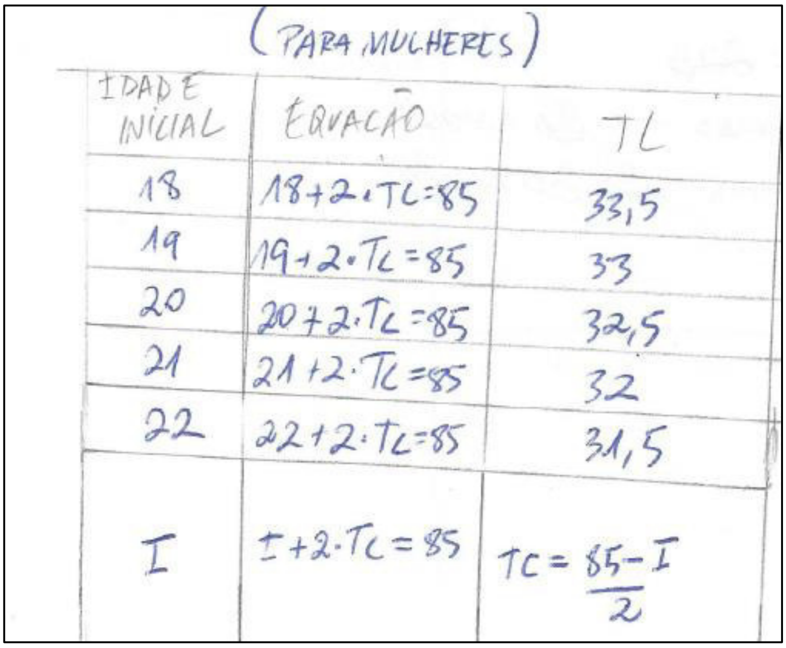



Fonte: próprio autor (2019)

Destacamos que, durante o preenchimento das primeiras linhas da tabela, pelos alunos, não houve intervenção do professor, o que caracterizou um processo de devolução por parte dos alunos, como também autonomia no processo de resolução da questão derivada. A intervenção do professor no preenchimento da tabela aconteceu na última linha; no caso, para determinar a expressão $TC = \frac{85-I}{2}$.

Ressaltamos, que a intervenção do professor foi mínima, pelo fato de os alunos já terem a compreensão da estrutura de resolução do problema. Podemos relacionar a existência de *insight* para alguns alunos, na medida em que eles perceberam a estrutura da expressão antes de o professor formalizá-la.

Figura 107 - Preenchimento da Tabela para Mulheres por um dos Grupos


(PARA MULHERES)

| IDADE INICIAL | EQUACÃO | TC |
|---|---|---|
| 18 | $18+2\cdot TC=85$ | 33,5 |
| 19 | $19+2\cdot TC=85$ | 33 |
| 20 | $20+2\cdot TC=85$ | 32,5 |
| 21 | $21+2\cdot TC=85$ | 32 |
| 22 | $22+2\cdot TC=85$ | 31,5 |
| I | $I+2\cdot TC=85$ | $TC = \frac{85-I}{2}$ |

Fonte: próprio autor (2019)

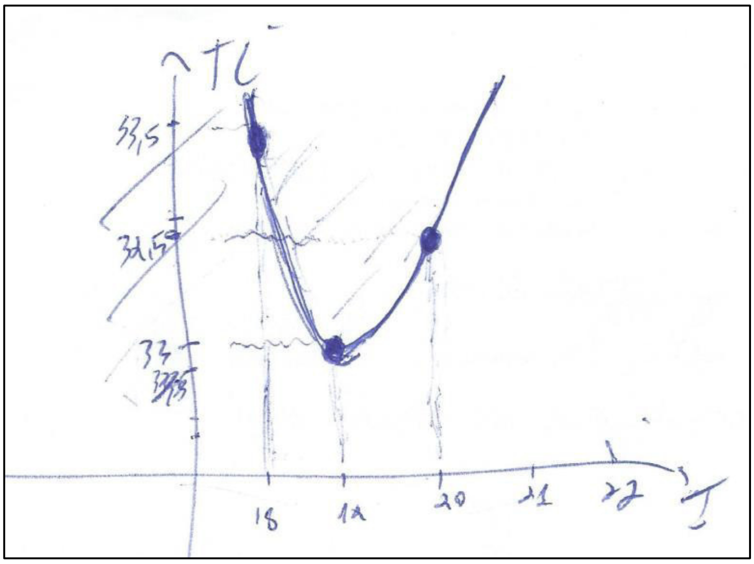
Observamos, na figura 107, que os alunos associaram as técnicas disponíveis para chegar à expressão de TC. Utilizaram as técnicas do encontro presencial anterior para chegar a uma generalização. Com esse procedimento, seguiram os passos do ciclo de solução de problemas, dentre os quais destacamos o passo 3 (PRETZ; NAPLES; STERNBERG, 2003), pelo fato de utilizarem informações anteriores para a resolução de problemas atuais, que podemos associar ao pensamento divergente, no sentido de buscar soluções possíveis e, em seguida, o pensamento convergente, escolhendo a melhor opção.

Consequentemente, o professor iniciou uma discussão relacionada à variável dependente e independente, conceito essencial de função. Para exemplificar a situação, o professor utilizou o caso do posto de gasolina, no qual é relacionando o preço do litro da gasolina à quantidade de litros a ser abastecido. Em seguida, o professor concluiu, juntamente com os alunos, que o TC seria dependente de I; no caso, da idade inicial com que uma pessoa começa a contribuir. Consequentemente, perguntou como a expressão TC ficaria para o caso dos homens, chegando à expressão: $TC = \frac{95-I}{2}$. Na continuidade da aula, o professor solicitou aos alunos que construíssem a representação gráfica dos valores presentes na tabela, conforme atesta a transcrição abaixo:

PROFESSOR: Eu queria que vocês agora pensassem na cabecinha de vocês... e esboçassem o gráfico. Será que conseguiríamos esboçar o gráfico de uma relação sobre essa? Construir, fazer um esboço do gráfico, uma construção?
ALUNOS: ... (silêncio)
PROFESSOR: O que foi que mostrei para vocês que nos ajuda para esboçar o gráfico?
ALUNO 09: Pegar a idade inicial ...
PROFESSOR: Pode falar, Aluno 08, estamos aqui entre amigos. Como é que podemos fazer o esboço? O que foi que a gente comentou quando a gente falou em gráfico de funções? O que a gente faz? O que a gente coloca?
ALUNO 09: Primeiro o domínio, né? É isso? É, pode ser também? As idades?
PROFESSOR: O que tem as idades?
ALUNO 09: O I seria o domínio? O tempo de contribuição seria a imagem?
PROFESSOR: Você estaria definindo quem seria y e quem seria x no seu problema, né?
ALUNO 09: (Fez um sinal de positivo com a cabeça).
PROFESSOR: Muito bem! Utilizando o nosso x e y. Então, façam aí para a gente ver.

O diálogo anterior apresenta a dificuldade dos alunos em relacionar a representação algébrica de uma função com a sua representação gráfica no plano cartesiano, a dificuldade de relacionar as diferentes representações (LOURENÇO; OLIVEIRA, 2014). Essa é um entrave que o nosso MER para o ensino de função tenta minimizar, buscando relacionar seus tipos diferentes de representação. Após o professor discutir sobre a possibilidade de construir uma representação gráfica de TC, solicitou aos alunos tentarem esboçar a sua representação.

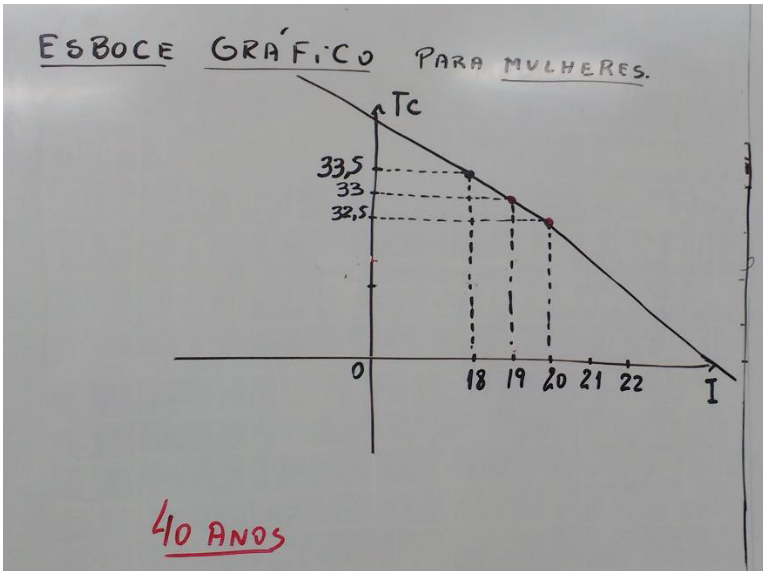
Figura 108 - Representação de TC por um dos Grupos




Fonte: próprio autor (2019)

A figura 108 confirma a dificuldade de alguns alunos em representar graficamente a função, cuja solicitada é uma reta, e não uma parábola, como representada por um dos grupos. Essa dificuldade também foi identificada no primeiro encontro do estudo empírico, confirmando ser recorrente no estudo de função. Ao percebê-la, professor dirigiu-se ao quadro, para explicar novamente o procedimento de construção do gráfico.

Figura 109 - Gráfico TC para Mulheres Construído pelo Professor




Fonte: próprio autor (2019)

O professor construiu o gráfico buscando uma interação com a turma, sempre perguntando se havia dúvidas antes de cada passo para a construção do gráfico. O professor marcou no plano cartesiano um ponto de cada vez e, em seguida, ligou-os obtendo uma reta. Em seguida, perguntou aos alunos por que a representação é uma reta, e não só os pontos, iniciando uma discussão para a ideia de continuidade de uma função. Para tentar fundamentar a explicação, o professor apontou a existência de infinitos pontos entre os pontos encontrados inicialmente, realizando uma discussão tecnológica (função contínua) para fundamentar a técnica apresentada.

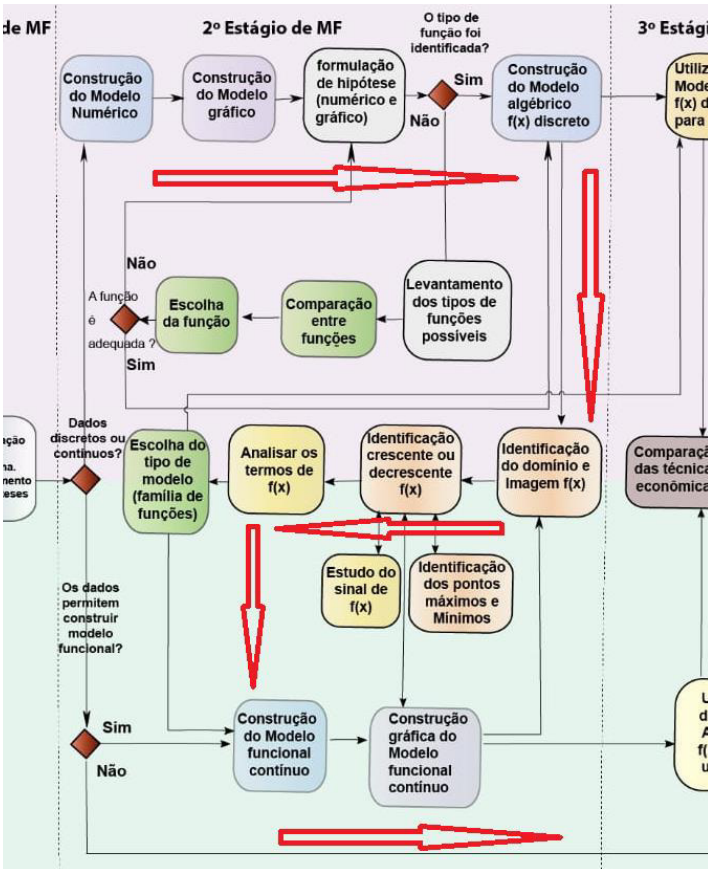
Também foi abordado, na discussão da aula, se a função era crescente ou decrescente, a partir da evolução dos valores do eixo das abscissas. Consequentemente, o professor partiu para a discussão do domínio e da imagem da função TC, perguntando aos alunos se seria fácil defini-los. Na sequência, o professor perguntou se se poderia iniciar com qualquer idade a contribuição, questionando os alunos sobre o que aconteceria se uma mulher começasse a trabalhar com 40 anos de idade, qual seria o seu tempo de contribuição. Depois de alguns minutos, o Aluno 14 respondeu que era 22,5 anos, ao que o professor confirmou que o resultado da soma é 85 anos.

O professor ressaltou que a mulher teria que ter 30 anos, no mínimo, de contribuição para aposentar-se, e que, no caso dos homens, 35 anos. Perguntou à turma, em seguida, se a mulher poderia se aposentar nesta regra, obtendo a resposta negativa dos alunos. Logo depois, o professor perguntou quanto tempo faltava para os 30 anos de contribuição, obtendo a resposta 7,5 anos dos alunos, que concluíram que a mulher teria uma idade elevada para se aposentar. Com a continuidade da discussão, foram abordadas outras possibilidades de aposentadoria, como as existentes antes do modelo estudado. Em seguida, o professor encerrou a aula solicitando que os alunos tentassem determinar o domínio e a imagem da função TC.

O professor, nesta situação, foi levado a assumir a maior responsabilidade para si, pelo fato de os alunos não terem uma compreensão da tecnológica que ampara a técnica, o que dificultou a construção do gráfico, e consequentemente, a construção de uma relação entre as representações. Apesar do esforço do professor em tentar explicar o assunto de maneiras diferentes, buscando sempre renegociar o contrato didático, ele não teve muito êxito. A dificuldade dos alunos na construção do gráfico pode estar relacionada à falta da compreensão da tecnologia da praxeologia utilizada, impossibilitando o processo de aprendizagem. Porém, a discussão tecnológica realizada pelo professor caracteriza uma preocupação com a compreensão do conceito de função nos moldes do PEP.

Ao observarmos o desenvolvimento do dispositivo didático, tomando por base o diagrama para o ensino de funções, temos a seguinte representação:

Figura 110 - Análise do Quarto Encontro Presencial do Segundo Estudo Empírico




Fonte: próprio autor (2019)

Com a construção do modelo numérico, os alunos passaram à construção do modelo gráfico, marcando os pontos no plano cartesiano. Com isso, os alunos, juntamente com o professor, levantaram hipóteses a respeito da representação gráfica, chegando à conclusão que se tratava de uma função afim. Em seguida, discutiram sobre o domínio e a imagem, sem definir os seus intervalos. Logo depois, determinaram que era uma função decrescente, e construíram a sua representação gráfica.

Existiu uma diferença em relação ao quarto encontro do primeiro estudo empírico. No estudo anterior, os alunos chegaram a realizar o tipo de tarefa que representa a construção do modelo algébrico, tarefa desenvolvida no início desse estudo. Essa diferença pode estar relacionada ao desenvolvimento da apresentação do conceito de função tratado pelo professor nesse momento em que se iniciou a $Q_{1,3}$ e em se desenvolveram as suas derivadas $Q_{1,3,1}$ e $Q_{1,3,2}$, representando uma condução mais segura no desenvolvimento do PEP.

### 5.2.7. Análise do Quinto Encontro Presencial do Segundo Estudo Empírico

Antes de iniciarmos a discussão da análise do quinto encontro presencial do segundo estudo, destacamos mais um momento de formação com o professor ocorrido deste encontro. A formação durou, em torno de, 30 minutos e se deu no local onde foi realizada a coleta de dados de nossa pesquisa. Tratamos de rever novamente os recorridos matemáticos e a organização didática dos dois últimos encontros presenciais, apresentados no decorrer das análises.

A aula foi realizada no dia 21 de junho de 2018 e contou com a participação de 8 (oito) alunos. O encontro teve início às 19h20min e teve a duração de 70 minutos. O professor iniciou a aula distribuindo as Fichas-Respostas para os grupos de alunos. Em seguida, relembrou a questão geratriz:

PROFESSOR: Vocês lembram onde a gente parou? Não, né?...
ALUNOS: (ficaram em silêncio)
PROFESSOR: Vejam só ... Vocês lembram que fizemos a construção do gráfico?
ALUNO 07: Foi...
PROFESSOR: Nós estávamos... Como ficou o tempo de contribuição em função da idade? Como ficou essa função aí? (o professor foi ao quadro para escrever $TC = \frac{85-I}{2}$ ).
ALUNOS: (ficaram em silêncio)
PROFESSOR: Você tem uma soma para mulheres, a soma é 85... O que estamos estudando?
ALUNO 07: É...

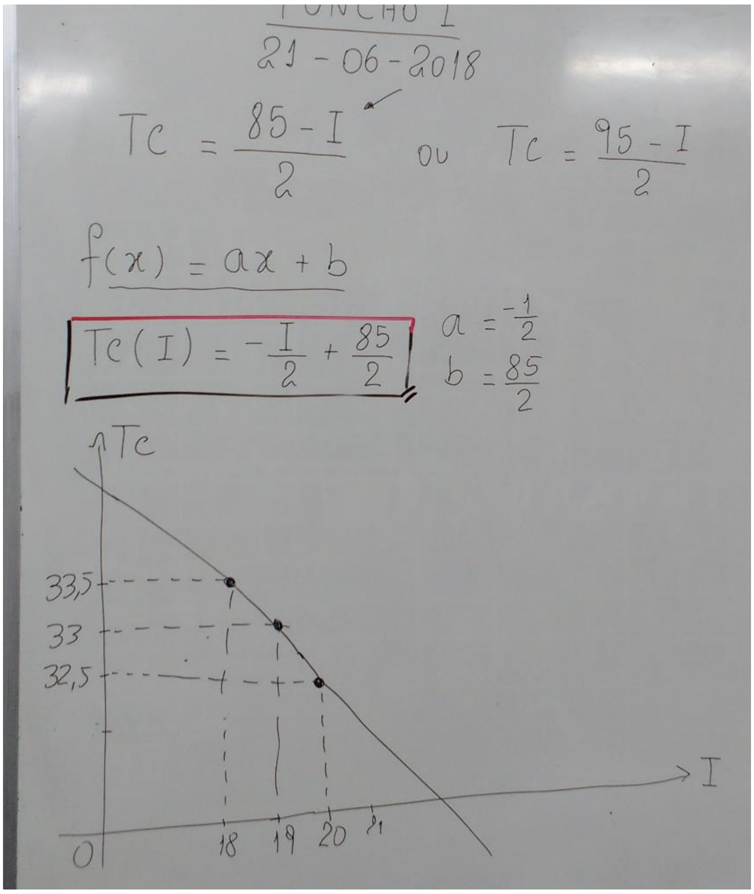
Esse procedimento didático do professor, de relembrar, no início da aula, a construção matemática e as técnicas utilizadas, foi repetido nos encontros presenciais anteriores, caracterizando um procedimento de revisitação das técnicas (CHEVALLARD, 2009a, 2009b), ponto cujo desenvolvimento o PEP destaca.

O professor relembrou a construção da função TC e conduziu uma discussão com os alunos para relacionar o TC a uma função afim. Para auxiliar na compreensão desse percurso, escreveu no quadro a representação algébrica geral da função afim: $f(x) = ax + b$, e perguntou se TC era uma função afim, mas os alunos ficam em silêncio. Consequentemente, o professor destacou, na sua fala, as relações das grandezas e a existência da dependência de uma função, buscando relacionar os coeficientes da função $f(x)$ com o TC.

Por causa do silêncio dos alunos, o professor complementou a sua explicação com outros exemplos mais simples para que os alunos compreendessem o TC como uma função afim e a relação entre as grandezas existentes na função.

O professor objetivou, com isso, preparar os alunos com um aporte de técnicas e de tecnologia para a resolução da questão derivada $Q_{1,3,2}$; no caso, para determinar o domínio e a imagem do TC. Em seguida, o professor construiu o gráfico da função TC e apresenou o estudo do sinal.

Figura 111 - Construção da Expressão TC pelo Professor no Segundo Estudo Empírico

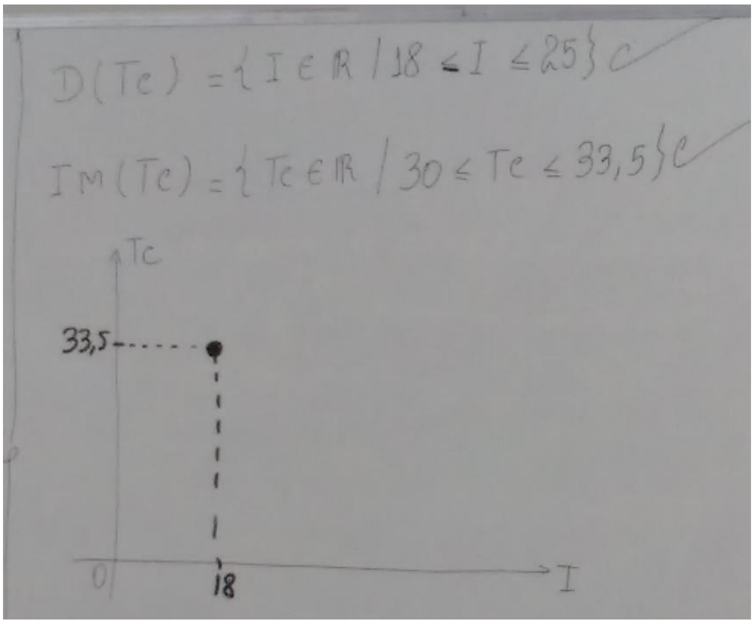



Fonte: próprio autor (2019)

Até o momento da aula, os alunos não estavam participando da discussão proposta pelo professor, não estavam conseguindo relacionar o gráfico por ele construído aos elementos que fazem parte do domínio e da imagem de TC. Destacamos dois pontos sobre o silêncio dos discentes e que estão relacionados entre si: o primeiro, pode estar ligado ao não desenvolvimento do processo de devolução por parte desses alunos, impedindo que o ciclo de solução de problemas se desenvolvesse até esse momento; o segundo está relacionado à não identificação de possíveis *insights*, o que pode estar ligado à falta de conhecimento tecnológico do alunos.

Em seguida, o professor apresentou aos alunos as condições mínimas de aposentadoria, relembrando que a mulher tem que ter 30 anos de contribuição, como também a idade máxima com que a mulher deve começar a contribuir para que não necessite complementar o seu tempo de contribuição. Mas, depois de alguns minutos, os alunos continuaram sem conseguir desenvolver a questão derivada $Q_{1,3,2}$; no caso, não estavam conseguindo representar as informações numéricas em termos de gráfico nem conseguiam articular as técnicas disponíveis, pela falta de compreensão tecnológica. Consequentemente, o professor escreveu no quadro os valores do domínio e da imagem da função TC, solicitando aos alunos a construção do gráfico TC com as novas informações.

Figura 112 - Domínio e Imagem da Função TC Apresentada pelo Professor




Fonte: próprio autor (2019)

Durante a construção de TC por parte dos alunos, o professor ressaltou, em sua fala, a importância de estudar os valores do domínio de uma função por se tratar de valores reais que determinam o contexto numérico estudado, como também os valores representados pela imagem da função estudada. Depois de alguns minutos, o Aluno 15 fez a seguinte pergunta ao professor:

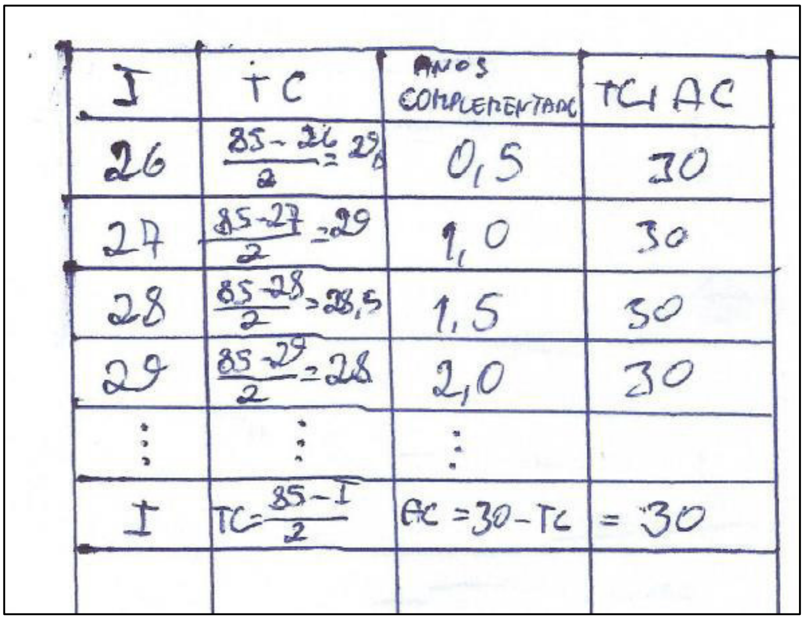
ALUNO 15: É bolinha fechada, não é, professor? Bolinha fichada na extremidade.
PROFESSOR: Olha aí, rapaz ... Por quê?
ALUNO 15: É o domínio, é o limite!
PROFESSOR: E esse dado faz parte do problema?
ALUNOS: (ficaram em silêncio)
PROFESSOR: O Aluno 15 perguntou: professor, quando for representar, coloco bolinha fechada, né? O que é bolinha fechada? O que é bolinha aberta? Lembram?
ALUNOS: (ficaram em silêncio)
PROFESSOR: Hum? Bolinha fechada e bolinha aberta no gráfico. Quem pode responder?
ALUNO 07: Esqueci.
PROFESSOR: Esqueceu? Bolinha fechada significa que aquele valor faz parte de nosso intervalo. Você começa a trabalhar aos 18 anos, não é?! Então, 18 anos faz parte do meu intervalo. Você começa a trabalhar, então 18 faz parte. Agora, se falasse que só pode trabalhar depois dos 18 anos, no caso, 18 anos e um dia você começa a trabalhar. Então, o 18 não fazia parte do meu problema. Então, a desigualdade aqui passaria a ser menor e não menor igual, e, quando fosse representar graficamente, essa bolinha que liga seria aberta (o professor apontou para o gráfico construído no quadro), seria uma bolinha desse jeito assim (o professor se dirigiu ao quadro). Se você fosse relacionar o 18 ao 33,5, a bolinha ficaria assim, aberta. Isso significa: quem for ler o seu gráfico, que esse valor aqui (o professor apontou para o valor 18 no eixo das abscissas). Ele é apenas um limite para o seu problema, mas ele não está dentro do seu problema. Mas o nosso, aqui, o cara pode trabalhar aos 18 anos. Então, ele faz parte, a bolinha é fechada, que significa que esse valor está dentro do seu domínio.

Observando o trecho do diálogo anterior, entre o Aluno 15 e o professor, podemos destacar três pontos: o primeiro, está relacionado à existência de um possível *insight* pelo Aluno 15, pelo fato de ele ter percebido que os extremos do intervalo do domínio da função TC devem ser fechados, compreendendo que está relacionado ao limite da função TC; o segundo diz respeito à discussão tecnológica realizada pelo professor, ao buscar fundamentar a técnica utilizada para determinar o intervalo do domínio da função TC, o que é uma indicação de que o PEP leva o professor a realizar uma discussão tecnológica com seus alunos no momento da utilização da técnica; o terceiro se refere ao contrato didático estabelecido neste momento da aula, no qual o professor tem uma proximidade com o saber em jogo, ocasionado pela falta de conhecimento tecnológico por parte dos alunos.

Logo após, o professor iniciou uma discussão relacionada ao tempo complementar de contribuição, relacionado aos casos das mulheres que chegam à soma de 85 anos, mas não possuem os 30 anos de contribuição mínima. Ao introduzir rapidamente uma nova questão, que é a questão derivada $Q_{1,3,3}$, o professor não aguardou a resolução por parte dos alunos da questão anterior. Entendemos essa atitude como resultante da influência das normas da instituição em relação ao tempo da aula, alterando a sua organização didática. Até o momento desse encontro presencial, observamos que a maioria dos alunos evoluíram apenas nos dois primeiros passos do CSP, pelo fato de terem identificado e definido o problema. E dificuldade no processo de aprendizagem pode estar relacionado ao fato de o processo de devolução não ter se iniciado para todos os alunos, ocasionando um obstáculo para que atinjam o terceiro passo do CSP.

Para auxiliar na resposta da questão derivada $Q_{1,3,3}$, o professor utilizou uma tabela para chegar à expressão de anos complementares (AC). O professor levantou os casos em que seria necessário utilizar o tempo de anos complementares no cálculo da aposentadoria para iniciar o preenchimento das linhas da tabela, como também destacou que as funções TC e AC têm a grandeza idade (I) como valor dependente, buscando ressaltar esse fato na discussão. Consequentemente, os alunos construíram a tabela de anos complementares com o auxílio do professor, que interveio em vários momentos.

Figura 113 - Tabela AC Construída por um dos Grupos



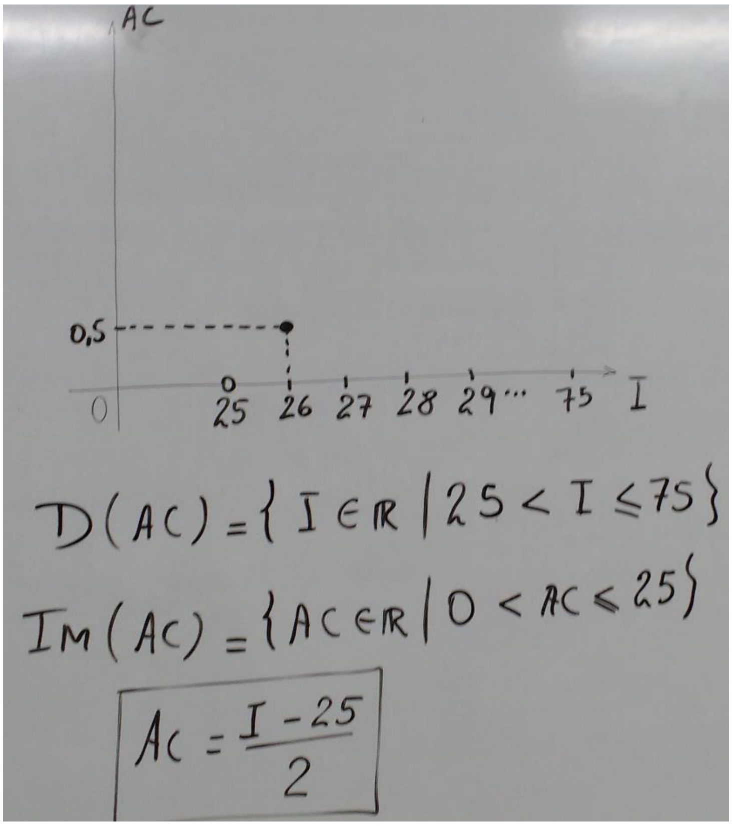
| I | TC | ANOS COMPLEMENTAR | TC+AC |
|---|---|---|---|
| 26 | $\frac{85-26}{2}=29,$ | 0,5 | 30 |
| 27 | $\frac{85-27}{2}=29$ | 1,0 | 30 |
| 28 | $\frac{85-28}{2}=28,5$ | 1,5 | 30 |
| 29 | $\frac{85-29}{2}=28$ | 2,0 | 30 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| I | $TC=\frac{85-I}{2}$ | $AC=30-TC$ | $=30$ |

Fonte: próprio autor (2019)

Ao tentarem, juntamente com o professor, determinar a função AC, os alunos articularam técnicas e funções já conhecidas. Só assim prosseguiram com uma nova função. Com esse procedimento, partiram de uma organização matemática pontual para uma organização matemática local, caracterizando a complexidade crescente das organizações matemáticas proposta pelo PEP (LUCAS, 2015).

Em seguida, o professor solicitou para os alunos que representassem o domínio e a imagem da função AC. Durante este momento, o professor discutiu sobre a idade mínima e máxima do domínio de AC, destacando que existe uma idade máxima para se aposentar; no caso, de 75 anos. Depois o professor representou no quadro o domínio e a imagem da função AC, e solicitou aos alunos terminarem a construção de AC.

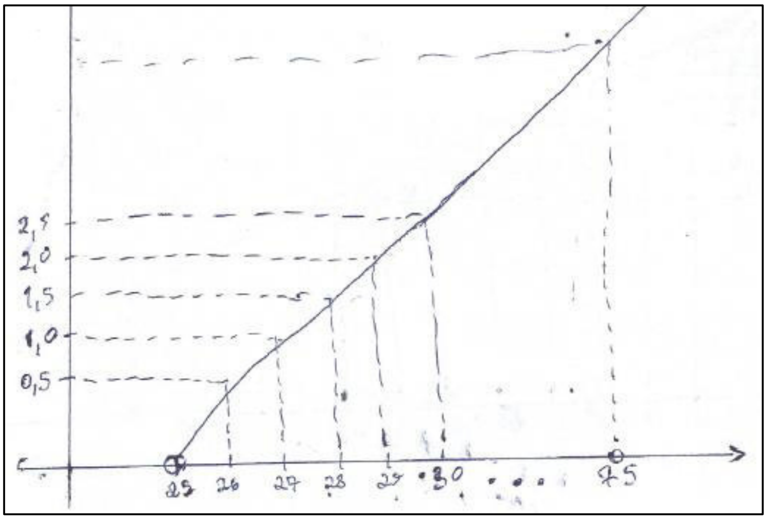
Figura 114 - Representação do Domínio e da Imagem de AC pelo Professor




Fonte: próprio autor (2019)

Durante a construção do gráfico AC, por parte do professor, foi retomada a discussão tecnológica relacionada ao intervalo de uma função, como também, se a função é crescente ou decrescente, comparando-a com a função TC. O protagonismo do professor, durante esse encontro, pode estar relacionado à falta de compreensão tecnológica por parte dos alunos; isso fez com que a partilha da responsabilidade, na resolução da questão derivada, se concentrasse no professor.

Figura 115 - Gráfico AC Construído por um dos Grupos

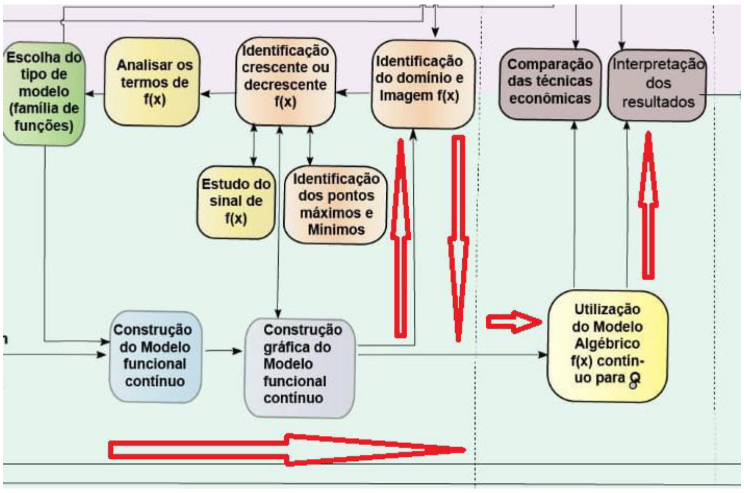



Fonte: próprio autor (2019)

Ao observar os registros dos alunos, verificamos que apenas um grupo conseguiu construir o gráfico AC, representado pela imagem 99. No gráfico, existem erros conceituais, como, por exemplo, não ter sido limitada a continuidade da reta até o valor da abscissa 75. Tal fato representa uma não compreensão dos conceitos abordados, ocasionando em uma não aprendizagem que pode ser relacionada à falta da identificação dos passos do CSP no processo de resolução desta questão derivada, e ocasionada, também, pela não ocorrência de *insights* em alguns alunos.

Ao observarmos a evolução do nosso MER até esse encontro, tivemos o seguinte percurso:

Figura 116 - Percurso do nosso MER em relação ao Encontro Presencial




Fonte: próprio autor (2019)

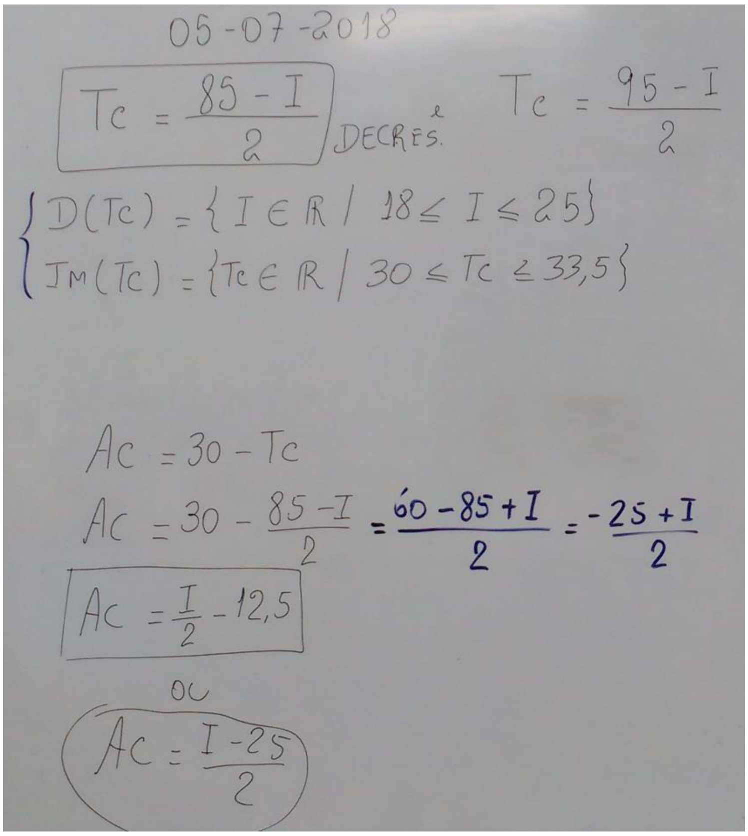
Ao observarmos a figura anterior, vemos que os termos do domínio e da imagem da função TC voltaram a ser discutidos, mas, com a definição dos valores mínimos e máximos, seguidamente, foi utilizado o modelo algébrico contínuo na interpretação dos resultados. No caso da função AC, o seu percurso foi o mesmo do TC, necessitando nosso MER de mais uma alteração: no caso, partir da identificação do domínio e da imagem para a utilização do modelo algébrico $f(x)$ contínuo. Nosso cronograma segue a proposta do professor, tomando por base o primeiro estudo empírico. Em seguida, analisaremos o último encontro presencial deste segundo estudo empírico.

### 5.2.8. Análise do Sexto Encontro Presencial do Segundo Estudo Empírico

O sexto encontro presencial aconteceu no dia 05 de julho de 2018, às 20h55min, com uma duração de 70 minutos. Teve a participação de 6 (seis) alunos e foi realizada no Laboratório de Matemática por ele dispor de computadores com o *software* GeoGebra. Antes de o professor dar início a sua aula, foram relembrados aos alunos os principais comandos do GeoGebra, principalmente os comandos relacionados à construção de gráficos e à relação da representação algébrica com a geométrica.

O professor retomou as funções TC e AC, os seus domínios e as suas imagens, as idades mínimas e máximas de TC, qual função cresce ou decresce, e as suas finalidades. Ele tentou, nesse processo de discussão inicial, envolver os alunos com perguntas relacionadas às informações adquiridas nos encontros anteriores. Em seguida, o professor seguiu para o quadro e registrou as informações discutidas e apresentadas:

Figura 117 - Registro do Professor das Funções TC e AC




Fonte: próprio autor (2019)

As informações das funções TC e AC, registradas pelo professor, no quadro, foram um procedimento didático utilizado tanto para dar início como para dar continuidade à aula, porque os alunos não estavam participando dela e não respondiam às perguntas do professor. Nesta ocasião, pudemos registrar uma dificuldade, que pode ser gerada na aplicação do PEP caso os encontros tenham uma distância de vários dias de um para o outro.

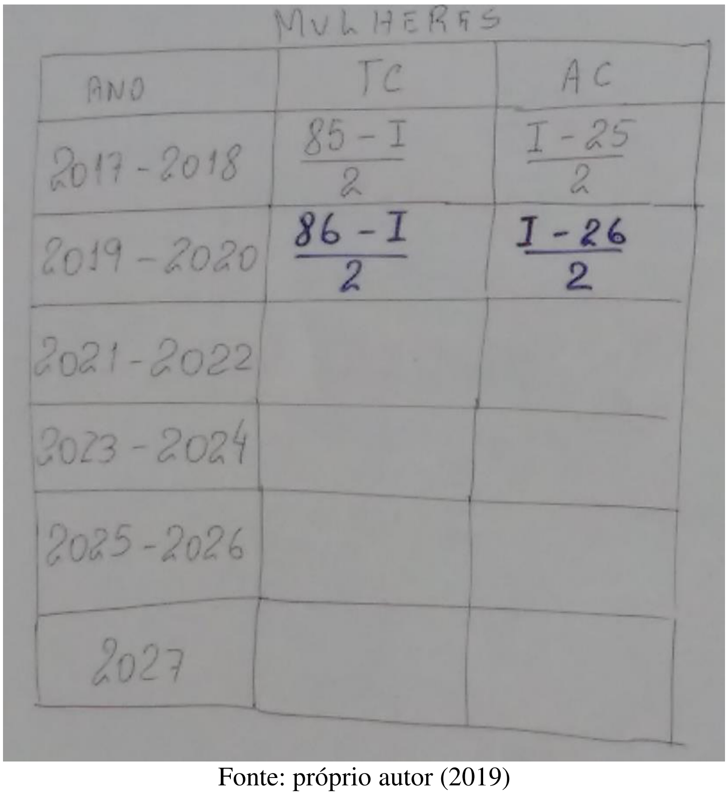
Em seguida, o professor tentou relacionar, juntamente com os alunos a expressão $y = ax + b$ às funções TC e AC, porém o professor finalizou a relação conceitual sem a participação dos alunos. Ao analisarmos esse procedimento do professor, repetido em vários momentos, observamos que, quanto maior a falta de compreensão tecnológica dos alunos, maior é a participação do professor no processo de aplicação do PEP, reservando-se a este a maior parte da responsabilidade.

O PEP tem a intenção de conduzir no seu processo de busca da resposta $R^{\heartsuit}$, uma partilha de responsabilidade entre o professor e os alunos de forma equilibrada (RODRIGUEZ; BOSCH; GASCÓN, 2007), sendo um dos desafios do dispositivo proporcionar esse equilíbrio de maneira constante. O procedimento do professor em pauta, de relembrar, juntamente com os alunos, as técnicas e tecnologias já construídas teve a finalidade de introduzir a questão derivada $Q_2$ :

$Q_2$: Como podemos representar as situações para os anos seguintes, sabendo que a soma idade (I) mais tempo de contribuição (TC) muda a cada dois anos?

Essa questão derivada iniciou a segunda parte da questão geratriz, que era encontrar uma representação para os anos seguintes; no caso, após 2018, para os casos de TC e AC. O professor entregou aos alunos uma folha que continha a questão derivada $Q_2$, também foi utilizada para registrar as suas respostas. Em seguida, o professor solicitou aos alunos que refletissem sobre a questão, e, consequentemente, foi ao quadro e apresentou uma tabela para auxiliar na resposta dos alunos.

Figura 118 - Tabela Iniciada pelo Professor de TC e AC no caso das Mulheres


MULHERES

| ANO | TC | AC |
|---|---|---|
| 2017 - 2018 | $\frac{85-I}{2}$ | $\frac{I-25}{2}$ |
| 2019 - 2020 | $\frac{86-I}{2}$ | $\frac{I-26}{2}$ |
| 2021 - 2022 | | |
| 2023 - 2024 | | |
| 2025 - 2026 | | |
| 2027 | | |

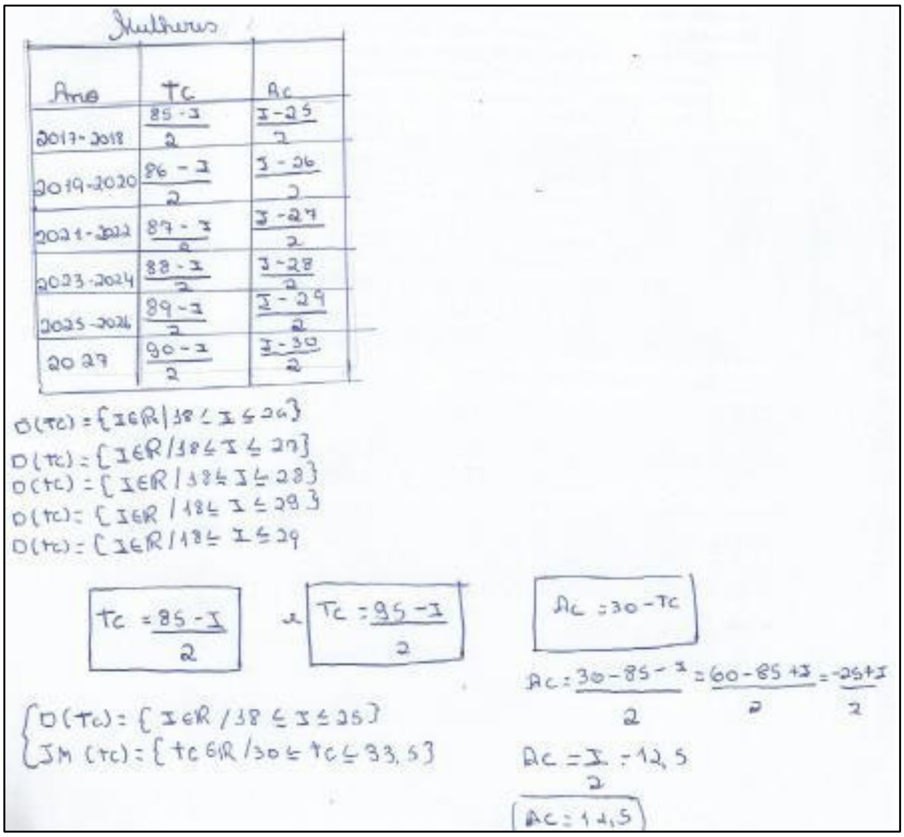
Fonte: próprio autor (2019)

Com a apresentação da tabela pelo professor, ele determinou o percurso matemático a ser conduzido, na procura da resposta de $Q_2$, sem ser constestado pelos alunos se poderia existir outra forma de resolver, o que caracterizou uma dependência dos alunos em relação ao professor. Ressaltamos que este, em vários momentos deste encontro presencial e dos anteriores, tentou estabelecer a dialética pergunta e resposta (CHEVALLARD, 2007, 2009a), mas, na maioria dos momentos, não conseguiu ter respostas para as suas perguntas. O trecho do diálogo seguinte representa essa situação:

PROFESSOR: Questão 2 aqui, é para a gente preencher (o professor apontou para a tabela), pergunta o vai acontecer... né?! Que ele diz (fez a leitura de $Q_2$), para a situação seguinte: o 19 e 20, o TC com AC aqui? Como ficaria?
ALUNOS: (ficaram em silêncio)
PROFESSOR: O que é que mudaria nessa linha (se referindo a segunda linha da tabela)?
ALUNOS: (ficaram em silêncio)
PROFESSOR: E aí, Aluno 08?
ALUNO 08: A soma das... (inaudível)
PROFESSOR: Ah?... diga isso!
ALUNO 08: A soma das idades mais o tempo, contribuição de tempo.
PROFESSOR: É, mas de quanto? De quanto?
ALUNO 13: De dois...
PROFESSOR: De dois! (ficou surpreso). Não, o que está dizendo aí na regra? Dê uma olhada na regra.

Em seguida, o professor solicitou que os alunos preenchessem as outras linhas da tabela, destacando que os domínios de cada função representada na tabela terão uma modificação pela mudança dos anos representados. A figura seguinte representa o registro de um dos grupos de alunos:

Figura 119 - Tabela Iniciada pelo Professor de TC e AC no caso das Mulheres



Mulheres

| Ano | TC | AC |
|---|---|---|
| 2017-2018 | $\frac{85-x}{2}$ | $\frac{x-25}{2}$ |
| 2019-2020 | $\frac{86-x}{2}$ | $\frac{x-26}{2}$ |
| 2021-2022 | $\frac{87-x}{2}$ | $\frac{x-27}{2}$ |
| 2023-2024 | $\frac{88-x}{2}$ | $\frac{x-28}{2}$ |
| 2025-2026 | $\frac{89-x}{2}$ | $\frac{x-29}{2}$ |
| 2027 | $\frac{90-x}{2}$ | $\frac{x-30}{2}$ |

$D(TC) = \{x \in R \mid 38 \leq x \leq 26\}$
$D(TC) = \{x \in R / 38 \leq x \leq 27\}$
$D(TC) = \{x \in R / 38 \leq x \leq 28\}$
$D(TC) = \{x \in R / 38 \leq x \leq 29\}$
$D(TC) = \{x \in R / 38 \leq x \leq 29$

$\boxed{TC = \frac{85-x}{2}}$ a $\boxed{TC = \frac{95-x}{2}}$ $\boxed{AC = 30 - TC}$

$AC = 30 - \frac{85-x}{2} = \frac{60-85+x}{2} = \frac{-25+x}{2}$

$\begin{cases} D(TC) = \{x \in R / 38 \leq x \leq 25\} \\ IM(TC) = \{TC \in R / 30 \leq TC \leq 33,5\} \end{cases}$

$AC = \frac{x}{2} - 12,5$

$\boxed{AC = 11,5}$

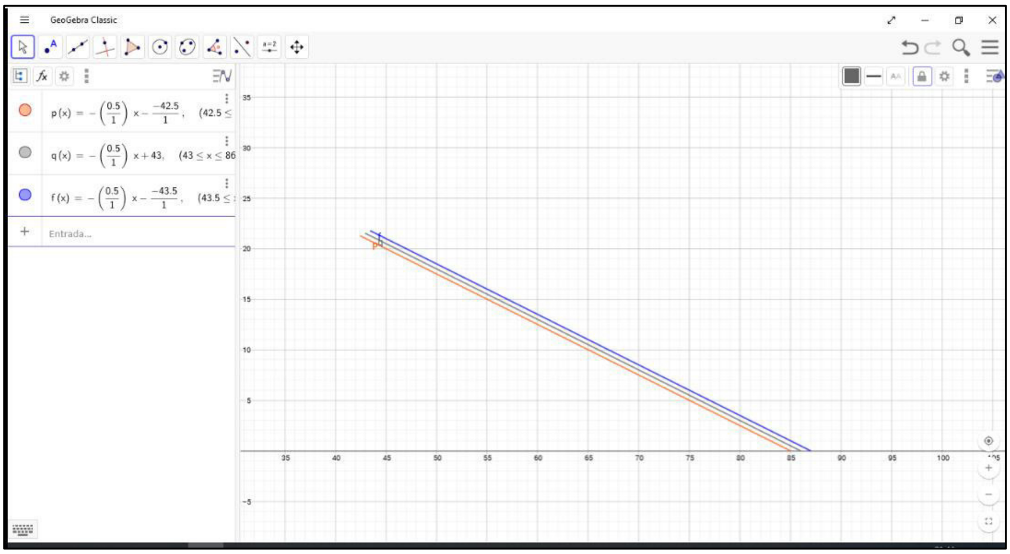
Fonte: próprio autor (2019)

Ao observarmos as praxeologias utilizadas pelos alunos com o auxílio do professor, notamos a articulação de técnicas variadas, ocasionando o princípio de mudança de uma organização matemática local para uma organização matemática regional, fato relacionado à construção de famílias de funções de TC e AC.

Em relação ao CSP, observamos que os passos desenvolvidos pelos alunos tiveram uma influência predominante do professor; os alunos repetiram o método utilizado por ele para determinar as outras funções. Relacionamos a estratégia por eles usada ao método algorítmico (STERNBERG; STERNBERG, 2017), tomando por base a repetição do processo de resolução de um problema anterior e seguindo um processo linear de resolução.  Em seguida, o professor solicitou aos alunos que representassem as famílias de funções com o auxílio do GeoGebra.

Ao analisarmos os dados referentes ao desenvolvimento da construção dos gráficos que representam a família de funções com base no GeoGebra, os alunos iniciaram a construção da família de funções do TC. Inicialmente, tiveram dificuldades no manuseio dos comandos desse *sotfware*, mas, poucos minutos depois, esses problemas não foram mais observados. Existiram discussões relacionadas aos gráficos do TC entre os alunos dos grupos, como também entre os grupos. Durante essa construção gráfica, o professor interagiu e auxiliou os alunos em determinados momentos, como, por exemplo, no cuidado ao determinar os intervalos dos domínios das funções e ao levantar o questionamento por que as retas não ficaram umas sobre as outras.

Figura 120 - Família da Função TC Construída por um dos Grupos



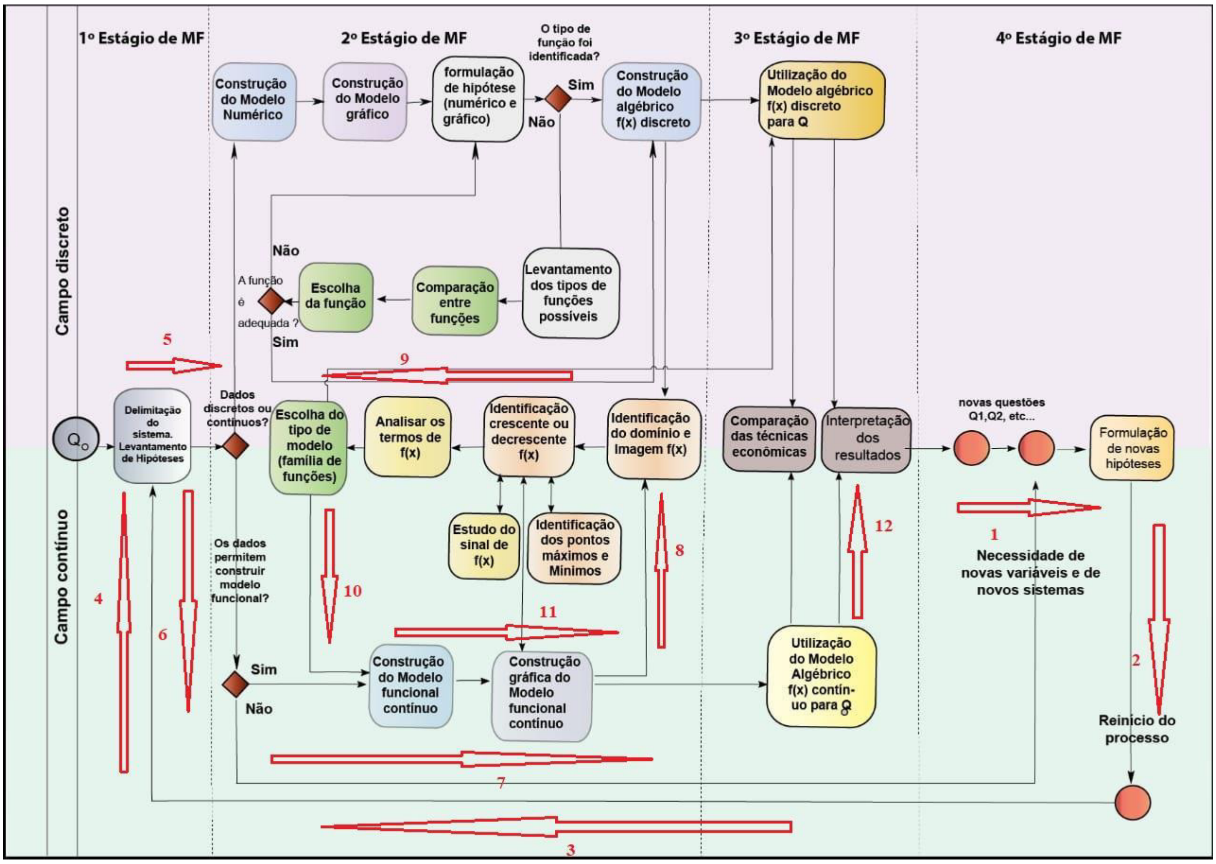

Fonte: próprio autor (2019)

A figura anterior representa a construção da família de funções de TC por um dos grupos. Observamos que, ao definir o intervalo do domínio, os alunos colocaram outro intervalo, de $42{,}5 \leq x \leq 85$, iniciando a primeira função, intervalo que era para ser de $18 \leq x \leq 25$. Tal equívoco pode estar relacionado à falta de compreensão tecnológica, necessitando de uma atenção maior na compreensão do papel do domínio de uma função, não se limitando apenas à sua construção gráfica.

O PEP proposto, que foi fundamentado no nosso MER para o ensino de funções, ressaltou um estudo detalhado da função e de seus elementos conceituais; porém, verificamos a necessidade de uma continuidade das discussões tecnológicas no ensino de outras funções para que o aluno tenha uma compreensão de representações diferentes e, ao mesmo tempo, consiga consolidar os conceitos. Destacamos que os alunos não realizaram a construção da família de funções de AC, devido ao encerramento da aula pelo professor.

Em nossa análise externa desse encontro presencial, apresentaremos, a seguir, o percurso realizado pelos alunos, com base no nosso diagrama de ensino de funções, que está representado na figura seguinte:

Figura 121 - Percurso dos Grupos durante o Sexto Encontro Presencial do Segundo Estudo Empírico




Fonte: próprio autor (2019)

O professor, ao iniciar a discussão relembrando os resultados do encontro anterior, fez com que os alunos formulassem novas hipóteses com a intenção de iniciar o processo de resolução da $Q_2$. Com isso, o processo reiniciou-se com os modelos funcionais do TC e do AC. Foi realizado um estudo detalhado do domínio e da imagem, se crescentes ou decrescentes, dos termos da função, e, em seguida, iniciou-se a construção de suas famílias; no caso, apenas do TC, com a utilização do seu modelo algébrico contínuo para a interpretação dos resultados. O processo de encontrar uma resposta de $Q_2$ passou pelos quatro estágios de modelação funcional do esquema e seguiu o mesmo percurso do primeiro estudo empírico. No caso do cronograma, este permaneceu sem alteração em relação ao estudo anterior.

### 5.2.9. Análise Preliminar do Segundo Estudo Empírico

Durante a análise deste segundo estudo empírico, alguns pontos relacionados ao desenvolvimento do PEP foram analisados com mais elementos. Tivemos uma compreensão melhor do processo de ensino e aprendizagem do conceito de função, como também da influência do dispositivo didático na formação do professor.

Ao observarmos o desenvolvimento do PEP, verificamos que este propõe um crescimento das organizações matemáticas, de modo que a sua complexidade seja crescente, partindo de uma organização matemática pontual para uma organização matemática local, e, consequentemente, para uma organização matemática regional.

No primeiro estudo empírico, identificamos que o desenvolvimento do PEP atingiu uma organização matemática regional, tal qual ocorreu no segundo estudo. As técnicas utilizadas pelos alunos não se diferenciaram das usadas no primeiro estudo empírico, caracterizando uma condução conforme a proposta dos recorridos matemáticos. Porém, a repetição, pelos alunos, de técnicas apresentadas pelo professor foi identificada em muitos momentos dos encontros presenciais, o que caracteriza uma limitação, por parte desses discentes, ocasionada por sua falta de conhecimento tecnológico das técnicas utilizadas.

Alguns contratos didáticos foram estabelecidos graças à proximidade do professor em relação ao saber, ocorrendo um efeito topázio em muitas situações durante os encontros. Porém, em alguns momentos, o contrato foi renegociado pelo professor e isso gerou uma discussão maior sobre o saber em jogo. É importante destacar que, em alguns momentos, o processo de devolução foi observado nos alunos, o que promoveu uma outra configuração do contrato didático por parte do professor, sem ocorrência do efeito topázio.

Embora tenhamos analisado a evolução do PEP sob a luz do ciclo de solução de problemas proposto pela Psicologia Cognitiva, lançamos mão de mais elementos para avaliar a possível aprendizagem que o dispositivo didático proporcionou em relação ao conceito de função. Verificamos que os passos do CSP foram desenvolvidos na resolução da questão geratriz, juntamente com a identificação de alguns *insights.* No caso das questões derivadas, os passos da CSP se repetiram para cada questão desenvolvida pelos alunos, caracterizando a repetição dos passos. Observamos que, a partir do quinto encontro presencial, no qual havia as questões derivadas $Q_{1,3,3}$ e $Q_2$ , os passos do CSP concluíram-se com dificuldade, dada a existência de obstáculos na passagem do passo 2 para o 3. Essa dificuldade pode estar relacionada ao processo de devolução, e foi ocasionada pela falta de compreensão tecnológica quando foram utilizadas as técnicas, mas que foi superada, em alguns momentos, pelo protagonismo do professor. Assim, a partilha de responsabilidade na resolução da questão geratriz não foi equilibrada.

Outra questão relacionada à possível aprendizagem do PEP foi a identificação de possíveis *insights*, o que nos levou a entender que o PEP proporciona uma aprendizagem durante a sua aplicação. Porém, em alguns momentos, os *insights* e os passos do CSP não foram identificados, ocasionando uma possível falta de aprendizagem.

Em relação à influência do dispositivo na formação do professor, foi observada uma mudança gradual nas suas praxeologias; houve uma maior discussão do saber em jogo, evidenciada na dialética "pergunta e resposta" (FONSECA; CASAS; BOSCH; GASCÓN, 2009), com uma diminuição do efeito topázio, muito presente anteriormente. Também ocorreu uma maior autonomia no planejamento e na condução das aulas.

Outro elemento positivo, neste momento, foi a utilização pelos alunos do *software* GeoGebra, para construírem as famílias das funções TC e AC, com uma análise de representações diferentes de uma função. No caso do nosso diagrama do MER, foi possível verificar a sua conformidade com o ensino de função, existindo uma alteração a ser realizada.

Portanto, a análise do segundo estudo foi importante para verificar uma segunda aplicação do PEP, com o suporte de outros elementos teóricos que complementaram as nossas conclusões, a fim de atingirmos nossos objetivos.

## Considerações Finais e Questões Abertas

Ao chegarmos neste ponto do nosso trabalho, entendemos ter alcançado um momento de organização de ideias para refletir sobre o que foi realizado, com a intenção de apresentar as peças desse quebra-cabeça e defender as suas conexões, as quais formam uma pequena parte de uma imagem bem maior: as discussões concernentes à Didática da Matemática. Apresentaremos, a seguir, as nossas considerações finais, com os resultados de nossas observações e análises durante a nossa trajetória de pesquisa, e, consequentemente, as questões abertas surgidas durante a nossa caminhada e que farão parte de um rol de direções a serem exploradas em um momento futuro.

A nossa pesquisa buscou identificar as restrições e as condições para o processo de ensino e aprendizagem do PEP ao abordar o conceito de função em uma disciplina de Matemática Básica da licenciatura em Matemática, como também, paralelamente, buscamos observar quais influências o PEP exerce na formação do professor da disciplina. Nesse sentido, levantamos as seguintes hipóteses: a primeira hipótese ($H_1$) está relacionada às praxeologias atuais dos professores no processo de ensino e aprendizagem do conceito de função, as quais não são compatíveis com as praxeologias presentes no PEP; a segunda hipótese ($H_2$) nos leva a entender que, ao aplicarmos o PEP, existirão rupturas que poderão ocasionar novos contratos didáticos, como também renegociações de contrato; a terceira hipótese ($H_3$) considera que o PEP, na medida em que é um dispositivo didático de ensino de conceitos matemáticos, promove igualmente a aprendizagem; por último, a quarta hipótese ($H_4$) reconhece que o PEP tem influência nas mudanças praxeológicas do professor de uma disciplina de Matemática Básica, constituindo-se em um dos instrumento para a formação de professores.

Para responder à pergunta e confirmar ou não a nossas hipóteses, buscamos um aporte teórico que pudesse nos apresentar uma visão mínima do sistema didático estabelecido no momento de uma aula de Matemática, para os futuros professores em formação. Neste caso, utilizamos a Teoria Antropológica do Didático (TAD), a noção do Contrato Didático (CD) e o Ciclo de Solução de Problemas (CSP).

A TAD (CHEVALLARD, 1996, 1997, 1999, 2001, 2002, 2004, 2006, 2007 2009a, 2009b, 2012) foi a principal base teórica de nossa pesquisa. Além dos seus elementos teóricos, observamos, com maior ênfase, as organizações matemáticas articuladas e utilizadas pelo professor e seus alunos, como também o crescimento da complexidade das OMs durante a aplicação do PEP, o qual teve um papel principal nas análises relacionadas ao ensino e nas influências na formação do professor da disciplina. Para auxiliar estas análises, foram utilizados os elementos teóricos do CD (1986, 1996, 2008) e foram observados os contratos estabelecidos, os seus efeitos, as renegociações e as rupturas ocorridas durante o desenvolvimento do PEP. Na questão de aprendizagem do conceito de função, o CSP (PRETZ; NAPLES; STERNBERG, 2003; STERNBER; STERNBERG, 2017) nos auxiliou com sua análise do desenvolvimento dos sete passos e com os possíveis *insights* (SMITH, 1996; DAVIDSON, 2003; STERNBERG; STERNBERG, 2017). Diante das teorias utilizadas para responder à pergunta da nossa pesquisa, tivemos o seguinte objetivo geral: analisar os contratos didáticos estabelecidos, alguns elementos cognitivos e as organizações praxeológicas construídas e/ou reconstruídas numa aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa na disciplina Funções I, da licenciatura em Matemática, no processo de compreensão e aplicação do conceito de função.

Na condução de nossos trabalhos dividimos esta tese em cinco capítulos, de modo que as discussões apresentadas promovessem as articulações das ideias, constituindo um corpo de uma discussão mais ampla. Discutimos, inicialmente, sobre a formação do professor de Matemática no Brasil, partido das primeiras aulas desta disciplina ministradas nas instituições militares e técnicas (engenharias), até a formação das licenciaturas em Matemática. A apresentação deste percurso é importante para nortear, de modo geral, quais influências o professor de matemática recebe na sua formação inicial e continuada, que é refletida no processo de ensino dos conceitos matemáticos. Com isso, tentamos caracterizar o paradigma predominante na formação do professor de Matemática no Brasil, com a intenção de apresentar como alternativa o paradigma do questionamento do mundo fundamentado na TAD (CHEVALLARD, 2009a, 2009b).

No segundo capítulo, buscamos apresentar nossas discussões dos principais elementos teóricos que fazem parte da Teoria Antropológica do Didático, da noção do Contrato Didático e do Ciclo de Solução de Problemas, fundamentos da nossa pesquisa. Nem todos esses aportes teóricos foram utilizados em nossas análises, mas suas estruturas conceituais são importantes para a compreensão do leitor. Também buscamos relacionar alguns desses elementos teóricos entre si, para criarmos uma base de análise fundamentada.

No capítulo seguinte, abordamos a construção de nossa proposta do Modelo Epistemológico de Referência para o ensino de funções na Licenciatura em Matemática. O nosso MER foi construído de forma provisória, no sentido de que pode sofrer alterações no decorrer dos percursos de estudos e pesquisa. Lembramos que o nosso modelo foi testado para o conceito de função e de função afim, necessitando de outras aplicações para verificarmos a viabilidade de outras funções básicas, como, por exemplo, as funções quadráticas, as funções exponenciais e as funções logarítmicas.

No capítulo seguinte, apresentamos a nossa proposta metodológica, definindo a nossa abordagem de pesquisa, o local e os sujeitos, os instrumentos, a proposta do percurso matemático, a descrição do PEP por nós aplicado e os instrumentos de análise utilizados. Ao definirmos a nossa condução metodológica, escolhemos um caminho a ser seguido, para buscarmos alcançar os nossos objetivos, e, principalmente, para articular os elementos teóricos presentes nos capítulos anteriores em uma análise com fundamentos teóricos.

No quinto capítulo, apresentamos as nossas análises, construídas com base nos elementos teóricos da TAD, do CD e do CSP, complementadas pelo nosso modelo epistemológico de referência. As análises tiveram o papel de verificar as nossas hipóteses, de validar o processo de adequação do nosso MER para o ensino de função e de levantar novos questionamentos. Com a elaboração desses capítulos, pudemos elencar elementos para concluirmos sobre as nossas hipóteses de pesquisa e responder à nossa pergunta. Em seguida, apresentaremos os resultados de cada hipótese:

**Primeira Hipótese ($H_1$):**

Ao identificarmos e analisarmos o modelo epistemológico dominante presente na formação do professor, no ensino do conceito de função, tivemos uma visão geral das praxeologias utilizadas pelos docentes de Matemática. O processo de identificação iniciou-se a partir dos elementos presentes na formação do professor de Matemática apresentados no primeiro capítulo, sendo esta formação imersa em um paradigma escolar de inventário de saberes. No caso do PEP, a sua aplicação está conduzida por um aumento crescente da dificuldade das organizações matemáticas, ocasionando praxeologias que têm uma base no paradigma escolar do questionamento do mundo (CHEVALLARD, 2012). Portanto, a nossa primeira hipótese é confirmada na medida em que temos bases praxeológicas diferentes geradas por paradigmas escolares diferentes.

O percurso de estudo e pesquisa promove a utilização e articulação de técnicas, fazendo com que o professor e seus alunos os justifiquem com uma discussão tecnológica fundamentada por uma teoria. No caso da aplicação do conceito de função, observamos o dispositivo didático proporcionar: uma discussão do campo discreto para o campo contínuo, mobilizando uma discussão tecnológica entre alunos e professores; as diferentes formas de representar uma função, assim como as suas relações existentes; a articulação de técnicas, proporcionando mudanças nas organizações matemáticas; e a compreensão da relação entre duas grandezas.

Destacamos, também, que, durante a aplicação do PEP, foram observados alguns problemas ocasionados pela falta de conhecimento tecnológico, por parte dos alunos. Estes problemas foram identificados em alguns momentos e geraram uma maior responsabilidade na condução do dispositivo para o professor. Sobre este fato, destacamos: o silêncio dos alunos ao serem questionados sobre pontos conceituais do conceito de função; a repetição excessiva das técnicas apresentadas pelo professor, fazendo com que os alunos escrevessem novamente as técnicas apresentadas pelo professor.

**Segunda Hipótese ($H_2$):**

Durante a aplicação do PEP, os contratos didáticos, as renegociações, os seus efeitos e as suas rupturas de contrato eram esperadas. Portanto, a apresentação teórica dos elementos que constituem a noção de Contrato Didático foi necessária em nosso trabalho. Discutimos sua definição apresentada por Brousseau (1986), as suas renegociações, que podem gerar os seus possíveis efeitos, como também as possíveis rupturas de contrato, que proporcionaram elementos para verificar esta hipótese.

Logo de início, no desenvolvimento do PEP, com a apresentação da Questão Geratriz, tivemos uma quebra de contrato, pelo fato de a estrutura da questão ser diferente da esperada pelos alunos; a Questão Geratriz é uma questão não definida (STERNBERG; STERNBERG, 2017), não apresentando de imediato o procedimento de resolução e fazendo com que os alunos tenham que articular conhecimentos anteriores, a fim de propor uma resolução.

Durante o percurso de estudo e pesquisa realizado pelos alunos, tivemos alguns contratos estabelecidos que variavam de acordo com a proximidade do professor em relação ao saber em jogo; no caso, o conceito de função, ocasionando renegociações por parte do professor, com a finalidade de manter os alunos no jogo didático. Porém, em alguns desses momentos, foram gerados efeitos de contrato, nos quais destacamos o efeito topázio, presente em vários momentos da aplicação do dispositivo didático. A identificação do efeito topázio tornou-se importante em nossas análises e serviu de parâmetro para identificar a evolução dos alunos durante a aplicação do PEP, cuja diminuição de frequência identificamos durante as seções presenciais, caracterizando uma autonomia por parte dos alunos e uma mudança de postura pelo professor, na sua condução didática.

Durante a aplicação do PEP, tivemos a identificação da ruptura de contrato no seu início, por parte dos alunos. No momento da apresentação da Questão Geratriz, a proximidade do professor com o saber em jogo tornou-se evidente, ocasionada, possivelmente, pela falta de uma discussão tecnológica por parte dos alunos, quando o professor promoveu algumas renegociações, gerando, em alguns momentos, o efeito topázio. Contudo, existe uma ruptura de contrato na aplicação do PEP, o que deu surgimento a novos contratos didáticos em situações didáticas que levam a renegociações em vários momentos, necessitando o professor de uma mudança e de uma adequação de postura na condução do dispositivo, pelo fato de o PEP proporcionar situações didáticas não conhecidas pelos atores que fazem parte do jogo didático.

Ao observarmos o PEP sob a luz de alguns elementos do Contrato Didático, vemos que o professor tem um papel central na condução do dispositivo didático, é o principal responsável pelo desenvolvimento de situações fundamentais que gerem devoluções (BROUSSEAU, 1986) durante vários momentos da situação didática gerada; caso contrário, o desenvolvimento do PEP encontrará dificuldades.

Destacamos que a situação fundamental (BROUSSEAU, 1986) não foi aprofundada em nossa pesquisa, como também, pouco discutida em nossas análises, porém, é um ponto importante a ser estudado na aplicação do PEP por trazer mais elementos de análise em sua aplicação. Apesar de não relacionarmos de forma ampla e profunda a situação fundamental, optamos em apresentar em nossa fundamentação teórica as possíveis relações existentes entre o ciclo de soluções de problemas e a TAD, por entender a sua importância nas discussões iniciais e futuras. Apesar dessa superficialidade na utilização da situação fundamental, ressaltamos que não interferiu na conclusão dessa hipótese.

**Terceira Hipótese ($H_3$):**

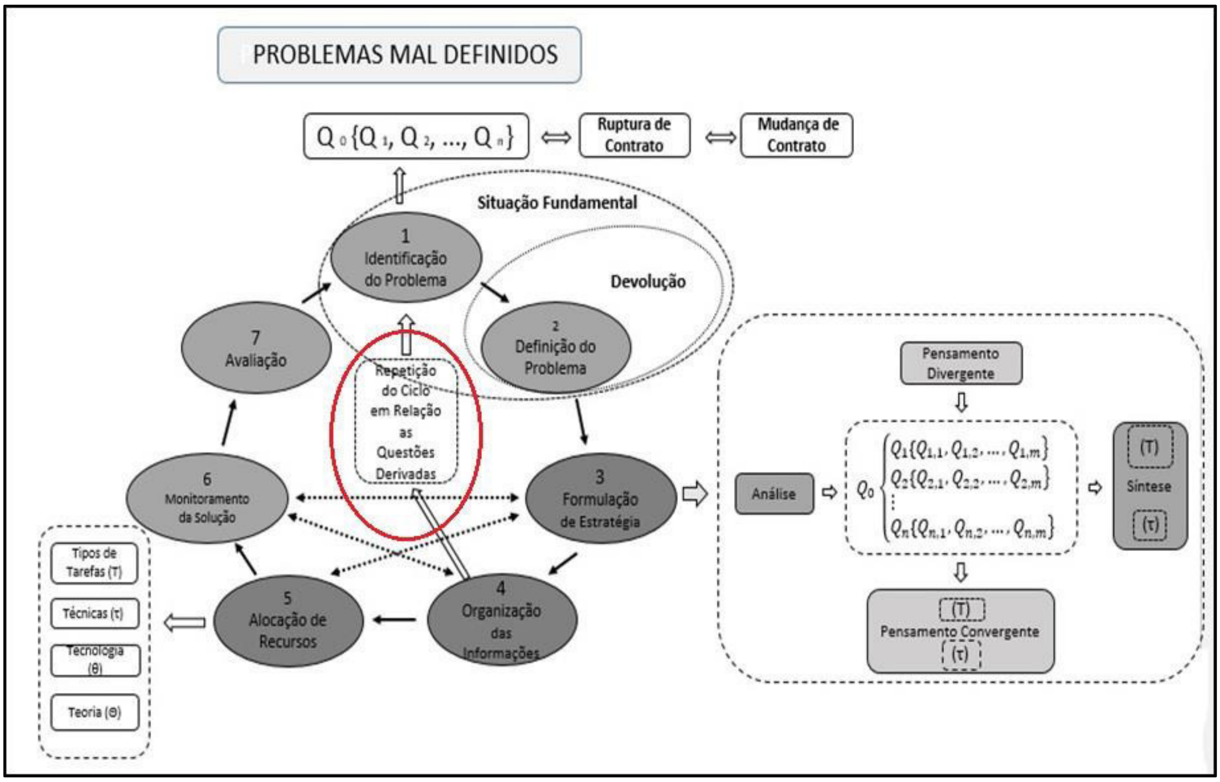
Quando discutimos o processo de ensino e aprendizagem de qualquer conceito matemático, queremos observar elementos que fazem parte da organização didática e da organização matemática utilizada pelos professores, para proporcionar o ensino para os seus alunos. Consequentemente, para observar se existiu a aprendizagem, necessitamos de elementos cognitivos para ter uma possível comprovação se o determinado conceito matemático ensinado pelo professor foi compreendido pelo aluno.

No caso do PEP, não é diferente. Sabemos que ele é um dispositivo didático de ensino, mas, para verificar se ele promove uma possível aprendizagem do conceito de função, tivemos o auxílio do Ciclo de Solução de Problemas fundamentado na Psicologia Cognitiva. É importante lembrar que utilizamos o CSP a partir do segundo estudo empírico, como uma fundamentação teórica complementar. Após o primeiro estudo empírico, foi identificada a necessidade de utilizarmos uma teoria da Psicologia Cognitiva que fornecesse mais elementos a nossa análise e nos permitisse verificar esta hipótese.

Durante o desenvolvimento do PEP, foi comprovada a evolução dos passos do CSP, com a identificação de possíveis *insights* apresentados por alguns alunos. Na apresentação da Questão Geratriz, relacionamos os dois primeiros passos, os quais os alunos identificaram como um problema a ser resolvido e buscaram definir a sua resolução, caracterizando-se um processo de devolução.

Com a definição do problema, os alunos trilharam os passos seguintes, que foram: a definição da estratégia, juntamente com a organização das informações. Assim, os alunos, com a participação do professor, definiram as questões derivadas de $Q_0$, gerando outras questões a serem resolvidas. Podemos relacionar esse processo ao pensamento divergente para chegar ao pensamento convergente ou à análise, para, em seguida, utilizar a síntese, mobilizando técnicas fundamentadas por tecnologias e associando aos passos 5 e 6. Com relação ao passo 7, entendemos que ele aconteceu nos momentos em que os alunos avaliavam os seus resultados, como também nos momentos de institucionalização das respostas, pelo professor. Com a derivação de outras questões a partir da Questão Geratriz, os passos do CSP tiveram um efeito cíclico a partir do quarto passo, voltando para o primeiro passo.

Figura 122 - Ciclo de Solução de Problemas Confirmando a Repetição dos Passos




**Fonte**: O próprio autor (2019)

A figura anterior põe em destaque o processo cíclico dos passos do CSP que acontecem durante a aplicação do PEP, em conformidade com o desenvolvimento do dispositivo didático. Durante as análises das questões derivadas, observamos que o desenvolvimento de algumas delas, ou seja, seus passos não evoluíram, necessitando de uma intervenção maior do professor. Como exemplo disso, destacamos o desenvolvimento da Questão Derivada $Q_{1,3,3}$, na qual os alunos não conseguiam evoluir sozinhos para o passo 3, fazendo o professor intervir constantemente até o final do desenvolvimento da questão.

A intervenção do professor foi impulsionada pelo silêncio dos alunos durante a tentativa de colocá-los no jogo didático. Não obtendo sucesso, o docente apresentou a solução do problema. Neste caso, podemos entender que não houve aprendizagem por parte dos alunos, o que se caracterizou pela não-evolução dos passos do CSP e pela falta de identificação de possíveis *insights.* Tal fato é por nós associado à falta de compreensão tecnológica por parte dos alunos, ocasionando o estabelecimento de um Contrato Didático no qual o professor tem uma proximidade como o saber em jogo e promove a presença marcante do efeito topázio.

No caso geral, o PEP promoveu uma aprendizagem do conceito de função de forma parcial, durante o seu desenvolvimento, pelo fato de algumas questões derivadas gerarem uma mudança de organização matemática, ocasionando momentos em que os passos do CSP não foram desenvolvidos pelos alunos, e, consequentemente, a não identificação de *insights*.

**Quarta Hipótese ($H_4$):**

Entendemos que um dispositivo didático pode ter uma efetividade na sua aplicação quando ele promove o ensino e aprendizagem de um conceito matemático e quando, durante este processo, influencia a formação do professor, levando o mesmo a repensar as suas práticas. O PEP, de acordo com as hipóteses anteriores, promove o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função, sendo necessário verificar, nesta quarta hipótese, se influencia na formação do professor de Matemática.

Para verificar a possibilidade destas possíveis influências, analisamos a evolução dos dois estudos empíricos, a partir da observação da prática do professor, dos contratos didáticos por ele estabelecidos, das suas renegociações, dos seus efeitos, das rupturas de contratos, das praxeologias utilizadas, das mudanças praxeológicas e da condução didática na abordagem do conceito de função.

Durante a aplicação do PEP, o professor apresentou uma mudança gradual. Em cada encontro presencial, as suas praxeologias foram se adequando às situações didáticas estabelecidas, tais como: existiram momentos nos quais a intervenção do professor foi diminuindo, como quando aguardava por mais tempo a devolutiva do aluno, partilhando a responsabilidade de maneira equilibrada, com vistas à resolução da questão; a frequência da dialética pergunta e resposta (CHEVALLARD, 2009a, 2007) utilizada pelo professor, teve um aumento significativo nos dois últimos encontros do primeiro estudo empírico, e se tornou mais presente em todo o segundo estudo desse estudo; as adequações realizadas no cronograma e no nosso MER, durante as formações e entre os dois estudos dos encontros presenciais; as renegociações do contrato didático, as quais geraram uma diminuição do efeito tópazio; um aumento gradual das apresentações e discussões das tecnologias que fundamentam as técnicas utilizadas, com a finalidade de promover uma compreensão conceitual junto aos alunos; e a utilização de recursos tecnológicos, como o *software* GeoGebra.

Tomando por base estas mudanças de postura apresentadas pelo professor da disciplina Funções I, durante os dois estudos empíricos do processo de ensino e aprendizagem do conceito de função, podemos dizer que o PEP tem influência na formação do professor. Assim, podemos considerá-lo um instrumento para a formação do professor de Matemática.

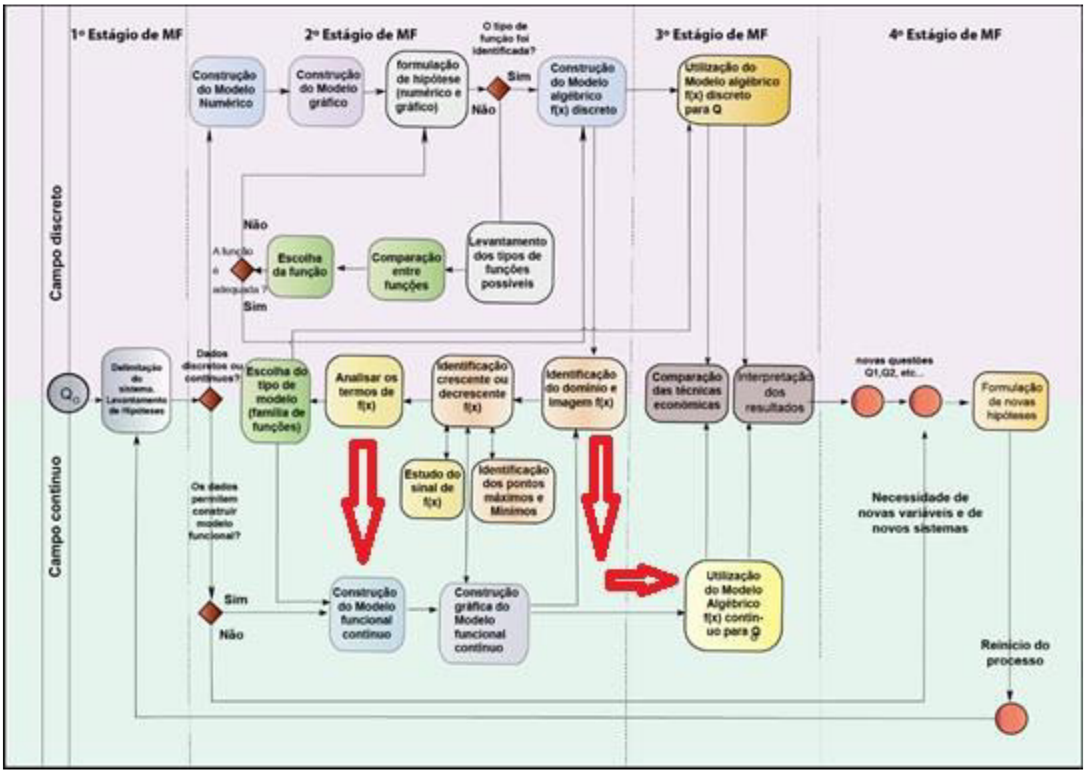
**Além das Hipóteses:**

Ao verificarmos a validade de nossas hipóteses, concluímos alguns pontos que foram delimitados no início de nossa pesquisa; no entanto, durante a evolução dos nossos estudos e das nossas análises, outras questões foram igualmente surgindo, como consequências relacionadas à aplicação do PEP, as quais complementam as nossas considerações finais. As questões foram:

- A influência do tempo institucional, durante a aplicação do PEP, fazendo com que o professor adequasse sua aplicação ao tempo de aula disponível, o que provocou uma renegociação de contrato, e, consequentemente, a presença marcante do efeito topázio;
- O não-acompanhamento dos encontros não presenciais, provocado pela não entrega, por parte dos alunos, dos itens da ficha diagnóstica e da ficha de trabalho não resolvidos nos encontros presenciais; esta parte de aplicação do PEP deve ser observada com atenção ao professor, para identificar os principais motivos que podem gerar a não devolutiva dos alunos;
- A adequação da aplicação do PEP no horário formal da instituição é uma questão importante a ser observada e tratada pelo professor, para não gerar descontinuidades no seu desenvolvimento;
- O termo “modelação” foi utilizado na aplicação do PEP, para não confundir com os termos presentes na modelagem matemática (BASSANEZI, 2002) no Brasil, como, por exemplo: “modelagem” e “modelização”;
- A preparação prévia dos alunos, ao utilizarem os recursos tecnológicos disponíveis, para não existir a possibilidade de mudança do objeto de ensino;
- A necessidade de apresentação e discussões tecnológicas, por parte de alunos e professores, deve ser bastante explorada durante a aplicação do PEP, pelo fato de promover uma participação maior dos alunos, diminuindo os momentos de silêncio na aplicação da dialética pergunta e resposta pelo professor.

Outra questão relacionada à aplicação do PEP e que merece atenção relaciona-se à verificação da conformidade do nosso MER representado pelo diagrama para o ensino de função:

Figura 123 - Mudanças do Diagrama para o Ensino de Função na Licenciatura em Matemática



Fonte: O próprio autor (2019)

Ao observarmos a imagem anterior, verificamos duas mudanças significativas, confirmadas no decorrer dos dois estudos empíricos: a primeira é referente ao percurso do tipo de tarefas que analisam os termos da função e seguem para a construção do modelo funcional; a segunda parte da identificação do domínio e da imagem de $f(x)$, para a utilização do modelo algébrico $f(x)$ contínuo para $Q_0$.

Estas mudanças não comprometeram o diagrama proposto, apresentaram outras alternativas de percursos na construção do conceito de função. Destacamos que o nosso diagrama foi testado e validado para o ensino do conceito de função e da função afim para o nosso caso específico, o qual será aplicado em outros casos e para outras funções básicas.

**Questões Abertas:**

Durante o nosso percurso de estudo e pesquisa, para responder à nossa pergunta apresentada incialmente, elaboramos os nossos objetivos, construímos a nossa fundamentação teórica, propomos o nosso MER, desenhamos o nosso procedimento metodológico, analisamos os nossos dados e concluímos os nossos estudos. Este percurso proporcionou que conseguíssemos articular algumas peças do nosso quebra-cabeça e justificar estas junções. Também proporcionou termos uma visão de longe de outras peças que estão soltas, caracterizando as questões abertas.

A primeira questão aberta que apresentamos está relacionada à formação do professor de Matemática, cujo principal desafio é proporcionar uma formação articulada entre as áreas da Matemática e as suas diferentes representações, de modo que não se desvincule do contexto histórico e social, buscando em outras áreas de conhecimento uma visão ampla para atuar na resolução de problemas específicos. Entendemos, que o percurso de estudo e pesquisa é um dispositivo didático que proporciona articulações de conceitos matemáticos, como também conceitos de outras áreas de conhecimento. Então, como implementar, de maneira gradual, o PEP no sistema de ensino brasileiro? Como fazer com que o PEP se torne mais um instrumento para a formação do professor de Matemática no Brasil?

Nas observações relacionadas ao ensino e à aprendizagem durante a aplicação do PEP, alguns momentos nos chamaram a atenção. Um deles foi o segundo estudo empírico, quando existiu um certo descompasso entre o ensino e a aprendizagem do conceito de função, mais precisamente no instante em que o professor buscava uma mudança de uma organização matemática local para uma organização matemática regional, por parte dos alunos. Neste instante, foi verificada uma possível não aprendizagem. Esse fato instigou-nos outra questão aberta: Este descompasso entre o ensino e a aprendizagem acontece nas outras mudanças de organizações matemáticas? Os descompassos acontecem no processo de ensino e aprendizagem de outras funções básicas, ao aplicarmos o PEP?

Relacionadas ao nosso modelo epistemológico de referência para o ensino de função, no qual apresentamos toda a sua estrutura conceitual e seu diagrama, verificamos a sua aplicabilidade para o ensino do conceito de função e função afim; no entanto, o seu modelo prevê uma aplicação para outas funções básicas, como, por exemplo: para a função quadrática, a exponencial e a logarítmica. Então, surge uma nova questão, a ser projetada para uma futura pesquisa: O modelo epistemológico de referência para o ensino de função também poder ser aplicado para outras funções básicas? Qual o seu comportamento ao propormos outras questões geratrizes?

Para finalizar, com foco nas questões futuras, relacionamos essas reflexões ao ciclo de solução de problemas fundamentado na Psicologia Cognitiva. Observamos que, durante a nossa análise, essa área do saber contribuiu com elementos essenciais para verificarmos a possibilidade de aprendizagem durante o desenvolvimento do PEP. Em alguns momentos, tivemos evidências que nos levaram a concluir a existência de uma possível aprendizagem, e, em outros, as evidências não eram suficientes. Neste caso, temos as seguintes questões futuras: Como as estratégias heurísticas e algorítmicas influenciam o processo de aprendizagem do conceito de função durante a aplicação do PEP? Qual o papel dos *insights* durante o desenvolvimento do PEP? Como o desenvolvimento dos passos do CSP ocorre ao aplicarmos o PEP tomando por base outros tipos de funções básicas?

Identificamos quatro questões futuras, porém o leitor pode identificar outras, representando um outro olhar sobre os resultados apresentados, o que entendemos ser um processo normal e necessário. Esperamos, com o nosso trabalho, dar uma contribuição nas discussões relacionadas ao ensino da Matemática e, principalmente, no campo da Didática da Matemática, uma contribuição que provoque reflexões sobre a aplicação do PEP no sistema de ensino brasileiro, como também sobre a possibilidade de contribuir para a formação dos professores de Matemática, com uma visão que possibilite uma melhoria no seu ensino e na sua aprendizagem.

## Referências


ALMEIDA, F. E. L. **O contrato didático e as organizações matemáticas e didáticas**: analisando suas relações no ensino da equação do segundo grau a uma incógnita. 2016. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016. Disponível em: http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/bitstream/tede2/7438/2/Fernando%20Emilio%20Leite%20de%20Almeida.pdf. Acesso em: 25 jun. 2019.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat:** Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p22. Acesso em: 25 jun. 2019.

ANDRADE, J. M.; SARAIVA, M. J. Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de Mexico, v. 15, n. 2, p. 137-169, mayo, 2012. Disponível em: http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v15n2/v15n2a2.pdf. Acesso em: 25 jun. 2019.

ANDRADE, R. C. D. **Noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um percurso de formação de professores:** o caso da geometria analítica. 2012. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2012. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/0Bxa8Ai93RdHQRTNpSWc4RE5fWFk/view. Acesso em: 25 jun. 2019.

ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia da prática escolar**. Campinas: Papirus, 1995.

ARAÚJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França**: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/3947/1/arquivo3433_1.pdf. Acesso em: 25 jun. 2019.

ARAÚJO, F. F.; LIMA, A. P. V. B.; SANTOS, M. C. Ruptura e efeitos do contrato didático numa aula de resolução de problemas algébricos. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 92, n. 232, p. 739-756, set./dez. 2011. Disponível em: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:http://rbep.inep.gov.br/index.php/rbep/issue/view/70. Acesso em: 25 jun. 2018.

ARTIGUE, M. Engenharia didática. *In*: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ASHCRAFT, M. H. Cognitive psychology and simple arithmetic: a review and summary of new directions. **Mathematical Cognition**, [*s. l.*], v. 1, n. 1. p. 3-34, 1995. Disponível em :

https://www.researchgate.net/publication/245684531_Cognitive_psychology_and_simple_arithmetic_A_review_and_summary_of_new_directions. Acesso em: 25 jun. 2018.

BALL, D. L.; BASS, H. **With an eye on the mathematical horizon:** Knowing mathematics for teaching to learners'mathematical futures. 2009. Disponível em : https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31305/1/003.pdf. Acesso em: 25 jun. 2019.

BARBÉ, J. *et al*. Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish high schools. **Educational Studies in Mathematics**, [*s. l.*], v. 59, p. 235-268, 2005. Disponível em : https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-005-5889-z. Acesso em: 26 jun. 2019.

BARBOSA, E. J. T.; LIMA, A. P. A. B. Equação polinomial do primeiro grau: uma análise praxeológica em três livros didáticos do 7º do ensino fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, Consolação, v. 20, n. 1, p. 01-20, 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/32077/pdf. Acesso em: 25 jun. 2018.

BARQUERO, B. **Ecología de la modelización matemática em la enseñanza universitária de las matemáticas.** 2009. Tese (Doutorado em Matemática) – Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 2009. Disponível em: https://www.tdx.cat/handle/10803/3110?show=full. Acesso em: 25 jun. 2019.

BARQUERO, B. Enseñando modelización a nivel universitario: la relatividad institucional de los recorridos de estudio e investigación. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 52, p. 593-612, ago. 2015. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v29n52/1980-4415-bolema-29-52-0593.pdf. Acesso em: 26 jun. 2019.

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Ecología de la modelización matemática: los recorridos de estudio e investigación. *In*: CONGRESSO INTERNACIONAL SOBRE TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO, 3., 2010, Barcelona. **Anais [...]**. Barcelona: Centre de Recerca Matemática, 2010. p. 553-577. Disponível em: http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/BarqueroBoschGascon-CITAD-III-2011.pdf. Acesso em: 26 jun. 2019.

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; ROMO, A. Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. **ZDM**: The international journal on mathematics education, [*s. l.*], v. 50, n. 1, p. 31-43, jan. 2018. Disponível em : https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-017-0907-z. Acesso em: 26 jun. 2019.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Fundamentación antropológica de las organizaciones didáticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estúdio e investigación". *In*: BRONNER, A. (Org.). **Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action**. Montpellier: Université de Montpellier, 2010. p. 55-91.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. **Parâmetros curriculares nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Brasília: Ministério da Educação e Desporto, 1998. 175 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf. Acesso em: 26 jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio)**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2000. 58 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 26 jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações curriculares para o ensino médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2006. 140 p. 2 v. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 26 jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Referenciais curriculares nacionais dos cursos de bacharelado e licenciatura**. Brasília: Ministério da Educação, 2010. 104 p. Disponível em: https://www.dca.ufrn.br/~adelardo/PAP/ReferenciaisGraduacao.pdf. Acesso em: 26 jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Parecer nº 1. 302, de 06 de novembro de 2011. [Dispõe sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura]. **Diário Oficial da União**: seção 1, Brasília, DF, p. 15, 06 nov. 2011. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 26 jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2017. 600 p. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 26 jun. 2019.

BRITO, M. R. F. Psicologia da educação matemática: um ponto de vista. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 1, p. 29-45, 2011. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/er/nse1/03.pdf. Acesso em: 26 jun. 2018.

BROUSSEAU, G. Fondementes E Methodes De La Didactique Des Mathematiques. **Recherche en Didactique Des Mathématiques**, [*s. l.*], v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didática da matemática. *In*: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. *In*: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). **Didática das Matemáticas**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996b.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BRUN, J. (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BUTTERWORTH, B. **Mathematical cognition**. Hove: Psychology Press, 1996.

BUTTERWORTH, B. **Mathematics and the brain:** opening address to the mathematical association. 2002. Disponível em: https://www.mathematicalbrain.com/pdf/MALECTURE.PDF. Acesso em: 26 jun. 2019.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1984.

CARVALHO, J. B. P. *et al*. Euclides Roxo e o movimento de reforma do ensino de matemática na década de 30. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 81, n. 199, p. 415-424, set./dez. 2000. Disponível em: http://rbep.inep.gov.br/index.php/rbep/article/view/955/929. Acesso em: 26 jun. 2019.

CASTRO, A. D. A licenciatura no Brasil. **Revista de História**, São Paulo, v. 50, n. 100, p. 627-652, out./dez. 1974. Disponível em: http://www.revistas.usp.br/revhistoria/article/view/132649/128733. Acesso em: 26 jun. 2019.

CATALÁN, P. B. **El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.** 2003. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 2003. Disponível em: http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/Tesis-Pilar.pdf. Acesso em: 26 jun. 2019.

CAVALCANTE, J. L. **A dimensão cognitiva na teoria antropológica do didático**: reflexão teórico-crítica no ensino de probabilidade na licenciatura em matemática. 2018. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2018. Disponível em: http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/7764#preview-link0. Acesso em: 26 jun. 2019.

CAVALCANTE, J. L.; LIMA, A. P. A. B.; ANDRADE, V. L. V. X. A dimensão cognitiva na teoria antropológica do didático: proposição de um modelo para investigação da cognição como fenômeno situado. **Educação Maemática Pesquisa**, Consolação, v. 20, n. 3, p. 188-212, 2018. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/emp/article/view/39997/pdf. Acesso em: 26 jun. 2019.

CHEVALLARD, Y. Les programmes et la transposition didactique – Illusions, contraintes et possibles. *In*: CONFERENCE DE LA ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC, 24., 1985, Port-Barcarès. **Anais [...]**. Port-Barcarès: APMEP, 1985. p. 32-50. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Les_programmes_et_la_transposition_didactique.pdf. Acesso em: 26 jun. 2018.

CHEVALLARD, Y. **Arithmétique, algèbre, modélisation**: étapes d'une recherche. Marselha: Aix-Marseille, 1989.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**: du savoir savant au savoir ensigne. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y. Conceitos fundamentais da didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropologica. *In*: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 115-153.

CHEVALLARD, Y. Familière et problématique, la figure du professeur. *In*: ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, 8., 1997, Saint-Sauves. **Anais [...]**. Saint-Sauves: University Clermont Auvergne, 1997. p. 1-27. Disponível em: file:///C:/Users/Usuario/Desktop/abecin/Familiere_et_problematique_la_figure_du_professeur.pdf. Acesso em: 27 jun. 2019.

CHEVALLARD, Y. Analysedes pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. *In*: COURS DONNÉ À L'UNIVERSITÉ D'ÉTÉ ANALYSE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, 4., 1998, Clermont-Ferrand. **Anais [...]**. Clermont-Ferrand: IUFM, 1998. p. 91-120. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27. Acesso em: 28 jun. 2019.

CHEVALLARD, Y. L'analysedes pratiques enseignantesen theorie anthropologie didactique. *In*: RECHERCHES EN DIDACTIQUES DES MATHEMATIQUES, 6., 1999, Marselha. **Anais [...]**. Marselha: Aix-Marseille, 1999. p. 1-29. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf. Acesso em: 27 jun. 2019.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude 1. Structures et fonctions. *In*: ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, 11., 2002, Grenoble. **Anais [...]**. Grenoble: *Université Grenoble*, 2002. p. 03-32. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_1.pdf. Acesso em: 27 jun. 2019.

CHEVALLARD, Y. **Vers une didactique de lacodisciplinarité**. 2004. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Vers_une_didactique_de_la_codisciplinarite.pdf. Acesso em: 26 jun. 2019.

CHEVALLARD, Y. Steps towards a new epistemology in mathematics education. *In*: CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 4., 2006, Barcelona. **Anais […]**. Barcelona: FUNDEMI-IQS, 2006. p. 21-30. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Steps_towards_a_New_Epistemology.pdf. Acesso em: 26 jun. 2019.

CHEVALLARD, Y. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. *In*: CONGRÈS INTERNATIONAL SUR LA THÉORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE, 1., 2007, Jaén. **Anais [...]**. Jaén: Universidad de Jaén, 2007. p. 705-746. Disponível em:

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf. Acesso em: 26 jun. 2019.

CHEVALLARD, Y. **La notion de PER :** problèmes et avancées. 2009a. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf. Acesso em: 27 jun. 2019.

CHEVALLARD, Y. Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER. *In*: APPRENTISSAGE, DIDACTIQUE, ÉVALUATION, FORMATION, 1., 2009, Lyon. **Anais [...]**. Lyon: UMR, 2009b. p. 1-31. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=155. Acesso em: 27 jun. 2019.

CHEVALLARD, Y. Éléments pour une instruction publique nouvelle. *In*: CONFERENCE NATIONALE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUE, 5., 2012, Lyon. **Anais [...]**. Lyon: UMR, 2012. p. 1-7. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_-_CNEM_-_Intervention.pdf. Acesso em: 28 jun. 2019.

CHEVALLARD. Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemáticas:** o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

CLÉMENT, É. *et al*. **Dicionário prático de filosofia**. Lisboa: Terramar, 1994.

CORREIA, M. F. B.; LIMA, A. P. B.; ARAÚJO, C. R. As contribuições da psicologia cognitiva e a atuação do psicólogo no contexto escolar. **Psicologia**: Reflexão e Crítica, Porto Alegre, v. 14, n. 3, p. 553-561, 2001. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/prc/v14n3/7840.pdf. Acesso em: 26 jun. 2019.

COSTA, J. A.; MELO, A. S. **Dicionário da Língua Portuguesa**. 6. ed. Porto: Porto Editora, 1987.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática.** São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DAVIDSON, J. E. Insights about insightsful problem solving. *In*: DAVIDSON, J. E.; STERNBERG, R. J. (Org.). **The psychology of problem solving**. New York: Cambridge University Press, 2003. p. 3-30.

DAVIS, J. P.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DEHAENE, S. *et al*. Core knowledge of geometry in na Amazonian indigene group**. Science**, New York, v. 311. p. 381-384, jan. 2006. Disponível em: https://science.sciencemag.org/content/311/5759/381.full. Acesso em: 28 jun. 2019.

DEHAENE, S. *et al*. Log or linear? distinct intuitions of the number scale in western and Amazonian indigene cultures, **Science**, New York, v. 320, n. 5880, p. 1217-1220, may. 2008. Disponível em: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2610411/. Acesso em: 28 jun. 2019.

DELGADO, T. A. S.; GARCÍA, G. J. G. ¿Cómo organizar la formación matemático-didactica del maestro de educación infantil? propuesta de un recorrido de formación. **Educação Matemática Pesquisa**, Consolação, v. 17, n. 4, p. 767-790, 2015. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/25205/pdf. Acesso em: 28 jun. 2019.

DORON, R.; PAROT, F. **Dicionário de psicologia**. Lisboa: Climepsi Editores, 2001.

DOWKER, A. **Individual differences in arithmetic**: implications for psychology, neuroscience and education. Hove: Psychology Press, 2005.

DUVAL, R. Quelle Semiotique pour l'analyse de la activité et dês productions mathématiques. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de Mexico, p. 45-81, 2006. Disponível em: file:///C:/Users/Usuario/Desktop/abecin/conde%20o%20forr%C3%B3/Dialnet-QuelleSemiotiquePourLanalyseDeLactiviteEtDesProduc-2161528.pdf. Acesso em: 28 jun. 2019.

ESPITIA, L. E. S.; CRUZ, K. J. C.; OCHOA, C. P. F. Influencias del contrato didáctico en el aprendizaje del concepto de función**. Praxis e Saber**: Revista de Investigación y Pedagogía, [*s. l.*], v. 3, n 3. p. 119-138, 2011.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

FERNANDES, C. T. *et al*. Possibilidades de aprendizagem: reflexões sobre neurociência do aprendizado, motricidade e dificuldades de aprendizagem em cálculo em escolares entre sete e 12 anos. **Ciência Educação**, Bauru, v. 21, n. 2, p. 395-416, 2015. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v21n2/1516-7313-ciedu-21-02-0395.pdf. Acesso em: 29 jun. 2019.

FIGUEREDO, O. A. Ciências da cognição podem ajudar a matemática?. **Bolema**, Rio Claro, v. 20, n. 27, 2007.

FIORENTINI, D. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 8. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O lugar das matemáticas na licenciatura em matemática: que matemáticas e que práticas formativas?. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 917-938, dez. 2013. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v27n47/11.pdf. Acesso em: 29 jun. 2019.

FIORENTINI, D. *et al*. Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n. 36, dez. 2002. Disponível em: https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/1098/1/ARTIGO_Forma%c3%a7%c3%a3oProfessoresEnsinam.pdf. Acesso em: 29 jun. 2019.

FONSECA, C. **Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad**. 2004. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidad de Vigo, Vigo, 2004. Disponível em: http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/TESIS__en__PDF.pdf. Acesso em: 29 jun. 2019.

FONSECA, C., BOSCH, M.; GASCÓN, J. El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la "regla de Ruffini". *In*: ESTEPA, L.; RUIZ, F.; GARCÍA, J. (Org.). **Sociedad, escuela y matemáticas**: aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico. Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007. p. 439-460.

FONSECA, C.; GASCÓN, J.; LUCAS, C. O. Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de Mexico, v. 17, n. 3, p. 289-318, sept. 2014. Disponível em: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33532494003. Acesso em: 29 jun. 2019.

FONSECA, C. *et al*. Diseño de un recorrido de estudio e investigación en los problemas de modelización. *In*: SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 13., 2009, Santander. **Anais [...]**. Santander: Universidad de Cantabria, 2009. p. 1-7. Disponível em: http://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposXIII/dmdc/Fonseca_Casas_Bosch_Gascon_R.pdf. Acesso em: 29 jun. 2019.

FONSECA, L. S.; BARROS, L. G. X. Um estudo sobre a transição do ensino das noções de funções trigonométricas entre o ensino médio e o ensino superior no Brasil e na França. **Scientia Plena**, Aracajú, v. 12, n. 11, p. 1-15, 2016. Disponível em: https://www.scientiaplena.org.br/sp/article/view/3205/1586. Acesso em: 29 jun. 2019.

GARCÍA, F. J. *et al*. Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. **ZDM**: The international journal on mathematics education, [*s. l.*], v. 38, n. 3, p. 226-246, 2006. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/BF02652807. Acesso em: 29 jun. 2019.

GASCÓN, J. Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de Mexico, v. 4, n. 2, p. 129-159, 2001. Disponível em: http://www.redalyc.org/pdf/335/33540202.pdf. Acesso em: 29 jun. 2019.

GASCÓN, J. Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico: el caso del álgebra elemental. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de Mexico, v. 14, n. 2, p. 203-231, feb. 2011. Disponível em: http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v14n2/v14n2a4.pdf. Acesso em: 29 jun. 2019.

GASCÓN, J. Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. **Educación Matemática**, Ciudad de Mexico,

p. 99-123, marzo, 2014. Disponível em: http://www.redalyc.org/pdf/405/40540854006.pdf. Acesso em: 29 jun. 2019.

GATTI, B. A.; BARRETTO, E. S. S. **Professores do Brasil:** impasses e desafios. Brasília: UNESCO, 2009.

GODINO, J. D. Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática. *In*: INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 16., 2012, Jaén. **Anais […]**. Jaén: Universidad de Granada, 2012. p. 49-68. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/origen_EOS_Baeza_2012.pdf. Acesso em: 29 jun. 2019.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar 1**: conjuntos, funções. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

JONNAERT, P.; BORHT, C. **Criar condições para aprender:** o sócio construtivismo na formação de professores. Porto Alegre: Artmed, 2002.

KLEIN, F. **Matemática elementar de um ponto de vista superior**. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.

KUHN, T. S. **A estrutura das revoluções científicas**. 5. ed. São Paulo: Editora Perspectiva, 1998.

LAUTENSCHLAGER, E.; RIBEIRO, A. J.; ZANA, Y. Investigando o conceito de polinômios: uma abordagem envolvendo teorias das ciências cognitivas. **Vidya:** Revista Eletrônica, Santa Maria, v. 37, n. 1, p. 199-219, jan./jun. 2017. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/2013/1915. Acesso em: 29 jun. 2019.

LEÃO, D. M. M. Paradigmas contemporâneos de educação: escola tradicional e escola construtivista. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, n. 107, p. 187-206, jul. 1999. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/cp/n107/n107a08.pdf. Acesso em: 29 jun. 2019.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

LENT, R. **Cem bilhões de neurônios:** conceitos fundamentais de neurociência. 2. ed. São Paulo: Atheneu, 2010.

LIMA, E. L. *et al*. **A matemática do ensino médio**. 7. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

LIMA, R. A. **Dificuldades dos alunos no estudo da função afim**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2014. Disponível em: http://www.bc.furb.br/docs/DS/2015/360434_1_1.pdf. Acesso em: 29 jun. 2019.

LORENÇO, E. H.; OLIVEIRA, P. C. O conceito de função na produção acadêmica da PUC/SP via registros de representação semiótica. **Educação Matemática Pesquisa**, Consolação, v. 16, n. 2. p. 369-383, 2014. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/17380. Acesso em: 29 jun. 2019.

LUCAS, C. O. **Una posible "razão de ser" del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional**. 2015. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade de Vigo, Vigo, 2015.

MACHADO, S. D. A. **Eduação matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2010.

MANRIQUE, A. L. Licenciatura em matemática: formação para a docência x formação específica. **Educação Matemática Pesquisa**, Consolação, v. 11, n. 3, p. 515-534, 2009. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/2830. Acesso em: 29 jun. 2019.

MENEZES, A. P. A. B. **Contrato didático e transposição didática**: inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do ensino fundamental. 2006. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/3811/1/arquivo253_1.pdf. Acesso em: 26 jun. 2019.

MENEZES, M. B. **Praxeologia do professor e do aluno**: uma análise das diferenças no ensino de equações do segundo grau. 2010. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/3722/1/arquivo196_1.pdf. Acesso em: 26 jun. 2016.

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL. **Regimento.** Rio de Janeiro, 2019. Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/regimento/. Acesso em: 30 jun. 2019.

MORAES, M. C. **O paradigma educacional emergente**. Campinas: Papirus, 1997.

MOREIRA, P. C. 3+1 e suas (in)variantes: reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1137-1150, 2012. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n44/03.pdf. Acesso em: 29 jun. 2019.

MORETTIN, P. A.; HAZZAN, S.; BUSSAB, W. **Cálculo**: funções de uma e várias variáveis. São Paulo: Saraiva, 2003.

NEVES, J. D.; RESENDE, M. R.  O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural. **Educação Matemática Pesquisa**, Consolação, v. 18, n. 2, p. 599-625, 2016. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/23866. Acesso em: 29 jun. 2019.

NOVICK, L. R.; HOLYOAK, K. J. Mathematical problem solving by analogy. **Journal of Experimental Psychology**: learning, memory, and cognition, [*s. l.*], v. 17, n. 3, p. 398-415, 1991. Disponível em: https://psycnet.apa.org/record/1991-26486-001. Acesso em: 30 jun. 2019.

OLIVEIRA, S. L. **Tratado de metodologia científica**: projetos de pesquisas, TGI, TCC, monografias, dissertações e teses. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Formação de Professores: mudanças urgentes na licenciatura em matemática. *In*: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Org.). **Educação matemática no ensino superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009.

ORGANIZAÇÃO PARA COOPERAÇÃO E DESENVOLVIMENTO ECONÓMICO. **“Brazil”, in PISA 2015 results**: excellence and equity in education. Paris, 2016. 494 p. Disponível em: https://www.oecd-ilibrary.org/docserver/9789264266490-en.pdf?expires=1561887242&id=id&accname=guest&checksum=21161C71BBBC960D1F1BA263C2F247E3. Acesso em: 30 jun. 2019.

PAIS, L. C. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Arte Medicas, 1996.

PARRA, V. E.; OTERO, M. R. Praxeologias didácticas en la universidad y el fenômeno del <encierros>: un estudio de caso relativo al limite y continuidad de funciones. *In*: BOSCH, M. *et al*. (Org.). **Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico**: un panorama de la TAD. Barcelona: Centre de Recerca Matemática, 2011. p. 719-740.

PARRA, V.; OTERO, M. R.; FANARO, M. A. Los recorridos de estudio e investigación en la escuela secundaria: resultados de una implementación. **Bolema,** Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 847-874, dez. 2013. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S0103-636X2013000400008&lng=en&nrm=iso&tlng=es. Acesso em: 30 jun. 2019.

PEREIRA, J. C. S. **Alterações e recombinações praxeológicas reveladas por professores de matemática do ensino básico em formação continuada**: a partir de um modelo epistemológico alternativo para o ensino da álgebra escolar. 2017. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2017. Disponível em: https://pt.scribd.com/document/385069883/2017-Tese-Jose-carlos-de-Souza-pereira. Acesso em: 30 jun. 2019.

PÓLYA, G. **How to solve it**. 2. ed. Princeton: Doubleday, 1957.

PRETZ, J. E.; NAPLES, A. J.; STERNBERG, R. J. Recognizing, defining, and representing problems. *In*: DAVIDSON, J. E.; STERNBERG, R. J. (Org.). **The psychology of problem solving**. New York: Cambridge University Press, 2003. p. 3-30).
QUINTANA, E. R. **Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas:** una propuesta integradora desde el enfoque antropológico. 2005. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidad Complutense de Madrid, Madrid, 2005.

REIMÃO, C.; MADUREIRA, V.; MUÑOZ, M. L. **Dicionário de Psicologia**. Lisboa: Verbo, 1978.

RIBEIRO, C. Metacognição: um apoio ao proceso de aprendizagem. **Psicologia:** Reflexão e Crítica, São Paulo, v. 16, n. 1, p. 109-116, 2003. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/%0D/prc/v16n1/16802.pdf. Acesso em: 30 jun. 2019.

RODRÍGUEZ, E.; BOSCH, B.; GASCÓN, E. Los recorridos de estúdio investigaçíon em La reformulación didática del problema de lametacognición. *In*: RUIZ-HIGUERAS, L.; ESTEPA, A.; GARCÍA, F. J. (Org.). **Sociedad, escuela y matemáticas**: aportaciones de la teoría antropológica de la didáctica. Jaén: Universidad de Jaén, 2007. p. 1-17.

RUIZ-MUNZÓN, N. **La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional.** 2010. Tese (Doutorado em Matemática) – Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 2010. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=22189. Acesso em: 30 jun. 2019.

RUIZ-MUNZÓN, N.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Un modelo epistemológico de referencia del algebra como instrumento de modelización. *In*: BOSCH, M. *et al.* (Org.). **Un panorama de la TAD**. Bellaterra: Centre de Recerca Matemática, 2011. p. 743-765.

SANTOS, G. L. D.; BARBOSA, J. C. Como ensinar o conceito de função?. **Educação Matemática em Revista**, Canoas, v. 22, n. 53, p. 27-37, 2017.

SANTOS, L. C.; COSTA, D. E.; GONÇALVES, T. O. Uma reflexão acerca dos conhecimentos e saberes necessários para a formação inicial do professor de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**. Consolação, v. 19, n. 2, p. 265-290, 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/31505. Acesso em: 30 jun. 2019.

SANTOS JÚNIOR, V. B. **Juros simples e compostos:** análise ecológica, praxeológica e um percurso de estudo e pesquisa. 2017. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera, São Paulo, 2017. Disponível em: https://repositorio.pgsskroton.com.br/handle/123456789/12178. Acesso em: 30 jun. 2019.

SARRAZY, B. Le contrat didactique. **Revue Française de Pédagogie**, [*s. l.*], n. 112, p. 85-118, 1995.

SAVIANI, D. **Escola e Democracia**. 32. ed. Campinas: Autores Associados, 1999.

SERRANO, L.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Fitting models to data: the mathematising step in the modelling process. *In*: DURAND-GUERRIER, V.; SOURY-LAVERGNE, S.; ARZARELLO, F. (Org.). **Proceedings of the sixth congress of the European society for research in mathematics education**. Lyon: INRP, 2010. p. 2185-2196.

SIERRA, T. A.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Interrelación entre lo matemático y lo didáctico en la reconstrucción escolar de los sistemas de numeración. *In*: RUIZ, L.; ESTEPA, A.; GARCÍA, F. J. (Org.). **Matemáticas, escuela y sociedad:** aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico. Jaén: Universidad de Jaén, 2007. p. 359-381.

SILVA, B. A. **Contrato Didático, educação matemática:** uma nova introdução. 3. ed. São Paulo: Educ, 2007.

SILVA, J. V. G. **Grandezas e medidas:** um percurso de estudo e pesquisa para a prática profissional. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera, São Paulo, 2016. Disponível em: https://repositorio.pgsskroton.com.br/handle/123456789/3076?offset=40. Acesso em: 30 jun. 2019.

SMITH, S. M. Get ting into and out of mental ruts: a theory of fixation, incubation and insight. *In*: STERNBERG, R. J.; DAVIDSON, J. E. (Org.). **The nature of insight**. Cambridge: MIT University Press, 1996.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **A formação do professor de matemática no curso de licenciatura:** reflexões produzidas pela comissão paritária SBM/SBEM. Brasília, 2013. 43 p.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Diretrizes curriculares para o ensino de Matemática:** proposta da Sociedade Brasileira de Matemática Licenciatura. Rio de Janeiro, 2015. 152 p.

SPRINTHALL, N. A. Introdução e História. *In*: SPRINTHALL, N. A.; SPRINTHALL, R. C. (Org.). **Psicologia educacional**: uma abordagem desenvolmentista. Lisboa: McGraw-Hill, 1993.

STERNBERG, R. J.; STERNBERG, K. **Psicologia cognitiva**. 7. ed. São Paulo: Cangage Learning, 2017.

STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Pioneira, 2006.

TENÓRIO, A.; PENNA, P.; TENÓRIO, T. O uso de jogos da plataforma Mangahigh no estudo de funções polinomiais do 1° grau. **Educação Matemática Pesquisa**, Consolação, v. 17, n. 2. p. 257-280, 2015. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/21966. Acesso em: 30 jun. 2019.

TINOCO, L. A. A. (Org.). **Construindo o conceito de função**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, 2009.

VALENTE, W. R. Do engenheiro ao licenciado: subsídios para a história da profissionalização do professor de Matemática no Brasil. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 5, n. 16, p. 75-94, set./dez. 2005. Disponível em: https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/7946. Acesso em: 30 jun. 2019.

VALENTE, W. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **Zetetiké**, São Paulo, v. 16, n. 30, p. 139- 162, jul./dez. 2008. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/38424044.pdf. Acesso em: 30 jun. 2019.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais. *In*: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function. **International Journal of Mathematical Education in Science end Thecnology**, London, v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739830140305. Acesso em: 30 jun. 2019.

# Anexos e Apêndices

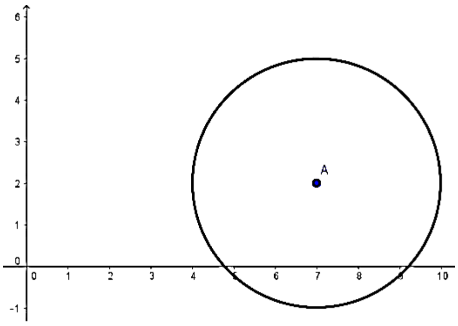
**Instituto Federal do Rio Grande do Norte**
**Campus de Canguaretama**
**Curso Superior de Licenciatura em Educação do Campo**
**Disciplina de Funções I – 2017.1**
**Aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa**

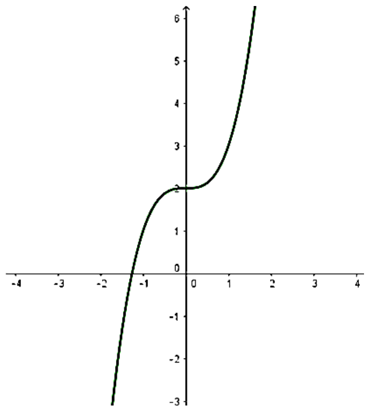
**Ficha diagnóstica**

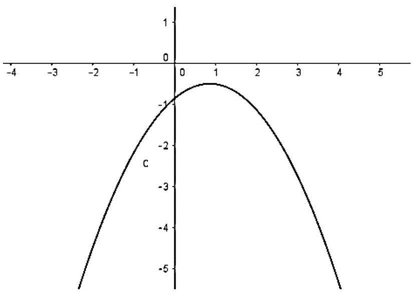
Nome: ______________________________________________ data: _____/____/_____

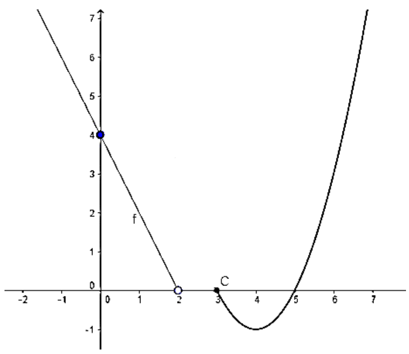
O que significa função?

9) Quais das seguintes relações de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}$, estão representados abaixo são funções? Justifique a sua resposta.



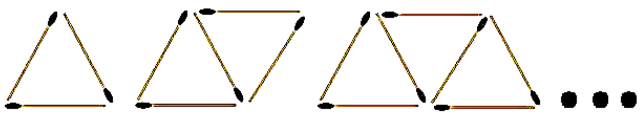


10) Seja $f$ uma função de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{R}$ definida por $f(x) = x^2 - \frac{x}{3} + 4$, calcule:

a) $f(3)$ b) $f(0)$ c) $f\left(\frac{1}{4}\right)$ d) $f(-5)$

11) Observe a sequência de triângulos formados por palitos

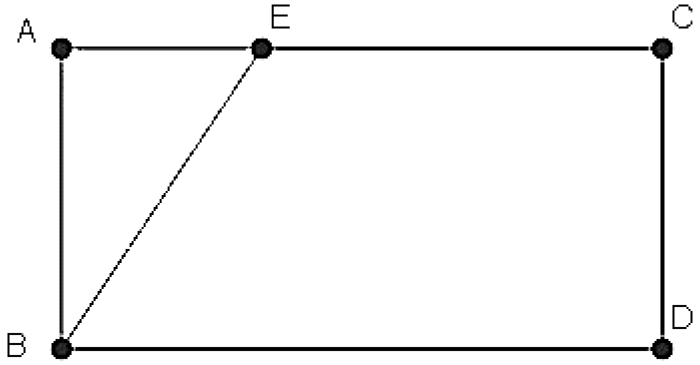


d) Quantos palitos são necessários para montar quatro triângulos?

e) Quantos palitos são necessários para montar sete triângulos?

f) Qual a expressão que fornece a quantidade de palitos para uma sequência com um número $n$ qualquer de triângulos?

12) O seguinte retângulo tem lados $BD = 6\ cm$ e $CD = 3\ cm$. Considere um ponto E, cuja posição varia do ponto A até o ponto C.




g) Se a distância de A até E for 1,0 $cm$, qual a área do triângulo ABE?
h) Se a distância de A até E for 2,3 $cm$, qual a área do triângulo ABE?
i) Qual o valor máximo que a área do triângulo ABE pode obter?
j) Qual o valor mínimo que a área do triângulo ABE pode obter?

k) Qual a expressão para a área do triângulo ABE em função da distância de A até E?
l) Qual a representação gráfica da área do triângulo ABE em função da distância de A até E?

13) O número de habitantes de uma cidade é hoje de 15.000 e cresce a uma taxa de 2,5% ao ano.
f) Qual o número de habitantes daqui a 5 anos?
g) Qual o número de habitantes a 20 anos?
h) Qual o número de habitantes a 50 anos?
i) Qual a expressão que representa esse crescimento?
j) Qual a representação gráfica desse crescimento?

14) Dada a função $f(x) = -x^2 - 3x$, simplifique:

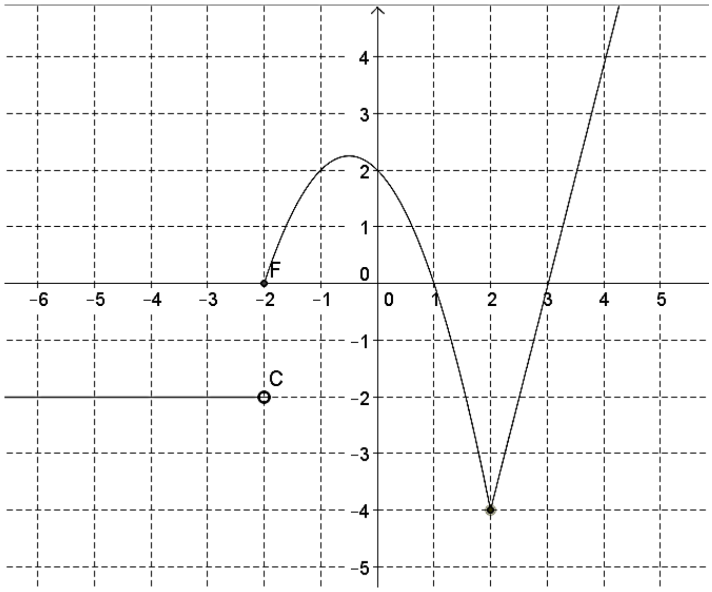
b) $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ b) $\frac{f(x+s)-f(x)}{s}$

15) Um determinado estudante de matemática anotou a posição, ao longo do tempo, de um móvel sujeito a uma força constante e anotou os seguintes dados:

| Instante (segundos) | Posição (metros) |
|---|---|
| 0 | 17 |
| 10 | 45 |
| 20 | 81 |

d) Qual a posição do móvel nos instantes 7seg e 18 seg?
e) Qual a função que representa a situação?
f) Qual a representação gráfica?

16) Com relação ao gráfico da função $y = f(x)$, representado a seguir, pode-se afirmar que:




f) A função é decrescente no intervalo [2, 4]

g) Se $-2 \leq x \leq 2$, então $f(x) = -x^2 - x + 2$.

h) $f(-5) = 2$.

i) A imagem da função é o conjunto dos números reais.

j) $f(2) = -4 \; e \; f(1) = 2$

**Instituto Federal do Rio Grande do Norte**
**Campus de Canguaretama**
**Curso Superior de Licenciatura em Educação do Campo**
**Disciplina de Funções I – 2017.1**
**Aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa**

**Ficha de Trabalho**

11) Construa no mesmo sistema cartesiano, os gráficos das seguintes funções de $\mathbb{R}$ $em$ $\mathbb{R}$:

b) $y = 2x + 1$ b) $y = -\frac{x}{3} - 4$ c) $y = -4x$ d) $y = \frac{x-2}{3}$

12) Construa a equação da reta que passa pelos pontos:

b) $(2,3)\ e\ (3,5)$ b) $(1,-1)\ e\ (-1,\ 2)$ c)$(3,-2)\ e\ (2,-3)$ d) $(1,2)\ e\ (2,2)$

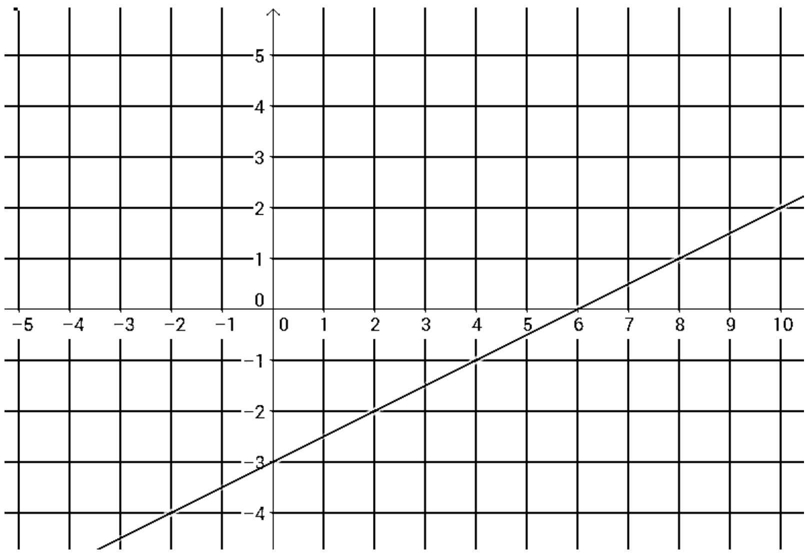
13) A função $f$ é definida por $f(x) = ax + b$. Considere que $f(-2) = 6\ e\ f(2) = 2$. Encontre o valor de $f(5)$.

14) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(-4, 6)$ e tem coeficiente angular igual a – 5.

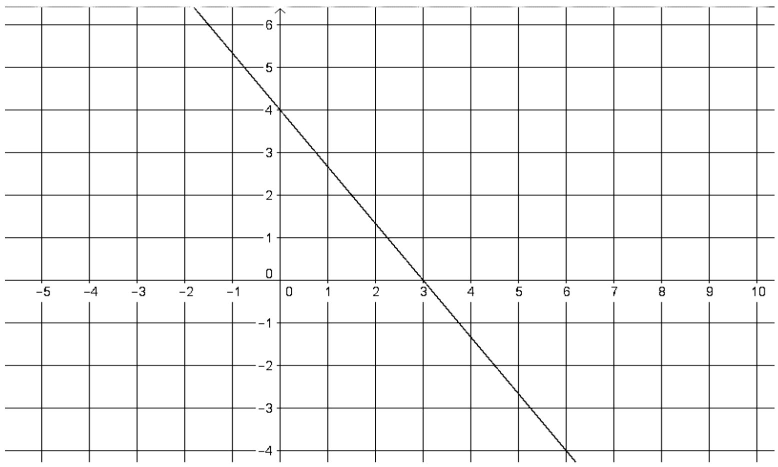
15) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(1, 3)$ e tem coeficiente linear igual a – 4.

16) Determine as representações algébricas das seguintes funções:

b)



b)



17) Encontre o zero das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

b) $f(x) = 7x - 1$ b) $f(x) = -4x$ c) $f(x) = -3x + 4$

18) Estude os sinais das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

b) $y = 3x - 2$ b) $y = -x + 4$ c) $y = 5 - \frac{x}{7}$

19) Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = \frac{5}{4} - \frac{x}{3}$ é positivo?

20) A reta $r$ intercepta os eixos de coordenadas nos pontos $A$ $e$ $B$. Determine a distância entre $A$ $e$ $B$, sabendo-se que $r$ passa pelos pontos $(1, 2) e$ $(5, 3)$.

**Instituto Federal do Rio Grande do Norte**
**Campus de Canguaretama**
**Curso Superior de Licenciatura em Educação do Campo**
**Disciplina de Função I – 2017.1**
**Aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa**

## Contextualização do Problema

Aposentadoria é um tema que surge de tempos em tempos fazendo parte das discussões dos brasileiros, pois afeta diretamente a vida das pessoas economicamente ativas e de suas famílias. O Congresso Federal brasileiro aprovou a lei 13.183/2015 que trata da mudança de algumas regras para a aposentadoria, na qual um ponto em destaque trata da fórmula 85/95. No caso, a mulher terá que alcançar uma soma de 85 anos, somando tempo da sua contribuição com a sua idade. No caso do homem serão 95 anos, seguindo o mesmo princípio. As idades 85 e 95 anos leva em conta a expectativa de vida dos brasileiros até 2018, para os anos seguintes teremos:

2019 a 2020: 86 (mulheres) / 96 (homens);
2021 a 2022: 87 (mulheres) / 97 (homens);
2023 a 2024: 88 (mulheres) / 98 (homens);
2025 a 2026: 89 (mulheres) / 99 (homens);
2027: 90 (mulheres) / 100 (homens).

Fonte: Agência Senado (CASTRO, A; VILAR, I, 2015)

$Q_0$: Como representar a situação atual e futura dos casos de aposentadorias das mulheres e dos homens, tomando por base a lei 13.183/2015 que trata das mudanças em algumas regras para as aposentadorias?