UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO-UFRPE
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO NO ENSINO DAS CIÊNCIAS

EDELWEIS JOSE TAVARES BARBOSA

PRAXEOLOGIA DO PROFESSOR: ANÁLISE COMPARATIVA COM OS DOCUMENTOS OFICIAIS E DO LIVRO DIDÁTICO NO ENSINO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO PRIMEIRO GRAU

Recife – PE
2017

EDELWEIS JOSE TAVARES BARBOSA

PRAXEOLOGIA DO PROFESSOR: ANÁLISE COMPARATIVA COM OS DOCUMENTOS OFICIAIS E DO LIVRO DIDÁTICO NO ENSINO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO PRIMEIRO GRAU

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito para obtenção do título de doutor.

Orientadora: Profa. Dra. Anna Paula Avelar Brito Lima

Recife – PE
2017

Catalogação

EDELWEIS JOSE TAVARES BARBOSA

PRAXEOLOGIA DO PROFESSOR: ANÁLISE COMPARATIVA COM OS DOCUMENTOS OFICIAIS E DO LIVRO DIDÁTICO NO ENSINO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO PRIMEIRO GRAU

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Profa. Dra. Anna Paula Avelar **BRITO LIMA**
1ª examinadora Presidenta /orientadora
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar **BELLEMAIN**
2ª examinadora externa
Instituição: Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Abraão Juvêncio de **ARAÚJO**
3º examinador externo
Instituição: Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marcelo **CÂMARA DOS SANTOS**
4º examinador interno
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Vlademir Lira Veras **XAVIER DE ANDRADE**
5º examinador interno
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco

Data da apresentação: 09 de fevereiro 2017

DEDICO ESTE TRABALHO

AO MEU DEUS,

pois tudo é do **PAI CELESTIAL**, Autor da vida.

Tudo a Ele pertence, toda a honra e toda a glória. É d'Ele a vitória alcançada em minha vida.

AO MEU PAI, **Edmilson Jose Barbosa de Sousa** (IN MEMORIAM),

que há muito tempo não se encontra mais entre nós. Este homem, que não teve oportunidade de terminar o primeiro grau, foi e continua sendo um dos meus maiores incentivadores desde o início, quando foram dados os primeiros passos de minha escolaridade. Ele é fonte de inspiração e representa uma grande referência de dignidade e luta em minha vida.

Papai querido, eternas saudades!

AGRADECIMENTO

Muitas pessoas contribuíram para a construção deste trabalho durante esse longo processo. Algumas, com suas presenças constantes; outras, distantes fisicamente.

Gostaria de expressar neste espaço a minha eterna gratidão a todos que, de forma direta ou indireta (seja por meio de orientações, de leituras, entre outros, ou simplesmente com incentivos e gestos de atenção), ajudaram a tecer esse texto de palavras e ideias que buscassem traduzir um pouco do resultado que conseguimos alcançar.

Agradeço inicialmente ao meu **DEUS**, Autor de todas as graças e conquistas obtidas na minha vida, por proporcionar a oportunidade de iniciar e concluir mais uma etapa de minha formação acadêmica.

À MINHA FAMÍLIA

À minha estimada esposa, **Valquíria Bezerra,** companheira e incentivadora dessa jornada, um exemplo de pessoa obstinada em alcançar seus objetivos. São 17 anos de convivência, persistência, lutas e vitórias. Obrigado, minha esposa, por sua dedicação a nossa família.

Aos meus queridos filhos, **Bianca Tavares e Daniel Tavares,** pela compreensão quanto à minha ausência em vários momentos.

À minha mãe, **Dona Estelita,** uma professora de língua portuguesa que sempre apoiou meus objetivos de vida; a **Davino Tavares de Lima** (*in memoriam*), meu avô querido; à minha querida irmã, **Ana Rosa**, e ao meu cunhado **Aldemir**, que me deram todo o apoio na realização de mais um sonho; a Mariana, Bruno e Lua Sofia, pela acolhida em sua casa nesse período em Recife. A dona Gloria, aos tios Djalma e Cícero, às tias Patrícia, Ivone, Cilene e Sonia. Obrigado por vocês estarem sempre ao meu lado, nos momentos difíceis e felizes! Com vocês compartilho os resultados obtidos.

À minha orientadora, **Anna Paula Avelar Brito,** uma pessoa muito especial e indispensável em toda a trajetória percorrida. Pessoa verdadeiramente íntegra, coerente e muito capaz, guia constante em todas as etapas desta pesquisa. Fez as primeiras leituras do projeto de pesquisa para a seleção da UFRPE em 2006, sempre me incentivou a não desistir, mesmo em meio às dificuldades. Graças a você, hoje posso completar essa jornada. Anna, muito obrigado! A você todo o meu respeito e admiração!

Ao Professor **Marcelo Câmara dos Santos**, a quem devoto o meu respeito e admiração pelo profissional competente que é. Fui apresentado ao professor Marcelo no Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM (2004) e desde então mantivemos contato profissional. Agradeço-lhe, professor, por sua paciência em ler os projetos de seleção de mestrado e por, em suas aulas de “Construtos Teóricos” em 2006, ter sido apresentado à Didática da Matemática de influência francesa. Não tive a oportunidade de ser seu orientando, mas aprendi muito com o senhor, principalmente nos momentos dos cigarrinhos.

Ao amigo **Abraão Araújo**, por suas contribuições ao longo dessa década de estudo no grupo de pesquisa, na qualificação e defesa desta tese.

À amiga **Paula Baltar**, por sua disposição em participar da qualificação, momento em que deu importantes contribuições, e na defesa desta tese.

Aos meus colegas da TURMA 2013 do doutorado, pela acolhida e apoio em muitas ocasiões durante o nosso percurso. Em especial, gostaria de mencionar nominalmente aqueles e aquelas que marcaram a relação estabelecida durante o tempo de convivência: Flávia Viana, Risonita Germano (prima), Luciana Santos, Melsedeque Freire, Jadilson Ramos e Daniela Santos. A vocês agradeço o companheirismo, o carinho e a atenção dispensados.

In memoriam, A Clóvis da Silva Júnior e Ricardo Oliveira, Adália Avelino **colegas especiais** que contribuíram para a minha formação, com valorosos conselhos, incentivo e, principalmente, com o exemplo de pessoas que são.

Aos **colegas** Maurício Pelloso, Fernando Emílio Almeida, Aleir Galvão, Cacilda Tenório, Osvaldo Brito e Dílson Cavalcanti, Zé Luiz companheiros de trajetória, incentivadores na continuação dos estudos, nas viagens a Recife e, consequentemente, na indução ao campo da Educação Matemática.

Ao **amigo** e irmão Niédson Silva, que conheci no primeiro ano do ensino fundamental, quando iniciamos nossa amizade. Éramos crianças brincando de bola, sonhando em ser jogadores. Hoje, podemos olhar pra trás e ver que tudo valeu a pena. Cada um seguiu seus caminhos, em alguns momentos iguais, como o curso Menor Aprendiz, no SENAI e, depois, no estágio em uma concessionária de automóvel. Após essa fase, seguimos caminhos diferentes, mas com objetivos semelhantes: concluir nossos cursos de graduação, mestrado e doutorado, e lutar por uma aprovação em um concurso.

Aos **colegas de trabalho UFPE-CAA,** Simone Queiroz, Ivanildo Carvalho, Cristiane Rocha, Valdir Bezerra, Viviane Lisboa, José Marcos, Maria do Desterro Elizabeth Lacerda, Euzébio Simões, Cleiton Bueno, Kátia Calligaris, Iranete Lima, Joselma Franco, Ana Paula Freitas, Ana Paula Souza, Ayron dos Anjos, Ernesto Valdes, João Freitas, Augusto César, Gustavo Camelo, Kátia Cunha, e a todos que fazem parte do Núcleo de Formação Docente.

Aos **colegas IFPE Campus Pesqueira**, Glauco Reinaldo, Fernando Emílio, Airlan Lima, Olavo, Kleber Fernando, Rosário Sá Barreto.

Aos **colegas do grupo Fenômenos Didáticos,** Lúcia Araújo, Mônica Lins, Marcus Bessa, Marcelo Câmara, Abraão Araújo, Anna Paula Brito, Cláudia Araújo, Regina Celi, Vlademir Andrade, Fernando Emílio, Dílson Cavalcanti, Iranete Lima, Rocha, José Luiz e aos demais integrantes do grupo.

A todos os **docentes** do Programa que deixaram suas impressões registradas em minhas lembranças, oportunizando momentos de troca e riqueza de experiências, marcando-me, indiscutivelmente, com suas contribuições para construção e ampliação do meu repertório de conhecimentos e formação inicial de pesquisador.

Aos **irmãos em Cristo** que lutaram e lutam para manter viva a chama do Evangelho oriundo da Reforma Protestante, que completa 500 anos de luta. Em especial, aos irmãos da Terceira Igreja Presbiteriana de Caruaru.

Aos **meus alunos e orientandos,** pela paciência, compreensão e apoio em minhas ausências nas orientações dos trabalhos de conclusão de curso e nas aulas regulares.

Um dia discursa a outro dia, e uma noite revela
conhecimento a outra noite. Salmo 19, vers. 2

RESUMO

O objetivo desta tese foi analisar, comparativamente, as praxeologias, em documentos oficiais, no livro didático e do professor, referentes ao ensino de equações polinomiais do primeiro grau, investigando as relações de conformidade entre eles. A realização deste estudo está fundamentada na ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Yves Chevallard e seus colaboradores (1999, 2002, 2009, 2010). A metodologia se constituiu em uma abordagem qualitativa de cunho etnográfico, em que foram analisadas as organizações matemáticas e didáticas de três professores comparando-as com as dos livros de referência deles e com o modelo dominante. Os resultados indicam que existe uma conformidade entre as praxeologias a serem ensinadas, propostas pelos autores dos livros didáticos, e as praxeologias efetivamente ensinadas pelos professores na sala de aula. As relações pessoais e institucionais relativas ao objeto equações polinomiais do primeiro grau dos professores foram constituídas por seus equipamentos praxeológicos (EP(x)) (CHEVALLARD, 2007). Os professores foram os organizadores das tarefas, técnicas e tecnologia de crescente complexidade (FONSECA, 2004) que foram tornadas rotineiras e problematizadas em sala de aula. A tarefa T_1 foi o ponto comum entre os três professores, embora os professores dois e três tenham trabalhado com mais tarefas. Em relação ao modelo dominante entre os três livros didáticos, identificamos: procedimentos de resoluções de equações que não podem ser resolvidas por procedimentos que se apoiem em raciocínio exclusivamente aritmético; livros (Tempo de Matemática e Matemática) e equações que podem ser resolvidas por meio de procedimentos aritméticos do livro “Praticando Matemática”. O modelo dominante dos três professores são as equações que podem ser resolvidas por meio de procedimentos aritméticos. Observamos que apenas com um professor houve coincidência entre o modelo dominante do livro de referência e o modelo dominante efetivado na sala de aula. Quanto às entrevistas, destacamos que os professores justificaram não trabalharem com o livro *Matemática* em virtude do que chamaram “nível dos estudantes”, ou seja, algo como a potencialidade e capacidade cognitiva deles. A professora dois escolheu a coleção *Matemática* disse que assim o fez pelo fato de o livro sempre retornar, no início de cada capítulo, a um conteúdo ministrado anteriormente, promovendo revisões e um trabalho em espiral. Os outros professores apresentaram justificativas distintas: a professora um declarou que o livro escolhido tem muitos exercícios, é “resumido” (sintético) e explica bem o conteúdo; o professor três afirmou que a proposta didática do livro é melhor para o trabalho na sala de aula. Também foi indagado aos professores que referenciais tomam como base para a preparação das aulas, e todos disseram que o livro didático é fundamental para esse planejamento. As equações polinomiais do primeiro grau são justificadas, nos livros didáticos e documentos oficiais (PCN e PC/PE), como uma ferramenta para resolver problemas.

Palavras chaves: Equação polinomial do primeiro grau; Teoria Antropológica do Didático; Professor; Modelo Dominante.

ABSTRACT

The aim of this thesis was to analyze, comparatively, the praxeologies, in official documents, the didactic book and the teacher, referring to the teaching of polynomial equations of the first degree, investigating the relations of conformity between them. This study is based on the view of the Didactic Anthropological Theory (TAD), proposed by Yves Chevallard and his collaborators (1999, 2002, 2009, 2010). The methodology was based on a qualitative ethnographic approach, in which the mathematical and didactic organizations of three teachers were analyzed in comparison with their reference books and the dominant epistemological model. The results indicate that there is a conformity between the praxeologies to be taught, proposed by the authors of the textbooks, and the praxeologies effectively taught by the teachers in the classroom. The personal and institutional relations related to the object polynomial equations of the first degree of the teachers were constituted by their praxeological equipments (EP (x) (CHEVALLARD, 2007), for which teachers were the organizers of the tasks, techniques and technology of increasing complexity. The task T1 was the common point among the three teachers, although the teachers two and three had worked with more tasks. In relation to the dominant model of the three textbooks, we identified: Equations that cannot be solved by procedures that rely on exclusively arithmetical reasoning (books Mathematical and Mathematical Time), and equations that can be solved by arithmetic procedures in the book "Practicing Mathematics." The dominant model between the three teachers is the equations that can be solved by arithmetic procedures. For only one teacher the dominant model of the reference book coincided with the dominant model implemented in the classroom. Regarding the interviews, we emphasize that the teachers justified that they did not work with the book "Mathematics" because of what they called "student level", that is, something like their potentiality and cognitive capacity. The teacher two chose "Mathematics" collection because the book always returns, at the beginning of each chapter, to the content previously taught, promoting revisions and a spiral work. The teacher one said that the book "Time of Mathematics" has many exercises, is "summarized" (in the synthetic sense) and explains the content well; the teacher three stated that the didactic proposal of the book "Practicing Mathematics" is better for working in the classroom. The teachers were also asked which benchmarks they take as a basis for class preparation and everyone said that the textbook is central to this planning. First-degree polynomial equations are justified in textbooks and official documents (PCN and PC/PE), as a tool to solve problems.

Keywords: First degree polynomial equation; Anthropological Theory of Didactics; Teacher; Dominant Model.

RÉSUMÉ

L'objectif de cette thèse est d'analyser comparativement les praxéologies dans les documents officiels, les manuels des élèves et ceux des enseignants, employés dans l'enseignement des équations polynômes du premier degré et d’enquêter sur la relation de conformité entre eux. La présente étude est basée sur la perspective de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), proposé par Yves Chevallard et ses collègues (1999, 2002, 2009, 2010). La méthodologie a consisté en une approche ethnographique qualitative, dans laquelle nous avons analysé les organisations mathématiques et didactiques de trois enseignants par rapport à leurs ouvrages de référence et le modèle épistémologique dominant. Les résultats indiquent qu'il y a une ligne entre les praxéologies à enseigner, proposées par les auteurs des manuels et les praxéologies effectivement employées par les enseignants en classe. Les relations personnelles et institutionnelles pour opposer les équations polynomiales des enseignants de la première année ont été reconnues par leur équipement praxéologique (EP (x) (Chevallard, 2007). Par conséquent, les enseignants étaient des organisateurs des tâches, des techniques et des technologies de plus en plus complexes (FONSECA , 2004) qui ont été réalisées dans leur routine et problématisées dans la salle de classe. La tâche T1 est un point commun aux trois enseignants, bien que les enseignants P2 et P3 ont travaillé les tâches T2, T3, T4 du groupe. Concernant au modèle dominant des trois manuels identifiés : procédures équations de résolutions qui ne peuvent pas être résolues par des procédures qui sont soutenues par un raisonnement purement arithmétique, dans les livres (Tempo de matemática et Matemática) les équations peuvent être résolues par le biais des procédures comptables de l'arithmétique "Pratiquer les mathématiques” . "le modèle dominant des trois enseignants sont les équations qui peuvent être résolues par des procédures arithmétiques. Seul chez l’enseignant P3 le modèle dominant était le même de son livre de référence. En ce qui concerne les interviews, nous soulignons que les P1 et P3 justifient que cela ne marche pas avec le livre "Math" en raison de ce qu'ils ont appelé "niveau des élèves", ou quelque chose, comme la capacité potentielle et cognitive. Le professeur P2 a déclaré qu'il avait choisi cette collection, parce que le livre revient toujours à un contenu au début de chaque chapitre ce qui permet de faire une révision et fournit une spirale de travail. L'enseignant P1, à son tour, a expliqué que le livre choisi et employé depuis de nombreuses années est "résumé" (dans le sens synthétique) et explique bien le contenu. Le professeur P3 a expliqué que la proposition du manuel scolaire (livro didático) est préférable pour le travail en salle de classe. Il a également été demandé aux enseignants quels repères ils prennent comme base pour la préparation des leçons. Les trois enseignants ont déclaré que le manuel est essentiel pour la préparation des leçons. Les Polynômes des équations du premier degré sont justifiés dans les manuels et documents officiels (PCN et PC / PE) comme un outil pour résoudre les problèmes.

Mots-Clés: équation polynomiale du premier degré; Théorie Anthropologique du Didactique; professeur; Modèle dominante.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

EF – Ensino Fundamental

ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática

IREM – Institutos de Pesquisas no Ensino da Matemática

LD – Livro Didático

MEC – Ministério da Educação e Cultura

MER – Modelo Epistemológico de Referência

NC-DD – Níveis de Codeterminação Didática

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

OD – Organização Didática

OM – Organização Matemática

PCA – Programa de Cálculo Aritmético

PC/PE – Parâmetros Curriculares de Pernambuco

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PMG – Praxeologia Matemática Global

PML – Praxeologia Matemática Local

PMP – Praxeologia Matemática Pontual

PMR – Praxeologia Matemática Regional

PNLD – Programa Nacional do Livro Didático

TAD – Teoria Antropológica do Didático

TD – Transposição Didática

UEPB – Univeridade Estadual da Paraíba

UFPE – Universidade Federal de Pernambuco

UFRPE – Universidade Federal Rural de Pernambuco

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A nossa preocupação com o ensino e pesquisa vem há mais de uma década, enquanto professor de ensino da educação básica e, mais recentemente, como professor de uma instituição federal de ensino. Explica-se, assim, nosso foco específico em pesquisas com o ensino da álgebra escolar.

As dificuldades vivenciadas no trabalho docente, principalmente quando ensinávamos conteúdos algébricos nos anos iniciais do ensino fundamental, nos inquietavam, tendo em vista que o aproveitamento dos alunos era insatisfatório. Isso nos deixava em uma situação desconfortável frente aos resultados alcançados no processo de ensino e aprendizagem.

Por esse motivo, iniciamos uma busca por caminhos que pudessem nos conduzir a uma resposta, a uma alternativa capaz de nos auxiliar em nosso fazer pedagógico e, consequentemente, oferecer aos nossos alunos a oportunidade de vencerem suas dificuldades e avançarem em relação aos conhecimentos matemáticos, em particular, aos algébricos.

Nessa busca por respostas em 2006, começamos a participar do grupo Fenômenos Didáticos na classe de Matemática, da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE (sendo um grupo interinstitucional, que reunia pesquisadores da UFPE, Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE, e Secretarias de Educação do Recife e Estadual de Pernambuco). Essa participação no grupo veio ao encontro de nossas inquietações, permitindo-nos vislumbrar alguns pontos de nossa prática docente que necessitavam ser revistos, como, por exemplo, o fato de os alunos apresentarem dificuldades na resolução de equações polinomiais do 1º grau no 9º ano, conteúdo estudado pela primeira vez no 7º ano, que demanda uma revisão cuidadosa no início de cada ano letivo, com o intuito de minimizar as dificuldades dos alunos.

A participação no grupo de Fenômenos proporcionou o ingresso na Universidade Estadual da Paraíba – UEPB como aluno do mestrado profisional em Ensino de Ciências e Matemática, concluído em 2011. Nesse mestrado, tivemos a oportunidade de refletir sobre nossa prática pedagógica e as questões da álgebra escolar. O foco da pesquisa foi a análise dos livros didáticos, especificamente como os autores de duas coleções de livros didáticos haviam introduzido as equações polinomiais do primeiro grau, tendo como referencial teórico a didática francesa com base na Teória Antropologica do Didático.

Adotamos como referencial teórico e metodológico a Didática da Matemática de Influência Francesa para proposta de investigação. Esse campo de investigação surgiu na França, no final dos anos 60 e início de 70 do século passado, quando foram fundados os Institutos de Pesquisas no Ensino da Matemática (IREM). As discussões propostas nesses institutos ganharam força e foram se expandindo pelos países francófonos (Suíça, Canadá, Bélgica, entre outros). Posteriormente, outros países se interessaram pelos mesmos objetos de estudo, inclusive o Brasil (BROUSSEAU, 1986; GÁLVEZ, 1996).

Chevallard (2009) define a Didática como a ciência da difusão e também da não difusão dos conhecimentos, dos saberes e das práticas de um grupo humano determinado, como uma classe escolar, a sociedade ou uma instituição.

As pesquisas relacionadas à Didática da Matemática propõem, dentre outros aspectos, investigar o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos da matemática. Particularmente, propõem explicar os fenômenos didáticos relativos às relações entre o ensino e a aprendizagem da matemática. Os pesquisadores entendem que, ao explicarem e buscarem novas maneiras de ensinar, promovem a melhoria do funcionamento do ensino (GÁLVEZ, 1996).

A visão clássica do ensino da álgebra está relacionada com a aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos, geralmente letras, simplificação de expressões algébricas e resolução de equações. Como consequência, a álgebra escolar tem servido para ensinar, apenas, um conjunto de procedimentos que, para os alunos, não têm relação com outros conhecimentos matemáticos nem com o mundo real (KAPUT, 2005).

Nessa situação, a álgebra escolar não se restringe ao ensino e aprendizagem de um conjunto de regras e técnicas, mas transforma-se numa forma de pensar e raciocinar, em que os alunos generalizam, modelam e analisam situações matemáticas (KIERAN, 2007). Dessa maneira, os alunos necessitam compreender os conceitos algébricos, as estruturas e o formalismo de forma a utilizarem, adequadamente, a simbologia para registrar as suas ideias e conclusões (NCTM, 2007).

Kieran (1992) avalia três fatores que são influências potenciais para as dificuldades dos estudantes relativas à álgebra: aprendizagem, ensino e conteúdo. Ou seja, os estudantes sentem dificuldades com a álgebra ensinada por seus professores que, por sua vez, ensinam a álgebra apresentada nos livros didáticos. Assim, um dos fatores que vem contribuindo para essa dificuldade poderia estar relacionado à forma como o conteúdo da álgebra está disposto na maioria dos livros didáticos.

Nesse sentido, no ensino e aprendizagem da matemática na sala de aula, é necessário compreender que existem relações entre alguém que ensina outrem que aprende e algo que é objeto de estudo – no nosso caso, o saber matemático. É importante chamar a atenção para o fato de que, nessa tríade anunciada, professor-aluno-saber, tem-se presente a subjetividade do professor e dos alunos, a qual em parte condiciona o processo de ensino e aprendizagem (ALMEIDA, 2009; BRITO MENEZES, 2006).

A construção do conhecimento matemático é mediada, em sala de aula, pelo professor, que se apoia no *texto de saber* (CHEVALLARD, 1991), o qual aparece no livro didático, fruto de um processo de Transposição Didática[1]. Ainda segundo Chevallard (1999), o livro didático determina em grande parte a opção do professor com relação ao tipo de conteúdo a ser desenvolvido na sala de aula. Acreditamos, então, que o livro didático exerce grande influência sobre a atuação do professor em sala de aula, pois, no contexto brasileiro, ele se torna uma das únicas ferramentas disponíveis para o trabalho docente.

Em relação à Teoria Antropológica do Didático (TAD)[2], Chevallard (1992, 1996, 1999) propõe que essa teoria é um prolongamento da Transposição Didática, com seus fundamentos na problemática ecológica, de forma que permite analisar as transformações feitas nos objetos de saberes a ensinar no interior da sala de aula, ou de outra determinada instituição (ARAUJO, 2009; BESSA DE MENEZES, 2010; BARBOSA, 2011, SANTOS, 2014, SANTOS, 2015 e BESSA DE MENEZES, 2015). Nessa transformação, o professor aparece como sujeito didático, fazendo opções metodológicas que nortearão suas aulas de matemática. Assim, o professor, por sua

[1] Transposição Didática diz respeito à trajetória cumprida por um determinado saber, desde a comunidade científica até a transformação em objeto de ensino (CHEVALLARD 1991).
[2] Contemplaremos a fundamentação teórica da Teoria Antropológica do Didático em um tópico específico com as devidas justificativas.

vez, também poderá seguir diferentes orientações oriundas dos documentos oficiais e do livro didático na forma de ensinar e resolver as equações do primeiro grau, propondo outras sequências de ensino para os seus alunos.

Chevallard propõe que não existe um mundo institucional ideal, no qual as atividades humanas sejam geridas por praxeologias bem apropriadas que permitam a realização de todas as tarefas desejadas de uma maneira eficaz, segura e inteligente (CHEVALLARD, 1998). Esse pesquisador acrescenta que as praxeologias envelhecem na medida em que seus elementos (tipos de tarefas, técnicas, tecnologias ou teorias) perdem seus créditos ou tornam-se opacos, dando origem à constituição de novas praxeologias, necessárias ao melhor funcionamento de uma determinada instituição, em consequência dos novos tipos de tarefas (tipos de problemas) que se apresentam a essa instituição.

Devido a essa ideia, Chevallard (1999) desenvolveu, dentre outras questões, a noção de *praxeologia*, que se ancora nos conceitos de *tipos de tarefas* a serem realizadas, de *técnicas* mobilizadas para a realização dos tipos de tarefas, de *tecnologias* que explicam ou justificam as técnicas e de *teorias* que fundamentam as tecnologias (propriedade matemática). Esse autor considera que esses quatro elementos fornecem uma grade que permite analisar e “modelizar” as atividades matemáticas.

Chamamos atenção para o fato de que alguns estudos têm-se debruçado na utilização da TAD também como método de análise das transformações dos saberes na sala de aula, das técnicas e subtécnicas[3] utilizadas pelos professores, que são oferecidas aos alunos com intuito de auxiliá-los na construção do saber matemático em cena no jogo didático. É nesse aspecto particular que queremos contribuir para essa discussão tão amplamente travada no cenário da Educação Matemática.

Nesse contexto, essa tese tem sua origem em um estudo de mestrado que nos possibilitou novas reflexões para desenvolver esse trabalho. Assim, o objetivo do estudo desenvolvido no mestrado foi analisar as possíveis mudanças na introdução de equações do primeiro grau em duas Coleções Matemáticas aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) (1999, 2002, 2005, 2008 e 2011) do Ensino Fundamental. O referencial teórico adotado foi a Teoria Antropológica do

[3] Termo utilizado por Bessa de Menezes (2010).

Didático (CHEVALLARD, 1998) para estudar as organizações matemáticas e didáticas presentes no capítulo referente à equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita.

Procuramos identificar, em relação à equação do primeiro grau, as praxeologias matemáticas e didáticas que, segundo Chevallard (1998), se estabelecem em termos dos tipos de tarefas e de elementos teórico-tecnológicos (conceitos e propriedades) utilizados para justificar e explicar a existência de tais técnicas.

As duas coleções analisadas foram: – *Matemática* e *Ideias e Desafios.* Para essas coleções, o ensino de equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita justifica-se implicitamente pelo fato de ser uma ferramenta para a resolução de problemas de contextos sociais e de outros domínios da Matemática. De forma geral, a noção de equação é definida como igualdades que contêm letras representando números desconhecidos, denominados de incógnitas, isto é, igualdades entre expressões literais (algébricas). Dessa maneira, resolver uma equação consiste em determinar o valor da letra (incógnita) que verifica a igualdade. Em ambas as coleções, a metáfora da balança de dois pratos é utilizada nas demonstrações das técnicas.

Verificamos, ainda, que as praxeologias matemáticas propostas nas coleções não sofreram modificações ao longo das avaliações, tendo sido mantidas as mesmas tarefas e técnicas. Contudo, percebemos que os autores modificaram suas coleções em relação às *praxeologias didáticas* na constituição do capítulo, inserindo novos elementos textuais, figuras, entre outros elementos.

Ainda podemos registrar que, desde a primeira avaliação, a coleção *Matemática*, em relação ao quantitativo de exercícios propostos, apresentava 80% de problemas e 20% de equações formadas para serem resolvidas. Já o livro *Ideias e Desafios*, na avaliação de 1999, propunha 50% de problemas e 50% de equações formadas. Nas avaliações seguintes, passou a propor mais problemas e, na avaliação de 2011, os percentuais foram os seguintes: 70% de problemas e 30% equações formadas para serem resolvidas nos exercícios.

Diante dos resultados exposto acima, ampliamos nosso universo da pesquisa para os documentos oficiais, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e os

Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PC/PE), analisando, inicialmente, as recomendações sobre o ensino de equações polinomiais do primeiro grau. A seguir, passamos a analisar as propostas dos autores dos livros didáticos sobre o ensino de equações. E, finalmente, avaliamos, comparativamente, a transposição dos saberes instituídos (documentos oficiais e livros didáticos) em saberes ensinados, trabalho de responsabilidade do professor.

Considerando esse percurso, propomos a seguinte questão: como se constituem as relações institucionais esperadas em livros didáticos e documentos oficiais para o ensino da álgebra sobre as equações polinomiais do primeiro grau, em comparação com as praxeologias efetivadas em sala de aula por professores que atuam em um ambiente institucional complexo, com vários elementos que não são obrigatórios?

Com o intuito de responder a essa questão, bem como as suas inter-relações, apoiamo-nos nas proposições de Chevallard (1989) que discute sobre a institucionalização, relações institucionais e pessoais com os objetos institucionais. Para esse autor, um objeto (O) do saber institucionalizado, ou reconhecido institucionalmente, mantém um vínculo institucional, que pode ser representado por: R (I, O) da instituição I com o objeto (O).

Ainda segundo Chevallard (1992), existem as relações pessoais de um indivíduo X com um objeto, que pode ser caracterizada por R (X, O). No entanto, só será estabelecida essa relação quando X entra na instituição I, onde vive O, com certos objetivos. Além disso, a relação institucional com um objeto R (I, O) é caracterizada pela união das práticas sociais que funcionam numa dada instituição, envolvendo esse objeto do saber.

Para esse autor (CHEVALLARD,1992), o saber matemático, enquanto forma particular do conhecimento, é obra da atuação humana institucional, ou seja, é algo que se produz, utiliza, ensina ou, de maneira geral, transita nas instituições. Dessa forma, pode-se dizer um dos objetivos da Teoria Antropológica do Didático consiste em analisar como um determinado objeto do saber (sobre)vive em determinada instituição e qual é o nível de conformidade[4] existente entre as relações pessoais e as relações institucionais com determinado saber.

Para se tornar um bom sujeito de **I**, uma pessoa X tem de aprender determinados saberes (S), em especial por que alguns desses saberes vivem em **I,** e por que, para ser bom sujeito de **I**, na posição p que virá ocupar, X existirá necessariamente a relação R (X, S) (CHEVALLARD, 1992). Ao afirmamos que X é um bom sujeito da instituição I em posição p simbolicamente, queremos dizer que R (x; o) ≡ RI (p; o), em que o símbolo ≡ designa a conformidade da relação pessoal de x na relação institucional em posição p (CHEVALLARD, 2009).

Nesse sentido, desde a concepção dos documentos oficiais e dos livros didáticos (Transposição Didática externa) até o professor (Transposição Didática interna), o saber passa por diversas transformações. Ou seja, para validar as organizações matemáticas e didáticas reconstruídas por meio das análises dos documentos oficiais e dos livros didáticos, é preciso compreender suas relações institucionais com o objeto matemático, a equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita, bem como observar o possível distanciamento entre os documentos oficiais, o livro didático e a prática professor na sala de aula. A nossa hipótese é que: O professor efetivará suas praxeologias Matemáticas e Didáticas de acordo com o livro didático que ele tem como referência em sua sala de aula e não com base em documentos oficiais e no livro didático utilizado pela escola.

Isso nos conduz às nossas questões de pesquisa: a) Como os documentos oficiais e livros didáticos estruturam e orientam o trabalho docente sobre as equações polinomiais do primeiro grau? b) O que é necessário para se introduzirem as equações polinomiais do primeiro com uma incógnita em uma sala de aula?

As reflexões de natureza teórica acerca dessa questão serão delineadas no capítulo seguinte. A nossa hipótese é a de que o conceito de *Transposição Didática* proposto por Chevallard (1991) compõe um aporte teórico que permite a realização do estudo das condições e concretização do ensino de resolução das equações polinomiais do primeiro grau nas instituições de ensino.

---

[4] Contemplaremos adiante a fundamentação teórica da Teoria Antropológica do Didático com as devidas justificativas.

Chevallard (1991) fundamenta o *conceito da Transposição Didática* nos conceitos primitivos de *instituições*, *indivíduos* e *objetos* do saber, da mesma maneira que as noções das *relações pessoais* e das *relações institucionais* com os objetos de estudo. Essa teoria nasce da busca desse autor por respostas para as seguintes indagações: qual a relação entre o *saber científico* e o *saber ensinado*? Qual a separação existente entre eles? Para esse autor, a Transposição Didática possibilita o estudo da trajetória do saber científico ao saber ensinado e, consequentemente, a compreensão da distância que os separa. Isto é, a Transposição Didática é um instrumento que permite exercer uma vigilância epistemológica sobre os saberes científicos e os saberes de fato ensinados.

De forma geral, podemos afirmar que o principal objetivo da noção de Transposição Didática é permitir o estudo das transformações advindas do saber desde o momento de sua concepção na comunidade científica até o momento em que ele é ensinado na sala de aula.

Para os procedimentos de análises na TAD, Chevallard (1999) sistematizou a noção de praxeologia, fundamentada nos conceitos de tipos de tarefas a serem propostas, de técnicas mobilizadas para resolver/dar conta dos tipos de tarefas, de tecnologias que esclarecem ou justificam as técnicas e de teorias que embasam as tecnologias (propriedade matemática). Ou seja, esses quatro elementos permitem a constituição de uma grade de análise e modelização das atividades matemáticas.

Assim, adotamos como referencial teórico e analítico a Teoria Antropológica do Didático, especificamente a noção de praxeologia matemática e didática, tendo como objeto de investigação as equações polinomiais do primeiro grau em documentos oficiais e livros didáticos. Pretendemos, assim, identificar e comparar as organizações matemáticas e didáticas estabelecidas nesses dois elementos em torno do nosso objeto de ensino. Ou seja, estabelecidos esses dois parâmetros iniciais de análise, queremos investigar como eles irão influenciar nas decisões do professor em seu cotidiano escolar.

Assim, elaboramos outros questionamentos que, de forma mais geral, nortearam esta tese:

- ✓ Quais as praxeologias o professor tem como referência para o ensino de resolução de equações do primeiro grau: a organização matemática e didática proposta pelos documentos oficiais ou o livro didático?
- ✓ Quais são os possíveis distanciamentos entre as organizações curriculares, praxeologias matemáticas e didáticas e o professor, os documentos oficiais e os livros didáticos?
- ✓ Quais são os níveis de codeterminação nos documentos oficiais?
- ✓ Que papéis (*topos*) do professor são esperados nos documentos oficiais e no livro didático?

Por fim, de forma geral, tivemos por objetivo *analisar comparativamente as praxeologias nos documentos oficiais, do livro didático e do professor, referentes ao ensino de equações polinomiais do primeiro grau.*

A tese está dividida em quatro capítulos. No primeiro, intitulado de *Fundamentação Teórica*, discorremos sobre os elementos teóricos da Transposição Didática (Transposição Didática externa e interna) e da Teoria Antropológica do Didático, assim como, sobre os elementos estruturais, em face das organizações praxeológicas matemáticas e didáticas, os níveis de codeterminação didática e os *topos*.

O segundo capítulo refere-se *às Reflexões sobre a Álgebra Escolar e a Modelização a Priori*. Nesse capítulo, tratamos da álgebra escolar e de seus aspectos históricos, da equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita (fizemos um panorama sobre pesquisas relacionadas com o ensino de equações do primeiro e segundo grau), do Modelo Epistemológico de Referência e, por fim, da modelização *a priori* das praxeologias (tarefa, técnica e tecnologias).

O terceiro capítulo traz a *Metodologia* que explica o tipo, o contexto e o sujeito da pesquisa, descreve os livros adotados, elenca as categorias e os critérios de análises e registra recortes das entrevistas com os professores. Nossa análise foi feita em três fases: os professores, os livros didáticos e os programas balizadores (PCN e PC/PE). Finalmente, estabelecemos comparações entre esses três elementos.

No quarto capítulo, *Análise Praxeológica,* apresentamos as análises praxeológicas matemáticas e didáticas referentes aos professores, aos livros didáticos, aos programas oficiais, aos *topos*, aos níveis de codeterminação e ao modelo de referência.

Por fim, apresentamos nossas considerações acerca de nosso trabalho.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1. A RESPEITO DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Neste capítulo enfocamos algumas reflexões teóricas sobre a Transposição Didática e a Teoria Antropológica do Didático. Essas reflexões são de autoria de Chevallard (1991, 1999) e estendem a já existente estrutura conceitual da didática de influência francesa à análise dos fenômenos didáticos.

A abordagem antropológica proposta por Chevallard (1999) ressalta o papel das instituições no sistema didático. Esse pesquisador entende o sistema didático como as relações do *sujeito*, *instituição* e o *saber* quanto ao sistema didático proposto por Brousseau (professor, aluno e saber). Para Chevallard (1999), a aprendizagem é resultado das transformações ocorridas na relação pessoal de uma determinada pessoa com o objeto.

1.1 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA (TD)

A Transposição Didática (TD) permite avaliar o percurso que se faz desde a produção do *saber científico* até o momento em que este se transforma em *objeto de ensino* e passa a fazer parte do triângulo fundamental que compõe o sistema didático – *professor-aluno-saber* –, transformando-se, portanto, em um *saber ensinado*. Desse modo, passaremos agora a analisar cada componente dessa transformação sofrida pelo saber da comunidade científica até a inclusão dele no âmbito da sala de aula.

Em primeiro lugar, é importante destacar que a noção de Transposição Didática é cunhada pelo sociólogo Michel Verret (1975)[5] em sua tese de doutorado. Na década de 1980, Yves Chevallard e seus colaboradores difundiram e rediscutiram esse conceito no campo da didática. Adotaram o princípio de que o saber se transforma quando é transposto do campo científico para a escola, ressaltando a compreensão dessa ação por aqueles que atuam no ensino das disciplinas científicas (CHEVALLARD, 1991). Por sua vez, Chevallard se inspirou na noção proposta por Verret e desenvolveu toda a sua construção teórica sobre esse fenômeno didático.

Para Chevallard (1991), a Transposição Didática tem como ponto inicial a antropologia didática, que se fundamenta nos conceitos primitivos de instituições,

---

[5] VERRET, M.(1975). *Le temps d'Etude*. Paris: Librairie Honoré Champion.

indivíduos e objetos do saber[6] bem como nas noções de relações pessoais e institucionais com o objeto de estudo, descritas a seguir.

1.2 Trajetórias dos saberes

A Transposição Didática se constitui a partir da problemática ecológica para atender às exigências procedentes das inter-relações em meio às noções dos saberes e instituições. A princípio, Chevallard (1991, 1998) preconiza que um saber não existe no vazio: todo saber surge em momentos distintos da sociedade e fixados em uma ou mais instituição. Portanto, Chevallard (1991, 1998) discute as seguintes proposições:

- ✓ Todo saber é saber de uma instituição.
- ✓ Um mesmo objeto do saber pode existir em instituições diferentes.
- ✓ Para que um saber possa existir em uma instituição, é indispensável que se sujeite a certas exigências, o que implica necessariamente que ele se transforme, ou então não fará parte desta instituição.

A noção de saber pode ser concebida, em princípio, como a primeira noção que se estabelece, de certa forma, na sistematização dos conhecimentos, ou seja, certo tipo de objeto que serve para delinear, na esfera da antropologia, o ambiente de uma antropologia dos saberes. Conforme Chevallard (1991),

> Um dado saber **S** encontra-se em diversos tipos de instituições **I,** que são em termos de ecologia dos saberes, seus diferentes habitats[7]. Se considerarmos esses habitats, perceberemos imediatamente que o saber em questão ocupa regularmente nichos muito diferentes. Ou, de outra maneira, que a relação institucional de **I** com **S**, $R_I(S)$, que denominarei como problemática de **I** em relação a S, pode ocorrer de várias maneiras diferentes. (CHEVALLARD, 1991, p. 153).

A partir das distintas características, à medida que os agentes das instituições podem manipular (transformar) um determinado saber, Chevallard (1991) considera quatro grandes tipos de instituições: *produção, utilização, ensino e transposição.* Para esse autor, as instituições *produtivas* de saberes científicos (as academias) são as mais respeitadas pela sociedade. A segunda instituição *utilizadora* de saberes é, via

---

[6] Estes termos serão detalhados no tópico que trata da TAD.
[7] Na Biologia, *habitat* designa o lugar onde vive uma espécie.

de regra, menosprezada ou fosca, já as instituições de ensino são mais perceptíveis culturalmente do que as de utilização.

As instituições *transpositivas* (noosfera) são consideradas o ponto central da Transposição Didática por possibilitarem que os saberes transitem de uma instituição a outra (CHEVALLARD, 1991). Ainda de acordo com esse autor,

> Os processos transpositivo-didáticos e mais geralmente institucionais são, tal como se imagina, a mola essencial da vida dos saberes, de sua dimensão e de sua funcionalidade adequada. [...] são uma condição sine qua non do funcionamento de nossas sociedades, cujo descuido, particularmente em proveito de pura produção de sabres, pode se constituir em crime (CHEVALLARD, 1991, p. 158).

O propósito do termo “Transposição Didática” justifica-se quando a instituição fim é uma instituição de ensino. Nessa perspectiva, Chevallard (1991) diferencia três tipos de saberes: *saber científico* (*savoir savant*), gerado pelos cientistas (academias); o *saber a ensinar* (*savoir à enseigner*), analisado e selecionado pela noosfera (professores, entre outras); e *o saber ensinado* (*savoir enseigné*), oriundo do trabalho efetivado em sala de aula pelo professor.

De acordo com Chevallard (1991), para que um saber seja reconhecido como *saber científico*, é primordial que o pesquisador divulgue as publicações científicas de forma acessível, livre da história inerente aos trabalhos no interior dos laboratórios. Assim, o pesquisador exclui quaisquer relações pessoais que ele teve com o objeto, suprime todas as reflexões desnecessárias, ou que não sejam relevantes (despersonalização), elimina a história do saber que está sendo divulgado, até mesmo o problema que lhe deu origem (descontextualização e destemporalização), inserindo novos vocábulos que tornem as definições acessíveis a leitores que precisam apenas compreender os conhecimentos essenciais para apropriarem-se deles (cooperação para o progresso da linguagem científica).

Henry (1991) e Chevallard (1991) veem a existência de uma etapa intermediária entre a transformação do saber científico em saber ensinado na escola. Esse caminho do saber escolar é traçado nas instituições intermediárias (diretrizes ou parâmetros curriculares, programas, livros, entre outros). Esses autores propõem que o *saber a ensinar* é produzido quando da elaboração de programas de ensino, que devem ser acessíveis ao professor. Entretanto, não são os programas de ensino que conduzirão diretamente o processo de ensino e aprendizagem na sala de aula.

> Tais programas, currículos, livros didáticos, aparecem, então, como instrumentos reguladores no sentido que eles vão normatizar o que deve ser ensinado na escola, o saber a ensinar, consolidando uma primeira etapa da Transposição Didática e caracterizando a Transposição Didática externa (BRITO MENEZES, 2006, p. 76).

O processo de transformação do saber científico em saber ensinado comporta a participação de instituições e indivíduos. Para compreender a ação, o papel de cada uma dessas instâncias de participação nesse processo, é necessário refletir sobre as várias etapas que marcam o caminho percorrido para tal transformação.

No percurso dos saberes produzidos no contexto científico da academia até a chegada deles à sala de aula, eles passam por um processo de transformação, o que implica dar-lhes uma *roupagem didática* para que possam ser ensinados. Isso acontece porque o objetivo da comunidade científica e o da escola são diferentes. À ciência cabe o papel de responder as perguntas que são formuladas e requerem respostas em um determinado contexto histórico e social (CHEVALLARD, 1991).

Esse processo de transformação dos saberes tem efeitos positivos e negativos. Os efeitos positivos desse trabalho dizem respeito ao fato de "ele tornar o saber público, portanto utilizável e verificável por qualquer pessoa, no mínimo pelos membros da comunidade científica". Já os efeitos negativos dizem respeito ao fato de que esse trabalho "faz desaparecer, parcial ou totalmente, o contexto da descoberta, o que o torna misterioso, privado de sentido, isto é, desligado das questões iniciais às quais o saber é uma resposta" (BESSOT, 2003, p. 2).

Ainda segundo Chevallard (1991), é fundamental que se considere que há uma distância entre o *saber científico,* o *saber a ensinar* e o *saber ensinado*. Não pode existir, para Chevallard, uma desconexão entre eles, pois isso provocaria situações de *crise*. Assim, esse autor introduz um novo conceito: o de *vigilância epistemológica*. Para ele, é imprescindível que se realize essa *vigilância* a fim de que essa distância, essas deformações e adaptações não culminem por 'desfigurar' o saber original de tal maneira que o *saber a ensinar* deixe de ser fiel a ele, o que pode dar origem a certos obstáculos à aprendizagem.

Desse modo, as transformações dos saberes científicos em saberes a ensinar ocorrem em um ambiente denominado por Chevallard (1991) de "noosfera". Esse ambiente é composto por uma comunidade (pessoas e instituições) responsável em estabelecer o que deve ser ensinado na escola. Ou seja, esse percurso de transformações é feito por uma instituição *invisível*, entendida como uma *esfera pensante* do saber. Essa instituição é constituída de pesquisadores, técnicos, professores, especialistas, enfim, por pessoas ligadas a instituições, como universidades, ministérios da educação, redes de ensino municipais e estaduais. Essas instituições definem que saberes devem ser ensinados e de que forma eles devem chegar à sala de aula.

Podemos inferir que, no Brasil, com o PNLD (BRASIL, 1998), a própria noosfera promove outra forma de vigilância, a vigilância aos livros didáticos, de maneira que eles atendam às exigências dos documentos norteadores dos currículos e diretrizes. O PNLD foi concretizado em 1985 e, há cerca de duas décadas, o seu trabalho vem se intensificando, particularmente com a proposição dos PCN (BRASIL, 1997). Assim, a vigilância ao texto do saber apresentado no livro didático tem sido cada vez mais criteriosa.

No entanto, se compararmos o país no qual Chevallard desenvolveu seus estudos (França) com o nosso país, entenderemos que existe uma diferença nesse processo de Transposição Didática, uma vez que na França existem programas do governo que são seguidos nas instituições de ensino, e no Brasil não temos programas de ensino, mas parâmetros curriculares em nível nacional e as diretrizes das secretarias estaduais de ensino. Assim, a Transposição Didática se materializa nos livros didáticos. Após quase duas décadas dos PCN, essa realidade começa a mudar, uma vez que está em discussão a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que deverá ser um norte para todo o país.

Da mesma forma que o saber científico segue normas previamente determinadas para ser validado pela comunidade científica, o saber a ensinar também exige regras na sua textualização (texto do saber) para o contexto escolar. Essa textualização se dá em quatros etapas: a *dessincretização do saber*, decorrente da exigência de organizar e repartir a teoria em áreas e especialidades bem demarcadas; a *despersonalização do saber*, consequência da exigência de isolamento dos saberes de qualquer situação pessoal; *a programabilidade da aquisição do saber*, que consiste no estabelecimento de um planejamento de aprendizagem conforme fluxo crescente e lógico; *a publicidade do saber*, que é a definição explícita do que será ensinado (CHEVALLARD, 1991).

Entretanto, teoricamente, o professor não escolhe o saber que deverá ser ensinado em cada nível da escolaridade. Pode, apenas, a partir dos saberes instituídos pela noosfera, inserir ou suprimir conteúdos na sala de aula. Assim, um novo percurso do saber a ensinar e o saber ensinado sofre uma nova transformação, denominada por Ravel (2003)[8] de *saber aprontado* (*savoir apprêté*). Para essa autora, esse saber é o resultado das escolhas didáticas e matemáticas feitas por um professor para ensinar um dado objeto do saber matemático.

Na execução do planejamento, o professor transforma o *saber aprontado* em saber ensinado. Nesse processo de transformação ocorrido durante a aplicação do que estava previsto no plano de aula (saber aprontado) para o que realmente ocorreu na sala de aula, há a realização, ou não, das expectativas.

No processo de apropriação dos saberes que ocorre na sala de aula, o saber ensinado seria o último. Esse saber deve aparecer em conformidade com o saber a ensinar. No entanto, ele não é o efeito de nossos anseios, pois,

> [...] para que o ensino de um determinado objeto do saber seja possível, esse elemento deverá ter sofrido certas deformações, que tornariam apto para ser ensinado. O saber tal como é ensinado, o saber ensinado, é necessariamente distinto do saber inicialmente designado como saber que deve ser ensinado, e o saber a ensinar (CHEVALLARD, 1991, p. 16-17).

De acordo com Chevallard (1991), é a noosfera que aprova os elementos dos saberes científicos a serem expostos ao trabalho externo e visível da Transposição Didática. Ainda segundo esse pesquisador, o próximo passo na transformação sofrida pelo saber científico acontece no interior da sala de aula, cujos parceiros são, a rigor, professor e aluno, e o professor é responsável em realizar a transposição.

O trabalho da Transposição Didática interna ocorre pouco depois da introdução formal dos novos elementos do saber no cerne do sistema de ensino. Contudo, na relação didática, o professor nem sempre (quase nunca, na verdade) terá acesso ao *saber original*, mas à sua adaptação/deformação, por meio dos manuais de ensino e livros didáticos. Além disso, o professor é o responsável por mais uma fase nessa adaptação, que incidirá no seio da relação didática. A esse respeito, Pais (1999) entende que

---

[8] Il effectue également ses choix dans le texte du savoir en se projetant dans la classe (interviennent alors des contraintes temporelles, d‟organisation, d‟interaction avec les élèves,etc.) et en s‟appuyant sur ses connaissances didactiques.

> O trabalho do professor envolve um importante desafio que consiste numa atividade que é, em certo sentido, inversa daquela do pesquisador. Pois, enquanto o matemático elimina as condições contextuais e busca níveis mais amplos de abstração e generalidade, o professor de matemática, ao contrário, deve recontextualizar o conteúdo, tentando relacioná-lo a uma situação que seja mais significativa para o aluno (PAIS, 1999, p. 28-29).

Outro componente existente no processo de transformação dos saberes é o tempo. Chevallard (1986) distingue duas variáveis com base na temporalidade do sistema didático: o tempo didático e o tempo de aprendizagem. O primeiro é aquele fixado em programas escolares, orientações curriculares, planos de cursos e livros didáticos, em implementação a uma exigência legal. O segundo está mais relacionado aos rompimentos e conflitos do conhecimento, estabelecidos em constante reorganização de dados e que caracterizam toda a diversidade do ato de aprender. Dessa forma, não são possíveis de serem controlados.

Partindo das ideias de Chevallard (1986), Câmara dos Santos (1995; 1997) avançou na construção de um modelo de funcionamento do tempo ao propor um modelo que representa o fenômeno tempo formado por mais duas dimensões: o tempo noosférico e o tempo do professor.

Quanto ao tempo noosférico, Câmara dos Santos (1997) entende que a ordem do aparecimento do conhecimento no ambiente escolar preexiste no texto escolar, isto é, em um texto que organiza o conjunto dos objetos de conhecimento que deverão ser ensinados. Esse texto, de certa forma, determina a programação escolar e sustenta uma relação particular com o tempo. Contudo, para esse pesquisador, esse tempo contém dois componentes que funcionam associados e em sincronia: o *tempo legal* e o *tempo lógico.*

O tempo legal é aquele regula o ritmo de exposição dos objetos de conhecimento de acordo com a divisão estabelecida no texto escolar. Já o tempo lógico seria aquele intrínseco ao próprio conhecimento matemático. É um tempo linear, que originou o que se costuma chamar de cadeia de pré-requisitos.

Câmara dos Santos (1997) propõe um segundo componente, *o tempo do professor*, que está inteiramente ligado ao professor como *sujeito didático*. Assim, “o gerenciamento desse tempo está fortemente fixado na relação que o professor mantém com o conhecimento matemático” (p. 113). Isso se legitima, de certo modo, à medida que o professor avança mais rápido o relógio didático quando se trata de um determinado objeto de conhecimento e freia esse relógio em outros objetos devido à ausência de familiaridade com o conhecimento matemático em pauta.

Para melhor compreendermos o que registramos, construímos um esquema gráfico da trajetória do saber desde o saber científico até o saber ensinado. Na próxima figura, aparecem alguns elementos da Transposição Didática, como o *habitat* das vigilâncias, os tempos e as instituições.

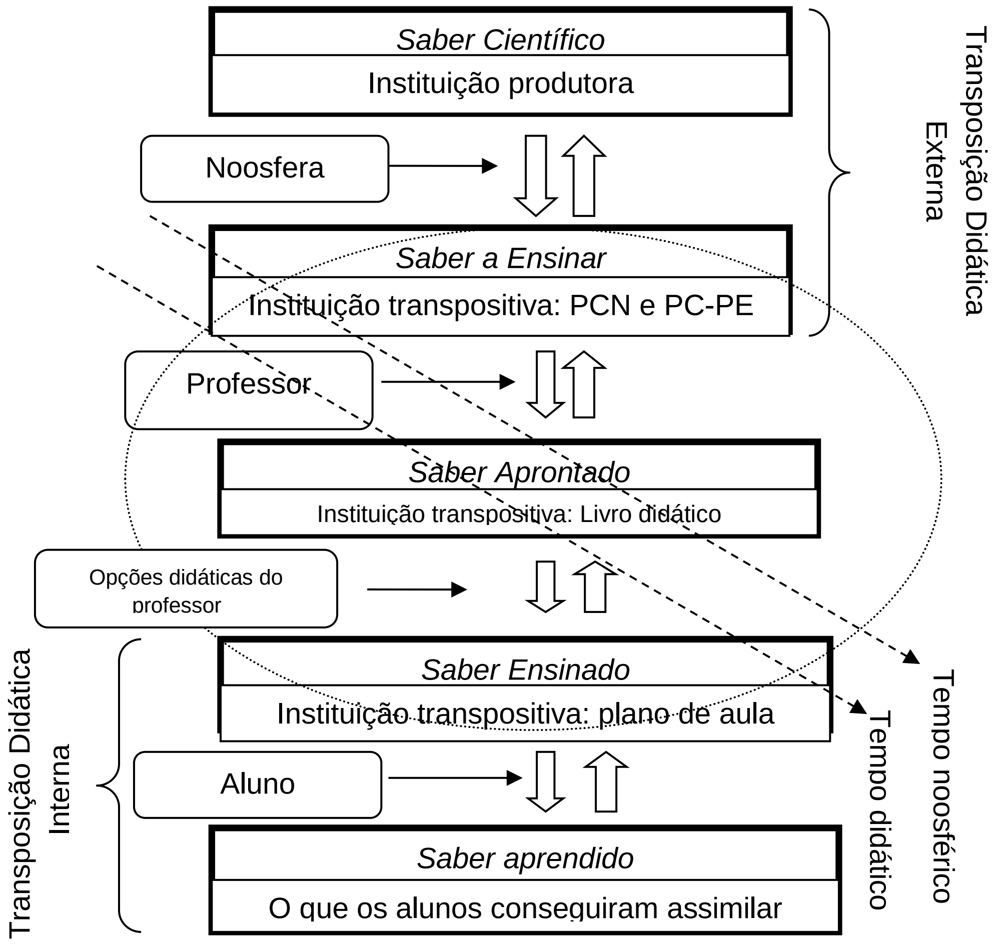


Figura 1 - Os estágios da Transposição Didática interna.
Fonte: Adaptado de Ravel (2003, p. 6)

Um dos objetivos de nosso estudo é o de caracterizar os elementos da Transposição Didática externa e da interna, que se materializam em torno do ensino e aprendizagem da álgebra referente à resolução de equações do primeiro grau. Desse modo, serão analisados os programas oficiais de ensino brasileiro (os PCN e o

PC/PE) e de livros didáticos (três livros). Além disso, analisaremos a atuação de três professores cujas aulas foram filmadas. Após essa discussão, passaremos a discorrer sobre alguns elementos que constituem a TAD.

1.3 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)

Essa teoria foi desenvolvida por Chevallard (1992) e inscrita na extensão da Transposição Didática a partir da problemática ecológica. Nessa abordagem, os objetos matemáticos não existem em si, mas como entidades que emergem de sistemas de práticas que ocorrem em uma dada instituição.

Segundo Bosch e Chevallard (1999), a *problemática ecológica* ampliou o campo de análise da Didática da Matemática e permitiu a discussão sobre as condições instituídas entre os diferentes objetos do saber a ser ensinado.

Esses autores avaliam ainda que a Transposição Didática posiciona o saber matemático no interior de um plano de análise epistemológica do regime didático do saber. No entanto, o primeiro modelo proposto para analisar os componentes do saber matemático permaneceu de forma muito resumida. Esse modelo é enunciado em termos do objeto do saber, o qual se divide simplesmente em objetos *matemáticos* (instrumentos úteis para estudo de outros objetos matemáticos, transformando-se em objetos de estudos em si mesmo), *paramatemáticos* (ferramentas utilizadas para descrever outros objetos matemáticos) e *protomatemáticos* (que não tem *status* de objeto de estudo, nem mesmo de ferramenta explícita). Essa divisão se dá em face de um paradigma de análise dos elementos que ainda possuem algumas limitações.

Para esses autores, a Teoria Antropológica do Didático, em especial a noção de praxeologia, é resultado da ampliação do campo de investigação procedente da Transposição Didática, ao consentir a interpelação e restrições que se instituem entre os diferentes objetos de saberes a ensinar no interior de determinada instituição.

Chevallard (1999) caracterizou essa teoria em forma de axiomas. Inicialmente, esse autor apoiou-se em três conceitos primitivos – *objetos, pessoas* e *instituições* – assim como nos conceitos de *relações pessoais* de um indivíduo com um objeto e de *relações institucionais* de uma instituição com um objeto.

De acordo com Chevallard (2003, p. 81), o primeiro conceito primitivo é o OBJETO (O) que se configura como toda entidade material ou imaterial a qual existe para um ou mais indivíduos. Conforme esse autor, tudo é Objeto, inclusive as instituições, os indivíduos e as posições que os indivíduos ocupam nas instituições. Dessa maneira, todo produto intencional da atividade humana é um objeto (ibidem, p. 81). Chevallard (1999) diz que o objeto ocupa uma posição distinta, sendo o mesmo “material base” da construção teórica. Ainda para Chevallard (1991), um objeto matemático é

> Um emergente de um sistema da práxis no qual são manipulados objetos materiais que se decompõem em diferentes registros semióticos: registro oral, das palavras ou das expressões pronunciadas; registro gestual; domínio das inscrições, ou se desenha (gráficos, fórmulas, cálculos,...), isto é, registro da escrita (CHEVALLARD, 1991, p. 127).

Um exemplo de objeto matemático é uma equação polinomial do primeiro grau, mas existem também os objetos da escola: professor, aprender, saber, entre outros.

Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como existente (para ela). Chevallard (1999) propõe, ainda, outra noção básica, a das RELAÇÕES PESSOAIS (R (X, O)) e a das RELAÇÕES INSTITUCIONAIS (R I (O)) com o objeto. Isto é, o objeto (O) existe se existir pelo menos para uma pessoa X ou uma Instituição I, ocorrendo pelo menos uma relação com esse objeto.

O segundo elemento é a INSTITUIÇÃO (I), um dispositivo social total que, mesmo tendo uma extensão muito reduzida no espaço social, permite e impõe a seus sujeitos, segundo Chevallard (2003), maneiras próprias de fazer e de pensar.

Para esse autor,

> [...] toda instituição I está acompanhada de pelo menos um conjunto de objetos (O), denominado de conjunto dos objetos institucionais (para I), que é o conjunto dos objetos O que I reconhece, quer dizer, para os quais existe uma relação institucional RI (O)” (CHEVALLARD, 1992, p. 144).

Portanto, todo saber é o saber de uma instituição. São exemplos de instituição o tempo de vida, a família, a sala de aula, a escola, um livro didático, entre outros. Nesta pesquisa, a instituição alvo é o 7º ano do ensino fundamental e o objeto matemático é o conceito de equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita.

O terceiro elemento é a PESSOA (X). Chevallard (1999) distingue alguns estágios desse conceito: o indivíduo e o sujeito. Para esse autor, o estágio primário seria o de *Indivíduo,* uma vez que não se sujeita, nem muda com as relações cotidianas com os objetos e instituições. Ou seja, o indivíduo torna-se um sujeito, quando se relaciona com uma instituição I qualquer, ou melhor dizendo, quando se sujeita a uma instituição I. Desde cedo o indivíduo é submetido a certas instituições com suas demandas, hábitos, formas, que o fazem pessoa (CHEVALLARD, 1999, p. 1).

Segundo Chevallard (2003, p. 73), desde o nascimento, o indivíduo se sujeita – quer dizer, é ao mesmo tempo dependente e sustentado por – múltiplas instituições, como a família, em que se torna sujeito. Por exemplo, uma criança se torna sujeito da instituição “escola” quando exerce a posição de aluno, isto é, passa a ser sujeito ativo cooperando para a existência daquela instituição pelo fato de se sujeitar a ela.

Dessa forma, para Chevallard (2003), a pessoa é a soma das sujeições ao grande número de instituições as quais levaram vários anos para transformar o indivíduo em sujeito. Essas instituições foram, aos poucos, formando a personalidade dele e inspirando as suas atitudes e maneiras de ser e ver suas relações pessoais.

Nesse processo, em que há a intenção em transformar ou alterar a relação R (X, O), Chevallard (ibidem) introduz a noção de *sujeito adequado.* Assim*,* existe *o sujeito adequado* de uma instituição I, quando a pessoa X torna-se um sujeito adequado dessa instituição I, ou seja, no que concerne ao Objeto Institucional (O), quando há a relação pessoal R (X, O). Nesse caso, existe uma conformidade na relação institucional R I (O), isto é, o sujeito está cumprindo as expectativas da instituição, está conforme deseja a instituição.

No que diz respeito ao sujeito desadequado, Chevallard o define como incapaz de fazer parte do contrato institucional, podendo, inclusive, ser expulso da instituição I. Desse modo, entra em cena a função da instituição como um sistema avaliador de tal conformidade. Isso é, como afirma Chevallard (1999), “[...] relativo aos mecanismos segundo os quais I é levada a pronunciar, através de alguns dos seus agentes, um veredicto de conformidade (ou de não conformidade) R (X, O) com R (I, O).” (p. 31).

No que tange ao Saber, sob a ótica da TAD, cada saber é saber de pelo menos uma instituição. Um mesmo objeto do saber pode *viver* em instituições diferentes e, para viver em uma instituição, um saber necessita submeter-se a certas imposições, o que o conduz a ser transformado.

Chevallard (1998) afirma que a TAD foi inicialmente construída como uma teoria cujo objetivo consiste em controlar os problemas da difusão de conhecimentos e de saberes quaisquer compreendidos em suas especificidades; logo, de conhecimentos matemáticos também.

> O ponto crucial a este respeito, cujas implicações, todas, nós descobrimos pouco a pouco, é que a TAD situa a atividade Matemática, e consequentemente a atividade de estudo em Matemática, no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais. [...] falar validamente de didática da Matemática, por exemplo, supõe se falar de certos objetos distintos – a Matemática, de início, e, em seguida, solidariamente, os alunos, os professores, os livros, etc. (CHEVALLARD, 1998, p. 91).

Para Chevallard (1999), o saber matemático é fruto da ação humana institucional. Dessa forma, é algo produzido, utilizado, ensinado ou, mais geralmente, transposto em instituições. Isso torna necessária a elaboração de um método de análise que permita a descrição e o estudo das condições de realização das práticas institucionais.

Uma parte da teorização da TAD consiste no desenvolvimento da noção de organização praxeológica ou praxeologia que, de acordo com Chevallard, acrescenta as noções de (tipo de) tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Para ele, tais noções vão permitir modelizar as práticas sociais em geral e, em particular, as atividades Matemáticas. Portanto, “ele parte do primeiro postulado que toda prática institucional pode ser analisada, de diferentes pontos de vista e de diferentes formas, por um sistema de tarefas relativamente bem circunscritas” (CHEVALLARD, 1999, p. 81). Desse modo, passamos agora a discorrer sobre praxeologia ou organização praxeológica.

1.3.1 A noção de praxeologia ou organização praxeológica

A noção de praxeologia é a realização de certos *tipos de tarefas*[9] (T) que se exprimem por um verbo pertencente a um conjunto de tarefas do mesmo tipo t, por meio de uma *técnica* (τ) que, por sua vez, é explicada e legitimada por uma tecnologia (θ) justificada e esclarecida por uma teoria (Θ). Assim, a praxeologia, constituída por estes componentes [T, τ, θ, Θ], está ligada a um primeiro bloco prático-técnico [T, τ],

---

[9] *Type de tâches*

denominado o *saber-fazer*[10], e o segundo bloco tecnológico-teórico [θ, Θ] revela-se na associação entre certo tipo de tarefa e uma técnica, designado o *saber*[11], resultado da articulação entre a tecnologia e a teoria.

Para Chevallard (1998), a existência de um tipo de tarefa matemática em um sistema de ensino está associada à existência de, no mínimo, uma técnica de estudo desse tipo de tarefa e uma tecnologia referente a essa técnica, mesmo que a teoria que justifique essa tecnologia seja omitida.

Os tipos de *tarefas* (T) que se situam em conformidade com o princípio antropológico supõem a existência de objetos bem precisos e não obtidos diretamente da natureza. Eles são artefatos, obras, construtos institucionais, como em uma sala de aula, cuja reconstrução é inteiramente um problema, que é o objeto da didática (CHEVALLARD, 1998). A noção de tarefa ou, especificamente, do tipo de tarefa, tem um objetivo bem definido, como encontrar o valor de x, mas calcular não explicita o que deve ser feito precisamente. Assim, calcular o valor de uma equação é um tipo de tarefa, mas somente calcular não seria um tipo de tarefa, e sim um gênero de tarefa.

Por sua vez, uma *técnica* (τ) é uma maneira de *fazer* ou *realizar* as tarefas t ∈ τ·. Para Chevallard (1998), uma praxeologia referente a um tipo de tarefa t necessita, em princípio, de uma técnica τ relativa à t. Todavia, ele afirma que uma determinada técnica τ pode não ser capaz de concretizar todas as tarefas t ∈ τ·. Isto é, ela pode funcionar para uma parte P (τ) das tarefas T e fracassar para T/P (τ). Isso significa que, em uma praxeologia, pode existir uma técnica superior a outras, ao menos no que concerne à realização de certo número de tarefas de T (CHEVALLARD, 1998).

Além disso, Chevallard (1998) destaca que a *técnica* τ empregada para realizar uma determinada tarefa não é necessariamente de natureza *algorítmica* ou *quase* algorítmica (ocorre em casos pouco frequentes), no entanto existe uma predisposição relativamente à algoritmetização, ainda que essa ação de avanço técnico se dê por muito tempo, em uma determinada instituição, em relação a alguns tipos de tarefas ou a algumas tarefas complexas.

De acordo com esse autor, em uma dada instituição I, existe em geral uma única ou somente um pequeno número de técnicas institucionais reconhecidas. São

[10] *Savoir-faire*
[11] *Savoir*

eliminadas, desse modo, as possíveis técnicas alternativas que possam existir em outras Instituições.

Já a *tecnologia* (θ) é definida primeiramente como um discurso racional sobre uma técnica τ, cuja primeira finalidade consiste em justificá-la racionalmente, isto é, em garantir que a técnica permita que se cumpra bem a tarefa do tipo T. Ou seja, em uma instituição I, qualquer que seja o tipo de tarefa T, a técnica τ relativa a t está sempre seguida de pelo menos um *embrião* ou, mais comumente, de um *vestígio* de tecnologia θ. Em Matemática, tradicionalmente, a justificação de uma técnica é realizada por meio de demonstração. Em muitos casos, até mesmo alguns elementos tecnológicos estão *integrados à técnica*.

A segunda finalidade da tecnologia consiste em explicar, tornar inteligível e esclarecer uma técnica τ·, isto é, em expor por que ela funciona bem. Sob essa ótica, em matemática, a função de *justificação* predomina tradicionalmente, por meio da cobrança da demonstração, sobre a execução da *explicação*.

A terceira finalidade da tecnologia tem também a função de reproduzir novas técnicas, mais eficientes e adaptadas à realização de uma determinada tarefa (CHEVALARD, 1998). Nessa situação, assinala-se o fenômeno de *subutilização* de tecnologias disponíveis, tanto do ponto de vista da explicação como da produção.

A *teoria* (Θ), por sua vez, tem como finalidade justificar e esclarecer a tecnologia, bem como tornar compreensível o discurso tecnológico. Passa-se, então, a um nível superior de justificação-explicação-produção. Chevallard (1998) adverte que geralmente essa capacidade de justificar e de explicar a teoria é quase sempre obscurecida pela forma abstrata como os enunciados teóricos são apresentados frequentemente. Ainda para esse autor, existe uma distinção das praxeologias: a praxeologia matemática (construção da realidade matemática para sala de aula) e as praxeologias didáticas (concretização de um tema em sala), como descreveremos a seguir.

1.3.2- Praxeologia Matemática ou Organização Matemática (OM)

As *praxeologias matemáticas* referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em uma sala de aula, permitindo que os alunos atuem na resolução de problemas de forma adequada e, ao mesmo tempo, entendam o que é feito de maneira racional. Portanto, constituem-se em torno de tipos de tarefas (T) matemáticas executadas, de técnicas (τ) matemáticas esclarecidas, de tecnologias (θ) justificadas e de teorias (Θ) que são, a princípio, os objetos matemáticos a serem aprendidos ou construídos.

Para Chevallard (1997), em um processo de formação de saberes/conhecimentos, as praxeologias envelhecem, pois seus artefatos teóricos e tecnológicos perdem sua credibilidade. No entanto, em uma determinada Instituição (I) aparecem novas praxeologias que poderão ser produzidas ou reproduzidas se existem em determinada instituição.

Esse autor observa que o primeiro trabalho de um docente consiste em determinar e caracterizar as praxeologias matemáticas a serem estudadas a partir das análises de documentos oficiais existentes, tais como os programas e livros didáticos. Para isso, deverá delinear e analisar, de maneira precisa, os conteúdos matemáticos, os tipos de tarefas matemáticas que eles contêm e o grau de desenvolvimento atribuído aos demais elementos: a técnica, a tecnologia e a teoria.

De acordo com Chevallard (1997), o docente ou pesquisador precisa indagar (e tentar responder) sobre várias questões, tais como:

- Existem tarefas bem identificadas? Elas são representativas? As razões de ser desses tipos de tarefas estão explicitadas?
- As técnicas recomendadas para a resolução dos tipos de tarefas foram efetivamente elaboradas? São suficientes para os tipos de tarefas propostos? Poderão sofrer progressos?
- As tecnologias disponíveis dão conta das técnicas usadas? Esclarecem as técnicas utilizadas?
- Os elementos teóricos são explicitados? Justificam a tecnologia empregada?

Para esse autor, existe ainda um segundo nível de análise da dinâmica das organizações matemáticas: análise da dinâmica institucional, representada nas condições de gênese e no desenvolvimento de uma organização de matemática em uma determinada instituição. Nesse estudo, esse nível pode ser considerado como o estudo da ecologia institucional das organizações matemáticas e está intimamente relacionado aos fenômenos de transposição institucional do conhecimento matemático (CHEVALLARD, 1991).

Para Fonseca (2004), a descrição das organizações matemáticas em níveis (prático, técnico, tecnológico, teórico) é suficiente (inicialmente) para modelar a atividade matemática institucional, é um dos postulados da TAD que deve ser testado empiricamente.

Desse modo, a TAD postula que toda a atividade matemática institucional pode ser modelada por meio da noção da praxeologia (ou organização) matemática, ou seja, que toda atividade matemática institucional pode ser analisada em termos de praxeologias matemáticas de complexidade crescente. Assim, explicamos de forma resumida o que se entende por “complexidade crescente” de uma OM (CHEVALLARD, 1999).

Diremos que uma *praxeologia matemática é pontual* (PMP) quando é constituída em um determinado (único) tipo de tarefa T. Portanto, a noção de PMP [T, τ, θ, Θ] é relativa à instituição considerada e é definida, em princípio, a partir do bloco prática e técnica [T / τ].

Uma *praxeologia matemática é local* (PML) quando em uma instituição é obtida a partir da integração de várias praxeologias pontuais. Cada PML [T_i, τ_i, θ, Θ] é relacionada a uma determinada tecnologia θ, que serve para justificar, explicar, que se inter-relacionam e produzem as técnicas das PMP que as integram. De maneira geral, integrada às PMP estão as PML para fornecerem respostas satisfatórias a um conjunto de questões problemáticas que não puderam ser totalmente resolvidas em qualquer uma das respostas de uma OMP de partida.

A terceira é a *praxeologia matemática regional* (PMR) [T_{ij}, τ_{ij}, θ_j, Θ], em que uma instituição é obtida por meio da coordenação, articulação e subsequente integração em torno de uma teoria matemática comum Θ de diversas PML. A reconstrução institucional de uma teoria matemática é necessária para o desenvolvimento de uma linguagem comum a fim de descrever, interpretar, relacionar, justificar e produzir as diferentes tecnologias das PML que compõem a PMR.

Por fim, Chevallard (1999) definiu que a quarta praxeologia *matemática é global* (PMG) [T_{ijk}, τ_{ijk}, θ_{jk}, Θ_k] e procede da agregação de várias organizações regionais correspondentes às múltiplas teorias Θ_k. Quando colocamos em movimento as praxeologias, passamos de uma praxeologia pontual para uma praxeologia local e evidenciamos a tecnologia θ, da mesma maneira que, na transição da praxeologia local para regional, colocamos em destaque a teoria Θ. Dessa forma, nos dois casos, é dada uma evidência maior ao bloco do *saber* [θ, Θ], em detrimento do outro bloco, o saber-fazer [T, τ].

Após essa breve discussão sobre as praxeologias matemáticas, passamos a descrever, no próximo subtópico, as praxeologias didáticas.

1.3.3 Praxeologias Didáticas ou Organizações Didáticas (OD)

As Praxeologias Didáticas são as respostas (a rigor) a questões do tipo: *como realizar o estudo de determinado assunto*? Referem-se ao modo que possibilita a realização do estudo de um determinado tema, o conjunto de tarefas, de técnicas, de tecnologias etc., mobilizadas para o estudo de um tema, como *encontrar a raiz de uma equação do primeiro grau* com uma incógnita. No entanto, estudar esse tipo de questionamento nos remete à seguinte indagação: *como realizar o ensino da resolução de equação do primeiro grau?*

A praxeologia didática tem como finalidade permitir a existência de uma praxeologia matemática compatível a certo saber, isto é, ela permite a (re)construção ou a transposição de uma determinada praxeologia matemática. Portanto, ela estrutura-se também em torno de (sub)tipos de tarefas, de técnicas, de tecnologias e de teorias. Todavia, como descrever tal organização? Quaisquer que sejam as escolhas adotadas no curso dos trabalhos de estudo de dada Organização Matemática (OM), algumas situações são necessariamente presentes, mesmo que estas se apresentem de formas variadas, tanto quantitativa como qualitativamente. Essas situações são denominadas de momentos de estudos ou momentos didáticos, porque podemos dizer que, qualquer que seja o caminho escolhido, ele conduzirá inevitavelmente a um momento de definição, ou de institucionalização, ou a um momento que demandará o questionamento do que é válido acerca do que foi construído, que caracteriza o momento de avaliação, dentre outros.

Chevallard (1999) nomeia essas situações de momentos de estudo ou momentos didáticos, pois podemos dizer que, seja qual for o caminho seguido, chegar-se-á forçosamente a um momento em que um ou outro gesto de estudo deverá ser cumprido. Para esse autor,

> A noção de momento não remete mais que em aparência à estrutura temporal do processo de estudo. Um momento, no sentido dado à palavra aqui, é em primeiro lugar uma *dimensão* em um espaço multidimensional (...) uma sã gestão do estudo exige que cada um dos momentos didáticos se realize *no bom momento*, ou mais exatamente, nos *bons momentos*[12] (CHEVALLARD, 1999, p. 242).

Chevallard (1998) caracteriza em seis os momentos didáticos que possibilitam estabelecer uma grade de análise das praxeologias didáticas. Esses momentos estão descritos no quadro abaixo.

Momento didático	**Descrição**
Primeiro momento didático	Primeiro encontro com a Organização Matemática (OM) estudada que está sendo posta em jogo no cenário didático
Segundo momento didático	Exploração do tipo de tarefas T e de elaboração de uma técnica τ relativa a esse tipo de tarefas
Terceiro momento didático	Constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica.
Quarto momento didático	Trabalho da técnica
Quinto momento didático	Institucionalização
Sexto momento didático	Avaliação das relações pessoais e avaliação da relação institucional

Quadro 1: Resumo dos momentos didáticos
Fonte: a pesquisa

O *primeiro momento* é o primeiro encontro com a Organização Matemática (OM) estudada que está sendo posta em jogo no cenário didático. Esse primeiro encontro (ou reencontro) pode ocorrer de diversas maneiras, porém uma dessas maneiras decorrerá de pelo menos um tipo de tarefa T que organiza a OM proposta.

Esse primeiro encontro com o tipo de T poderá incidir, diversas vezes, no valor dos contornos matemáticos e didáticos constituídos. Para Chevallard (1998), é possível reconhecer um tipo de tarefa da mesma maneira que se pode lembrar de uma pessoa que se acreditava conhecer.

[12] Grifo do autor.

Chevallard (1999) ressalta, ainda, que existem duas formas prováveis de produzir o primeiro encontro com uma Organização Matemática e suas diversas agregações em suas variantes desenvolvidas (ou degradadas): uma forma seria um encontro *cultural-mimético* e a outra, por meio de *criações de situações fundamentais.*

Na problemática *cultural-mimética,* a praxeologia matemática estudada surge para o estudante de maneira relativamente explícita, como composição de adequados métodos existentes no mundo. Assim, o estudante tem como objeto de estudo relações meramente hipotéticas, acompanhadas de reduzidos momentos de acomodação por meio do manuseio ativo dos objetos da Organização Matemática em jogo. Ainda a respeito da cultura-mimética, Chevallard diz que,

> Na versão mais exigente, o encontro cultural-mimético conduz em princípio a procurar e a explicitar – sob o modo discursivo – as razões de ser da organização matemática, isto é, os motivos pelos quais ela foi construída, ou ainda pelos quais ainda persistem na cultura (CHEVALLARD, 1999, p. 242).

No entanto, nas *criações de situações fundamentais*, a praxeologia matemática a ser observada surge no olhar do estudante, ator principal (único ou equipe), como retorno às diversas questões particulares desse sistema de situações, provenientes de uma situação real peculiar, que separa toda alusão ao objeto de estudo de um mundo real preexistente.

O *segundo momento* é o da exploração do tipo de tarefas T e de elaboração de uma técnica τ, relativa a esse tipo de tarefa. Segundo Chevallard (1999), estudar problemas é um meio que permite criar e usar uma técnica relativa a problemas do mesmo tipo, ou seja, a elaboração das técnicas é um meio para resolver de maneira quase rotineira esses problemas. Ainda de acordo com o pesquisador, mais do que a resolução de problemas isolados, a elaboração de técnicas é o coração da atividade matemática.

O *terceiro momento* é o da constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica. Esse momento não está desconexo dos outros dois anteriores, visto que, ao elegermos uma determinada técnica, esta estará diretamente vinculada ao bloco tecnológico-teórico, para que possa ser explicada e justificada. Para alguns professores ou autores dos livros didáticos, dependendo de suas concepções, esse momento pode se tornar a primeira etapa de estudo de uma determinada OM. Assim, a constituição do espaço tecnológico-teórico e dos tipos de problemas surgem como um encadeamento de aplicações do bloco teórico.

O *quarto momento* é o do trabalho da técnica, que visa melhorá-la, torná-la mais confiável, o que geralmente exige aprimorar a tecnologia até então elaborada e aumentar o controle que se tem sobre a técnica. Outra finalidade desse momento incide em aperfeiçoar a técnica trabalhada, para ser mais rápida e eficiente.

O *quinto momento* é o da institucionalização, que mostra o que realmente é a Organização Matemática constituída, apontando os elementos que permanecerão definitivamente na Organização Matemática e os que serão dispensados. Para Chevallard (1999),

> O momento da institucionalização é, de início, aquele que, na construção *bruta* que pouco a pouco, emergido do estudo, vão separar, por um movimento que compromete o porvir, o “matematicamente necessário”, que será conservado, e o “matematicamente contingente”, que logo será esquecido (CHEVALLARD, 1999, p. 244).

O *sexto momento* é considerado sob dois aspectos: a avaliação das relações pessoais e a avaliação da relação institucional, ambas em relação ao objeto construído, que se articulam com o momento da institucionalização, permitindo relançar o estudo, demandar a retomada de alguns dos momentos e, eventualmente, do conjunto do trajeto didático.

O momento da avaliação é uma fase importante na TAD porque se supõe que é aquela na qual o professor toma por objeto de estudo as soluções produzidas por seus alunos. O aluno observa, na realização de sua solução (em classe ou no livro), determinadas maneiras de fazer, analisadas e avaliadas para desenvolver sua própria solução.

Enfim, esses seis momentos didáticos não somente formam uma grade para o docente ou pesquisador analisar os procedimentos didáticos. De acordo com o exposto até o presente, conforme Chevallard (1998), esses momentos de estudos refletem sobre o problema da realização desses momentos.

Após as questões por nós tratadas, surgem outras que nos parecem relevantes: como o professor efetiva eficazmente o primeiro encontro com tal Organização Matemática? Que tipos de tarefas eles propõem? Como se dá o gerenciamento do estudo exploratório de um tipo de tarefa? Como levar a cabo a institucionalização? Como realizar o momento da avaliação? Essas questões podem ser respondidas de maneira genérica: criando situações didáticas apropriadas para cada momento.

Ao fim da breve descrição sobre as praxeologias matemáticas e didática, passamos a discorrer a respeito dos seguintes elementos da TAD: os níveis de codeterminação e, encerrando este capítulo, a noção de *topos*.

1.4 Níveis de Codeterminação Didática – NC-DD

Para Chevallard (2002), o fenômeno de codeterminação didática pressupõe a correspondência entre as organizações matemática e didática. Desse modo, esse autor estabelece que um determinado saber apresenta uma escala hierárquica na qual cada nível se refere a uma realidade e determina a ecologia dessas organizações: seu nicho (as funções que os níveis exercem) e o *habitat* (o lugar onde há objetos matemáticos nos quais se encontra um saber). Chevallard faz uso desses termos como metáforas. O autor busca nos termos da ecologia essas ideias para tentar explicar as relações entre os objetos e o estudo desses objetos em si mesmos (ALMOULOUD, 2007, p. 113).

Chacón (2008) colabora com essa discussão ao anunciar que

> Os desenvolvimentos recentes na teoria antropológica (Chevallard, 2002, 2004, 2005) fornecem, sob o nome de co-determinação didática, uma modelagem que engloba essas condições e restrições segundo as quais se determinam mutuamente as organizações matemática e didática (CHACÓN, 2008, p. 73, tradução nossa).

São nove níveis de codeterminação que interagem reciprocamente: desde os níveis comuns (os níveis indexados por Chevallard: -3, -2, -1, 0) até os níveis específicos no domínio da matemática (níveis 1, 2, 3, 4 e 5). Esses níveis podem ser assim identificados: da civilização, da sociedade, da escola, da pedagogia, da disciplina, do domínio, do setor de estudo, do tema e do assunto. É o que podemos visualizar na Figura 2.

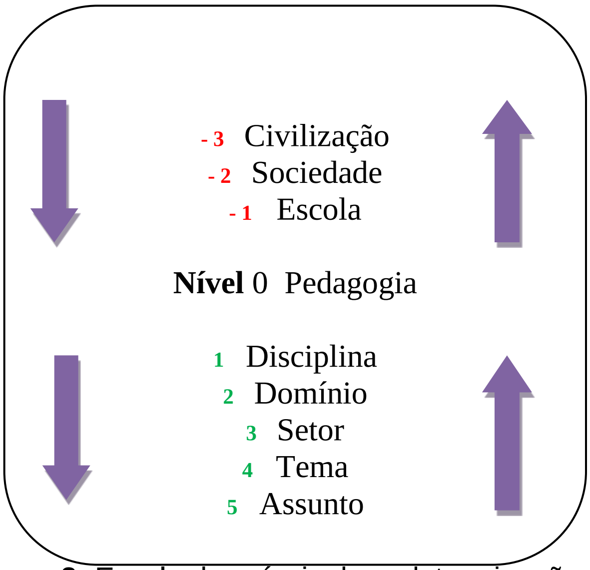


Figura 2: Escala dos níveis de codeterminação didática
Fonte**:** CHACÓN (2008, p. 73)

Para Chacón (2008), existe uma correlação entre as "organizações matemáticas OM e os níveis de co-determinação didática C-DD". (p. 73) Os níveis que se localizam sob o nível da disciplina são organizados de forma agregada a uma Organização Matemática (OM) complexa progressiva (pontual, local, regional e global).

Assim, a Organização Matemática *Pontual* está associada ao nível cinco (*Assunto) e ao* nível *menos um,* que é *(a escola)*. Em nossa pesquisa, por exemplo, podemos considerar a praxeologia em torno do tipo de tarefa T_1, resolver a equação ($2x + 8 = 20$). A Organização Matemática *Local* é composta das OM Pontuais e tem o estatuto do *Tema* (equação do primeiro grau).

No nível 3, *Setor* (conjuntos de tarefas de equações do primeiro grau), corresponde a uma organização maior: após a fusão das OM Local e Pontual, tem uma Organização Matemática *Regional*. Por fim, a Organização Matemática *Global* refere-se ao *Domínio* de estudo que, em nossa pesquisa, é a álgebra. É possível observar isso na Figura 3, abaixo registrada.

2	Domínio ......OM Global
3	Setor.............OM Regional
4	Tema............ OM Local
5	Assunto.........OM Pontual

Figura 3: Correspondência entre OM e os níveis de C-DD
Fonte: Chacón (2008)

Por meio dos níveis de codeterminação didática, examinaremos as relações entre os grandes princípios que regem os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (2012) e as escolhas feitas quanto às questões propostas sobre equações polinomiais do primeiro grau em três livros didáticos do 7º ano.

No próximo subtópico, descrevemos a noção dos *topos* do professor e do aluno.

1.5 Topos

Chevallard e Grenier (1997) e Chevallard (1999) discutem que a palavra "topos" é oriunda do grego e significa lugar. No *topos* (lugar) do aluno deve haver relativa independência em relação ao do professor para que ele seja capaz de desempenhar o seu papel de aluno. Isso porque, na sala de aula, uma tarefa didática é constituída por um professor e seus alunos em uma atividade dirigida. Ou seja, em uma classe de matemática, "fazer um exercício", que é uma tarefa eminentemente cooperativa, leva geralmente ao *topos* do professor (escrever um teorema, resolver uma equação). A tarefa que consiste em produzir, por exemplo, por escrito uma solução do exercício pertence ao *topo*s do aluno, enquanto que a tarefa seguinte, construir uma correção, pertence de novo ao *topos* do professor.

Efetivamente, as tarefas didáticas são, em certo número de situações, as que *auxiliam* o significado de que necessitam para serem concretizadas em *combinação* por *várias* pessoas $\mathcal{X}_1,\ \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$, que são os *atores* da tarefa. Cada um dos atores $\mathcal{X}_i$ precisa executar alguns *gestos* e o conjunto deles compõe seu *papel* no cumprimento da tarefa cooperativa *t*, gestos que estão, por sua vez, distintos (conforme os atores) e coordenados entre eles por uma técnica τ colocada em execução geral.

Alguns dos gestos serão observados como tarefas completas, $\mathcal{t}'$, para cuja efetivação $\mathcal{X}_i$ atuará (brevemente) em *autonomia concernente* em relação aos outros atores da tarefa. O conjunto dessas tarefas, subconjunto do papel de $\mathcal{X}_i$, quando realiza *t* segundo τ, é denominado *topos* de $\mathcal{X}_i$ em *t* (CHEVALLARD, 1999).

Ao organizarem-se as tarefas, cabe ao professor escolher as técnicas e tecnologias adequadas, ou seja, o papel central do professor é organizar o trabalho do estudante a quem cabe aceitar o professor como uma ajuda ao estudo. No entanto, o professor, sendo o responsável em conduzir as organizações matemáticas e didáticas em sala de aula, aos poucos irá se desligando do estudante para que este se torne responsável pelo próprio desenvolvimento, adquirindo assim autonomia para realizar seu percurso de estudo.

São características do *topos* do professor em relação ao saber matemático definidos em Chevallard (1992; 1994) e Bosch e Chevallard (1999):

- Escolher atividades que permitam manipular os distintos objetos ostensivos e a chamar os não ostensivos que lhe são integrados;
- Justificar as distintas passagens no desenvolvimento de uma técnica por meio de um discurso tecnológico, isto é, adaptar os não ostensivos, de forma a explicar os ostensivos utilizados na introdução e desenvolvimento de um determinado conceito matemático;
- Distinguir os ostensivos dos não ostensivos, de forma a produzir um discurso tecnológico que ajude o estudante a ultrapassar os problemas e os obstáculos, e resolver as tarefas que lhes são propostas;
- Mostrar, por meio de um discurso tecnológico, a diferença entre os ostensivos e sua relação com os não ostensivos, e a necessidade de escolhas adequadas que permitam resolver outras tarefas em diferentes situações e contextos.

Um dos maiores problemas didáticos, frequentemente presentes, para o professor é encontrar o ambiente (dar um lugar aos alunos), quer dizer, criar, segundo sua intenção e a de cada um dos assuntos estudados, um *topos* adequado, que dá ao aluno o sentimento de ter um “apropriado papel a desempenhar”. Na maior parte dos casos, uma tarefa didática tem como atores o professor e os alunos, pois, quando o professor efetiva uma tarefa na qual ele opera com autonomia relativa, essa tarefa surge, na maioria das vezes, como uma subtarefa inserida em uma tarefa mais ampla, na qual ele coopera com o aluno.

Na efetivação de uma tarefa didática, aluno e professor se agrupam em uma dinâmica instrumentada em que ambos são chamados a desempenhar seus papéis. Nesse sentido, acreditamos que a noção de *Topos* aproxima-se de um fundamento básico do Contrato Didático (BROSSEAU, 1996): a ideia de divisão de responsabilidade.

Assim, a adoção da Teoria Antropológica do Didático (TAD) faz parte do arcabouço teórico de nosso trabalho, em particular as noções de relações institucionais e pessoais, praxeologia, ostensivos e não ostensivos e “topos” do professor (o *topos* do aluno não será analisado).

Com o objetivo de melhor compreender o que é esperado do professor, propomos estudar o “**topos**” que, conforme Chevallard e Grenier (1997), corresponde ao momento em que o papel do professor é o de organizador do trabalho a ser realizado pelo estudante e, quando necessário, o de mediador.

Nosso objeto de pesquisa delimita-se pela escolha das instituições e objeto a serem pesquisados. As instituições em foco são as seguintes: o ensino fundamental brasileiro, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e, no contexto regional, os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PC/PE), o Livro Didático e o professor como sujeito responsável em organizar a sequência de estudo, tendo como objeto as equações polinomiais do primeiro grau.

Os elementos dispostos neste capítulo da fundamentação teórica estão diretamente relacionados e são fundamentais para alcançarmos nosso objetivo de pesquisa: analisar comparativamente as praxeologias em documentos oficiais e em livros didáticos, e o professor no que se refere ao ensino e à resolução de equações polinomiais do primeiro grau.

Após essa breve introdução, neste estudo, dos elementos da Transposição Didática (trajetória dos saberes) e da Teoria Antropológica do Didático (TAD) – como as praxeologias (matemática e didática), os níveis de codeterminação didática e os *topos* do professor –, já temos indícios importantes para analisarmos as conformidades entre os documentos oficiais (PCN, PC/PE), os três livros didáticos do sétimo ano e os três professores de escolas públicas.

A seguir, faremos uma reflexão sobre a álgebra escolar e sua modelização *a priori* sobre equações polinomiais do primeiro grau e descreveremos o Modelo Epistemológico de Referência (MER).

CAPÍTULO 2

REFLEXÕES SOBRE A ÁLGEBRA ESCOLAR E MODELIZAÇÃO A PRIORI

2. ÁLGEBRA ESCOLAR: ASPECTOS HISTÓRICOS

Esse capítulo tem como objetivo apresentar uma breve discussão sobre a álgebra escolar. Também se configura como uma reflexão sobre o polo epistemológico na medida em que tratamos da relação didática professor, aluno e saber. Devido a isso, está dividido em duas partes: na primeira, discorreremos sobre a história da álgebra e suas transformações ao longo dos tempos, bem como, sobre seus elementos históricos relativos às equações polinomias do primeiro grau e seus respectivos elementos, e apresentaremos um panorama das pesquisas relacionadas ao ensino de equação do primeiro grau; na segunda parte, traremos o Modelo Epistemológico de Referência (MER), a algebrização de uma organização matemática em torno de problemas aritiméticos e finalizaremos com a modelização *a priori* das praxeologias matemáticas.

2.1 UMA BREVE APRESENTAÇÃO DA HISTÓRIA DA ÁLGEBRA

A literatura mostra que o desenvolvimento da Álgebra, inicialmente, aparece vinculado à Aritmética e à Geometria. Nesse sentido, Boyer (1996) discute que, entre 250 a 350 D.C. aproximadamente, na chamada segunda idade de Alexandria, encontramos o maior algebrista grego, Diofante de Alexandria, e no fim desse período apareceu o último geômetra grego importante, Papus de Alexandria.

Historicamente, foi o matemático grego Diofante que primeiro usou sistematicamente os símbolos para representar as incógnitas, sendo pioneiro na solução das equações indeterminadas, também chamadas de diofantinas.

Durante todo esse tempo a história se encarregou de produzir um número significativo de palavras matemáticas de origem árabe, a exemplo da palavra ‘Álgebra’, surgida a partir de Mohammed ibn-Musa al-Khowarismi que, por volta do ano 825 (século IX), por meio do seu livro considerado o mais importante, *Al-jabr Wa-l muqabahah*, criou uma palavra mais familiar, *Al-jabr*, origem do vocábulo ‘Álgebra’. Não se sabe ao certo o seu significado literal, mas alguns autores atribuem a essa palavra o sentido de *restaura*ção e *completação*, o que parece se referir à passagem que se dá dos termos de mudar o membro para o outro membro da equação (BOYER, 1996).

Traduzindo de forma literal o título do livro de Al-Khowarizmi, encontramos a *ciência da restauração (ou reunião) e redução*. Matematicamente, seria melhor a tradução *ciência da transposição e do cancelamento* ou, conforme Boyer (ibidem, p.156), "a transposição de termos subtraídos para o outro membro da equação e o cancelamento de termos semelhantes (iguais) em membros opostos da equação".

No desenvolvimento da Álgebra, observamos que, desde civilizações antigas do Egito e Babilônia até os dias atuais, a linguagem matemática veio gradativamente evoluindo, passando por várias fases que marcaram época. Os historiadores dividem a história da Álgebra em três principais fases: retórica ou verbal, sincopada e simbólica. (GUELLI, 2005; BOYER, 1996).

A fase da *Álgebra Retórica (ou verbal)* se estende dos Babilônios (1700 a.C.) até o matemático grego Diofanto ou Diofante (250 d.C.). É caracterizada pela completa ausência de símbolos e abreviações que possam expressar o pensamento algébrico, pois todos os passos relativos a números e equações eram descritos na linguagem corrente. Esta teria sido a Álgebra dos Egípcios, dos Babilônios e dos gregos pré-diofantinos.

A *Álgebra Sincopada*, por sua vez, teria surgido com Diofanto de Alexandria e ficado marcada pela introdução de um símbolo para a incógnita, utilizando uma forma mais abreviada e concisa para expressar suas equações. É registrada também na história uma sincopada similar à de Diofanto, que adveio dos Hindus, especialmente de Brahmagupta (século XII). Essa fase se prolongou até o início do século XVI, momento histórico em que os matemáticos não demorariam muito tempo para criarem os sinais.

Finalmente, os registros indicam que a fase da *Álgebra Simbólica* teve seu início no momento em que as ideias algébricas passaram a ser expressas somente por meio de símbolos em detrimento do uso das palavras. Embora o jurista francês François Viète (1540- 1603) ainda utilizasse um estilo sincopado, foi ele o principal responsável pela criação de novos símbolos na Álgebra.

Na primeira metade do século XVII, René Descartes introduziu o uso de letras para representar as quantidades. Em seu livro *Introdução à Arte Analítica* (1651), discutiu aspectos fundamentais da Álgebra relacionados, sobretudo, à resolução de equações, de modo que, no século XVIII, as noções fundamentais em Álgebra, como a de funções, ganham generalidade, libertando-se do cálculo numérico.

Por fim, no século XIX, houve o aprimoramento da resolução de problemas, das equações e dos cálculos relativos às variáveis. Esse aperfeiçoamento trouxe subsídios para o desenvolvimento da Álgebra Moderna que, livre da Aritmética e da Geometria, chegou ao domínio da abstração pura.

No Brasil, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) fizeram uma abordagem histórica e evidenciaram *três concepções* de educação algébrica que vêm exercendo maior influência no ensino de Matemática elementar.

A primeira, chamada de *linguístico-pragmática,* baseia-se no papel do ensino da Álgebra, buscando fornecer um instrumental técnico (superior ao da Aritmética) para a resolução de equações ou de problemas equacionáveis. Para o aluno adquirir essa capacidade, considera-se necessário e suficiente, primeiro, que ele domine, mesmo de forma mecânica, as técnicas requeridas pelo transformismo algébrico (sintaxe).

O currículo de ensino da Álgebra tem, portanto, como ponto de partida, o cálculo literal (operações de adição, subtração, multiplicação/fatoração e divisão de expressões algébricas), o qual é desenvolvido por meio de muitos exercícios que capacitam os alunos no manejo preciso dessas expressões algébricas. Só depois disso é que são introduzidos problemas do tipo aplicação algébrica.

Esses mesmos autores apresentam uma segunda concepção, a *fundamentalista-estrutural,* que surge, aproximadamente, na segunda metade do século XX, predominantemente nas décadas de 1970 e 1980, e vem se contrapor à ideia anterior com um cunho fundamentalista. O papel do Ensino da Álgebra seria, então, o de fornecer os fundamentos lógico-matemáticos para toda a Matemática escolar, inclusive aqueles tradicionalmente considerados algébricos, como o cálculo algébrico e o estudo das equações. Isso é realizado por meio da introdução dos campos numéricos, da Teoria dos Conjuntos, das estruturas e das propriedades (fechamento, comutativa, elemento neutro etc.), das relações e funções. Assim, o emprego das propriedades estruturais das operações serve para justificar logicamente cada passagem presente no transformismo algébrico.

A terceira concepção, a *fundamentalista-analógica*, é uma síntese das duas anteriores, pois tenta recuperar o valor instrumental da Álgebra e preserva a preocupação fundamentalista, não mais com base nas propriedades estruturais, por meio do uso de modelos analógicos geométricos (blocos de madeira ou mesmo figuras geométricas) ou físicos (como a balança), que visualizam ou justificam as passagens do transformismo algébrico. A Álgebra *geométrica* era didaticamente superior a qualquer outra abordagem lógico-simbólica, pois torna visíveis certas identidades algébricas.

O ponto problemático e comum entre essas três concepções, ainda segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1992), é que elas praticamente reduzem o ensino da Álgebra aos seus aspectos linguísticos e transformistas, dando mais ênfase à sintaxe da linguagem algébrica do que ao pensamento algébrico e a seu processo de significação (a semântica). As três concepções enfatizam o ensino de uma linguagem algébrica já constituída, priorizando o domínio, por parte do aluno, de habilidades manipulativas das expressões algébricas. Além disso, há que se considerar que a Álgebra não se reduz a um instrumento técnico-formal que facilita a resolução de certos problemas; ela é, também, uma forma específica de pensamento e de leitura do mundo.

De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1992), desde 1799, momento em que a Álgebra passa a fazer parte do currículo no Brasil, até o início da década de 60, prevaleceu um ensino de caráter reprodutivo, sem a devida clareza, no qual tudo era essencial. Assim, a Matemática escolar apresentava-se dividida em compartimentos estanques. Primeiro, estudava-se a Aritmética; depois, a Álgebra; e, em seguida, a Geometria. Nesse período, segundo os autores, a Álgebra apresentava um caráter mais instrumental, útil apenas para resolver equações e problemas. Ainda conforme esses autores,

> [...] a maioria dos professores ainda trabalha a Álgebra de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões (FIORENTIN; MIORIM; MIGUEL, 1992, p. 40).

Miguel, Fiorentini e Miorim (1993) ressaltam o fato de que a Álgebra posterior à Matemática Moderna parece retomar seu papel, anteriormente ocupado por um estudo com a finalidade de resolver equações e problemas. Tentou-se recuperar seu valor instrumental, mantendo seu caráter fundamentalista. Os autores destacam ainda que a Álgebra, apesar de ocupar boa parte dos livros didáticos atuais, não tem recebido a devida atenção nos debates, estudos e reflexões a respeito do ensino da Matemática.

Após discorrer sobre os elementos históricos da álgebra, partirmos para o subtópico seguinte, em que faremos uma breve discussão sobre as equações polinomiais e seus elementos e encerraremos o tópico com o Modelo Epistemológico de Referência (MER).

2.2 Equações Polinomiais do Primeiro Grau com uma Incógnita

Diante do contato do estudante, tradicionalmente no sétimo ano do ensino fundamental, com determinadas equações, surgem vários questionamentos para os professores: como surgiu a equação polinomial do primeiro grau? Para que serve o sinal da igualdade? Para que usar letras em matemática?

Devido a esses questionamentos, apresentaremos, no próximo subtópico, uma abordagem histórica da equação do polinomial do primeiro grau para, em seguida, expor a definição Matemática dela e algumas pesquisas que a enfocam.

2.2.1 Equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita: elementos históricos

Dentro de uma abordagem histórica, desde o surgimento da equação polinomial do primeiro grau, Freitas (2004) destaca que as análises feitas por historiadores de Matemática sobre a gênese e evolução do cálculo algébrico mostram que os egípcios e babilônios criaram regras para resolver algumas equações. No entanto, os documentos por eles deixados (papiros e tabletes) trazem evidências de que eles usavam como registro apenas a língua natural e símbolos numéricos. Esse autor afirma que foram os hindus e árabes – notadamente estes últimos – que trouxeram contribuições mais significativas para o avanço do algébrico abstrato a partir da descoberta de fórmulas.

No Egito vivia um escriba chamado Aahmesu, nome que significava “Filho da Lua”. Conhecido nos meios científicos como ‘Ahmes’, foi o autor de uma das mais antigas obras de Matemática, os *Papiros Ahmes*, em que há problemas resolvidos e está guardada no museu Britânico (GUELLI, 2005).

Guelli (2005) enfatiza que a maior parte dos problemas encontrados no *Papiro Ahmes* se refere a assuntos do dia a dia dos antigos egípcios, como o preço do pão e da cerveja, a alimentação do gado e a quantidade dos grãos de trigo armazenado. Algumas situações, no entanto, não se referiam a coisas concretas, mas aos próprios números. Esses problemas diziam respeito aos números que deveriam ser descobertos (supostamente 'o valor de x') como *montão*: "*um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 2. Digam-me: qual é a quantidade?"* (p.9)

Esse problema foi um dos precursores da Álgebra, sendo utilizado para resolver um problema do tipo registrado na Figura 4.

$$x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 26$$

E resolvê-lo não é nada difícil:

$$6 \cdot \left(x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{3}\right) = 6 \cdot 26$$

$$6x + 3x + 4x = 156$$

$$13x = 156$$

$$x = \frac{156}{13}$$

Figura 4: Tradução do problema para Álgebra, por meio dessa equação
Fonte: Guelli (2005, p. 9)

O problema apresentado, para os egípcios, seria resolvido de modo engenhoso, o que foi denominado *regra do falso*. Inicialmente era atribuído ao *montão* um valor falso, como 18. Na sequência, era encontrado um valor do tipo 39. Os valores 18 e 39 eram valores falsos. Então, montavam uma regra de três simples com os elementos e, consequentemente, teriam valor falso, 18 e 39, e valor verdadeiro, 'montão' 26. A resolução seria, então, representada da seguinte forma:

Os egípcios não usavam Álgebra, mas conseguiam resolver este problema de um modo muito engenhoso: a ***regra do falso***.

- Inicialmente, atribuíam a montão um valor falso, por exemplo, **18**:

$$18 + \frac{1}{2} \cdot 18 + \frac{2}{3} \cdot 18 =$$
$$= 18 + 9 + 12 =$$
$$= \mathbf{39}$$

Valor falso	*Valor verdadeiro*
18	montão
39	26

$$\frac{18}{39} = \frac{\text{montão}}{26}$$

$$\text{montão} \cdot 39 = 18 \cdot 26$$

$$\text{montão} = \frac{468}{39}$$

$$\textbf{montão} = \mathbf{12}$$

Figura 5: Regra do falso utilizado pelos os egípcios
Fonte: Guelli (2005, p. 9)

Após a exposição dos aspectos históricos da álgebra escolar e as caracterizações das fases da álgebra, apresentaremos a seguir os elementos que compõem as equações polinomiais do primeiro grau.

2.2.2 Equações polinomiais do primeiro grau com uma Incógnita: elementos

O estudo de equações do primeiro grau com uma incógnita baseia-se na estrutura algébrica denominada anel dos polinômios. Esse anel é simbolizado usualmente por R $[x]$, R que representa o corpo dos números reais e consiste das expressões formais $p(x) = a_0 + ... + a_n x^n$, sendo n um número natural. Nesse número, definem-se as operações de adição de dois polinômios e de multiplicação de um polinômio por um número real, as quais, supõe-se, satisfazem as propriedades expressas nas regras usuais da Álgebra elementar.

A operação de adição de dois polinômios $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ com um polinômio $q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n$ é definida por:

$p(x) + q(x) = (a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n) =$

$(a_0 + b_{0'}) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n$ e satisfaz as seguintes propriedades:

Para todo $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ pertencem a $\mathbb{R}[x]$,

a) $p(x)+q(x)=q(x)+p(x)$
b) $[p(x)+q(x)]+r(x)=q(x)+[p(x)+r(x)]$
c) $p(x)+0(x)=0(x)+p(x)$, em que $0(x)$ representa um polinômio nulo $0_0+0x+...+0x^n$, $n \in \mathbb{N}$.
d) Para todo $p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ existe o polinômio $p'(x)$ tal que $p(x)+p'(x)=0(x)$.

Sabe-se que $p'(x)=(-a_0)+(-a_1)x+...+(-a_n)x^n$

A operação de multiplicação de um número real k por um polinômio $p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ é definida por:

$kp(x)=(ka_0)+(ka_1)x+...+(ka_n)x^n$ e satisfaz as seguintes propriedades:

Para todo k, k_1, k_2 $\in \mathbb{R}$ e $p(x)$, e $q(x)$ $\mathbb{R}[x]$,

a) $k[p(x)+q(x)]=kp(x)+kq(x)$
b) $k_1[k_2p(x)]=(k_1k_2)p(x)$
c) $1p(x)=p(x)$

O polinômio, assim definido, tem grau n se $a_n \neq 0$. No caso em que $n=1$, dizemos que $p(x)=a_0+a_1x$ tem grau 1. Nesse caso, $p(x)$ é denominado polinômio do primeiro grau na indeterminada x.

Por outro lado, para cada polinômio $p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$, é possível definir uma função polinomial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indicada por $f(x)=a_nx^n+...+a_0$. A função assim definida associa a cada número $k \in \mathbb{R}$ em $f(k) \in \mathbb{R}$.

Se existe um número $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(k)=0$, dizemos que k é raiz (zero) de $f(x)$. Nesse caso, para determinar as raízes do polinômio, é necessário determinar os valores de $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)=0$, ou seja, $a_nx^n+...+a_0=0$. Essa última igualdade é denominada de equação polinomial de grau n. No caso em que $n=1$, temos uma equação polinomial do primeiro grau ($a_0+a_1x=0$), que é o nosso objeto de estudo. Os números reais α tais que $f(\alpha)=0$ são denominados soluções da equação $f(x)=0$.

Com base nas definições anteriores, denomina-se equação do primeiro grau toda equação na forma $ax+b=0$, em que a incógnita possui expoente 1. A equação do primeiro grau é chamada linear, pois sua representação gráfica é uma linha reta.

As operações e propriedades dos polinômios, enunciadas anteriormente, nos permitem ainda elaborar os seguintes princípios que fundamentam a resolução de equações:

- Princípio aditivo: se adicionarmos a ambos os membros (por exemplo, $2x+4=x-1$ antes da igualdade, chamamos de 1° membro e após a igualdade de segundo membro) de uma equação um mesmo número ou uma mesma expressão algébrica, obteremos uma equação equivalente à primeira.
- Princípio multiplicativo: se multiplicarmos ambos os membros de uma equação pelo mesmo número (diferente de zero) ou uma mesma expressão algébrica (não nula), obteremos uma equação equivalente à primeira.

Os dois princípios acima são usados na elaboração de técnicas para resolver, por exemplo, equações do primeiro grau.

Tendo discorrido sobre os elementos históricos, a álgebra e os elementos que compõem uma equação polinomial do primeiro grau, apresentaremos, no próximo subtópico, um panorama das pesquisas acerca das equações polinomiais.

2.2.3 Um panorama de pesquisas relacionadas ao ensino de equação do primeiro grau

Em relação ao ensino de resoluções de equações, Bernard e Cohen (1995) recomendam um conjunto gradativo de ensino para encontrar as raízes de uma equação, descrito em quatro métodos: (1) gerar e avaliar; (2) esconder; (3) desfazer; e (4) equações equivalentes. Para esses autores, cada método subsequente de resolução deriva de seu anterior, favorecendo a passagem de procedimentos aritméticos para o algébrico. Destacamos ainda que, no contexto da TAD, Chevallard (1998) denominou que esses três primeiros métodos (gerar e avaliar, esconder e desfazer) são os gêneros das tarefas. Passaremos, então, a detalhar cada um desses procedimentos.

O método de *gerar e avaliar* leva o aluno a pensar no conceito de número e a provocar diferentes valores para serem testados por tentativa e erro. Conforme Bernard e Cohen (1995), nesse processo de gerar e avaliar, o aluno não se limita a fazer tentativas e erros aleatoriamente. De acordo com esses autores, intuitivamente, o aluno segue um esquema de cálculo de valores que se realimenta no processo de geração de valores.

O método de *esconder* consiste em levar o aluno a resolver a equação pensando sobre o que ela pede. Por exemplo, na equação 10 – x = 6, esconde-se o "x" e pergunta-se que número se deve subtrair de 10 para obter-se 6? Esse é um exemplo de um tipo de tarefa, conforme Chevallard (1998). Bernard e Cohen (1995) consideram ainda que esse método permite chegar a uma conceituação mais ampla de incógnita, levando o aluno a perceber que uma expressão pode ser uma incógnita.

O método de *desfazer* fundamenta-se na noção de operações inversas e na reversibilidade de um processo, envolvendo um ou mais passos invertíveis. Desse modo, o aluno deve ser orientado a raciocinar sobre o que está acontecendo operacionalmente com uma incógnita e criar uma sequência de perguntas dirigidas a como voltar ao ponto de partida, isto é, à incógnita. Assim, por exemplo, no caso da equação $\frac{7(2x-3)-5}{10}=5$, temos o modelo registrado na Figura 6, abaixo apresentada.

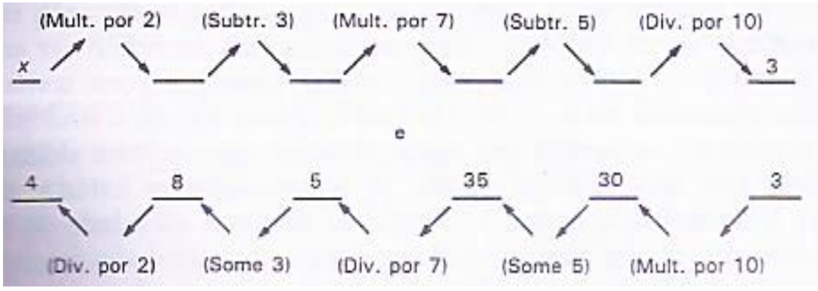


Figura 6: Modelo gerado pelo método de desfazer
Fonte: Bernard e Cohen (1995, p. 117)

Esse procedimento de voltar ao ponto de partida, utilizando-se apenas cálculo aritmético, estimula o aluno a desenvolver a reversibilidade, a análise e a resolução de problema.

Por fim, o método de *equações equivalentes* consiste em efetuar operações de equilíbrio nos dois membros da igualdade (somando um número ou expressão aos dois membros da igualdade) até que, de um lado, esteja a incógnita e, do outro, um número. As novas equações obtidas por esse processo preservam o mesmo conjunto de soluções e por isso são denominadas equações equivalentes.

No entanto, para Chevallard (1984), esse método das equações equivalentes, representado por Bernard e Cohen (1995), não provém, estritamente, do método anterior (método de desfazer) pelo fato de que tem sua base na noção de operações inversas, que é uma propriedade aritmética.

No capítulo anterior, discorremos sobre algumas propostas de Chevallard (1991) referentes às questões relativas aos objetos do saber e a outros objetos, principalmente aos objetos a ensinar. De acordo com esse autor, um “objeto do saber” somente passa a existir como tal no campo da consciência dos agentes do sistema de ensino, se a sua inserção no sistema dos “objetos a ensinar” parecer útil à economia do “sistema didático” (CHEVALLARD, 1991, p. 49). Todavia, isso não quer dizer que um objeto do saber seja somente identificado e designado como objeto a ensinar a partir do momento em que a Transposição Didática esteja potencialmente concluída, pois, na verdade, ela continua mesmo depois da introdução didática do objeto do saber.

Chevallard (ibidem) faz a seguinte distinção entre os objetos do saber: as noções matemáticas são construídas e sua construção pode tomar a forma de uma definição ou de uma construção propriamente dita, seguida de uma demonstração. Isto é, a noção matemática tem propriedades, bem como, aplicações intra e extramatemática. Já a noção paramatemática é útil para a atividade matemática, mas não é normalmente objeto de estudo em si. Para esta pesquisa, a equação é um objeto matemático, sendo estudado pela primeira vez no sétimo ano do ensino fundamental. Mas, no decorrer dos outros anos do ensino fundamental, médio e superior, torna-se uma ferramenta de ensino.

Nesse sentido, não há uma divisão absoluta entre os dois domínios: a noção de equação e a noção de demonstração são, por exemplo, hoje objetos matemáticos em lógica matemática e essa distinção deve sempre se referir a uma prática de ensino precisa (nível do curso, lugar, tempo, setor da matemática, entre outros).

Teles (2002) analisou a interferência da compreensão das propriedades de igualdade e do conceito de operações inversas na Aritmética na apropriação da Álgebra, mais especificamente na resolução de equações polinomiais do primeiro grau. Os resultados dessa investigação mostraram que o uso de coeficientes inteiros negativos e racionais fracionários é pouco explorado em livros didáticos do 7° ano e, ao mesmo tempo, as equações desses tipos são aquelas com maiores índices de erro. Além disso, apesar da linguagem simbólica ser introduzida desde o 6° ano, as dificuldades na manipulação dela persistem fortemente até o fim do ensino médio e os erros cometidos por alunos na resolução de equações polinomiais do primeiro grau são, parcialmente, herdados da Aritmética, uma vez que o domínio das operações inversas com números inteiros e racionais é instável nos alunos de ensinos fundamental e médio.

Em sua tese, Ribeiro (2007) teceu algumas considerações a respeito dos diferentes significados do conceito de equações do primeiro grau, denominados por ele de multissignificados de equação, considerando os aspectos epistemológicos e didático-matemáticos. Para melhor entendê-los, esses multisignificados de equação serão brevemente descritos a seguir.

a) Intuitivo-pragmático: o conceito de equação é concebido como intuitivo, ligado a uma ideia de igualdade entre duas quantidades, utilizado na resolução de problemas práticos;

b) Dedutivo-geométrico: o conceito de equação é ligado às figuras geométricas e seu uso está relacionado a situações que envolvem cálculos e operações em medidas de entes geométricos;

c) Estrutural-generalista: o conceito de equação é estrutural, definido e com propriedades e características próprias, buscando-se operar sobre ele mesmo, na busca de soluções mais gerais para uma classe de equações do mesmo tipo;

d) Estrutural-conjuntista: o conceito de equação é concebido dentro de uma perspectiva estrutural, diretamente ligado à noção de conjunto;

e) Processual-tecnicista: o conceito de equação é concebido a partir de sua própria resolução, como os métodos e técnicas que são utilizados para resolvê-la;

f) Axiomático-postulacional: o conceito de equação é concebido como uma noção primitiva, usada no mesmo sentido que reta, ponto e plano na geometria.

Em outra pesquisa realizada por Cotret (1997), foram investigadas as dificuldades que surgem no equacionamento dos problemas escritos, discutindo-se a pertinência e adequação das equações usadas para a modelação intra e extramatemática. Segundo essa pesquisadora, muitas vezes não se sabe justificar a escolha de um determinado modelo de equação para representar certa questão, a não ser pela resolução e pela busca da resposta das questões.

Já Ribeiro (2001), ao investigar o desempenho de alunos de escolas públicas de São Paulo, na faixa etária entre 13 e 14 anos, referente às questões da Álgebra elementar, constatou que vários obtiveram um resultado inferior quando trabalharam com situações que envolviam equações tanto em situações contextualizadas, isto é, aquelas que demandam o equacionamento de problemas verbais, como em situações não contextualizadas, em que as equações são dadas e o que se exige essencialmente são procedimentos de resolução.

Ainda nesse contexto, Dreyfus & Hoch (2004) discutiram uma abordagem estrutural para as equações. Essa pesquisa trabalhou com alunos em idade equivalente ao nosso ensino médio, e os autores pediram que os alunos dissessem o que pensavam sobre equação. Dentre os resultados da pesquisa, os autores constataram a pouca capacidade desses alunos em identificar a estrutura interna de uma equação, em caracterizar a ideia de equação, em muitos casos, apenas como um processo de resolução da equação.

Lima (2007) investigou os significados concedidos por alunos do ensino médio sobre equação e métodos de resolução. Constatou, então, que, numa equação que significava para seus alunos “fazer conta”, o sinal de igualdade assume caráter único e operacional.

Por outro lado, Nogueira (2008) caracterizou a introdução formal da Álgebra em livros didáticos brasileiros do ensino fundamental. Em meio aos resultados encontrados, destacam-se os tipos de tarefas principais, que se referem às resoluções de equações, mesmo que o enunciado não proponha a sua resolução. Elas aparecem com outros objetivos, como encontrar expressões equivalentes ou verificar se certo valor torna verdadeira, ou não, a sentença dada. Dentre as técnicas principais, encontra-se a que faz a analogia com a balança em equilíbrio e oportuniza o desenvolvimento do raciocínio algébrico. A escolha por trabalhar a resolução de equações e apresentar as equações do primeiro grau por meio da resolução de problema é comum na introdução da Álgebra no ensino fundamental.

Também destacamos duas pesquisas com professores de matemática. A primeira foi realizada por Attorps (2003) que discutiu as concepções apresentadas por 10 professores da escola secundária sobre equações. Em seu estudo observou que nem sempre os professores associam o conceito de equação ao conceito de igualdade e alguns não reconhecem uma determinada expressão como uma equação por não saberem como encontrar a solução dela.

Barbosa (2009) investigou seis professores de matemática em diferentes níveis de ensino. Como resultado destacou o seguinte: primeiro, os professores fizeram uso constante de significados diretamente relacionados aos processos e às técnicas de resoluções de equações; segundo, os professores sentiram grande dificuldade em apresentar uma caracterização para o conceito de equação e reconhecer esse assunto quando não é esclarecido na situação matemática proposta.

Por fim, chegamos ao último subtópico deste capítulo. Após breves considerações sobre a Álgebra e seus elementos históricos, e as equações, discorreremos sobre o Modelo Epistemológico de Referência e os papéis dele na sala de aula.

2.3 Modelo Epistemológico de Referência – MER

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) está em franco desenvolvimento. Nesse processo encontramos vários autores que estão contribuindo para tais avanços e, dentre eles, podemos destacar os seguintes: Bolea (2002), Sierra (2006), Garcia (2005), Ruiz-Munzón (2010), Santos (2014), Lucas (2015), Ruiz-Munzón Bosch e Gascón (2011), Gascón (2014). Esses autores propõem a ideia de Modelo Epistemológico Referência (adiante apenas MER) que pode ser definido, de maneira breve, como uma atividade matemática existente em termos de praxeologias. Corroborando essa discussão, Sierra (2006) argumenta em sua tese que

> O MER pode ser expresso sob a forma de uma sucessão de praxeologias correspondentes para o desenvolvimento de respostas parciais para uma questão problemática inicial. Cada praxeologia sucessória surge como uma extensão ou o desenvolvimento da praxeologia anterior, dadas as limitações desta última para fornecer respostas para as questões levantadas (SIERRA, 2006, p. 47).

Desse modo, pode-se dizer que o MER permite que se conheça o processo de ensino e aprendizagem em uma determinada instituição em relação a um objeto matemático específico, ou seja, viabiliza uma autodescrição do conhecimento matemático em jogo. Esse modelo frequentemente assume a forma de uma sucessão de praxeologias de complexidade crescente e seus componentes correspondem aos do "conhecimento matemático". Assim, podemos entender a "análise” da atividade matemática como uma organização teórica que emerge da atividade matemática enquanto instrumento.

Qualquer MER está implicitamente ligado a uma ou mais instituições de referência, embora, em princípio, seja livre de restrições ou limitações "didáticas". Portanto, a descrição do MER deve ser completada pela descrição de reconstrução institucional. Isso requer, particularmente, que se tenha ou deva-se ter nessa instituição um projeto especificado *a priori* a fim de realizar-se o processo de estudar esse conhecimento.

A Transposição Didática é particularmente útil para conduzir o olhar do pesquisador a partir das diferentes instituições envolvidas no processo de estudo (em particular, a comunidade produtora do saber sábio e noosfera). O MER também permite distiguir as limitações institucionais das que são submetidas às "praxeologias para ensinar" a fim de tornarem-se "praxeologias efetivamente ensinadas."

Ainda de acordo com Gascón (2014),

> O MER específico ou local (compatível com um MER geral) é construído em educação matemática como ferramentas heurísticas para o ensino de certos fenômenos visíveis. Sua função principal é fornecer os elementos necessários para desenvolver problemas educacionais cujo estudo permitirá melhorar a compreensão desses fenômenos. Só desta forma pode emancipar didática ao modelo epistemológico dominante nas instituições em causa e ser capaz de construir de forma independente o seu próprio objeto de estudo (GASCÓN, 2014, p. 14)

Na análise do processo institucional de ensino no nível da TAD, Bosch e Gascón (2005) acrescentam ainda que não podemos levar em conta apenas os dados provenientes de uma única instituição, como a sala de aula ou da escola. Tampouco podemos ficar com os dados que emanam do comportamento individual dos sujeitos de uma ou mais instituições. Essa ideia está representada na Figura 7, abaixo registrada.

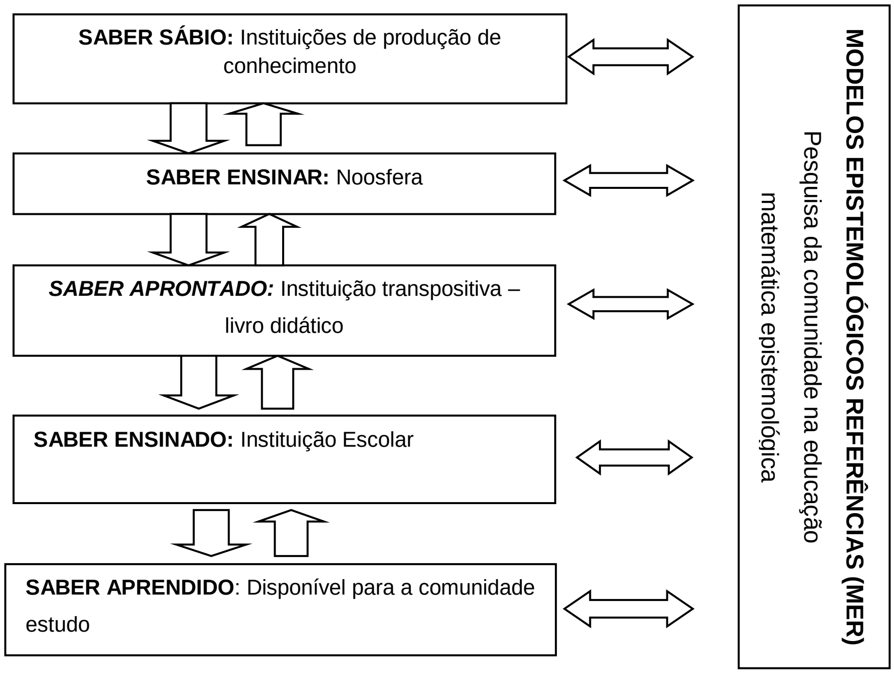


Figura 7: Estágios de Transposição Didática e posição externa da comunidade de pesquisa.
Fonte: Adaptados de Bosch e Gascón (2005, p. 116)

Do ponto de vista metodológico, em qualquer investigação no cerne do programa epistemológico, é necessário que o pesquisador torne explícito um modelo epistemológico que servirá como referência para observar os fatos empíricos.

De acordo com Chevallard (1989), Gascón (1994) e Bolea (2003), o modelo epistemológico dominante na Álgebra escolar, no contexto francês e espanhol, é a aritmética generalizada. Ou seja, as letras indicam sempre incógnitas com valor numérico a serem determinadas. Quanto ao papel das variáveis ou parâmetros, este fica em segundo plano, bem como os possíveis significados não numéricos.

Bolea (2003) diz que o cálculo algébrico na educação básica é um prolongamento do cálculo aritmético em que certos números são representados por letras. Para essa autora, as características da concepção da Álgebra escolar como aritmética generalizada são as seguintes: (a) as razões de ser da Álgebra escolar; (b) os objetos matemáticos a partir dos quais os conceitos de Álgebra escolar são construídos; (c) os elementos mais significativos das atividades associadas à Álgebra escolar; e (d) as dificuldades mais destacadas na realização das atividades “algébricas”.

A construção de um modelo de referência epistemológica é apresentada na álgebra elementar como modelagem de processos e seu possível desenvolvimento no sentido de modelagem funcional. A seguir, apresentaremos as diferentes etapas de algebrização em uma perspectiva algébrico-funcional.

2.3.1 Algebrização de uma Organização Matemática (OM) em torno de problemas aritméticos

Ruiz-Munzón, Bosch e Gascón (2010) consideram um "problema aritmético" aqueles que podem ser resolvidos por uma sequência de operações aritméticas (+, -, ×, /, entre outras) executável a partir dos dados dos problemas, dados em que normalmente são conhecidas quantidades de certas grandezas. Desse modo, quando temos uma OM gerada por problemas aritméticos – que podem ser considerados tarefas problemáticas de partida –, por técnicas de resolução clássicas que são incorporadas nas exposições orais, com base nos dados e por uma sequência de operações aritméticas para calcular uma quantidade desconhecida, Chevallard (2002) propôs o processo de resolução ou cadeia estruturada e hierárquica de operações aritméticas que denominou de Programa de Cálculo Aritmético (PCA).

Para Gascón (1993), considerar um *padrão clássico análise-síntese* é estabelecer uma técnica para resolução de problemas aritméticos por excelência, isto é, um PCA também pode ser avaliado como sínteses da resolução (originalmente oral) de algum tipo de problema aritmético. Os elementos tecnológico-teóricos que ajudam a descrever, justificar e interpretar essa prática matemática elementar é essencialmente reduzido para as propriedades dos valores das operações – entre grandezas, operações aritméticas e as relações entre elas –, embora também pudesse ser adicionado, no plano teórico, o discurso implícito “descrever e interpretar o referido padrão de análise-síntese”. A figura a seguir descreve esse padrão.

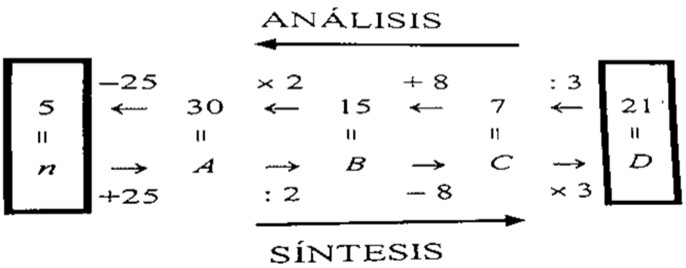


Figura 8: Programa de Cálculo Aritmético (PCA)
Fonte: Ruiz-Munzón, Bosch e Gascón (2010, p. 659)

Os PCA aparecem e efetuam-se no trabalho matemático dos estudantes desde o início do ensino primário, mas nunca são tematizados ou provocam questões tecnológicas sobre sua descrição, justificação, alcance. Assim, não é possível enunciar teoremas que lhes dizem respeito. Em outras palavras, os PCA fazem parte da prática matemática na escola, mas não são objetos matematizados ou paramatemáticos (CHEVALLARD, 2004).

Um exemplo típico de problema de aritmética que é resolvido por um "Programa de Cálculo Aritmético" (PCA) descrito por Ruiz-Munzón, Bosch e Gascón (2010) é o seguinte:

> P0: Anna pensou em um número, adicionou 25, dividiu o resultado por 2, subtraiu 8 e multiplicou tudo por 3. Se ao final obteve 21, que número Anna pensou?

Uma resposta aritmética expressa verbalmente seria a seguinte: "Se, ao final, obteve 21, antes de multiplicar por 3, tinha 7; antes de subtrair 8, tinha 15; antes de dividir por 2, tinha 30; e antes de adicionar 25; tinha 5. Então, Anna pensou no número 5".

Esses autores consideram que esse problema parte das tarefas as quais compõem certa OM que denominaram como um sistema de partida *S*. Ou seja, a partir do sistema *S* (em modelos subsequentes), é fácil levantar questões de natureza tecnológica, como: Por que o tipo de resultado que se recebe é obtido? Como interpretar esses resultados? Qual o âmbito ou domínio de validade das técnicas? A delimitação dos tipos de problemas é resolvida com o mesmo PCA?

Com base no exposto, advém a necessidade de ampliar a modelagem do sistema progressivo inicial mediante caracterização registrada a seguir.

2.3.2 Primeira fase do processo de algebrização

Ruiz-Munzón, Bosch e Gascón (2010) exemplificam um primeiro tipo incompletude de uma OM inicial em torno de problemas de aritmética. Podemos considerar um problema (também formular em termos da implementação do PCA) da seguinte forma:

> P1: Pense em um número, some em dobro o seu consecutivo, some 15 ao resultado e, finalmente, subtraia o triplo do número pensado inicialmente. Que resultado se obtém? O que acontece caso se troque o número pensado inicialmente?
>
> Por exemplo, se o número é 49, obtém-se: $PCA(49) = 49 + 2.50 + 15 - 3.49 = 17$
> Se tomado inicialmente o número 10, tem-se: $PCA(10) = 10 + 2.11 + 15 - 3.10 = 17$

A resolução aritmética desse problema, quer dizer, a execução do PCA indicado, sempre chega ao mesmo resultado numérico, 17, independentemente do número inicialmente pensado. Parece, portanto, uma questão tecnológica (por que se chega ao mesmo resultado independentemente do número pensado?), que não se explica com as técnicas aritméticas da OM inicial.

A resolução desses problemas leva à identificação de um primeiro estágio de algebrização no momento em que é necessário considerar o PCA como um todo, isto é, produzir uma formulação (simbólica) escrita do PCA que é, em certo sentido, uma expressão algébrica. Em seguida, surgirá a necessidade de novas técnicas, essencialmente, da "simplificação" delas para trabalhar-se com uma expressão algébrica definida como a formulação simbólica de uma PCA que, em geral, pode ser utilizada para modelar o processo de resolução de um problema de aritmética e a sua estrutura.

Por “simplificar um PCA” entende-se a operação de transformá-lo em um equivalente e, em certo sentido, mais “simples” ou “adaptado” para uso em uma atividade matemática específica.

Os primeiros passos de algebrização, assim incorporada em uma nova OM, chamamos M_1, que pode ser interpretado como um primeiro modelo do sistema inicial, e é permitida a modelagem dos elementos aritméticos. O modelo M_1 é uma expansão real de S, conforme podemos ver na Figura 9.

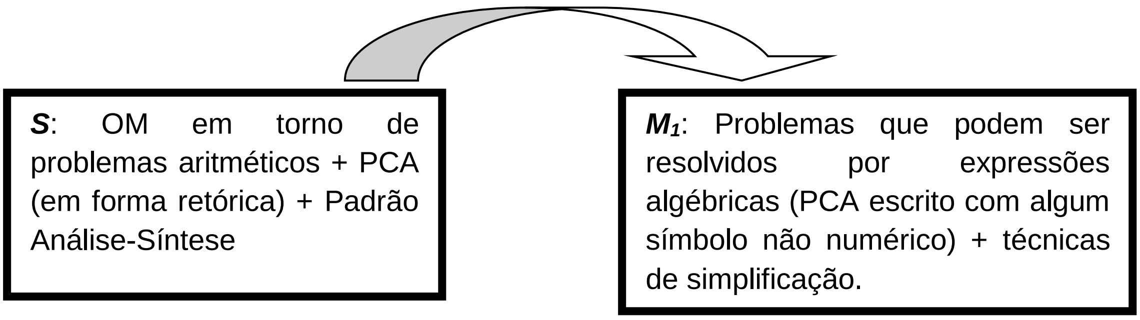


Figura 9: Primeira fase do processo de algebrização.
Fonte: Adaptada de Ruiz, Bosch, Gascón (2010, p. 661)

Com efeito, M_1 pode também resolver os problemas do mesmo tipo P_0, mas eles não podem ser abordados estritamente em S porque requerem um primeiro trabalho de simplificação associada PCA antes de aplicar o Padrão Análise-Síntese.

Para exemplificar, consideremos o mesmo problema que P_1:

> P1: Pense em um número, some em dobro o seu consecutivo, some 15 ao resultado e, finalmente, subtraia o triplo do número pensado inicialmente. Que resultado se obtém? O que acontece caso se troque o número pensado inicialmente?

Para resolver o problema deve-se operar com variável (simplificação da expressão simbólica), mas não transpor termos, porque a variável está em uma extremidade da equação: $n+2(n+1)+15-3n=f(n)=17$.

Nesse contexto, o n não é um número desconhecido (incógnita) que precisa ser determinado nas condições do problema, mas uma variável que pode assumir diferentes valores. Para cada valor dado, se terá uma equação $f(n) = 17$.

Passamos agora a descrever a segunda fase do processo de algebrização.

2.3.3 Segunda fase do processo de algebrização

Nessa segunda fase da algebrização, identifica-se a necessidade de combinação de dois PCA, o que requer novas técnicas, as técnicas de cancelamento, desde que se tenha que manipular uma igualdade de dois PCA como um novo objeto matemático (equação). Ou seja, essas técnicas destinam-se à obtenção de "equações equivalentes", e não apenas como aconteceu com o PCA, equivalentes características de simplificação técnica de M1. Assim, além de aumentar o nível de algebrização, surge um segundo modelo M_2, amplo e completo, de M1.

> P_2: Paula pensou em um número. Adicionou o dobro do seu consecutivo, subtraiu 17 do resultado e, finalmente, dividiu tudo por 3. Se o resultado final são 4 unidades mais do que o dobro do número pensado, pode-se determinar o número que Paula pensou?

Empregando as técnicas apresentadas acima, podemos realizar os seguintes procedimentos:

Seja n o número pensado, o cálculo feito por Paula se dará da seguinte maneira:

PCA(n) = $n+2(n+1)-17=3n-15$

Nesse caso, como resultado da execução do PCA, nenhuma resposta será obtida por meio da aplicação de padrões de análise-síntese. A condição do problema é expressa como igualdade entre dois programas de cálculo PCA_1(n)= $3n-15$ e PCA_2(n)= $2n+4$ que (supostamente) que detém algum valor de n.

Para determinar o valor de n entre dois PCA, a fim de que tenham o mesmo valor numérico, não é suficiente simplificar separadamente cada um dos PCA (na verdade, nesse caso, já são simplificados) e, em seguida, aplicar o padrão de análise-síntese. Então, necessita-se transformar globalmente a igualdade geral dos PCA, que está a lidar com este novo objeto matemático. Isso requer a transformação da igualdade em nível global dos PCA, ou seja, precisa-se manipular esse novo objeto matemático chamado de "equação" de novas técnicas que constituem "cálculo equacional" e cuja principal operação é a "restauração" (al-jabr), que deu origem à palavra álgebra e consiste em transformar simultaneamente os PCA (ambos membros da equação) para a obtenção de uma nova equação (igualdade dos PCA) equivalente à anterior, como descrito abaixo.

$$\begin{aligned}
&3n - 15 = 2n + 4 \\
&3n - 15 + 15 = 2n + 4 + 15 \\
&3n = 2n + 19 \\
&3n - 2n = 2n + 19 - 2n \\
&n = 19
\end{aligned}$$

Assim, pode-se ver que o cálculo equacional, que transforma equações em equações equivalentes, constitui-se em torno de técnicas M_1, sendo que, por um lado, continua a utilizar as técnicas para simplificar M_1 para simplificar os dois PCA em separados, porque o padrão análise-síntese transforma de um nível elementar uma igualdade de PCA em outra igualdade de PCA, conforme podemos ver na figura abaixo.

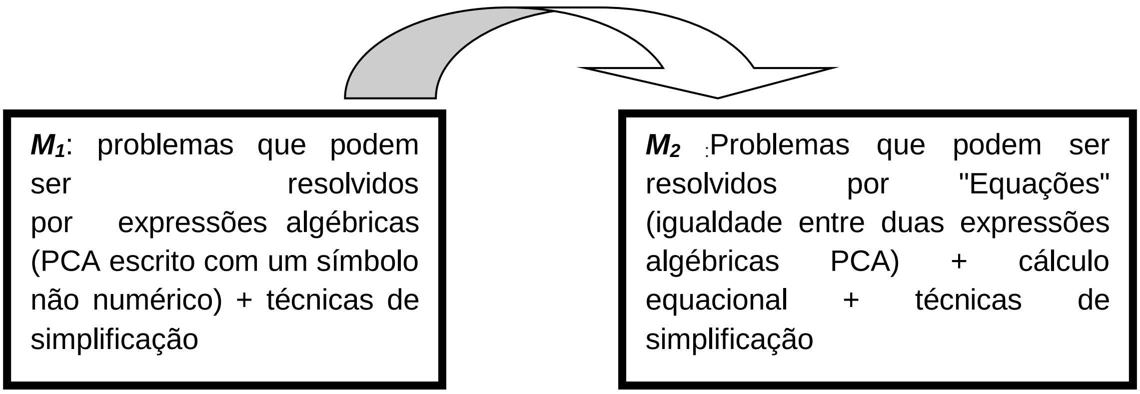


Figura 10: Segunda fase do processo de algebrização.
Fonte: Adaptada de Ruiz, Bosch, Gascón (2010, p. 664)

A seguir, descrevemos a terceira fase do processo de algebrização.

2.3.4 Terceira fase do processo de algebrização

Depois de uma breve apresentação dos dois primeiros processos de algebrização, precisamos registrar que a terceira fase constitui-se em considerar as questões tecnológicas que não podem ser resolvidas por M_2. Um possível questionamento poderia ser o seguinte: que relação deve estar entre determinadas variáveis do sistema, de modo que atenda determinada propriedade dele? Por exemplo, que relação deve existir entre dados de um problema aritmético de modo que ele tenha uma solução? E como se deve proceder para tornar essa a única solução? Dependendo da natureza do problema e do contexto em que é feito, essas questões podem se multiplicar.

P_3: Qual é a relação entre o perímetro P e uma área de um triângulo isósceles?

Quando é que a P e A determinam um único triângulo isósceles?

Chamando b o comprimento desigual e a o lado dos iguais, o perímetro P e A área do triângulo têm

$$p = 2a + b; a = \left(\frac{p-b}{2} \right)$$

$$A - \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{4}}$$

Substituindo e simplificando a relação, obtém, de acordo com o parâmetro b,

$$16A^2 = P^2b^2 - 2PABb^3$$

Temos, em suma, uma nova OM, que é designada de M_3, que contém o M_2 e constitui uma complementação da mesma. Ao mesmo tempo, deve ser considerado como uma ou mais algebrização (progressivamente, conforme as figuras 8, 9 e 10), desde que aceitou a unificação dos tipos de problemas, elementos técnicos e tecnológicos, incluindo tarefas relacionadas à interpretação dos resultados obtidos e até mesmo tipos de problemas cada vez mais independentes dos sistema iniciais, conforme podemos ver na Figura 11.

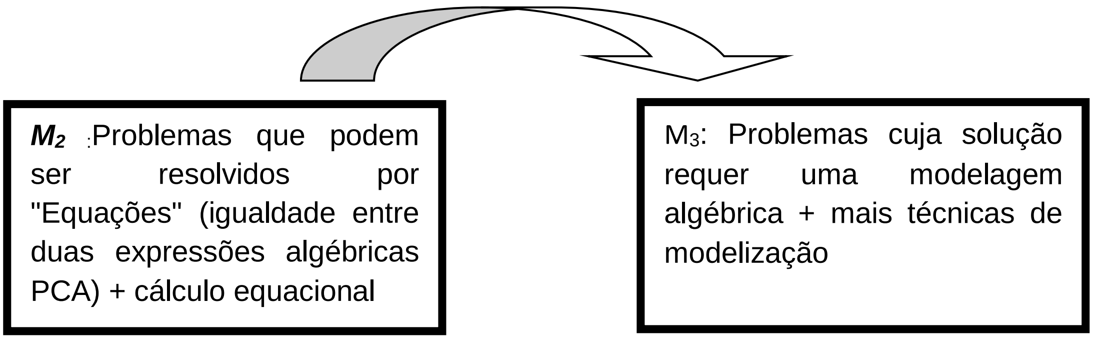


Figura 11: Terceira fase do processo de algebrização.
Fonte: Adaptada de Ruiz, Bosch, Gascón (2010, p. 666)

Em resumo, Ruiz-Munzón, Bosch e Gascón (2010) demonstraram como instrumento algébrico pode ser utilizado para levar a cabo um processo de algebrização progressiva de um sistema. Essa abordagem também mostra que a "razão de ser" da álgebra escolar não apenas permite simplificar extremamente o "puro" (discurso) por solução de cálculo aritmético equacional. Além disso, mostraram como a álgebra pode ser uma ferramenta de modelagem para organizar em conjunto problemas aparentemente diferentes, recebendo novos tipos de problemas, proporcionando técnicas para responder aos problemas tecnológicos, como mostram, por exemplo, propriedades da estrutura de uma classe de problemas.

Como temos por objetivo analisar as praxeologias do professor, o livro didático, os documentos oficiais e o Modelo Epistemológico de Referência (MER) referente ao conceito de equação polinomial do primeiro grau, passaremos a tratar, a seguir, da modelização *a priori* das praxeologias matemáticas que constituíram nossas análises.

2.4 MODELIZAÇÃO A PRIORI DE PRAXEOLOGIAS MATEMÁTICAS

Apresentaremos a seguir uma proposta de modelização *a priori* das praxeologias matemáticas pontuais que se podem estabelecer em torno dos subtipos de tarefas relativos à resolução de equações do primeiro grau.

Retomando o que foi discutido no Capítulo 2, relembramos que uma praxeologia é uma organização matemática construída em torno de quatro componentes: tipos de tarefas (T) matemáticas realizadas; técnicas (τ) matemáticas explicadas; tecnologias (θ) justificadas; e teorias (Θ), que são, em tese, os objetos matemáticos a serem estudados ou construídos.

Portanto, delinearemos neste momento os subtipos de tarefas, técnicas, tecnologias e a síntese da modelização, baseados em Araújo (2009). Ressaltamos ainda que, além dessas tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, podem existir outras categorias em outros volumes dessas coleções (8° ou 9° ano), mas que, especificamente, não encontramos elementos novos, como detalharemos a seguir.

2.4.1 Subtipos de tarefas

Com base em estudos realizados anteriormente, denomina-se equação do primeiro grau com uma incógnita toda equação na forma $ax+b=0$, em que a incógnita possui expoente um (1).

Chevallard (1999), assim como outros pesquisadores, tomou como referência os procedimentos de resolução e classificou as equações do primeiro grau em duas grandes categorias: equações polinomiais do primeiro grau do tipo $ax+b=c$, que, segundo ele, podem ser resolvidas por procedimentos aritméticos; e equações do tipo $a_1x+b_1=a_2x+b_2$, que não podem ser resolvidas por procedimentos que se apoiem em raciocínio exclusivamente aritmético.

Entretanto, nem sempre as equações do primeiro grau apresentam-se escritas nas formas simplificadas. Habitualmente, em uma atividade, elas aparecem sob diferentes formas, dentre as quais destacamos outras duas categorias: equações dos tipos $A(x)=c$ e $A_1(x)=A_2(x)$ em que $A(x)$, $A_1(x)$ e $A_2(x)$ são expressões polinomiais que ainda não foram reduzidas à forma canônica $ax+b=0$, mas podem ser reduzidas a essa forma por processos de desenvolvimento e redução (ARAÚJO, 2009).

Portanto, neste estudo, analisamos os subtipos de tarefas relativos à resolução de equações do primeiro grau em quatro categorias descritas e adaptadas a partir de Araújo (2009). Vejamo-las.

- T_1: Resolver uma equação do tipo $ax+b=c$

  Exemplo: Resolver a equação $2x+8=20$

- T_2: Resolver uma equação do tipo $A(x)=c$, sendo $A(x)$ uma expressão polinomial não reduzida à forma canônica.

  Exemplo: Resolver a equação $2(x+8)+x=10$.

- T_3: Resolver uma equação do tipo $a_1x+b_1=a_2x+b_2$.

  Exemplo: Resolver a equação $2x-10=6x-2$

- T_4: Resolver uma equação do tipo $A_1(x)=A_2(x)$, A sendo $A_1(x)$ ou $A_2(x)$ expressões polinomiais não reduzidas à forma canônica.

  Exemplo: Resolver a equação: $6(x-10)+3x=4x-2$

Assim como exposto acima, tomamos as quatro categorias relativas à resolução de equações do primeiro grau que servirão de base para a identificação dos subtipos de tarefas nos livros utilizados em nossas análises. A seguir apresentaremos as técnicas.

2.4.2 Técnicas

O apresentado acima nos permite sintetizar as seguintes técnicas matemáticas propostas para serem utilizadas no método de resolução de equações do primeiro grau:

- τ_{TI}: Testar a igualdade por tentativa e erros.
- τ_{TTC}: Transpor termos ou coeficientes, invertendo as operações.
- τ_{NTC}: Neutralizar termos ou coeficientes, efetuando a mesma operação nos dois membros da igualdade.
- τ_{RTS}: Reagrupar os termos semelhantes, invertendo o sinal dos termos transpostos.

Desse modo, dependendo das variáveis mobilizadas na confecção das equações, podemos mobilizar uma ou mais técnicas.

Assim, essas técnicas próprias de resoluções de equações, para os casos dos subtipos de tarefas t_2 e t_4, temos também a seguinte técnica:

- Desenvolver ou reduzir expressões, eliminando parênteses e/ou agrupando os termos semelhantes.

Testar a igualdade (τ_{TI}): essa técnica consiste em resolver a equação, verificando-se a igualdade por meio de tentativas e aproximações, substituindo-se a incógnita por valores numéricos, isto é, transformam-se expressões algébricas em expressões aritméticas.

Desse modo, a aplicação dessa técnica baseia-se nos elementos tecnológicos que consistem nas *regras de propriedades operatórias* empregadas para calcular-se o valor numérico de expressões aritméticas. Pode-se dizer que τ_{TI} é uma técnica que se baseia essencialmente em procedimentos aritméticos, isto é, no aspecto procedural.

Em relação ao alcance e eficiência, a técnica τ_{TI} é normalmente utilizada para introduzir o trabalho com o estudo de resoluções de equações, visando apresentar sentido ao sinal da igualdade. Em geral, ela é pouco econômica e tem um alcance bastante limitado, isto é, ela nem sempre é eficiente. Por exemplo, a prática de resolver-se uma equação do primeiro grau por tentativas e aproximações, testando-se a igualdade, embora longa, é eficiente nos casos em que a solução é um número inteiro ou decimal exato. Verifica-se que, em geral, o tempo empregado na resolução é menor para soluções inteiras do que para soluções decimais.

Por exemplo: encontre o valor que satisfaça a equação $x+6=10$. Ao resolver esse tipo de equação, os estudantes irão inserir valores numéricos. Um primeiro valor seria o número 2, testando-se na equação $2+6=10 \rightarrow\ 8 \neq 10$, até chegar-se ao valor 4, que tornará a equação verdadeira $4+6=10 \rightarrow 10=10$.

Transpor termos ou coeficientes (τ_{TTC}): essa técnica é geralmente empregada para realizar, de maneira rápida e eficiente, o subtipo de tarefa t_1: resolver equações do tipo $ax+b=c$. Ela se diferencia por isolar a incógnita, *transpondo* termos constantes ou coeficientes para o outro membro da igualdade, invertendo as operações, como nos exemplos a seguir:

1. Para o caso em que $a=1$, a resolução do subtipo de tarefa t_1, por meio de τ_{TTC}, incide em isolar-se a incógnita (x) em um membro da igualdade, transpondo-se o termo constante (b) para o outro membro e invertendo-se a operação, conforme o esquema.

$$x+b=c \rightarrow x=c-b$$

Desse modo, ao transpor-se o termo (b), inverte-se a adição pela subtração.

2. Para a situação em que $b = 0$, a resolução do subtipo de tarefa t_1 consiste em isolar-se a incógnita (x) em um membro, transpondo-se o coeficiente (a) para o outro membro e invertendo-se a operação.

$$ax = c \to x = c \div a\_\_\_ou\_\_ax = c \to x = \frac{c}{a}$$

Desse modo, ao transpor-se o coeficiente (a), inverte-se a multiplicação pela divisão.

Para o caso em $a \neq 1$ e $b \neq 1$, a resolução do subtipo de tarefa t_1 se realiza em duas etapas: inicialmente, isola-se o termo incógnito (a_x), transpondo-se o termo constante (b) para o outro membro da igualdade, realizando-se a operação inversa – no caso, a subtração.

$$ax + b = c \to ax = c - b$$

Em seguida, isola-se a incógnita (x) em um membro da igualdade, transpondo-se o coeficiente (a) para o outro membro da igualdade e efetuando-se a operação inversa – no caso, a divisão.

$$ax = c - b \to x = \frac{c-b}{a}$$

A técnica τ_{TTC} baseia-se nas propriedades aritméticas das operações inversas; logo, não é adequada para a resolução de equações do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$ que, segundo Vergnaud (1987), não podem ser revolvidas por processos aritméticos. No entanto, há casos em que a técnica τ_{TTC} é justificada, tomando-se como referência a eliminação de etapas realizadas na utilização da técnica τ_{NTC}, conforme veremos a seguir.

Neutralizar termos ou coeficientes (τ_{NTC}): essa técnica é comumente utilizada de maneira eficiente para realizar-se o seguinte subtipo de tarefa t_3: resolver uma equação do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$. Por ser mais potente, ela pode ser também mobilizada para resolver o subtipo de tarefa t_1 e t_2: resolver uma equação do tipo

$ax+b=c$. Ela se caracteriza por isolar a incógnita, efetuando a mesma operação nos dois membros da equação.

Para o caso da resolução do subtipo de tarefa de t_1 e t_2, a aplicação dessa técnica se dá da seguinte maneira (ver Figura 12).

$ax+b=c$	Isola-se o termo incógnito (ax), subtraindo-se o termo constante dos dois termos da igualdade.
$\downarrow$	
$ax+b-c=c-b$	Efetuam-se as operações entre os números.
$\downarrow$	
$\frac{ax}{a}=\frac{c-b}{a}$	2° Isola-se a incógnita (x), dividindo-se os dois termos pelo coeficiente numérico de (a)
$\downarrow$	
$x=\frac{c-b}{a}$	Efetuam-se as operações entre os números

Figura 12: Esquema de resolução de equações do tipo $ax+b=c$ pela aplicação da técnica τ_{NTC}
Fonte: a pesquisa

A resolução do subtipo de tarefa t_2: $a_1x+b_1=a_2x+b_2$ (com $a_1 \neq a_2$), por meio da técnica τ_{NTC}, pode ser realizada obedecendo às seguintes etapas:	1° Neutraliza-se o termo incógnito do segundo membro, por exemplo, subtraindo-se os dois membros pelo a_2x
$a_1x+b_1=a_2x+b_2$	
$\downarrow$	
$a_1x+b-a_2x=a_2x+b_2-a_2x$	Reduzem-se os termos semelhantes
$\downarrow$	

$a_1x+b_1-b_2=b_2-b_2$	Efetuam-se as operações (subtrações) realizadas
$\downarrow$	
$ax=b$	3° Isola-se a incógnita (x), dividindo-se os dois termos pelo coeficiente numérico de (a)
$\downarrow$	
$ax \div a = b \div a$	
$\downarrow$	Efetua-se a divisão
$x=\dfrac{b}{a}$	

Figura 13: Esquema de resolução de equações do tipo $a_1x+b_1=a_2x+b_2$ pela aplicação da técnica τ_{NTC}
Fonte: a pesquisa

Observa-se que a técnica τ_{NTC} permite que se realizem, de maneira direta e eficiente, esses dois subtipos de tarefas, o que a torna mais potente do que a técnica τ_{TTC}. Assim, a técnica $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{NTC}}$ é menos econômica do que a τ_{TTC}.

A técnica τ_{NTC} baseia-se nas propriedades gerais da igualdade ou nos princípios das equações equivalentes, de modo que a necessidade de torná-la mais econômica faz dela um elemento tecnológico que permite, igualmente, explicar e justificar a elaboração da técnica τ_{TTC} (transpor termos ou coeficientes), pela eliminação de etapas, ao realizar o subtipo de tarefas t_1, conforme esquemas registrados na Figura 14.

Etapa	Técnica τ_{NTC}	Técnica τ_{TTC}	
	ax + b = c	ax + b = c	
1	↓ Subtrai-se **b** dos dois membros.	↓	Realiza-se mentalmente a etapa 1 equivalente a transpor o **b** para o 2º membro, trocando-se o sinal de (+) por menos (-).
	ax + b - b = c – b		
2	↓ Efetuam-se as operações.		
	ax = c – b	ax = c – b	
3	↓ Dividem-se os dois membros por **a**.	↓	Realiza-se a etapa 3 mentalmente equivalente a transpor o **a** para o 2º membro, invertendo-se a multiplicação pela divisão.
	$\frac{ax}{a}=\frac{c-b}{a}$		
4	↓ Efetua-se a divisão		
	$x=\frac{c-b}{a}$	$x=\frac{c-b}{a}$	

Figura 14: Esquema de resolução de equações do tipo $ax+b=c$ pela aplicação das técnicas τ_{NTC} e τ_{TTC}
Fonte: a pesquisa

Essa dupla possibilidade de explicações para elaboração ou mobilização da técnica $\boldsymbol{\tau_{TTC}}$**,** em geral, torna a identificação dos elementos tecnológicos empregados na praxeologia, realizada pelo professor e aluno nas resoluções, exercícios relativos ao subtipo de tarefa t_1.

Na passagem do subtipo de tarefa t_4, a necessidade de tornar a aplicação da técnica τ_{NTC} mais econômica faz dela o elemento tecnológico que permite explicar e justificar a elaboração da técnica a qual consiste em reagrupar os termos semelhantes em um mesmo membro da igualdade, como observaremos abaixo.

Reagrupar termos semelhantes ($\boldsymbol{\tau_{RTS}}$): essa técnica é uma criação didática que consiste em modificar equações do tipo $a_1x+b_1=a_2x+b_2$ em uma equação do tipo $ax=c$ por meio do cancelamento de etapas realizadas na mobilização τ_{NTC}, esquema apresentado na Figura 15.

Assim, nesse esquema (Figura 15), a última equação corresponde ao subtipo de tarefa t_1, cuja solução é geralmente alcançada por meio de aplicação da técnica τ_{TTC}, invertendo a operação e realizando uma multiplicação por uma divisão. Desse modo, a solução de uma equação por meio da aplicação da técnica τ_{RTS} realiza-se em três fases: reagrupação dos termos semelhantes, invertendo-se o sinal dos termos transpostos (τ_{RTS}); redução dos termos semelhantes (τ_{DRE}); e isolamento da incógnita, transpondo-se o coeficiente (τ_{TTC}), conforme apresentado abaixo.

	Técnica τ_{NTC}	Técnica τ_{RTS}	
Etapa	$a_1x+b_1=a_2x+b_2$	$a_1x+b_1=a_2x+b_2$	
1	↓ Subtraem-se b_1 e a_2x dos dois membros. $a_1x+b_1-a_2x+b_1=a_2x+b_2-a_2x+b_1$	↓	A etapa 1 corresponde à reagrupação dos termos incógnitos no 1° membro e os constantes no 2° membro, transpondo-se os termos a_2x e b_2 para o 1° membro, e o termo b_2 para o segundo membro, invertendo-se os sinais.
2	↓ Efetuam-se as operações. $b_1-b_1=0$ __ $a_2x-a_2x=0$	$a_1x+a_2x=b_2-b1$	
3	↓ Tem-se:	↓	Reduzem-se os termos semelhantes. Tem-se:
	↓ $a_1x+a_2x=b_2-b_1$		
	$ax=b$	$ax=b$	

Figura 15: Esquema de resolução de equações do tipo $a_1x+b_1=a_2x+b_2$ pela aplicação das técnicas τ_{NTC} e τ_{RTS}
Fonte: a pesquisa

Observamos, do ponto de vista prático, que essa técnica se confunde com a técnica τ_{TTC}, aplicada para resolver equações relativas ao subtipo de tarefas t_1.

As transposições são realizadas por meio de operações entre números conhecidos. A aplicação da técnica τ_{RTS} é diferente, pelo fato de que as transposições são realizadas ainda por meio de operações entre termos desconhecidos (incógnita), isto é, por meio de cálculo algébrico. Enfim, a preparação da técnica τ_{RTS} baseia-se na técnica τ_{NTC} que, consequentemente, baseia-se e justifica-se nas propriedades gerais da igualdade ou nos princípios de equivalência das equações.

Outras propriedades auxiliares. Com bases nas propriedades anteriores, empregadas como elementos tecnológicos para explicar e justificar as técnicas próprias de resoluções de equações polinomiais do primeiro grau, há outras propriedades que auxiliam a resolução de equações em que é necessário fazer transformações (desenvolvimentos e reduções) para reduzi-las a uma das formas simplificadas (canônicas). É o que se pode ver nos subtipos de tarefas abaixo registrados.

T_2: resolver uma equação do tipo $A(x) = c$, de modo que $A(x)$ é uma expressão polinomial não reduzida à canônica.

T_4: resolver uma equação do tipo $A_1(x) = A_2(x)$, de modo que $A_1(x)$ ou $A_2(x)$ são expressões polinomiais do primeiro grau não reduzidas à forma canônica.

Assim, as realizações dos subtipos de tarefas t_2 e t_4 estão dependentes também da mobilização da técnica auxiliar que consiste em desenvolver ou reduzir expressões (τ_{DRE}) algébricas.

Desse modo, a mobilização da técnica que consiste em desenvolver ou reduzir expressões (τ_{DRE}), conjuntamente com a aplicação de outras técnicas próprias de resolução de equações, dão origem às seguintes técnicas mescladas:

- τ_{DRE_TTC}: desenvolver ou reduzir expressões/transpor termos ou coeficientes;
- τ_{DRE_NTC}: desenvolver ou reduzir expressões/neutralizar termos ou coeficientes;
- τ_{DRE_RTS}: desenvolver ou reduzir expressões/reagrupar termos semelhantes.

Dependendo das variáveis mobilizadas na produção das equações, existem também equações escritas com números fracionários. Nesse caso, é comum transformá-las em novas equações equivalentes, escritas com números inteiros, adotando-se um desses dois procedimentos: 1) eliminam-se os denominadores, multiplicam-se todos os termos dos dois membros da equação por um múltiplo dos denominadores (preferência o M.M.C); 2) reduzem-se todos os termos da equação ao mesmo denominador comum (de preferência o M.M.C), eliminando-os em seguida. Essas duas técnicas adotadas no processo de resolução de equações dão origem às seguintes técnicas mistas:

- τ_{ED_TTC}: eliminar denominadores/transpor termos ou coeficientes;
- $\tau_{ED\_DRE\_TTC}$: eliminar denominadores/desenvolver ou reduzir expressões/ transpor termos ou coeficientes;

Os elementos tecnológicos que mostram e justificam as transformações necessárias para desenvolver-se e/ou reduzir uma expressão algébrica consistem nas propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição ou à subtração.

2.4.3 Tecnologias

Os estudos realizados até então permitem também identificarmos os seguintes princípios e propriedades matemáticas utilizadas para explicar (justificar) as técnicas elaboradas (indicadas) para resolver equações polinomiais do primeiro grau:

- ✓ Princípios de equivalência entre equações, isto é, entre equações com as mesmas soluções ou raízes (θ_{PPE}).
  - Princípio aditivo: *quando aos dois membros de uma equação adiciona-se (ou deles subtrai-se) a mesma quantidade, obtém-se uma nova equação equivalente à primeira.*
  - Princípio multiplicativo: *quando se multiplicam (ou se dividem) os membros de uma equação pela mesma quantidade (diferente de zero), obtém-se uma equação equivalente à primeira.*
- ✓ Propriedades das operações inversas em R (conjunto dos números reais) ou leis da transposição dos termos (θ_{POI}).
  - Se a,b e c são números reais tais que $a+b=c$, então $a=b-c$.
  - Se a,b e c são números reais tais que $a.b=c$, então $a=c\div b, b\neq 0$ e .
- ✓ Propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}) ou lei de cancelamento.
  - Se $a+b=a+c \Leftrightarrow b=c$.
  - Se $a.b=a.c \Leftrightarrow b=c$ com $a\neq 0$

- ✓ Propriedades distributivas da multiplicação (θ_{PDM}).
  - Se k, a, b, c e d são números reais, então:

    $k(a+b) = ka + kb$ e $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

É importante esclarecer que a tecnologia pode não aparecer explicitamente nos livros didáticos, mas deve haver algum discurso sobre as técnicas propostas, e é isso que se deve extrair dos manuais para, a partir daí, conseguir-se observar as organizações matemáticas propostas por cada autor.

2.5 Síntese da modelização *a priori*

Resumindo, apresentamos no quadro abaixo as praxeologias pontuais, adaptadas de Araújo (2009) e relativas aos tipos de tarefas referentes à resolução d e equação do primeiro grau com uma incógnita.

Subtipo de tarefas	**Técnicas**	**Tecnologias**
t_1	τ_{TTC}	θ_{POI}; θ_{PGI}; θ_{PEE}
t_2	$\tau_{DRE\_}$ τ_{TTC}	θ_{PDM_POI}
	$\tau_{DRE\_}$ τ_{NTC}	θ_{PDM_POI}; θ_{PDM_PEE}
t_3	τ_{RTS}	θ_{POI}
	τ_{NTC}	θ_{PGI}; θ_{PEE}
t_4	τ_{DRE_RTS}	θ_{DRE_POI}
	τ_{DRE_NTC}	θ_{DRE_PGI}; θ_{DRE_PEE}

Quadro 2: Praxelogias pontuais relativas às resoluções de Equações polinomiais do primeiro grau
Fonte: a pesquisa

Dependendo da natureza dos números envolvidos na escrita das equações, é possível incorporar a cada uma das técnicas métodos para eliminar denominadores (τ_{ED}), nos casos em que as equações contenham números fracionários.

Os elementos dispostos neste segundo capítulo estão relacionados aos seguintes subtópicos: álgebra escolar e seus aspectos históricos; equação polinomial do primeiro grau; Modelo Epistemológico de Referência; e a modelização *a priori* da praxeologia matemática. Assim, acreditamos que a observação realizada por meio da delimitação da praxeologias Matemáticas (quatros subtipos de tarefas, as sete técnicas e as seis tecnologias), da praxeologia didática (os seis momentos didáticos) e do Modelo Epistemológico de Referência chegaremos aos elementos necessários para comparação entre os livros didáticos e os professores.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

3. DELINEAMENTO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Ao falarmos em pesquisa em Didática da Matemática, é necessário anunciarmos algumas características que dizem respeito a essa área de investigação. As pesquisas relacionadas a essa área devem procurar seguir ou demonstrar um cuidado e rigor metodológico necessário para a realização de uma pesquisa qualitativa de cunho etnográfico e uma análise documental.

Para D'Ambrosio (1996), as pesquisas qualitativas estão voltadas para o processo, para interação entre pesquisador e pesquisado, e essas atitudes são fundamentais na construção dos dados e, sobretudo, na construção da pesquisa. Ainda conforme esse autor, o raciocínio qualitativo é essencial para se chegar a uma nova organização da sociedade, pois permite que se exerça a crítica e a análise do mundo em que se vive. O pesquisador assegura que esse raciocínio deve, sem qualquer hesitação, ser incorporado aos sistemas de educacionais em todos os níveis de escolaridade.

Nessa perspectiva, André (2011) afirma que a separação entre pesquisa qualitativa e quantitativa não é salutar, uma vez que a aplicação da expressão "pesquisa qualitativa" não deverá ser utilizada de uma forma vasta e superficial. Isto é, esses termos não devem ser empregados para diferenciar técnicas de coleta ou tipos de dados colhidos. Ela propõe que se usem termos mais precisos para determinar o tipo de pesquisa realizada, como a palavra "etnográfica". De acordo com essa autora, "a etnografia é um esquema desenvolvido pelos antropólogos para estudar a cultura e a sociedade" (ANDRÉ, 2011, p.27).

Essas considerações ratificam a nossa escolha pela Teoria Antropológica do Didático, visto que essa teoria situa a atividade de estudo em matemática no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais, também adotadas como referencial teórico e metodológico desta pesquisa.

Esse modelo de pesquisa tem o propósito de alcançar os processos do cotidiano em suas distintas especificidades (SEVERINO, 2007). Assim, o investigador aproxima-se do contexto das pessoas, dos livros escolhidos pela escola, das festividades, entre outras práticas sistematizadas, compreendendo melhor as instituições sociais pesquisadas.

As pesquisas caracterizadas como etnográficas em educação utilizam três técnicas fundamentais, a saber: uso de técnicas de observação participante, entrevista e análise de documentos. A primeira técnica, a observação participante, é aquela em que o pesquisador exerce uma interação com a situação estudada, influenciando-a e sendo por ela influenciado. A segunda, a entrevista, tem o propósito de aprofundar as indagações e esclarecer os problemas observados. Finalmente, a terceira consiste na análise dos documentos usados a fim de contextualizar o fenômeno (ANDRÉ, 2011).

Embasados, pois, na abordagem qualitativa de cunho etnográfico e na Teoria Antropológica do Didático, constituímos os seguintes objetivos específicos do nosso estudo:

- ✓ Caracterizar as organizações curriculares e as praxeologias matemáticas existentes nos programas oficiais em torno do ensino de resolução de equações do primeiro grau.
- ✓ Caracterizar as praxeologias matemáticas e didáticas existentes em livros didáticos em torno do ensino de resolução de equações do primeiro grau.
- ✓ Caracterizar as praxeologias do professor, tomando como referência a organização matemática e didática proposta pelos documentos oficiais e pelo livro didático.
- ✓ Identificar e caracterizar os níveis de codeterminação dos documentos oficiais.
- ✓ Identificar e caracterizar o *topos* dos professores nos documentos oficiais e livros didáticos.
- ✓ Comparar as organizações curriculares e as praxeologias matemáticas e didáticas dos documentos oficiais, livro didático e do professor.

Postos esses objetivos específicos, delineamos nosso percurso metodológico, dividindo-o em três ações: a *primeira ação* consistiu na observação das aulas de três professores de matemática e na entrevista não diretiva; *a segunda* ação voltou-se para a análise dos documentos oficiais e do livro adotado na escola, e o livro utilizado pelo professor em seu contexto de sala de aula; a *terceira ação* centrou-se na comparação entre a prática docente e os documentos oficiais, livro didático, conforme abaixo apresentado.

3.1 Observações das aulas dos professores de matemática

Com a finalidade de investigar como os professores de matemática ensinam e desenvolvem suas aulas no 7º ano do ensino fundamental, ou melhor, as relações institucionais esperadas do professor, as efetivas relações construídas em sala de aula, as organizações matemáticas e didáticas, o modelo frequente em suas aulas, enfocamos o objeto de ensino “as equações polinomiais do primeiro grau”.

Nessa perspectiva, o professor é o responsável pelas opções adotadas na sala de aula, pela escolha dos recursos que farão parte de seu contexto, os procedimentos que nortearão seu cotidiano escolar, o livro do livro didático a ser usado, as situações propostas pelo livro, o gerenciamento de cada aula, entre outras situações. Essas ações têm como alvo transformar o saber a ser ensinado em saber ensinado, fruto das transposições didáticas externas e internas.

Tais escolhas materializadas pelos professores carregam uma subjetividade caracterizada por sua trajetória de vida particular e sua formação profissional, ou seja, o professor produz um novo texto didático, o metatexto, a partir dos saberes de referência (CHEVALLARD, 1985). Além do mais, a produção desse novo texto sofrerá influências dos programas de ensino nacionais e regionais, das orientações e propostas curriculares e dos livros didáticos, entre outros materiais presentes em seu planejamento e na aplicação em sala de aula.

Nosso foco foi o ensino da equação polinomial do primeiro grau em três turmas do sétimo ano do ensino fundamental, quando se inicia o estudo formal da álgebra. Assim, acompanhamos três professores desde o momento em que começaram a ministrar esse conteúdo.

Recorremos, então, à pesquisa de observação participante como uma técnica de coleta de dados, que “é obtida por meio do contato direto do pesquisador com os casos estudados, para selecionar as ações dos protagonistas em seu ambiente natural, segundo sua ótica e perspectivas” (CHIZZOTTI, 2003). Inserimo-nos, portanto, nas aulas dos professores, filmando desde a introdução do conteúdo até a finalização dele, mas não interferimos nas sequências das aulas propostas pelos professores. Nosso objetivo era observar o fenômeno da Transposição Didática bem como as relações institucionais entre o professor e os documentos oficiais e o livro didático.

3.2.1 Contexto e os sujeitos da pesquisa

Nossa pesquisa de observação participante foi realizada em três escolas públicas (duas municipais e uma estadual) no município Caruaru-PE. A preferência por esse município se deu em virtude de o pesquisador ser natural e residir nessa localidade, ter estudado e trabalhado na rede pública de ensino municipal e estadual.

O município de Caruaru é localizado na mesorregião do Agreste pernambucano, tendo aproximadamente 400 mil habitantes e concentrando o maior polo médico hospitalar, acadêmico, cultural e turístico da região. A rede municipal dessa cidade atualmente conta com uma rede de 134 escolas que atende a 38 882 alunos. A rede estadual é composta por 63 escolas que acolhem 21 958 alunos.

Para fazermos a seleção dos professores, partimos da pesquisa que realizamos em nosso mestrado em que enfocamos duas coleções de livros didáticos. No entanto, nessa busca, constatamos que apenas uma coleção tinha sido adotada em três escolas da cidade de Caruaru-PE.

Fomos, então, visitar essas três escolas e verificar a possibilidade de acompanhar e filmar as aulas relativas à equação do primeiro grau com uma incógnita. Na primeira conversa com os professores, verificamos que apenas um havia escolhido a coleção "Matemática". Os outros dois professores, apesar de disporem dessa coleção na escola, haviam escolhido outras obras, as quais também passaram a compor nossa pesquisa. O quadro a seguir apresenta os três sujeitos dessa pesquisa.

Sujeito	Formação	Tempo de experiência na docência
P_1	Licenciatura em Matemática	16 anos
P_2	Bacharelado em Administração	2 anos
P_3	Licenciatura em Matemática	8 anos

Quadro 3: Perfil dos sujeitos (os professores)
Fonte: a pesquisa

Conforme pudemos ver no Quadro 3, para nomearmos os professores sujeitos de nossa pesquisa usamos a letra "P" acrescida de um número.

A professora P1, licenciada em Matemática, exerce a docência há 16 anos. Na época da pesquisa tinha um contrato temporário na rede municipal de ensino. Não escolhera a coleção *Matemática*, apesar de ter sido essa a disponibilizada pela escola. Preferira a coleção *Tempo de Matemática*, que não faz parte do PNLD.

A escola em que P1 atua, da rede municipal de Caruaru–PE, tem 1 280 alunos e funciona em três turnos. Filmamos 12 aulas do turno vespertino – todas relativas ao conteúdo enfocado por nossa pesquisa –, distribuídas ao longo da semana. Cada aula durou 50 minutos. Não havia aulas seguidas.

A professora P2 é bacharela em Administração e, na época da pesquisa, tinha dois anos de docência e um contrato temporário na rede estadual de ensino. Escolhera a coleção *Matemática*, a que havia chegado à escola. P2 atua numa escola que tem cerca de 600 alunos e funciona nos turnos matutino e vespertino. A estrutura curricular estadual de matemática prevê seis aulas semanais de 50 minutos cada uma. As aulas eram seguidas e distribuídas em três dias da semana – segunda, quarta e quinta-feira. As filmagens ocorreram no turno matutino e, ao todo, filmamos 12 aulas.

O professor P3 é concursado, atua na rede municipal de ensino e há oito anos exerce a docência. Não escolhera a coleção *Matemática*, apesar de esta ter sido a que chegara à escola. Optara pela coleção *Praticando Matemática.* A escola em que atua pertence à rede municipal de Caruaru-PE, tem cerca de 1 200 alunos e funciona em três turnos. As filmagens aconteceram no turno matutino cujas aulas eram distribuídas em dois dias da semana: duas na terça e três na quarta-feira (as duas primeiras seguidas e uma após o intervalo). Filmamos 13 aulas.

Passemos, então, a tratar de nosso instrumento de coleta dos dados.

3.2.2 Instrumento de coleta de dados

Para a construção dos dados, recorremos à observação direta das aulas, as quais foram gravadas em vídeo e áudio, e às entrevistas semiestruturadas. Além disso, fizemos anotações de atividades desenvolvidas e disponibilizadas pelos sujeitos pesquisados.

As razões do uso do vídeo em pesquisas em educação matemática são diversas. Gravações em vídeo possibilitam, entre outras coisas, os registros comportamentais dos sujeitos e interações complexas, de forma que permitem ao pesquisador reexaminar continuamente os dados, ou seja, viabilizam a revisão das atividades realizadas em momentos em que se fazem necessárias observações dos objetos pesquisados. André (2011) denomina esse processo de “microetnografia”, pois se trata de um enfoque específico da etnografia.

A filmagem nos permitiu fazer uma análise das tarefas, das técnicas e das tecnologias mobilizadas pelo professor. Pudemos identificar a organização didática[13] e das tarefas, técnicas e tecnologias utilizadas pelo professor na relação com o saber algébrico por nós enfocado: a equação do primeiro grau.

Assim, filmamos 37 aulas, cada uma com 50 minutos. Contudo, ressaltamos que, para nossa pesquisa, optamos por fazer recortes das aulas. Isso porque desligávamos a câmara enquanto o professor fazia a chamada dos alunos para registrar a frequência, não estava resolvendo questões, ou simplesmente conversava com os alunos próximo ao término das aulas (geralmente cerca de 5 a 10 minutos). Os recortes das aulas foram transcritos e analisados, o que contribuiu para o refinamento das análises dos vídeos.

3.2.3 Categorias e critérios de análise das aulas dos professores

Para a análise das observações das aulas dos três professores, adotamos os mesmos parâmetros e critérios usados para analisar os documentos oficiais, livros didáticos – as relações institucionais dos professores com os documentos oficiais e o livro didático –, as organizações matemáticas dos professores, dos documentos oficiais e livro didático, as organizações didáticas dos professores, dos documentos oficiais e livro didático referentes ao conceito de equações polinomiais do primeiro grau.

3.2.3.1 A organização Matemática dos professores

As observações das aulas dos três professores nos permitiram identificar, dentre outros elementos, como os professores estruturam suas organizações matemáticas (tarefas, técnicas, tecnologias/teorias) na sala de aula. Para tanto, utilizamos as categorias das praxeologias matemáticas elencadas a partir das

---

[13] A Organização Didática diz respeito a como pôr em prática o conteúdo matemático – no caso deste estudo, a equação do primeiro grau. Assim, a Organização Didática se estabelece a partir de certo caminho, certos tipos de situações, os quais são chamados de momentos de estudo ou momentos didáticos, cuja observação facilitará o entendimento da prática docente (BESSA DE MENEZES, 2010).

definições de Chevallard (1991): tarefas, técnicas, tecnologias e teoria, que estão apresentadas no quadro a seguir.

Componente Praxeológico	**Parâmetros aplicados**	**Exemplos de reflexões a serem consideradas nas aulas referentes à equação do primeiro grau**
Tipo de tarefa (T)	Razão de ser Representatividade Identificação Importância Pertinência	As tarefas realizadas pelo professor são *importantes* e têm uma *razão de ser*? São *representativas*? As tarefas são bem *identificadas* e *pertinentes*?
Técnica (τ)	Confiáveis e aceitáveis Abrangentes Fáceis de utilização Confiáveis Possíveis de evoluir Bem elaboradas	Os meios de o professor propor as tarefas são bem *elaborados*? Os meios de definir as tarefas são fáceis de serem utilizados? As tarefas são confiáveis e aceitáveis? Os meios de propor as tarefas favorecem a evolução?
Tecnologia e Teoria [θ, Θ]	Proposição e justificação do objeto Demonstração e justificação do enunciado Tipo de justificação: formas padrões da matemática Exploração do bloco tecnológico-teórico	O conceito de equação polinomial do primeiro grau foi apresentado, ou não, na aula do professor? Existindo um *enunciado*, o problema de sua justificação é válido para esse enunciado, ou para demais problemas? Os meios de justificação são próximos aos *padrões matemáticos*, ou são adequados às condições de aplicação que as justificam? São aplicadas *maneiras de justificações* compreensíveis, dedutivas, entre outras? Os princípios aplicados são validados? Os resultados do bloco tecnológico-teórico exposto são executados e plenamente explorados?

Quadro 4: Categorias e critérios de análises das praxeologias matemáticas dos professores
Fonte: a pesquisa

Após o estabelecimento desses critérios, tivemos a preocupação de perceber quais eram as ações privilegiadas pelo professor em suas aulas sobre as equações do primeiro grau e as suas escolhas didáticas para a introdução, desenvolvimento e conclusão desse conteúdo.

3.2.3.2 A organização Didática dos professores

Os seis momentos de estudo, apontados por Chevallard (1999) e apresentados na fundamentação teórica desta pesquisa, compõem as categorias de análise, uma vez que guiaram os critérios para a avaliação dos livros didáticos. O quadro a seguir traz um resumo desses momentos didáticos.

Categorias (momentos didáticos)	Critérios de Análise
Primeiro Momento	De maneira o professor faz a introdução da equação polinomial do primeiro grau com incógnita para os alunos?
Segundo Momento	Como é exploração do tipo de tarefas T em sala de aula? Há elaboração das técnicas τ relativa a esse tipo de tarefas em sala?
Terceiro Momento	Como se dá a constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica?
Quarto Momento	Como é o trabalho do professor em relação às técnicas?
Quinto Momento	Como é concretizada a institucionalização pelo professor? No início, meio e/ou ao final do livro?
Sexto Momento	De que maneira se realiza a avaliação? No início, meio e/ou ao final da aula, ou apenas ao final do conteúdo?

Quadro 5: Categorias e critérios de análise das praxeologias didáticas do professor
Fonte: a pesquisa

No percurso das observações das aulas, ficou claro que os professores faziam uso dos livros didáticos em suas aulas, mas do que haviam adotado para seu cotidiano escolar, e não da coleção didática disponibilizada pela escola. Apenas a professora que escolhera a coleção usava-a em suas aulas.

3.3 Entrevistas realizadas com os professores

Com o objetivo de compreender melhor os sujeitos que fizeram parte desta pesquisa bem como colher mais informações sobre o plano de trabalho deles, fizemos a opção por realizar uma entrevista com cada um.

Entendemos que a técnica de entrevistar reduz o distanciamento entre o pesquisador e o pesquisado, viabilizando uma relação maior entre ambos. Assim, o pesquisador tem como compreender o que sujeito pensa, inventa, produz, concebe e defende (SEVERINO, 2007).

Esse tipo de técnica pode se dar por meio da entrevista diretiva e da não diretiva. A diretiva é aquela em que o entrevistador segue um roteiro fechado, não lhe sendo permitido mudar a ordem planejada. Já a entrevista não diretiva deixa o pesquisador livre para fazer ajustes no momento da entrevista, ou seja, pode iniciá-la pela última ou qualquer pergunta, pois não é obrigado a seguir a ordem estabelecida na concepção das perguntas.

Para nossa pesquisa, optamos pela entrevista semiestruturada, na qual se buscam informações do pesquisado a partir do livre pronunciamento deste. “O entrevistador mantém-se em escuta atenta, registrando todas as informações e só intervindo discretamente para, eventualmente, estimular o depoente” (SEVERINO, 2007, p. 124).

Assim, fizemos uso de uma câmera de gravação de vídeo e áudio, e traçamos um roteiro composto de 10 perguntas que nortearam as entrevistas com base nas aulas filmadas. Após as filmagens e as transcrições das aulas, estabelecemos um roteiro baseado em 07 perguntas comuns para os três professores (plano de aula e o livro didático) e 03 perguntas específicas sobre observações das aulas com base nas propostas didáticas dos professores (média de doze aulas).

Esses dados coletados a partir da entrevista foram inspirados em alguns elementos da análise de conteúdo de Bardin (2009). Esse processo de pesquisa acontece em um esboço maior, no cerne da teoria de comunicação e parte da mensagem. Para essa autora, a análise do conteúdo é

> Um conjunto de técnicas de análises das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos e qualitativos) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 2009, p. 38).

Na perspectiva da análise do conteúdo, os dados coletados são expostos a um método de unitarização, isto é, esse método baseia-se em reexaminar com cautela o material com o intuito de definir a unidade de análise, que “é o elemento unitário de conteúdo a ser exposto adiante, na classificação. A classificação ou categorização requer uma definição do elemento ou indivíduo unitário a ser classificado” (MORAES, 1999, p.11).

Para esta pesquisa, tomamos como unidades de análise palavras e frases, ou seja, separamos cada resposta dos professores em unidades menores. Como apenas isso não é suficiente, estabelecemos a unidade de contexto, que é mais vasta que análise, serve de modelo a ela e imprime um significado. Para melhor entender, tomemos o seguinte exemplo: O que você leva em consideração na hora de escolher o livro didático para o uso em sala de aula? Essa é uma pergunta. Já a unidade de contexto é o “planejamento geral” e as expressões “realidade da escola”, “realidade dos alunos", "livros didáticos", "pesquisas em sites", "PCN", "recursos disponíveis". Esses são os exemplos da unidade de análise. O quadro a seguir detalha as demais perguntas, unidades de contexto e unidades de análise:

Perguntas comuns aos três professores	**Unidade de contexto**	**Unidade de análise**
1) Em que você se baseia para a preparação de suas aulas?	Planejamento geral	Realidade da escola Realidade dos alunos Livros didáticos Pesquisas em sites PCN Recursos disponíveis
2) Que recursos você utiliza na preparação de suas aulas?		
3) Você toma como referência algum(uns) dos documentos oficiais (PCN, PCPE, BCC, Guia do Livro, entre outros) na elaboração de seu planejamento? Justifique sua resposta.		
4) O que você leva em consideração na hora de escolher o livro didático para o uso em sala de aula?	Fonte para o planejamento	Realidade da escola Realidade dos alunos Livros didáticos Pesquisas em sites PCN Recursos disponíveis Realidade do aluno Linguagem do livro Contextualização
5) Por que você escolheu esse livro didático – (Imenes) (P1), Name (P2) e Andrini (P3)?	Avaliação do livro didático	
6) O livro que chegou à sua escola foi *Matemática* do Imenes. Qual motivo para não utilizar esse livro?		
7) Como você faz para ensinar um assunto novo (especificamente, equações do primeiro grau)?	Transposição do Saber	Conhecimento prévio Realidade da escola Situação problema Planejamento

Quadro 6: Entrevista não diretiva com os professores após as observações das aulas
Fonte: a pesquisa

Após o levantamento e as observações referentes às aulas – em que eles se baseiam para a preparação das aulas, como se dá a escolha do livro didático e o uso do livro na sala de aula –, fizemos perguntas específicas a cada professor com base nas observações feitas depois das transcrições das aulas filmadas. No Quadro 7, abaixo registrado, estão as perguntas feitas à professora P1.

Perguntas específicas para P_1	Unidade de contexto	Unidade de análise
1) Para introduzir o conteúdo de equação do primeiro grau, você adotou a sequência do livro didático, utilizando a metáfora da balança (x+3=50). Você introduziu dessa forma porque estava no livro didático ou porque acredita que essa é a forma mais adequada de fazer essa introdução? Haveria outra(s) maneira(s) de introduzir esse conteúdo?	Transposição dos Saberes Internos	Ser prático Forma mais simples Resolver problemas
2) Na página 95 do livro *Tempo de Matemática*, em relação à resolução das equações, estão demonstrados os dois métodos (por exemplo, x-3=7 o livro faz adicionando ou subtraindo em ambos os membros da equação com as operações inversas e o modo prático, em que apenas basta inverter o sinal e mudar de membro). Que método você trabalha mais nas aulas? Por quê?		Método prático Método diferente Aprendizagem mais rápida
3) As tarefas propostas pelo livro didático são classificadas em quatros tipos: T_1 (x+4=8), T_2 (x+(x-2)=10;T_3(2x+3=x+6) eT_4 ((x+3)/2=2/3). Em suas aulas, você fez a opção em trabalhar com tarefas T_1. Por quê?		Tempo resumido Trabalhar o básico Condições de trabalho

Quadro 7: Observações das aulas de P1
Fonte: a pesquisa

O quadro a seguir é referente às perguntas feitas ao professor P2 a partir das observações de suas aulas.

Perguntas específicas para P_2	Unidade de contexto	Unidade de análise
1) Na sua aula, antes de iniciar o capítulo sobre equações, a senhora retoma a página 202 do livro, em que o conteúdo exposto refere-se à divisão dos números racionais, uso das regras de sinais? Por quê?	Transposição dos Saberes Internos	Forma adequada Conhecimento do aluno Revisão
2) Para introduzir o conteúdo, a senhora seguiu o que estava no livro didático cujo capítulo é intitulado “Usando letras na matemática”. A senhora introduziu dessa forma porque estava no livro didático ou porque acredita que é a forma mais adequada de fazer essa introdução?		Forma adequada Cotidiano Exemplos do cotidiano
3) Em suas aulas, a senhora trabalhou os quatro tipos de tarefas: T_1 (x+4=8); T_2 (x+(x-2) = 10; T_3 (2x+3=x+6) e T_4 (2(x+3) = 2(x-1). Mas, em suas aulas, não trabalhou equações com números nos denominadores. Por quê?		Facilidade Forma mais simples Aprofundar Dificuldades

Quadro 08: P2 observações das aulas
Fonte: a pesquisa

Finalizamos as observações das aulas com o professor P3, conforme quadro registrado a seguir.

Perguntas específicas para P_3	Unidade de contexto	Unidade de análise
1) Na introdução sobre equação polinomial, você adotou a sequência proposta no livro didático, usando letras e padrões e definindo o que é uma equação. Você seguiu essa sequência porque estava no livro didático ou porque acredita que é a forma mais adequada de fazer essa introdução? Qual seria outra maneira para introduzir esse conteúdo?	Transposição dos Saberes Internos	Boa proposta Dificuldade Falta de tempo
2) Em suas aulas, o senhor não trabalhou apenas com equações formadas (x+2=10), mas com os problemas para os alunos transformarem a linguagem comum na linguagem algébrica. Por quê?		Resolução de problemas Cotidiano
3) O livro utiliza a metáfora da balança para princípio de equivalência e você não usou esse recurso em sala? Por quê?		Realidade do aluno Fazer comparações Criar situações Livro didático

Quadro 9: P3 observações das aulas
Fonte: a pesquisa

Nesse procedimento de categorização dos dados, a análise de conteúdo sugere duas possibilidades de categorização: as categorias concebidas *a priori* e as categorias que não são concebidas *a priori*. Diante disso, a nossa perspectiva é categorizar posteriormente, esperando que as categorias surjam do discurso, do conteúdo das respostas.

Em vista do exposto, acreditamos que, com base nas observações das aulas dos professores, conseguiremos analisar os questionamentos à luz do conceito de equação do primeiro com uma incógnita e da Teoria Antropológica do Didático, priorizados em nossa fundamentação teórica.

3.4 Descrições e análise documental dos livros didáticos e documentos oficiais de matemática

Diversos estudos nas últimas décadas buscam justificar a estrutura e funcionalidade do livro didático, tornando-o objeto de estudo e de debate nas comunidades científicas, à procura de sua legitimação na educação escolar. São vários os autores interessados na análise de livros didáticos e na forma como os professores utilizam esse recurso. Dentre eles, contamos com Pitombeira e Lima (2002), Silva Junior (2005), Chevallard (1999), Lima (2006), Pais (2008), dentre outros.

Para esses autores, o livro didático exerce uma influência importante no planejamento do professor, na seleção dos conteúdos a serem estudados e na forma de abordá-los na sala de aula. Entendemos que os aspectos enfatizados pelos autores dessas obras no tratamento de certo objeto matemático podem influenciar as concepções dos professores e, por consequência, as concepções dos alunos sobre esse objeto (LIMA, 2006).

A utilização do livro didático por professores e o uso dele pelos estudantes dependem de muitos fatores, como a consideração das funções pedagógicas que ele pode exercer. Lopes (2007) ressalta que, mesmo reconhecendo a dependência do professor em relação ao livro didático, admite-se que as boas obras são parte fundamental da qualidade da educação.

Por outro lado, a autora reconhece que, como muitos professores apresentam carências em sua formação inicial, o livro didático de boa qualidade contribui também para qualificar as atividades docentes desenvolvidas em sala. Nesse sentido, o professor, ao escolher o livro didático, deve considerar, entre outros critérios, a proposta pedagógica, os modos de contextualização e apresentação dos conteúdos, nível de complexidade e relações estabelecidas com o cotidiano dos estudantes.

Destacamos também que o livro didático, além de favorecer a aprendizagem, é um meio para promover o exercício da cidadania (OLIVEIRA, 2007). Conforme Allevato e Terto (2009), ele auxilia e contribui para o preparo das aulas e pode ser importante no cotidiano do aluno e do professor, ajudando ambos na organização do ensino, da aprendizagem e do trabalho tanto na sala de aula como fora dela.

Por outro lado, esse autor critica a forma de utilização e o próprio livro didático, por este apresentar conteúdos em que os objetos matemáticos são tratados de forma desconectada da realidade. Ou seja, são produtores de uma realidade virtual, na qual todo o conteúdo está didaticamente bem organizado, com bastante exercício a ser resolvido e com uma única resposta verdadeira (SKOVSMOSE, 2007).

Para Pais (2006), a escolha de conteúdos, objetivos, métodos e recursos implicam a convergência de alcances que influenciam as disciplinas escolares. Tais elementos encontram-se gravados em teses, *softwares*, parâmetros curriculares, programas e outras publicações, como livros didáticos. São anotações publicadas para defender a validade do saber a ser ensinado. Numa definição mais ampla, trata-se da textualização do saber, expressão empregada por Chevallard (1995) para interpretar o fenômeno de Transposição Didática.

Segundo Carvalho e Lima (2010), o livro didático é portador de escolhas sobre o saber a ser estudado, dos métodos adotados para que os alunos consigam aprendê-lo mais eficazmente e da organização curricular ao longo dos anos de escolaridade. Ainda segundo esses pesquisadores, nesse diálogo, existe uma *teia* de relações que envolve o autor/livro didático, o professor, o aluno e a Matemática.

Sendo assim, é possível inferir que os professores persistem em utilizar os conteúdos e métodos propostos pelo livro didático adotado porque este lhes assegura tudo pronto e detalhado. Dessa forma, o trabalho do professor é apenas pedir que o aluno abra o livro na página indicada e faça os exercícios (ROMANATTO, 2005). Isso faz a presença dele na sala de aula ser marcante.

Como em nosso país, no que se refere à educação, o livro didático ainda se constitui como um dos principais recursos para os professores na sala de aula, pesquisadores têm-se dedicado também ao estudo do saber matemático, especialmente, aqueles que são escolhidos como saberes de referência, identificados como conteúdos escolares e colocados à disposição nos livros didáticos (PAIS, 2008).

Em parte, esse interesse deve-se à expansão das políticas públicas para análise, compra e distribuição de livros na rede pública, por meio do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

Em 1985, o Governo Federal, a partir do decreto 91.542, de 19 de agosto de 1985, criou o PNLD com o objetivo de distribuir livros escolares disponibilizados para todos os alunos matriculados nas escolas públicas do ensino fundamental do país. Após esse decreto, tiveram início as avaliações dos livros didáticos a serem adquiridos e distribuídos nas escolas públicas para o uso das coleções por um período de três anos. As coleções são analisadas a partir de critérios estabelecidos pelo Ministério da Educação – MEC que visa, entre outras normas, à adequação de aspectos teórico-metodológicos, estrutura editorial e manual do professor.

Esse programa, por meio do Decreto nº 7.084, de 27 de janeiro de 2010, torna-se lei e as avaliações passam a abarcar os materiais distribuídos pelo Governo Federal, incluindo os materiais didáticos, tais como os livros paradidáticos, dicionários, PNLA, EJA, entre outros.

Assim, propusemo-nos estudar as equações do primeiro grau em programas de ensino fundamental brasileiro, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Isso porque, embora não tendo *status* de programa, os PCN ainda são a principal referência curricular brasileira.

Os PCN (BRASIL, 1998) são diretrizes propostas pelo Governo Federal que guiam a educação e são separados por disciplina. Além da rede pública, a rede particular de ensino também adota esses parâmetros, porém sem caráter obrigatório. Portanto, podemos dizer que eles servem de referência e orientações para os autores e editoras na construção de suas coleções.

Os PCN são, então, documentos oficiais de referência que representam um esforço na tentativa de promover um ensino de qualidade voltado para a educação básica. Na Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, o documento propõe quatro blocos: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Tratamento da Informação. Sugere ainda que os conteúdos matemáticos sejam trabalhados e revistos em outras unidades e não trabalhado de forma fragmentada. No bloco números e operações, está o estudo da álgebra e, especificamente, o estudo das equações polinomiais do primeiro grau, que é o nosso objeto de estudo.

Apesar de não constituir objeto desta pesquisa, julgamos importante registrar que, quase vinte anos depois do lançamento dos PCN, temos uma nova discussão na educação brasileira: a criação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Esse documento está sendo construído e debatido por vários segmentos da área educacional brasileira e será um marco para educação nacional, pois, a partir dele, teremos uma unificação do currículo nacional.

Tomando como referência os PCN, dentre outros documentos, a Secretaria de Educação de Pernambuco lançou, em 2012, os Parâmetros Curriculares da Educação Básica de Pernambuco (PC/PE), também de caráter não obrigatório. Esses parâmetros fazem a distribuição dos conteúdos em cinco eixos: Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, Números e Operações, Álgebra e Funções.

Enfocamos nesta pesquisa esses Programas – os PCN e os PC/PE – por neles estarem definidos os objetos a ensinar, as recomendações e exigências bem como a finalidade do ensino. Além disso, dedicamo-nos neste estudo à análise dos livros didáticos pelo fato de eles apresentarem os objetos a ensinar, de acordo com as orientações dos programas e parâmetros da educação brasileira.

Em síntese, buscamos caracterizar as organizações curriculares e as praxeologias matemáticas e didáticas existentes nesses dois documentos oficiais, identificando neles as possíveis praxeologias (tarefas, técnicas, tecnologias e a teoria); os níveis de codeterminação (a sociedade por meio do Ministério da Educação, o tema a equação polinomial do primeiro grau e o assunto, resolver uma equação) e os *topos* do professor (responsável em construir os exercícios e as correções das subtarefas na sala de aula).

Procuramos, também, caracterizar as praxeologias matemáticas e didáticas existentes em três livros didáticos em torno do ensino de resolução de equações polinomiais do primeiro grau. Foram analisados os seguintes livros: MATEMÁTICA PARA TODOS (IMENES, & LELLIS); NOVO PRATICANDO MATEMÁTICA (ÁLVARO ANDRINI) e TEMPO DE MATEMÁTICA (MIGUEL ASSIS). A escolha desses livros se deu em virtude de no estudo original, nosso mestrado, termos contemplado duas coleções aprovadas nas avaliações do PNLD (1999, 2002, 2005, 2008, 2011 e 2014). No entanto, no município em que fizemos esta pesquisa doutoral, a coleção

Matemática Para Todos, apesar de ter sido adotada nas três escolas em que fizemos a investigação, havia sido escolhida pelo professor de apenas uma delas, pois os outros dois optaram por outras coleções, conforme registramos acima.

Ao examinarmos esses livros didáticos, classificamos os subtipos de tarefas propostos relativos aos tipos de tarefa T: 1) resolver uma equação do primeiro grau e quais as técnicas adotadas para a resolução dos subtipos de tarefas relativos à solução de equações; 2) se essas técnicas apresentadas são efetivamente elaboradas e justificadas por elementos teóricos e metodológicos, e de que forma são introduzidas as resoluções das equações do primeiro grau. É sobre isso que passaremos a discorrer.

3.4.1 Os livros didáticos analisados

Os livros escolhidos foram selecionados de acordo com o estudo original (BARBOSA, 2011) em que foram analisadas duas coleções: a coleção *Matemática*, de Imenes e Lellis, e a coleção *Ideias e Desafios*, de Iracema & Dulce. No entanto, na cidade em que foi realizada a pesquisa, ficou apenas um livro que foi escolhido em uma escola, *Matemática*. Nas duas outras, constatamos que os professores também utilizavam em suas aulas outros livros, conforme podemos ver no quadro abaixo registrado.

Título do livro	Autor	Editora	PNLD/2014
Matemática	Imenes e Lellis	Editora Moderna	Aprovado
Tempo de Matemática	Miguel Assis Name	Editora do Brasil	Não fez parte
Praticando Matemática	Andrini e Vasconcelos	Editora do Brasil	Aprovado

Quadro 10: Livros analisados
Fonte: a pesquisa

O conteúdo “equação polinomial do primeiro grau” tem um capítulo específico nas três coleções. O primeiro livro por nós analisado foi o do sétimo ano da coleção *Matemática*. O capítulo desse livro, o 11, que se refere às equações intitula-se “Equações” e tem 15 páginas. Está subdividido nos seguintes tópicos: “Letras para descobrir números desconhecidos”, “Usando letras para resolver problemas” e “Resolvendo equações e regra de três”.

A segunda coleção analisada foi “Tempo de Matemática”. O tópico referente a equações está no capítulo 15, denominado de “Equações do primeiro grau”. Esse capítulo tem um total de 12 páginas, assim distribuídas: conjunto universo e conjunto solução de uma equação; equação do primeiro grau com uma incógnita. Esse livro ainda traz um capítulo a mais com título “Problemas do 1º grau com uma incógnita”.

A terceira coleção analisada foi “Praticando Matemática.” O capítulo relativo a equações tem um total de 12 páginas e se encontra na unidade 9, denominada de “Equações”. Está subdividido nos seguintes tópicos: “Letras e padrões”, “Equações”, “Algumas operações com letras”, “Balanças em equilíbrio e equações” e “Mais problemas e equações”.

Além de analisarmos todos esses capítulos, debruçamo-nos também sobre o manual do professor das três coleções.

3.4.2 Categorias e critérios de análise do livro didático

Para análise dos livros, seguimos dois eixos: a Organização Matemática e a Organização Didática sobre o conceito de equações polinomiais do primeiro grau.

3.4.2.1 Organização Matemática do livro

No subtópico referente às organizações matemáticas, ou seja, os tipos de tarefas, de técnicas, tecnologias e a teoria, dividimos seus elementos em dois blocos: o prático, composto por tarefas e técnicas (saber fazer), e o bloco tecnológico-teórico (Saber), proposto por Chevallard (1991). É o que podemos verificar no quadro abaixo exposto.

Componente Praxeológico	Parâmetros aplicados	Exemplos de reflexões para a análise do capítulo do livro referente à equação do primeiro grau
Tipo de tarefa (T)	Razão de ser Representatividade Identificação Importância Pertinência	As tarefas são *importantes* e têm uma *razão de ser*? As tarefas são bem *representativas*? As tarefas são bem *identificadas*? As tarefas são *pertinentes*? Quais os tipos de tarefas fomentadas nos livros?
Técnica (τ)	Confiáveis e aceitáveis Abrangentes Fáceis de utilização Confiáveis Possíveis de evoluir Bem elaboradas	Os meios de propor as tarefas são bem *elaborados*? Os meios de definir as tarefas são fáceis de utilizar? As tarefas são confiáveis e aceitáveis? Os meios de propor as tarefas promovem a evolução?
Tecnologia e Teoria [θ, Θ]	Proposição e justificação do objeto Demonstração e justificação do enunciado Tipo de justificação: formas padrões da matemática Exploração do bloco tecnológico-teórico	O conceito de equação polinomial do primeiro grau é apresentado? Existindo um *enunciado*, o problema de sua justificação é válido para esse enunciado, ou para demais problemas? Os meios de justificação são próximos aos *padrões matemáticos*, ou são adequados às condições de aplicações que as justificam? São aplicadas *maneiras de justificações* compreensíveis, dedutivas, entre outras? Os princípios aplicados são validados? Os resultados do bloco tecnológico-teórico exposto são executados e plenamente explorados?

Quadro 11: Categorias e critérios de análises das praxeologias matemáticas do livro didático
Fonte: a pesquisa

Dessa forma, tivemos a preocupação em perceber quais eram as ações privilegiadas pelo livro didático em relação às equações do primeiro grau e as opções didáticas para a introdução do conteúdo até o momento de finalização dele.

3.4.2.2 Organização Didática do livro

Os seis momentos de estudo, evidenciados por Chevallard (1999) e apresentados na fundamentação teórica, compõem as categorias de análise, uma vez que guiaram os critérios para a avaliação dos livros didáticos. O quadro abaixo traz um resumo desses momentos.

Categorias (momentos didáticos)	Critérios de Análise
Primeiro Momento	De que maneira é feita a introdução da equação polinomial do primeiro grau com incógnita no livro?
Segundo Momento	Como é exploração do tipo de tarefas T no livro? Há elaboração de uma técnica τ relativa a esse tipo de tarefas?
Terceiro Momento	Qual a constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica?
Quarto Momento	Como é o trabalho das técnicas?
Quinto Momento	Como se efetiva a institucionalização: no início, no meio ou ao final do livro?
Sexto Momento	De que maneira se realiza a avaliação: no início, no meio ou ao final do livro?

Quadro 12: Categorias e critérios de análise das praxeologias didáticas do livro didático
Fonte: a pesquisa

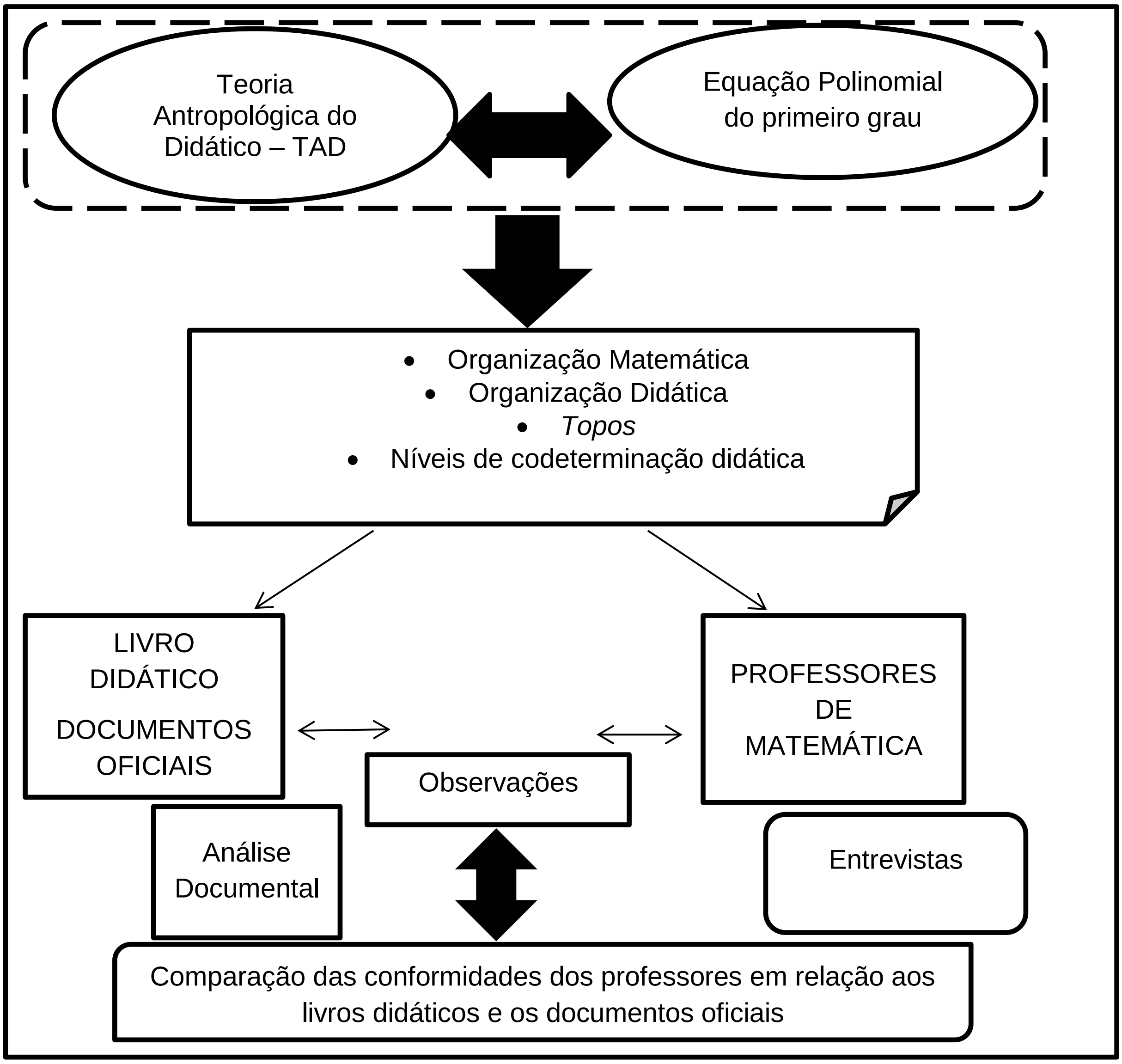
Compreendemos que esses parâmetros e critérios delimitados nesta pesquisa nos permitiram fazer as análises das organizações matemáticas e didáticas nos livros didáticos em relação ao conceito de equações polinomiais do primeiro grau.

Por fim, fizemos as comparações entre os professores ministrando suas aulas sobre equações polinomiais do primeiro, os documentos oficiais (PCN e PC/PE) e o livro didático.

3.5 A comparação entre as aulas dos professores de matemática, documentos oficiais e o livro didático

Logo após o levantamento dos dados coletados e obtidos por meio da análise documental dos livros didáticos, dos documentos oficiais, das entrevistas e das observações das aulas dos professores por meio de diferentes instrumentos utilizados, passamos a comparar as relações entre o que os professores haviam feito em suas aulas, o que preconizam os documentos balizadores e os livros didáticos de referência dos professores pesquisados. Questionamos até que ponto os documentos oficias norteiam a preparação das aulas dos professores, quais as influências dos livros didáticos na condução da aula dos professores, se os professores seguem o proposto pelos autores dos livros. Essas foram algumas questões que respondemos a partir desta pesquisa.

As categorias e critérios de análise que auxiliaram na comparação entre os professores, documentos oficiais e os livros didáticos foram o mesmo padrão, isto é, a organização matemática, a organização didática, os *topos*, níveis de codeterminação, o MER sobre o conceito de equação polinomial do primeiro grau. Assim, fizemos um esquema ilustrado que representa os parâmetros teórico-metodológicas da pesquisa, conforme podemos visualizar no Quadro 13 abaixo apresentado.



Quadro 13: Parâmetros teórico-metodológicos da tese
Fonte: a pesquisa

Dessa forma, ancorados na teoria e na metodologia descritas aqui, analisamos as relações institucionais esperadas de três professores da educação básica com seus respectivos livros didáticos e documentos oficiais referentes ao conceito de equação polinomial do primeiro grau. O próximo capítulo apresenta as análises realizadas nesta pesquisa.

CAPÍTULO 4

ANÁLISES E RESULTADOS

4. ANÁLISE DOS PROFESSORES, DOS PROGRAMAS INSTITUCIONAIS DE ENSINO E LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo, temos dois objetivos: 1) analisar as praxeologias a serem ensinadas (previstas nos livros didáticos) bem como as praxeológicas efetivamente ensinadas, por três professores da educação básica, referentes ao conceito de equação polinomial do primeiro grau; 2) analisar o que preconizam os documentos institucionais em nível nacional – os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – e em nível regional – os Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco (PC/PE) – e seus respectivos níveis de codeterminação didática. Para apresentação desse quarto capítulo, optamos em primeiro apresentar as análises e observações decorrentes das 37 aulas (recortes) dos três professores, seguido dos documentos oficiais e finalizando com as análises dos livros didáticos.

4.1 O estudo das equações polinomiais do primeiro grau por três professores de matemática

Apresentamos, neste subtópico, as observações referentes às aulas de três professores de matemática; as análises praxeológicas matemáticas e didáticas; os topos esperados para professores em documentos oficiais e em três livros didáticos e seu Modelo Epistemológico de Referência dominante sobre o tema equação polinomiais do primeiro grau do 7º ano do ensino fundamental.

A coleta dos dados referentes aos professores ocorreu em dois períodos. Inicialmente, no segundo semestre de 2015, filmamos 37 aulas ministradas em duas escolas da rede municipal e em uma da rede estadual de educação – as três situadas no município de Caruaru-PE. Registramos em filmes essas aulas desde o momento em que os professores começaram a ministrar o conteúdo de equações polinomiais do primeiro grau até quando o concluíram.

Posteriormente, no primeiro semestre de 2016, voltamos às escolas e entrevistamos esses professores. A entrevista foi composta por dez perguntas: sete delas, comuns a todos os sujeitos da pesquisa, referiram-se à escolha do livro, à introdução do conteúdo, ao guia do livro didático e aos documentos oficiais; e três, específicas, relacionaram-se às observações feitas após as transcrições das aulas de cada professor.

4.2 A organização matemática dos professores

Em relação à análise e identificação das praxeologias matemáticas, adotamos critérios comuns para os documentos oficiais e os livros didáticos. Todas as aulas foram filmadas sem intervenção do investigador, que apenas acompanhou a sequência das ações adotadas pelos professores para ministrarem o conteúdo referente às equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita.

4.2.1 Análise das organizações matemáticas referentes às aulas da professora P1

A primeira aula referente ao conceito de equação polinomial do primeiro com uma incógnita ministrada pela professora P1 ocorreu no dia 25 de julho de 2015 e a última, no dia 11 de agosto desse ano, ou seja, 12 aulas, de cinquenta minutos cada uma, versaram sobre esse conteúdo.

Para analisar as aulas dos professores, adotamos como ponto de partida a modelização *a priori* (ver quadro página 87) em que categorizamos um conjunto de tarefas do mesmo tipo executadas por meio da mobilização das técnicas e justificadas pelas tecnologias.

Na primeira aula, P1 iniciou o conteúdo com as seguintes questões: “O que é uma equação? Vocês sabem o que é uma incógnita? Todos aqui conhecem uma balança de dois pratos? Aquela que é utilizada para pesar frutas, verduras. Quando seus pais vão à feira e pedem um quilo de tomate, por exemplo, de um lado tem um peso de um quilo e, do outro lado, tem as tomates. Se a quantidade for igual, os pratos da balança estarão alinhados”. Após esses questionamentos, P1 fez o desenho de uma balança de dois pratos na lousa como descrito em seu livro de referência, conforme podemos ver na Figura 16.

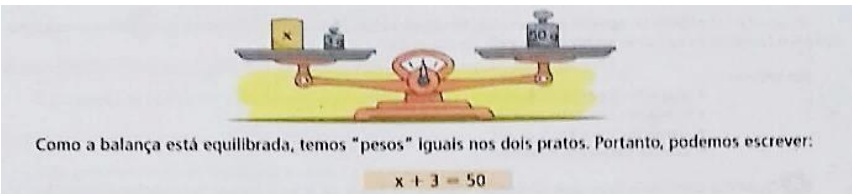


Figura 16: Introdução à equação polinomial do primeiro grau

Fonte: Name (2010, p. 95)

Depois do acompanhamento e da transcrição das observações e análise de cada aula, identificamos que P1 propôs um total de 38 tarefas, todas resolvidas na lousa por ela, a professora. A resolução das primeiras tarefas foi feita pela professora; as demais (exercícios) foram resolvidas pelos estudantes em seus cadernos e, posteriormente, corrigidas pela professora na lousa. A tabela abaixo apresenta o tipo e o quantitativo de tarefas trabalhadas em sala de aula por P1.

Tabela 1: Distribuição dos tipos de tarefas referentes à equação nas aulas de P1

Tipos de tarefas	Quantidade	Percentual
T_1	38	100
T_2	0	0
T_3	0	0
T_4	0	0

Fonte: a pesquisa

Como podemos perceber, a professora trabalhou em sala de aula exclusivamente com as tarefas do tipo T_1 $(ax + b = c)$, não trabalhando os demais tipos – T_2, T_3 e T_4 – categorizados na modelização *a priori*. Entretanto, ao fazer essa escolha em trabalhar com os tipos de tarefas mais simples, poderá, dentre outros fatores, cooperar para o surgimento de dificuldades para os alunos quando se depararem com a necessidade de resolver problemas do cotidiano que requeiram os demais tipos de tarefas.

Vejamos agora o que identificamos em relação à organização matemática de P1.

4.2.2 Organização matemática pontual da professora P1

Neste subtópico, apresentamos as organizações matemáticas pontuais referentes aos subtipos de tarefas, técnicas e tecnologias, com base na modelização *a priori* (ver quadro página 87).

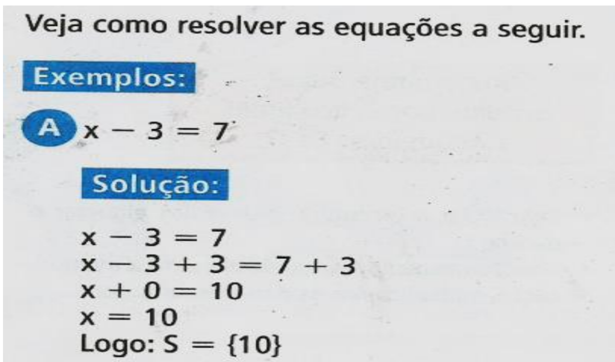
Após observações e transcrições das 12 aulas, fizemos um quadro-resumo das praxeologias que identificamos nas aulas da professora P1. Observemo-lo, então.

Subtipo de tarefas	Técnicas	Tecnologia/teoria
✓ Classificar o que é uma equação. ✓ Identificar os elementos que compõem uma equação. ✓ Procurar soluções das equações por tentativa e erros. ✓ Resolver as equações sendo x um número racional.	✓ Neutralizar termos e coeficientes, adicionando ou subtraindo em ambos os lados das equações. ✓ Transpor termos e coeficientes; mudar o termo ou coeficiente de membro, invertendo o sinal.	✓ Propriedade geral da igualdade ✓ Propriedades das operações inversas

Quadro 14: Organização matemática pontual da professora P1
Fonte: a pesquisa

O quadro acima traz um resumo da praxeologia matemática pontual de P1, que observamos ao longo das aulas filmadas. Destacamos que a professora trabalhou quatro subtipos de tarefas referentes às equações polinomiais do primeiro grau: identificar, definir, encontrar e resolver. Em relação às técnicas, P1 concentrou-se em duas: neutralizar termos e coeficientes, e transpor termos e coeficientes. Já quanto às tecnologias, essa professora recorreu às seguintes: propriedade geral da igualdade e propriedade das operações inversas. Percebemos que ela buscou mobilizar os subtipos de tarefas, técnicas e tecnologias em suas aulas nas resoluções das equações.

A resolução de uma equação ocorreu no quinto encontro (aula), quando P1 enunciou o subtipo de tarefa: resolver as equações sendo x um número racional. A sequência das aulas foi norteada pelo livro de referência *Tempo de Matemática* para introduzir a técnica de transpor termos e coeficientes, como podemos ver no exemplo abaixo



Veja como resolver as equações a seguir.

Exemplos:

A $x - 3 = 7$

Solução:

$x - 3 = 7$
$x - 3 + 3 = 7 + 3$
$x + 0 = 10$
$x = 10$
Logo: $S = \{10\}$

Figura 17: Resoluções de equações por meio da técnica τ_{TTC}
Fonte: Name (2010, p. 95)

Esse foi um exemplo utilizado por P1 para explicitar essa técnica de resolução das tarefas, como podemos perceber no recorte de aula abaixo transcrito.

P1: x+7=10. Pessoal, vou procurar um número que satisfaça a minha igualdade, que não sei ainda o valor de x que, somando 3, ficarei com 10. Quero... podemos pensar: vamos ver o 2+7=9, o valor não é igual a dez. Então, temos que procurar o valor que torne verdadeira minha sentença. Vamos pensar no 3: 3+7=10

Quadro 14: Recorte 01, fala da professora P1
Fonte: a pesquisa

O bloco tecnológico-teórico foi explicitado pelo livro de referência de P1. Dentre as tecnologias possíveis para se trabalhar, a professora trabalhou duas: propriedades gerais da igualdade e propriedades das operações inversas.

Na tabela abaixo apresentamos um comparativo entre o livro didático *Tempo de Matemática* que a professora utilizou em sala para constituir a sua praxeologia matemática e as tarefas efetivamente trabalhadas.

Tabela 2: Distribuição dos tipos de tarefas referentes à equação nas aulas de P1 e comparação com as sugeridas no livro didático

Tipos de tarefas	Tarefas sugeridas no livro didático	%	Tarefas propostas pelo professor	%
T_1	12	32	38	100
T_2	04	10	0	0
T_3	06	16	0	0
T_4	16	42	0	0
Total	38	100	38	100

Fonte: a pesquisa

Conforme a tabela descrita acima, o número de tarefas resolvidas, que representam o "topos" do professor, permite descrever que, no caso deste livro didático, os autores privilegiam as tarefas do tipo T_4 (42% das tarefas para serem resolvidas). Entretanto, quando acompanhamos a sequência das aulas da professora percebemos que: P1 se concentrou em trabalhar em sala as tarefas do grupo um (T_1), totalizando 100%. As dos demais grupos não foram propostas para os estudantes. Destacamos ainda que P1 propôs outros exemplos que não estavam em seu livro de referência, como ($x + 4 = 9$) esse exemplo era proposto modificando-se o sinal da equação, $x - 4 = 9$).

Ressaltamos que, a professora trabalhou na sala de aula as equações polinomiais do primeiro grau que são resolvíveis por procedimentos aritméticos. Em relação às equações que são resolvíveis por meios algébricos (T_3 e T_4) e que demandam uma maior mobilização dos termos e coeficientes para a resolução das equações, não foram desenvolvidas em sala pela professora.

O livro *Matemática*, que chegou à escola enviada pelo Programa Nacional do livro didático PNLD, foi utilizado em apenas duas aulas, no final do conteúdo, quando P1 fez usou uma revisão do assunto, recorrendo ao que essa obra apresentava em relação à introdução de equações no capítulo 10, “Usando letras na matemática”. Acreditamos que P1 não iria trabalhar com o livro distribuído pela Secretaria de Educação Municipal, mas, em virtude da presença do pesquisador, ela o usou em duas aulas.

Destacamos, ainda, que o fato da professora deixar o livro didático (distribuído pelo MEC) na biblioteca da escola e trabalhar com seu livro de referência, denota uma falha no processo de aquisição, distribuição e utilização do livro na sala de aula. Dentre alguns fatores pra isso, podemos dizer que o livro que o professor não escolheu para um triênio (PNLD, 2017, 2018 e 2019) dificilmente não será aceito pelo professor. Segundo, outro fator poderia ser a falta de planejamento das secretarias municipais de educação nesse processo de solicitação dos livros e distribuição dos livros não solicitando os livros com na base no censo de cada escola.

Terceiro, o desperdício de dinheiro público investido na confecção e distribuição de cada coleção didática.

Passemos, então, à análise das organizações didáticas relativas às aulas ministradas por P1.

4.2.3 Análise das organizações didáticas referentes às aulas da professora P1

Neste subtópico, apresentamos os momentos didáticos: o primeiro, referente ao encontro com o objeto de estudo; o segundo, relativo à exploração das técnicas; o terceiro, concernente à constituição do ambiente tecnológico-teórico; o quarto, alusivo ao trabalho da técnica; o quinto, respeitante à institucionalização; e o sexto, sobre a avaliação.

P1 desenvolveu o assunto equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita em 12 encontros distribuídos conforme o exposto no Quadro 16.

Data	Aula	Tipos de tarefas
25/07/2015	01	Classificar as equações
28/07/2015	02	Identificar os elementos que compõem uma equação
29/07/2015	03	Procurar soluções das equações por tentativa e erros
30/07/2015	04	Procurar soluções das equações por tentativa e erros
31/07/2015	05	Resolver equações;
01/08/2015	06	Resolver equações;
04/08/2015	07	Resolver equações;
05/08/2015	08	Multiplicar a equação por menos um (-x=7) Multiplicar ou dividir os dois membros da igualdade
06/08/2015	09	Adicionar ou subtrair termos ou coeficientes em ambos os lados das equações (metáfora da balança)
07/08/2015	10	Identificar as sentenças que são equações (com base no livro *Matemática*, de Imenes e Lellis) Calcular mentalmente soluções para as equações
08/08/2015	11	Resolver equações;
11/08/2015	12	Resolver equações.

Quadro 16: Distribuição dos tipos de tarefas da professora P1
Fonte: a pesquisa

O primeiro encontro sobre a equação do primeiro grau com incógnita aconteceu no dia 25 de julho, quando a professora apresentou o conteúdo aos seus estudantes. Vejamos o recorte de aula abaixo transcrito para sabermos como isso se deu.

Alguém sabe aqui o que é uma equação? Pra que usamos equações em nosso cotidiano? Vamos usar as letras para resolver operações. Acredito que todos conhecem a balança de dois pratos. [Alunos respondem: "Sim, aquela usada na feira"] *Isso mesmo. Ela serve pra quê? Pra pesar, não é isso? Quando coloco pesos iguais nos dois pratos o que irá acontecer? Vai ficar igual, ou seja, em equilíbrio. Assim, é uma equação.*

Quadro 17: Recorte 02, fala da professora P1
Fonte: a pesquisa

No quadro abaixo apresentado, fizemos um resumo dos seis momentos didáticos da professora P1. Vamos observá-los, então.

Momentos Didáticos	Critérios de Análise	Critérios realizados por P1
Primeiro Momento	Como P1 introduziu a equação polinomial do primeiro grau com incógnita para seus alunos?	A professora introduziu o conteúdo de equação do primeiro grau por meio da alusão à balança de dois pratos (balança de feira livre), seguindo o exemplo (x+3=50) registrado no livro didático.
Segundo Momento	Como se deu a exploração do tipo de tarefas T em sala de aula? E a elaboração das técnicas τ relativa a esse tipo de tarefas em sala?	Ocorreu na terceira aula, quando a professora enunciou o seguinte: conjunto universo e conjunto solução de uma equação.
Terceiro Momento	Como foi feita a constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica?	Adicionando ou subtraindo valores iguais, se manterá o equilíbrio (propriedades gerais da igualdade e propriedades das operações inversas).
Quarto Momento	Como é o trabalho de P1 em relação às técnicas?	Foi instituído na sexta, sétima e oitava aulas, quando foi proposta aos estudantes a resolução dos exercícios em classe e indicadas atividades a serem feitas em casa.
Quinto Momento	Como é concretizada a institucionalização por P1: no início, no meio ou no final do livro?	A institucionalização foi concretizada na constituição das técnicas “transpor termos e coeficientes ou neutralizar termos ou coeficientes”.
Sexto Momento	De que maneira se realizou a avaliação: no início, no meio ou no final da aula, ou apenas no final do conteúdo?	Esse momento não ocorreu de forma pontual, mas associado a outros momentos didáticos. A avaliação era realizada de forma oral, quando P1 solicitava que os alunos verificassem se os valores da incógnita eram iguais. No final das 12 aulas, foi realizada uma avaliação escrita.

Quadro 18: Descrição dos momentos didáticos da professora P1
Fonte: a pesquisa

Como vimos, P1 desenvolveu os seis momentos didáticos descritos por Chevallard (1999). O livro didático de referência foi *Tempo de Matemática* cuja sequência apresentada no capítulo de equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita foi adotada pela professora. Entretanto, o livro *Matemática*, que havia sido distribuído para os estudantes no início do ano letivo, não foi utilizado, era deixados em casa.

Em relação ao topos do professor, esperado nos documentos oficiais (PCN e PC/PE), P1 buscou fazer conexões com o cotidiano dos seus estudantes, quando usou a metáfora da balança de dois pratos (feira livre), entretanto não propôs, na sequência das aulas, resolução de problemas do cotidiano, tais como uma corrida de táxi, compra de um presente com o dinheiro da mesada, entre outras situações.

Em relação aos *topos* (do professor no trabalho com os estudantes) esperados pelo autor do livro *Tempo de matemática*, identificamos o que está registrado no quadro apresentado a seguir.

<table>
<tr><th>Topos esperados pelo autor</th><th>Topos realizados pela professora P1</th></tr>
<tr><td>✓ Compreender ideias iniciais da utilização da álgebra</td><td rowspan="5">Evidenciamos que a professora P1 desenvolveu esses topos em sala de aula.
Identificou os termos semelhantes de uma equação.
Identificou o que é uma equação como uma igualdade entre termos; resolveu e identificou as soluções das equações em sala de aula.</td></tr>
<tr><td>✓ Identificar termos semelhantes</td></tr>
<tr><td>✓ Utilizar equações para representar situações de igualdade</td></tr>
<tr><td>✓ Identificar equações do 1º grau numa incógnita</td></tr>
<tr><td>✓ Identificar solução de uma equação do 1º grau e resolver equações do 1º grau</td></tr>
</table>

Quadro 19: Descrição dos *topos* da professora P1
Fonte: a pesquisa

Passemos, agora, a análise das organizações matemáticas e didáticas de P2.

4.3 Análise das organizações matemáticas e didáticas referentes às aulas de P2

A primeira aula de P2, referente ao conceito equação polinomial do primeiro com uma incógnita, no sétimo ano do ensino fundamental, ocorreu no dia 18 de agosto de 2015. Esse conteúdo foi concluído em 3 de setembro de 2015, ou seja, P2 ministrou 12 aulas de cinquenta minutos sobre o tema equação. Destacamos ainda que essa professora foi a que escolheu a coleção *Matemática*, que havia sido enviada para as escolas.

Em sala de aula, P2 trabalhou constantemente o livro didático, adotando a sequência proposta pelo autor. Todos os estudantes tinham o livro didático, que foi por eles usado durante as 12 aulas para resolverem as atividades em classe e em casa.

4.3.1 Organização matemática pontual da professora P2

O quadro abaixo apresenta as tarefas, técnicas e tecnologias/teorias (descritas na análise *a priori*), e que foram efetivamente trabalhadas na sala de aula pela professora.

Subtipo de tarefas	**Técnicas**	**Tecnologia/teoria**
Encontrar o valor desconhecido da equação	Mudar de membro invertendo o sinal. Passar o número para o segundo membro com sinal trocado e fazendo a operação aritmética.	Propriedades operações inversas
Resolver a equação 15(x+17)=60	Passar o número para o segundo membro dividindo e fazendo a operação aritmética.	Propriedades operações inversas. Propriedade distributiva da multiplicação
Usar letras para resolver problemas	Mudar de membro invertendo o sinal. Passar o número para o segundo membro com sinal trocado e fazendo a operação aritmética.	Propriedades operações inversas
Resolver a equação (3n+2=5)	Subtrair -2x dos dois lados da equação. Neutralizar termos e coeficientes	Princípio do equilíbrio entre equações Princípios gerais de igualdades
Resolver a equação (8n+3=6n+4)	Usar técnica de operações inversas	Princípio do equilíbrio entre equações Princípios gerais de igualdades.
Resolver a equação 25(2-(x+3)=-2(3x+1).	Desenvolver ou reduzir expressões e neutralizar termos ou coeficientes	Propriedade distributiva da multiplicação Propriedades gerais da igualdade

Quadro 20: Organização matemática pontual/local da professora P2
Fonte: a pesquisa

P2 obedeceu à sequência proposta pelo autor do livro didático de referência (*Matemática*) e trabalhou as tarefas, técnicas e tecnologias/teorias propostas pelo autor do livro no curso de suas aulas. Acreditamos que isso pode ser explicado pelo fato de P2 ter escolhido essa coleção didática, ou seja, há uma relação entre ela e as ideias propostas pelo autor. O manejo do livro se deu por meio das leituras das ilustrações, seguidas da explanação do conteúdo na lousa para os estudantes e as resoluções dos exercícios do livro.

Na tabela abaixo fizemos um comparativo entre as tarefas e técnicas que o livro didático (Matemática) propõe e as tarefas e técnicas efetivamente trabalhadas pela professora em sala de aula.

Tabela 3: Distribuição dos tipos de tarefas referentes à equação nas aulas de P2 e comparação com livro didático

Tipos de Tarefas	Tarefas sugeridas no livro didático	%	Tarefas propostas pelo professor	%
T_1	52	37	11	46
T_2	12	9	01	4
T_3	10	7	10	42
T_4	65	47	02	8
Total	139	100	24	100

Fonte: a pesquisa

Conforme a tabela descrita acima, o número de tarefas resolvidas, que representam o “topos” do professor, permite descrever que, no caso deste livro didático, os autores privilegiam as tarefas do tipo T_4 (47% das tarefas para serem resolvidas). Dessa forma, quando acompanhamos a sequência das aulas da professora percebemos que: a professora trabalhou os quatros tipos de tarefas na sala de aula sobre as equações polinomiais do primeiro grau que são resolvíveis por procedimentos aritméticos (T_1 e T_2) e resolvíveis por meios algébricos (T_3 e T_4) e que demandam uma maior mobilização dos termos e coeficientes para a resolução das equações.

Em comparação ao livro adotado por P2, podemos constatar que ele propôs 139 tarefas que priorizaram os tipos T_1 e T_4 (84%) em detrimento dos tipos T_2 e T_3 (16%). A professora, em suas aulas, optou por 24 tarefas, o que representa 17% em relação às tarefas sugeridas pelo autor. Destas, priorizou as tarefas do tipo T_1 e T_3 (88%), o que se distancia do que foi sugerido pelo livro didático. Destacamos que a professora ao longo de suas aulas buscou trabalhar de forma equilibrada as resoluções das equações (procedimentos aritméticos e algébricos), iniciando com as praxeologias mais simples até chegar praxeologias que demandam uma maior mobilização de recursos matemáticos.

4.3.2 Análise das organizações didáticas referentes às aulas de P2

Neste subtópico, apresentamos os momentos didáticos: o primeiro, referente ao encontro com o objeto de estudo; o segundo, relativo à exploração das técnicas; o terceiro, concernente à constituição do ambiente tecnológico-teórico; o quarto, alusivo ao trabalho da técnica; o quinto, respeitante à institucionalização; e o sexto, sobre a avaliação.

A professora desenvolveu o conceito de equações do primeiro grau com uma incógnita em 12 encontros, distribuídos conforme o que registramos no quadro abaixo.

Data	Aula	Tipos de tarefas
18/08/2015	01/02	Encontrar o valor da incógnita
20/08/2015	03/04	Encontrar o valor da incógnita Calcular mentalmente os valores das incógnitas
21/08/2015	05/06	Encontrar o valor desconhecido
25/08/2015	07/08	Usar letras para resolver problemas
01/09/2015	09/10	Resolver equações
03/09/2015	11/12	Resolver equações; mudar o termo ou coeficiente de membro, invertendo o sinal.

Quadro 21: Distribuição dos tipos de tarefas de P2
Fonte: a pesquisa

O primeiro encontro relativo à equação do primeiro grau com incógnita aconteceu no dia 18 de agosto, quando a professora apresentou o conteúdo aos alunos. No recorte abaixo, podemos observar como isso se deu.

> *Quando digo assim a+3a, eu sei qual o valor de a? Eu chamo este a de variável, é número natural qualquer e aí eu pego o valor de a multiplicado por 3 e terei o resultado.* ***E isso é equação?***

Quadro 22: Recorte 03, fala de P2
Fonte: a pesquisa

No quadro a seguir, apresentamos um resumo dos seis momentos didáticos de P2.

Momentos Didáticos	Critérios de Análise	Critérios realizados por P2
Primeiro Momento	Como P2 fez a introdução da equação polinomial do primeiro grau com incógnita para seus os alunos?	A professora iniciou o tema equação com a leitura do capítulo 10 intitulado “Comunicando ideias por símbolos”. Escreveu na lousa o exemplo do livro (a+3ª) e disse: “Quando digo assim, eu sei qual o valor de a”? “Eu chamo este a de variável, é número natural qualquer e aí eu pego o valor de a multiplicado por três e terei o resultado. E isso é equação**”?** A professora fez indagações aos estudantes, estabelecendo relação com o cotidiano e aplicando fórmulas para expressar sentenças matemáticas.
Segundo Momento	Como se deu a exploração do tipo de tarefas T em sala de aula? E a elaboração das técnicas τ relativa a esse tipo de tarefas em sala?	Ocorreu na quinta e sexta aula, quando a professora fez a leitura da página 229, intitulada “Letras para descobrir números desconhecidos”. Registrou na lousa o exemplo do livro. Em seguida, propôs a primeira questão da página 231. Depois de algum tempo, fez a correção da questão 01 (letras a, b, c, d, e, f). Ao término da correção, a professora acrescentou as questões 02 e 03. Os estudantes participaram ativamente da correção das questões na lousa (questão 02), depois a professora refez os passos do aluno. A letra b (8m+32=0).
Terceiro Momento	Como foi feita a constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica?	Após o segundo momento, foram constituídas as seguintes tecnologias: princípio de equilíbrio entre equações; princípios gerais de igualdade. Princípio de equilíbrio entre equações; princípios gerais da igualdade; propriedade distributiva da multiplicação; propriedades gerais da igualdade.
Quarto Momento	Como é o trabalho de P2 em relação às técnicas?	Foi estabelecido na sétima, oitava, nona, décima, décima primeira e décima segunda aula, quando P2 propôs exercícios referentes às equações para os alunos resolverem.
Quinto Momento	Como se dá a concretização da institucionalização das técnicas por P2: no início, no meio, ou ao final do livro?	As técnicas foram trabalhadas de forma simultânea quando, a partir do exemplo, a professora procurou fazer a institucionalização das técnicas (transpor termos e coeficientes ou neutralizar termos ou coeficientes [metáfora da balança] e desenvolver ou reduzir expressões).
Sexto Momento	De que maneira se realiza a avaliação: no início, meio ou ao final da aula, ou apenas ao final	Esse momento não ocorreu de forma pontual, mas associado a outros momentos didáticos. A avaliação era realizada de forma oral, P2 solicitava que os alunos verificassem se o valor da incógnita era igual. Ao final das 12 aulas, foi realizada uma avaliação escrita.

	do conteúdo?	

Quadro 23: Descrição dos momentos didáticos de P2
Fonte: a pesquisa

P2 seguiu a proposta do autor do livro de referência (*Matemática*), trabalhando o capítulo 10 (“Usando letras na matemática”) e o capítulo 11 (“Equações”). Nesses dois capítulos, P2 desenvolveu os seis momentos didáticos.

Em relação aos *topos* esperados para o professor nos documentos oficiais (PCN e PC/PE), P2 fez conexões com o cotidiano dos seus estudantes ao usar a metáfora da balança de dois pratos (feira livre), questões como uma corrida de táxi, o consumo de água de uma residência, a conta de energia elétrica de uma residência, entre outras situações.

Já em relação aos *topos* (do professor, no trabalho com os estudantes) esperados pelo autor no livro *Matemática*, registramos no quadro abaixo apresentado o que identificamos a partir das nossas observações das aulas ministradas por P2.

***Topos* esperados pelo autor**	***Topos* realizados pela professora P2**
✓ Conceituar uma equação e solucionar equações	P2 desenvolveu esses *topos* em sala de aula. Conceituou uma equação e resolveu equações; realizou os procedimentos de resolução de equações com base na inversão de operações e na propriedade das igualdades.
✓ Compreender a lógica dos procedimentos de resolução de equações com base na inversão de operações e na propriedade das igualdades	
✓ Resolver equações	
✓ Resolver problemas, usando equações, inclusive problemas envolvendo proporcionalidade	P2 apenas não trabalhou o último tópico que envolveu problemas de proporcionalidade. Um dos fatores disso foi o fato de que iria trabalhar no quarto bimestre esse tema.

Quadro 24: Descrição dos *topos* do livro didático e os *topos* de P2
Fonte: a pesquisa

Após analisar as organizações matemáticas e didáticas de P1 e P2, chegamos às análises relativas a P3.

4.4 Análise das organizações matemáticas e didáticas referentes às aulas de P3

A primeira aula de P3 referente ao conceito de equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita, conteúdo do sétimo ano do ensino fundamental, ocorreu no dia 10 de outubro de 2015 e a última, no dia 18 de novembro de 2015. P3 dedicou 13 aulas de cinquenta minutos a esse conteúdo. Comparando com P1 e P2, verificamos que houve um atraso de P3 em relação à introdução desse conteúdo. Isso se deveu à greve da rede municipal de ensino.

4.4.1 Organização matemática pontual de P3

No quadro a seguir estão registradas as tarefas, técnicas e tecnologias/teorias trabalhadas em sala de aula por P3.

Subtipo de tarefas	Técnicas	Tecnologia/teoria
Resolver problemas, traduzir da linguagem natural para a algébrica x.3+87=123	Usar as operações opostas: "Se, ao iniciar a operação, eu multipliquei por 3 e somei a 87, o resultado foi 123".	Propriedades gerais da igualdade
Resolver a equação 3x-4=-9	Mudar de membro, invertendo o sinal. Passar o número para o segundo membro com sinal trocado e fazendo a operação aritmética.	Propriedades operações inversas
Resolver a equação 2a/5+1=7	Eliminar denominadores; mudar de membro, invertendo o sinal; passar o número para o segundo membro com sinal trocado e fazer a operação aritmética.	Propriedades operações inversas
Resolver a equação x+2(x+3)=60	Desenvolver a multiplicação dos parênteses, fazendo a operação aritmética.	Propriedade distributiva da multiplicação Propriedades operações inversas

Quadro 25: Organização matemática pontual de P3
Fonte: a pesquisa

P3 obedeceu à sequência proposta pelo autor do livro didático (*Novo Praticando Matemática*), trabalhou, no curso de suas aulas, as tarefas, técnicas e tecnologias/teorias propostas. O número de livros didáticos era insuficiente para as duas turmas do sétimo ano do colégio, mas os estudantes não tinham o livro didático. O professor, em suas aulas, copiava na lousa o conteúdo com anotações preparadas por ele, no entanto a sequência era a apresentada nesse livro didático.

Na tabela abaixo, apresentamos uma comparação entre o livro didático (*Novo Praticando Matemática*) que o professor utiliza em sala e as tarefas técnicas efetivamente trabalhadas em sala de aula.

Tabela 4: Distribuição dos tipos de tarefas referentes à equação nas aulas de P3 e comparação com livro didático

Tipos de tarefa	Tarefas sugeridas no livro didático	%	Tarefas propostas pelo professor	%
T_1	47	44	10	67
T_2	22	20	03	20
T_3	10	9	-	-
T_4	29	27	2	13
Total	108	100	15	100

Fonte: a pesquisa

Conforme a tabela descrita acima, o número de tarefas resolvidas, que representam o “topos” do professor, permite descrever que, no caso deste livro didático, os autores privilegiam as tarefas do tipo T_1 (44% das tarefas para serem resolvidas). Dessa forma, quando acompanhamos a sequência das aulas do professor percebemos que: primeiro, o professor concentrou suas aulas nas tarefas do tipo T_1 (67% das tarefas resolvidas na sala de aula), são resolvíveis por procedimentos aritméticos (T_1 e T_2) e resolvíveis por meios algébricos apenas (T_4) e que demandam uma maior mobilização dos termos e coeficientes para a resolução das equações.

Verificamos que o livro de referência para P3 traz 108 tarefas, priorizando os tipos T_1 e T_4 (71%) em detrimento das do tipo T_2 e T_3 (29%). P3, em suas aulas, optou por 15 tarefas, o que representa 14% das tarefas sugeridas pelo autor do livro. Ainda destacamos que P3 buscou trabalhar com resoluções de problemas envolvendo as equações polinomiais do primeiro com uma incógnita. Dessa forma, os estudantes eram levados a transformar a linguagem natural em linguagem algébrica e a resolver os problemas, e não simplesmente resolver as equações prontas do tipo $2x + 4 = 10\ ou\ 2x + 4 = x + 15$.

Passemos, então, a identificar e analisar as organizações didáticas de P3.

4.4.2 Análise das organizações didáticas referentes às aulas de P3

Neste subtópico, apresentamos os momentos didáticos: o primeiro, referente ao encontro com o objeto de estudo; o segundo, relativo à exploração das técnicas; o terceiro, concernente à constituição do ambiente tecnológico-teórico; o quarto, alusivo ao trabalho da técnica; o quinto, respeitante à institucionalização; e o sexto, sobre a avaliação.

O professor desenvolveu o conceito equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita em 13 encontros distribuídos conforme o que registramos no quadro abaixo.

Data	Aula	Subtipo de tarefas
02/10/2015	01/02/03	Definir o que é uma equação Resolver problemas Operações inversas da aritmética Encontrar o valor da incógnita
06/11/2015	04/05/06	Resolver problemas Encontrar o valor da incógnita
11/11/2015	07/08	Resolver problemas Encontrar o valor da incógnita Desenvolver ou reduzir expressões Mudar o termo ou coeficiente de membro, invertendo o sinal
13/11/2015	09/10/11	Resolver problemas Encontrar o valor da incógnita
18/11/2015	12/13	Resolver problemas Encontrar o valor da incógnita Desenvolver ou reduzir expressões Mudar o termo ou coeficiente de membro, invertendo o sinal

Quadro 26: Distribuição dos tipos de tarefas de P3
Fonte: a pesquisa

O primeiro encontro sobre a equação do primeiro grau com incógnita aconteceu no dia 02 de outubro, quando o professor apresentou o conteúdo aos alunos. Vejamos o recorte de aula abaixo registrado.

Alguém sabe o que uma equação? Já viram uma equação? Primeiro vamos ver o que é uma equação. Nós vamos pegar alguns exemplos, vamos ver um problema e traduzir em uma linguagem matemática. Podemos pegar as palavras e transformá-las em símbolos, letras e números. Por exemplo: eu falo o dobro de um número, ou duas vezes dez, estou falando algo matemático. Agora posso colocar 2x3=6 ou 2x de um número, se for o número for 4, então 2x4=8. Agora vamos escrever o que uma equação e em seguida vamos fazer alguns exemplos na prática.

Quadro 27: Recorte 04, fala de P
Fonte: a pesquisa

No quadro a seguir, registramos um resumo dos seis momentos didáticos de P3.

Momentos Didáticos	Critérios de Análise	Critérios realizados por P3
Primeiro Momento	Como P3 introduziu a equação polinomial do primeiro grau com incógnita para seus os alunos?	P3 iniciou a aula indagando os estudantes sobre o é uma equação. Trabalhou a língua materna (por exemplo: o dobro de um número) para a linguagem algébrica ($2x$) e fez uso de fórmulas para expressar sentenças matemáticas. Em seguida, definiu o que é uma equação polinomial do primeiro grau.
Segundo Momento	Como se deu a exploração do tipo de tarefas T em sala de aula? E a elaboração das técnicas τ relativa a esse tipo de tarefas em sala?	Esse segundo momento foi vivenciado a partir da enunciação do conjunto universo e conjunto solução de uma equação. Assim, ocorreu a exploração dos quatros tipos tarefas e suas técnicas.
Terceiro Momento	Como foi feita a constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica?	A constituição desse momento se deu por meio das seguintes tecnologias: propriedades gerais da igualdade, propriedade distributiva da multiplicação e propriedades das operações inversas.
Quarto Momento	Como é o trabalho de P3 em relação às técnicas?	Foi estabelecido na sexta, sétima, oitava, nona, décima, décima primeira e décima segunda aula quando foi proposto que os alunos resolvessem os exercícios referentes às equações.
Quinto Momento	Como é concretizada a institucionalização por P3: no início, no meio ou ao final do livro?	As técnicas foram trabalhadas de forma simultânea: o exemplo o professor fez a institucionalização das técnicas (transpor termos e coeficientes e/ou desenvolver ou reduzir expressões, eliminar denominadores).
Sexto Momento	De que maneira realiza-se a avaliação? No início, meio e/ou ao final da aula ou apenas ao final do conteúdo?	Esse momento não ocorreu de forma pontual, mas associado a outros momentos didáticos. A avaliação era realizada de forma oral, quando P3 solicitava que os alunos verificassem se o valor da incógnita era igual. Ao final das 13 aulas, foi realizada uma avaliação escrita.

Quadro 28: Descrição dos momentos didáticos do professor P3
Fonte: a pesquisa

Verificamos que P3 seguiu o livro de referência (*Praticando Matemática*), obedecendo à sequência proposta pelo autor referente ao capítulo de equações do primeiro grau com uma incógnita. Como exposto acima, P3 desenvolveu os seis momentos didáticos em suas aulas.

Observamos também que P3 trabalhou em sala com resolução de problemas relacionados às questões do cotidiano dos estudantes, como: recebimento de mesada, receitas de bolos, entre outras situações. Nesse processo de transição da linguagem natural para a linguagem algébrica, os estudantes foram levados a pensarem como equacionar um problema e não simplesmente fazerem um conjunto de tarefas e técnicas.

Outro ponto a ser destacado é que P3 não trabalhou em sala com a metáfora da balança, apesar de o livro de referência (*Praticando Matemática*) fazer analogias ao uso da metáfora da balança e à técnica de neutralizar os termos ou coeficientes das equações.

Quanto ao *topos* esperado nos documentos oficiais (PCN e o PC/PE), observamos que P3 fez conexões com o cotidiano dos estudantes, uma vez que abordou questões como a corrida de táxi, situações-problema, como uma compra de brinquedos, mesada (dinheiro dados pelos pais), entre outras.

Em relação aos *topos* (do professor, no trabalho com os estudantes) esperados pelo autor no livro “Praticando matemática”, identificamos aspectos que registramos no quadro abaixo apresentado.

***Topos* geral esperado pelo autor**	***Topos* realizados por P3**
✓ Reconhecer a linguagem algébrica como instrumento de representação e solução de problemas	Constatamos que P3 desenvolveu esse *topos* ao longo das 13 aulas.
Topos específicos	
✓ Descrever alguns padrões numéricos, utilizando a linguagem algébrica	Esses *topos* específicos foram assumidos por P3 no curso de suas aulas, na medida em que descrevia os padrões numéricos e a linguagem algébrica, reconhecendo e resolvendo as equações polinomiais do primeiro grau. Conceituou uma equação e resolveu as equações; realizou os procedimentos de resolução de equações com base na inversão de operações e na propriedade das igualdades.
✓ Reconhecer e resolver equações do primeiro grau	
✓ Utilizar equações para representar, resolver e analisar problemas	

Quadro 29: Descrição dos *topos* do livro didático e os *topos* de P3
Fonte: a pesquisa

Após análises das praxeologias matemática e didática, *topos* e o modelo dominante dos três professores pesquisados, fizemos uma comparação entre os três professores bem como a análise das entrevistas.

4.5 Comparativo das técnicas e tecnologias dos professores

No quadro a seguir, registramos as tarefas e técnicas utilizadas pelos professores em sala de aula.

<table>
<tr><th rowspan="2">Subtipo de tarefas</th><th colspan="3">TÉCNICAS</th></tr>
<tr><th>P1</th><th>P2</th><th>P3</th></tr>
<tr><td rowspan="3">T_1</td><td rowspan="3">Mudar de membro, invertendo o sinal. Passar o número para o segundo membro com sinal trocado e fazer a operação aritmética.</td><td rowspan="3">Mudar de membro, invertendo o sinal. Passar o número para o segundo membro com sinal trocado e fazer a operação aritmética.</td><td>Usar as operações opostas (aritméticas).</td></tr>
<tr><td>Mudar de membro, invertendo o sinal.</td></tr>
<tr><td>Eliminar denominadores.
Mudar de membro, invertendo o sinal.</td></tr>
<tr><td>T_2</td><td>Não apresentou.</td><td>Passar o número para o segundo membro, dividindo e fazendo a operação aritmética.</td><td>Desenvolver a multiplicação dos parênteses, fazendo a operação aritmética.</td></tr>
<tr><td>T_3</td><td>Não apresentou.</td><td>Neutralizar termos e coeficientes.</td><td>Não apresentou.</td></tr>
<tr><td>T_4</td><td>Não apresentou.</td><td>Desenvolver ou reduzir expressões e neutralizar termos ou coeficientes.</td><td>Não apresentou.</td></tr>
</table>

Quadro 30: Comparativo das organizações matemáticas pontuais dos professores
Fonte: a pesquisa

Percebemos que, em relação às tarefas e técnicas sugeridas pelos professores para os estudantes no curso das 37 aulas filmadas, transcritas e analisadas, podemos dizer que as propostas de introdução e efetivação das praxeologias matemáticas e didáticas referentes às equações foram diferentes quando comparamos os três professores. P1 fez a opção em trabalhar com as tarefas do tipo T_1 $ax + b = c$ $(2x + 3 = 9)$ e concentrou-se em duas técnicas: mudar de membro, invertendo o sinal e passar o número para o segundo membro com sinal trocado e fazer a operação aritmética. Assim, essas opções de P1 por não sugerir em sala as outras tarefas e técnicas poderão levar os estudantes a terem dificuldades nos anos seguintes da educação básica e no ensino superior.

P2 escolheu uma coleção aprovada nos PNLD (1999, 2002, 2005, 2008, 2011 e 2014), *Matemática*. As tarefas sugeridas pelo autor da coleção foram trabalhas em sala de aula. Quanto às técnicas, P2 diversificou as tarefas: mudar de membro, invertendo o sinal; passar o número para o segundo membro com sinal trocado, fazendo a operação aritmética; passar o número para o segundo membro, dividindo e fazendo a operação aritmética; neutralizar termos e coeficientes; desenvolver ou reduzir expressões; e neutralizar termos ou coeficientes. Isso nos leva a inferir que P2 trabalhou com o livro *Matemática* do sétimo ano de forma mais próxima à realizada idealizada pelos autores. Ressaltamos ainda que P2 escolheu a coleção que chegou à escola em que leciona.

Já P3 concentrou-se nas tarefas do tipo T_1 e T_2 e não trabalhou as tarefas T_3 e T_4. Recorreu às seguintes técnicas: usar as operações opostas; mudar de membro, invertendo o sinal; eliminar denominadores; mudar de membro invertendo o sinal (aritméticas); e desenvolver a multiplicação dos parênteses, fazendo a operação aritmética. Destacamos ainda que P3 trabalhou com resolução de problemas, relacionando-os com o cotidiano dos estudantes. Ou seja, a resolução de equações se deu via problemas para transformar a linguagem natural em linguagem algébrica. Quanto à relação de conformidade entre o que foi proposto nos livros didáticos e que efetivamente transposto pelo professor nas aulas, P2 foi quem mais se aproximou de toda a sequência proposta em relação às equações polinomiais do primeiro grau.

No quadro a seguir, registramos a tecnologia/teoria dos professores em sala de aula.

Subtipo de tarefas	TECNOLOGIA/TEORIA		
	P1	**P2**	**P3**
T_1	Adicionar ou subtrair valores iguais e manter o equilíbrio	Propriedades das operações inversas	Propriedades gerais da igualdade
	Propriedade geral da igualdade e as propriedades das operações inversas		Propriedades das operações inversas
T_2	Não apresentou	Propriedades das operações inversas	Propriedade distributiva da multiplicação
		Propriedade distributiva da multiplicação	Propriedades das operações inversas
T_3	Não apresentou	Princípio do equilíbrio entre equações	Não apresentou
		Princípio gerais de igualdades	
T_4	Não apresentou	Propriedade distributiva da multiplicação	Não apresentou
		Propriedades gerais da igualdade	

Quadro 31: Comparativo das tecnologias dos professores
Fonte: a pesquisa

Percebemos que os professores fizeram uso das tecnologias comuns, tais como: propriedades das operações inversas e propriedades gerais da igualdade. Apesar de P2 e P3 terem feito uso das propriedades distributivas da multiplicação em suas aulas, sequência de aulas não foi a mesma.

Após as observações e análises das 37 aulas dos três professores, filmadas e transcritas, fizemos uma entrevista com cada um, buscando compreender alguns aspectos comuns aos três professores, tais como: os fatores da escolha do livro didático e os da não utilização do livro que chegara às escolas. A partir, então, das observações das transcrições, elaboramos perguntas específicas para cada um deles. Essas perguntas estão elencadas a seguir.

4.6 Entrevista com os professores

Apresentamos agora a análise das entrevistas realizadas com os três professores. Inicialmente, relembramos que a entrevista foi dividida em duas partes.

Na primeira, havia sete perguntas comuns aos três professores, a saber: O que você leva em consideração para escolher o livro didático? Por que você não usa o livro que chegou à escola? Em que você se baseia para a preparação de suas aulas? A segunda parte foi composta de três perguntas específicas sobre as aulas de cada professor: O autor do livro fez essa sequência para introduzir o conteúdo equação polinomial do primeiro grau. Existe outra maneira para se introduzir esse conteúdo? O capítulo relativo à equação trabalha quatro tipos de tarefas (T_1, T_2, T_3, T_4). Por que você trabalhou apenas as tarefas T_1 e T_3?

Além dessas questões, para obtemos mais elementos para as análises, realizamos uma entrevista não diretiva.

Para melhor compreensão, optamos por deixar as respostas na mesma ordem em que foram realizadas as filmagens das aulas, ou seja, P1, P2, P3. Quanto à organização das respostas, dividimo-las em duas partes: a primeira refere-se às perguntas comuns e a segunda, às perguntas específicas.

Inicialmente perguntamos aos três professores em que eles baseavam para prepararem as aulas. Nossa hipótese era a de que eles, em seus planejamentos, mencionassem a realidade da escola e dos alunos; os livros didáticos; as pesquisas em sites; os documentos oficiais e os recursos disponíveis na escola. P1 citou apenas a realidade da escola, a pesquisa em sites e o livro didático. Os documentos oficiais não foram mencionados na entrevista, conforme podemos observar na transcrição do recorte abaixo.

Assim, sempre no primeiro dia de aula, procuro conhecer meus alunos, fazer uma dinâmica pra ver o nível da turma, pra ver o que posso trabalhar com eles e seguir o que está no livro. Eu também pesquiso na internet pra preparar uma aula diferente. Cada turma é diferente. Se você tiver quatro turmas (do sétimo ano), elas nunca serão iguais. Uma turma é mais avançada, outra mais devagar. Você vai de acordo com a turma. Eu gosto sempre de ir com nível da turma e preparar uma aula diferenciada.

Quadro 32: Recorte 05, fala de P1
Fonte: a pesquisa

P2 mencionou os Parâmetros Curriculares (PCN e PC/PE), o livro didático e pesquisas na internet. Todavia não fez menção à realidade da escola, nem à dos estudantes. É o que podemos verificar no seguinte recorte de fala.

A professora diz: trabalho com os parâmetros do estado, o que é fornecido pela Secretaria de Educação, e a gente tenta adequar os parâmetros aos livros didáticos que temos e também trazemos atividades da internet pra tentar fazer uma aula mais dinâmica, com atividades lúdicas, vídeos, jogos, tudo que envolva a matemática.

Quadro 33: Recorte 06, fala de P2
Fonte: a pesquisa

P3 menciona que, em seu planejamento, leva em consideração o livro didático, a pesquisa na internet e a realidade da escola, como podemos verificar no recorte de fala transcrito abaixo.

Aqui minha realidade é que minhas turmas são escolhidas pela direção e supervisão, e só fico sabendo quais turmas irei trabalhar na primeira reunião pedagógica, em fevereiro. A partir disso, eu pego o livro didático pra preparar o meu plano de aula pra o ano todo. Faço o plano pra cada ano específico. Preparo a aula em cima do livro, situação problema, pego outros livros que tenho em casa, monto situações do cotidiano sobre compras de um brinquedo, mesada. E alguns conteúdos consigo introduzir com jogos. Temos aqui jogos. E vou introduzindo o conteúdo.

Quadro 34: Recorte 07, fala de P3
Fonte: a pesquisa

Entendemos que, certamente, os professores se guiam por outros elementos na preparação de suas aulas, porém, nesse momento das entrevistas, P1 e P3 não mencionaram os documentos balizadores. Um possível fator disso é que, na rede de ensino municipal, há mais flexibilidade na construção dos planejamentos. Já na rede estadual de ensino, de que faz parte P2, os professores seguem de certa forma o currículo próprio estadual, baseado em eixos temáticos. O ponto comum aos três professores foi o fato de que o livro didático é essencial para o planejamento de suas aulas. Corroborando essa nossa constatação, Carvalho e Lima (2010, p.29) afirmam que o livro didático é importante recurso para o aprendizado do professor.

Destacamos ainda que os professores organizaram as praxeologias matemáticas e didáticas de acordo com o exposto nos livros de referência de cada um. Dessa forma, inicialmente P2 e P3 ensinam uma tarefa do tipo T_1, como ($2x + 1 = 11$), para só depois introduzirem as demais tarefas. P1 não avançou no trabalho das tarefas T_2, T_3, e T_4 que requerem a mobilizações de outras técnicas.

Depois dessa pergunta, fizemos a seguinte: “Que recursos que vocês utilizam para a preparação das aulas?” Nossa expectativa era que citassem os seguintes: realidade da escola e dos alunos, livros didáticos, pesquisas em sites e os PCN.

Na fala de P1, nenhum desses recursos foi citado. Apesar de P1 ter-se centrado nos recursos audiovisuais, vimos que, em suas aulas, usou apenas a lousa e o lápis piloto, fato que explicou conforme poderemos constatar no seguinte recorte de fala.

Aqui a escola infelizmente não dá muito recursos pra o professor trabalhar. Não temos data show, às vezes tiro xerox de uma atividade diferenciada e faço com eles.

Quadro 35: Recorte 08, fala de P1
Fonte: a pesquisa

P2 enfatizou que o livro é fundamental para suas aulas e para que os alunos tenham em seu cotidiano uma práxis. É o que podemos observar no seguinte recorte de fala.

Eu uso efetivamente o livro didático. Tento fazer com que o livro didático seja mais utilizado e que os alunos tenham uma rotina. Eles precisam de uma rotina, entendeu? Eles ainda estão precisando de uma rotina. Como eles são do fundamental II, precisam de uma rotina. Eles têm uma mentalidade e eu sigo o que está exposto no livro.

Quadro 36: Recorte 09, fala de P2
Fonte: a pesquisa

P3, assim como P2, mencionou o uso do livro didático nas entrevistas. Como os estudantes não tinham o livro, P3 o copiava na lousa, mas essas cópias eram resumos do seu livro de referência. Ainda menciona as pesquisas na internet, como podemos ver no recorte de fala transcrito abaixo.

Aí eu pesquiso no livro deles (dos alunos), pesquiso na internet... Até já consegui um material da Secretaria do Rio de Janeiro. É um tipo de apostilha com questões-problema e faz algumas orientações, é bem didático. Tenho também a questão dos jogos e a internet, é uma ferramenta muito rica pra sala de aula.

Quadro 37: Recorte 10, fala de P3
Fonte: a pesquisa

A terceira pergunta referiu-se aos documentos oficiais: "Você toma como referência algum(uns) dos documentos oficiais (PCN, PCPE, BCC, Guia do Livro, entre outros) na elaboração de seu planejamento?" Nosso objetivo, com essa questão, era perceber que documentos oficiais eles conheciam e o que falariam a respeito deles (dos documentos).

Aqui não faço não. Trabalho com esses documentos no estado. Seguimos todo o planejamento vindo da Secretaria de Educação do Município.

Quadro 38: Recorte 11, fala de P1
Fonte: a pesquisa

Como vimos no recorte de fala acima transcrito, P1 declarou que, em seu planejamento, não consultava os documentos oficiais, pois a Secretaria Municipal fornecia tudo já pronto. É preciso, contudo, ressaltar que a Secretaria não tem documento algum. Apenas recomenda o uso do material do programa Instituto Qualidade no Ensino (IQE), elaborado entre 2014 e 2015, ano em que a rede municipal unificou o currículo com a rede estadual.

Por sua vez, P2 citou os documentos oficiais que enfocamos em nossa pesquisa. Entretanto, diz que busca adaptá-lo à realidade de sua sala de aula, como podemos ver no recorte de fala transcrito no quadro seguinte.

Tento adequar os parâmetros PCN e PCPE. De certa forma, tentamos trazer pra realidade do aluno, mas sabemos que muitas vezes os alunos não acompanham o que está ali. Por exemplo: tem alguns conteúdos que os parâmetros focam pra serem trabalhados no primeiro e segundo bimestre. Sabemos que, na prática com os alunos, que eles não conseguem acompanhar e aí vai adequar esses conteúdos para o III e IV bimestre. Porque falta muita bagagem e eles não conseguem absorver os conteúdos, não com tanta rapidez e a gente tentar adequar a essa realidade. E os parâmetros do estado são baseados nos parâmetros nacionais e vou trabalhando com ambos, fazendo as adaptações em ambos.

Quadro 39: Recorte 12, fala de P2

Fonte: a pesquisa

P3 também mencionou os documentos oficiais e, em sua prática de sala de aula, pudemos perceber que ele busca trabalhar a matemática não de forma mecânica, mas com as resoluções de problemas, como recomendam esses documentos.

Registramos, a seguir, um recorte de fala de P3 para melhor apreendermos a resposta que deu à questão “Você toma como referência algum(uns) dos documentos oficiais (PCN, PC/PE, BCC, Guia do Livro, entre outros) na elaboração de seu planejamento?”.

O caso aqui na rede municipal mudou e agora estamos tendo como base os parâmetros do estado. O nosso plano de curso esse ano já veio todo em cima da rede estadual, então, hoje, existe uma associação entre as duas redes de ensino. Até porque o nosso aluno sairá daqui, da rede municipal, pra estadual. Pra que trabalhar de uma forma diferente entre ambos? Então, agora estão unificados os currículos. Também não vemos o guia na hora de escolher o livro didático, nós pegamos o livro mesmo e vamos analisando os pontos fortes e fracos pra nossa realidade de nossas salas de aulas. O livro é didático, então o próprio aluno, lendo e estudando o livro, já deveria ter uma noção dos conteúdos, ele já estuda em casa pra entender o conteúdo, tem livro que não colabora com isso, sem complicar a vida do aluno.

Quadro 40: Recorte 13, fala de P3
Fonte: a pesquisa

Podemos afirmar que P2 e P3, em seus planos de aula, buscam seguir as orientações desses dois documentos oficiais. No entanto, P1, que também atua na rede estadual, não fez menção aos documentos oficiais.

A nossa quarta pergunta referiu-se ao livro didático: “Em qual ou quais critérios você, professor, se baseia na hora de escolher o livro didático para o uso em sala de aula?” Esperávamos as seguintes respostas dos professores: recursos disponíveis, realidade do aluno, linguagem do livro e contextualização. O nosso intuito foi perceber quais critérios os professores levam em conta na hora de avaliarem e fazerem suas escolhas em relação aos livros didáticos.

Vejamos, no seguinte recorte de fala, a resposta de P1 a essa questão.

Primeiro observo o tipo de atividade, se tem muitos exercícios, se está de acordo com a realidade do meu aluno. Porque cada escola tem um nível diferente. Então, a gente precisa ver isso. Não adianta pegar um livro que tenha o nível muito alto e meu aluno não conseguir acompanhar. Vejo o livro por partes: primeiro, o conteúdo e se tem bastante exercício, e não tem muitos assuntos. É aquela coisa, uma mais resumida.

Quadro 41: Recorte 14, fala de P1
Fonte: a pesquisa

Dentre os critérios apontados por P1, apenas um critério coincidiu como nossa expectativa: a realidade do aluno. Não previmos outros critérios que ela considera, tais como: a quantidade de exercícios e as atividades. Lembramos, contudo, que P1 não julga o livro *Matemática* adequado ao contexto de sua escola.

Por outro lado, P2 se aproximou mais de nossas expectativas: o próprio livro *Matemática* traz as atuais tendências da Educação Matemática. Em sala de aula, a professora adotou a sequência proposta pelo autor do livro.

Vejamos, então, no seguinte recorte de fala, como P2 se colocou em relação à pregunta referente aos critérios de escolha do livro didático.

Eu levo em consideração a linguagem. Eu tento pegar um livro didático com melhor acesso pra meus alunos. Como é de fundamental II, tento pegar o livro que tenha gravuras, exemplos do cotidiano, pra eles (alunos) assimilarem melhor os conteúdos.

Quadro 42: Recorte 15, fala de P2
Fonte: a pesquisa

Por sua vez, P3 declara que a escolha das coleções didáticas é realizada em conjunto com os professores, que levam em consideração as contextualizações propostas pelos autores, a história da matemática, as tabelas, os gráficos, entre outros elementos. Vamos, pois, conferir a resposta de P3, observando o recorte de fala transcrito no quadro abaixo.

Há inclusive a escolha do livro didático para a nossa escola pra os próximos três anos e essa escolha não pode ser de forma isolada, nós nos reunimos os professores de matemática e avaliamos os pontos positivos e negativos dos livros. Se o livro traz questões contextualizadas ou se é apenas a matemática limpa, se tem uma forma de iniciar o conteúdo e não vai direto ao assunto. Tem autores que, por exemplo, vão inserir o assunto equações e vão colocando e fazendo as equações. Esse livro nós já descartamos, o novo foco que apoiem os pontos históricos, questões de informações, tabelas, gráficos, tudo tem que ser analisados, não pode ser qualquer livro, principalmente aquele que traga a matemática limpa, são logo descartados.

Quadro 43: Recorte 16, fala de P3
Fonte: a pesquisa

Enfim, podemos observar que os professores P2 e P3 procuraram outros elementos na hora da escolherem as coleções didáticas. Já para a professora P1, a preocupação maior foi em relação ao quantitativo de exercícios nas coleções.

Na nossa quinta questão, foi feita uma subdivisão em virtude de apenas P2 ter escolhido a coleção que chegara à escola, *Matemática*, enquanto os outros dois, P1 e P3, que têm outros livros como referência em seus contextos escolares, não fizeram essa escolha, apesar de as escolas em que atuam disponibilizarem essa obra.

Assim, perguntamos a P1 quais eram as motivações para a escolha do livro didático *Tempo de Matemática*. O conteúdo dessa resposta está registrado no quadro apresentado abaixo.

Eu gosto muito do livro *Tempo de Matemática*. É bem enxuto o livro, tem muito exercício, bem resumido e explica bem direto, e o passo a passo não enrola tanto. Ou melhor, não é enrolar, a gente às vezes dificulta o assunto pra os alunos. Então, ele é bem enxuto. Gosto bastante do jeito dele abordar os conteúdos.

Quadro 44: Recorte 17, fala de P1
Fonte: a pesquisa

Também perguntamos a P2 por que havia escolhido o livro didático disponibilizado pela escola. Vejamos a resposta a essa questão no quadro registrado a seguir.

Porque... assim... dentre as opções que tinha era o livro que chegava mais perto do que eu queria, entendeu? Por ter uma linguagem melhor, exemplos do cotidiano, o livro é bem lúdico, tem várias figuras e eu acho mais gostoso de trabalhar com ele. E tentei trabalhar com outros livros e esse, pense, foi o que mais gostei, me identifiquei com o mesmo. Os livros didáticos chegam à escola e a gente sabe que é difícil adotar o livro que escolhermos na escola, mas, como essa é uma escola pequena, eu tive o privilégio de adotar o livro que queria, até porque a demanda que veio pra escola deu pra suprir a demanda da escola. Mas eu tive outra experiência com outros autores, não gostei, o que gosto mesmo é o livro *Matemática*.

Quadro 45: Recorte 18, fala de P2
Fonte: a pesquisa

Foi-nos possível observar como P2 fala com entusiasmo do livro *Matemática*, que foi trabalhado ao longo das 12 aulas por nós filmadas. P2 recorreu a ele para a introdução do tema equação, a resolução dos exercícios em classe e as atividades a serem feitas em casa.

Já a P3, indagamos por que havia escolhido o livro didático *Praticando Matemática*. A justificativa que P3 nos apresentou está registrada no quadro a seguir.

Na época, o livro tinha uma proposta melhor pra sala de aula, como tinha falado. Já esse ano nossa escolha não foi tanto na dinâmica desse livro. Pra o próximo ano, o livro escolhido aqui na escola foi o do Dante, o mesmo mudou aquele perfil da matemática mais aplicada, ele tornou a didática melhor do livro e, querendo ou não, o grupo de professores viu que seria melhor o livro dele.

Quadro 46: Recorte 19, fala de P3
Fonte: a pesquisa

Julgamos importante registrar que ainda existe ainda uma falha na distribuição das coleções didáticas em nosso país. Não se respeita, em muitos casos, a escolha do professor no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Isso pode ser comprovado pelo fato de que a coleção chega à escola, mas o professor não faz uso dela, optando por seguir seu livro de referência.

A pergunta seguinte foi feita apenas a P1 e P3, que haviam escolhido outras coleções: O livro que chegou a sua escola foi o *Matemática*. Qual o motivo para você não utilizar esse livro? Vejamos, nos quadros abaixo apresentados, como se colocaram.

Não é que não trabalhe com esse livro, ele é muito avançado pra o nível dos alunos da minha escola, não só eu mas outros professores também não usam. Como a gente não escolheu ele, quando houve a escolha do livro, escolhemos outro livro e, infelizmente, não chegou à escola.

Quadro 47: Recorte 20, fala de P1
Fonte: a pesquisa

O Imenes foi adotado por uma parte das escolas da rede, mas aqui não, e foi por isso: o Imenes não tem uma didática aceitável e coerente com o nível de alunos que temos aqui na escola. Até daria certo se eu tivesse uma turma que gostasse da matemática pura e gostasse de suas aplicações. Aqui, pra minha realidade, a didática dele não é muito boa. A parte histórica é muito fraca, ele não atende as minhas necessidades específicas.

Quadro 48: Recorte 21, fala de P3
Fonte: a pesquisa

A principal justificativa dos professores para o não uso desse livro é que ele não condiz com a realidade dos seus estudantes ou que tem uma linguagem avançada. Por outro lado, chamaram-nos atenção as percepções desses dois professores a respeito do livro *Matemática* que, no campo da educação dessa ciência, é um livro bem-conceituado, um dos poucos a participar do PNLD de 1999 até 2014 (do PNLD 2016 não fez parte).

Destacamos, ainda, que as três escolas públicas em que atuam P1 e P3, que não usam o livro *Matemática*, têm boa estrutura física – biblioteca e laboratórios – e contam uma boa equipe de gestores. Já a escola em que P2 ministra aulas é de pequeno porte, construída em uma área de 900 m^2 e, no ano letivo de 2017, será desativada devido, dentre outros fatores, à precária infraestrutura.

A última questão comum aos três professores relacionou-se ao que eles consideram para ensinar um assunto novo, especificamente equações do primeiro grau. Nos quadros a seguir, poderemos observar o que cada um colocou a respeito dessa questão.

> Como a matemática já tem aquela coisa de não gostarem da matéria, eu procuro fazer uma coisa mais dinâmica pra ensinar, que envolva bem o conteúdo, como uma atividade mais simples para que meu aluno possa desenvolver.

Quadro 49: Recorte 22, fala de P1
Fonte: a pesquisa

P1 declarou que procura uma atividade mais simples e que os alunos não gostam da matéria, mas, em nossas observações, só constatamos a segunda afirmação. No desenvolvimento das 12 aulas relacionadas às equações, P1 se limitou a fazer as atividades mais simples propostas no livro. Suas aulas constituíram-se de explicação, exemplo na lousa, exercício e correção dos exercícios.

> Na matemática, um assunto puxa outro assunto. Se o aluno tem uma boa base, a gente trabalha o conteúdo com eles e eles não vão sentir dificuldade. Agora, se os alunos não têm uma base, que é uma realidade dos alunos da rede estadual, a gente precisa estar puxando um assunto pra depois puxar o outro. Então, procuro ensinar, nessa lógica, cadeia. Procuro ensinar as quatro operações, operações com sinais, pra depois ensinar equações e outros assuntos. Eu trabalho desse jeito, entendeu?

Quadro 50: Recorte 23, fala de P2
Fonte: a pesquisa

A nossa percepção a respeito de P2 é que o que declarou em sua fala se confirmou em suas aulas: sempre lembrava aos estudantes os jogos dos sinais, as quatro operações (operações inversas), apesar de não fazer qualquer atividade diferenciada com os estudantes. Antes iniciar o conteúdo das equações, fez uma revisão do capítulo anterior, em que trabalhou as quatro operações e os jogos de sinais.

Passemos, agora, à leitura da transcrição da resposta de P3 à questão referente ao que julga importante colocar antes de introduzir em sala de aula um assunto novo.

> Muito bem, dentro de nosso planejamento desse ano com base nos parâmetros do estado, o conteúdo é ponte pra outro conteúdo, são interligados e aí acabamos trabalhando dois, três conteúdos. Acaba fazendo essa parte entre os conteúdos e passamos pra outro conteúdo de forma imperceptível pra o aluno, sem que tenha uma pausa, já se torna uma forma em espiral. Basicamente o aluno nem percebe que mudamos de conteúdo, ele só vai conseguindo até o aproveitamento melhor no final do

Quadro 51: Recorte 24, fala de P3
Fonte: a pesquisa

Constatamos que, nas aulas de P3, os estudantes não utilizam o livro didático, por não o terem. Apesar de o professor ter mencionado que um assunto é ponte para o próximo, os conteúdos são trabalhados em forma de espiral, ou seja, integrados e o livro ajuda o aluno a estudar em casa, intrigou-nos o fato de o livro não ser utilizado nem pelo próprio professor, que em suas aulas muitas vezes não fazia sequer uso de seu livro de referência (como tínhamos o livro de referência do professor, acompanhamos a ordem didática dessa obra), apenas trazia umas fichas de anotações para a aula.

De forma geral, percebemos que, nas aulas, os três professores seguiram os livros didáticos de referência, pois a sequência didática era a mesma apresentada nessas obras. Também verificamos que utilizavam recursos didáticos semelhantes: lousa e lápis para explicação do conteúdo, solução de problemas e correção de exercícios. Apenas P2, que adotou o livro, trabalhou esse recurso. Nenhum dos três professores realizou qualquer atividade diferente no curso das 37 aulas filmadas.

Após a conclusão dessa primeira fase das entrevistas – de perguntas comuns aos três professores –, passamos para a segunda etapa: questões advindas das observações das aulas, ou seja, específicas.

A primeira pergunta à professora P1 teve como objetivo de questionar a introdução das equações polinomiais do primeiro grau, uma vez que a sequência apresentada no livro didático apresenta a metáfora da balança de dois pratos ($x+3=50$). Propusemos-lhe, então, a seguinte questão: "Você introduziu dessa forma porque estava no livro didático ou porque você acredita que é a forma mais adequada de fazer essa introdução? Haveria outra(s) maneira(s) de introduzir esse conteúdo?"

No quadro abaixo, registramos a resposta de P1 a essa pergunta.

Não, eu procurei a forma mais simples pra trabalhar com os alunos. Você sabe como professor de matemática tem dificuldade para trabalhar novos conteúdos. E aí foi a forma mais simples de resolver um problema, o aluno pega mais fácil. Não foi apenas a ordem do livro, foi apenas por ser mais prático e aí para depois desenvolver questões mais avançadas.

Quadro 52: Recorte 25, fala de P1
Fonte: a pesquisa

Como vimos na fala acima, P1 declara que fez essa escolha por ser a maneira mais simples de introduzir o conteúdo, no entanto não percebemos o aprofundamento do conteúdo ensinado. P1 trabalhou as questões do grupo de tarefa mais simples (T_1), mesmo o livro apresentando as tarefas mais complexas (T_2, T_3, T_4).

A segunda pergunta dirigida a P1 foi a relativa ao livro de referência. Esse livro apresenta duas opções técnicas. Por exemplo, em relação a x-3=7, o autor diz que, adicionando-se ou subtraindo-se em ambos os membros da equação com as operações inversas, tem-se o modo prático, ou seja, basta apenas inverter o sinal e mudar de membro (p. 95).

Perguntamos, então, a P1: "Qual método você trabalha mais nas aulas? E por quê?" Vejamos a reposta que nos deu no quadro apresentado a seguir.

Eu procuro o método diferente, prático, porque, assim, eles assimilam mais rápido, o aluno aprende mais rápido. E eles pegando esse método prático, fica mais fácil aprenderem o outro método.

Quadro 53: Recorte 26, fala de P1
Fonte: a pesquisa

Nossa percepção, contudo, não coincide com a de P1 que, na condução de suas aulas, fez opção por trabalhar sempre com o método prático: as equações formadas ($2x + 4 = 10$). Ao longo das 12 aulas, não trabalhou problema algum.

Passemos, agora, à terceira e última pergunta feita a P1 – esta, relacionada às tarefas propostas pelo autor do livro didático que classificamos em quatros tipos: T_1 (x+4=8), T_2 (x+(x-2)=10; T_3(2x+3=x+6) e T_4 ((x+3)/2=2/3). A questão que lhe propusemos foi a seguinte: "Em suas aulas, você fez a opção em trabalhar com tarefas T_1. Por quê?" A resposta a essa pergunta está registrada no quadro apresentado a seguir.

É que às vezes o tempo é bem resumido, então a gente trabalha mais o básico. Se der tempo, a gente aprofunda o conteúdo, mas, se não der tempo, nós fazemos novas sequências pra os alunos. Hoje é muito difícil, com essas condições de trabalho, fazer mais e melhor. As aulas pra nossos alunos ficam muito desejar.

Quadro 54: Recorte 27, fala de P1
Fonte: a pesquisa

Compreendemos as dificuldades atuais do ensino básico brasileiro, com tantos desafios, condições de trabalho precárias, salas de aula superlotadas, falta de segurança e de educação doméstica, entre outros fatores. Todavia, os outros dois professores (P2 e P3) também enfrentam as mesmas dificuldades, mas não deixaram de aprofundar o conteúdo, trabalharam com resoluções de problemas. Ressaltamos que P1 é a mais experiente entre os três professores. Ela tem 16 anos de atuação no magistério.

Sigamos, então, paras a análise das três perguntas feitas a P2 a partir de nossas observações e transcrições das aulas. A primeira delas referiu-se à condução da primeira aula: "Antes do início do capítulo sobre as equações, a senhora voltou à página 202 do livro, em que o conteúdo exposto é a divisão dos números racionais, uso das regras de sinais. Por quê?"

A resposta a essa questão está transcrita no quadro abaixo apresentado.

Outra característica que gosto do livro é que ele sempre retoma, no início do capítulo, uma ideia que você vai usar, qual é o conhecimento que o aluno vai precisar para usar naquele capítulo, entendeu? No começo do livro, ou melhor, no início do capítulo, você vai precisar de tal e tal conhecimento pra poder absorver esse conteúdo, de certa forma já uma revisão. Isso facilita a nossa vida, porque a gente sabe que o professor não tem só uma turma, não tem apenas uma turma pra se dedicar, mas várias turmas. E o livro ajuda muito em relação a isso. No começo do capítulo já dá uma revisão e uma introdução do conteúdo que será trabalhado. Porque os alunos têm muita dificuldade com a questão de regra de sinais, das operações com números não naturais. Eles têm um uma dificuldade de assimilar isso aí. Então a gente tem sempre que trabalhar essas questões da regra dos sinais e de outros conteúdos.

Quadro 55: Recorte 28, fala de P2

Fonte: a pesquisa

Essa preocupação com as quatro operações, principalmente com a multiplicação e divisão, e o jogo de sinais era constante nas aulas de P2, a ponto de ela, em nosso primeiro encontro, ter pedido mais uma semana para fazer uma revisão com sua turma antes do início das observações e filmagens de sua sala de aula.

Fizemos-lhe, em seguida, uma pergunta relacionada à introdução das equações: "A senhora seguiu o que estava descrito no livro didático, cujo capítulo é intitulado 'Usando letras na matemática'. A senhora introduziu dessa forma porque estava no livro didático ou porque acredita que é a forma mais adequada de fazer essa introdução?"

Vejamos, então, como P2 se colocou em relação a essa pergunta cuja resposta está registrada no seguinte quadro.

Eu faço isso, pois acredito que seja a forma mais adequada para fazer essa introdução. Uma vez ou outra é que tento trazer exemplos de fora. Eu acredito que o livro supre bastante essa necessidade, entendeu? Não adianta trazer uma coisa que eles não irão entender, ou só chegar e jogar uma conta no quadro. Assim, eu sempre tento trazer coisas pra fazer sentido no cotidiano de meus alunos. A gente vê muito os professores de matemática serem perguntados: “Vou usar isso na minha vida? Onde vou usar uma equação na minha vida?”, mesmo sabendo que eles têm conhecimento de que irão usar esses conteúdos nos vestibulares, concursos. Só que eles têm essa mentalidade que eles não precisam daquilo, né? O livro traz os exemplos do cotidiano que, eles aprendendo naquele momento... Eu sempre trago outros exemplos, até agora o que está suprindo minhas necessidades, que podem ser usados na sala de aula. Certo, é... Eu acho que seria trabalhando o uso de sinais. Começaria vendo as regras de sinais e o cálculo pra eles, mas ensinaria sem exemplos concretos. Não teria um exemplo concreto onde eles iriam usar esse tipo de cálculo, até porque depois vem a equação do segundo grau. A gente tem uma fórmula e a equação do primeiro grau não tem. Muitas vezes eles acham que é mais difícil e complicada a equação do primeiro grau, do que a equação do segundo grau em virtude da fórmula. Aí tento trazer exemplos. Eu acho que seria mais complicado pra mim, até por que eu tenho 8 turmas, mas tentaria mais alguns exemplos pra melhor compreensão dos alunos.

Quadro 56: Recorte 29, fala de P2
Fonte: a pesquisa

Como P2 gosta do livro *Matemática*, trabalhou-o em suas aulas e, apesar de os outros dois professores afirmarem que esse livro tem uma linguagem avançada para os estudantes, essa professora, P2, sempre o elogiou e, nas aulas por nós observadas, seguiu o que o autor propõe, iniciando o conteúdo de forma mais simples para, depois, aprofundá-lo.

A última pergunta feita à professora P2 relacionou-se aos quatros tipos de tarefas: T_1 (x+4=8), T_2 (x+ (x-2) =10; T_3(2x+3=x+6) e T_4 (2(x+3)=2(x-1). Indagamos-lhe, então: “Mas não trabalhou as equações com números nos denominadores. Por quê?”

A resposta a essa questão está transcrita no quadro exposto abaixo. Vejamo-la.

Porque assim... Antes de trabalhar as equações, eu tenho que trabalhar os sinais, também as operações com frações e os alunos não absorveram muito bem esse conteúdo de operações com frações, frações equivalentes, e também de ensinar o mínimo múltiplo comum (M.M.C). Eles não conseguiram aprender esses conteúdos com facilidade. Eu tentei trazer esse conteúdo da forma mais simples e depois poder aprofundar. Assim, quando dou esse conteúdo, eu percebo que eles têm dificuldade de assimilarem. Por exemplo, no livro traz um exemplo: se você fizer nos dois lados da igualdade, dividindo, multiplicando os lados da igualdade, não irá alterar o resultado, será o mesmo. Só que eles não conseguiram absorver esse exemplo. Por isso, trago esse exemplo mais simples. Essa questão do denominador é aquela questão de que eles têm que ter a base. Eles eram pra aprenderem isso tudo nas séries iniciais e isso não acontece. Com isso, as dificuldades vão se acumulando pra os próximos anos (6º, 7°...) e aí eles não conseguem por conta dessa carência. Entendeu? Assim, eu queria, no meu ideal como professora, como professora da rede da rede estadual de educação, eu acredito que o estado impõe pra gente fazer mágica, temos que fazer mágica. Eles impõem pra trabalharem muitos conteúdos e não temos suporte para fazer um trabalho em sala de aula, salas superlotadas, com uma pressão para aprovar os alunos, mesmo que não saibam dos conteúdos.

Quadro 57: Recorte 30, fala de P2
Fonte: a pesquisa

Como podemos perceber, existe uma boa relação da professora com seu livro didático de referência. Assim, ao longo das 12 aulas por nós observadas, os alunos trouxeram os livros didáticos para a sala e, em todas as aulas, seguiram o que professora propusera para a introdução e desenvolvimento do conteúdo estudado.

Chegamos, então, às perguntas feitas a P3. A primeira referiu-se à introdução das equações polinomiais. Como vimos que ele havia obedecido à sequência proposta no livro didático, usando letras e padrões, e definindo o que é uma equação, perguntamos-lhe: “Você seguiu esta sequência porque estava no livro didático ou porque acredita que é a forma mais adequada de fazer essa introdução? Qual seria outra maneira para introduzir esse conteúdo?” Vejamos, no quadro seguinte, como P3 se colocou.

Pois é, o livro traz uma boa proposta, uma sequência mais acessível pra eles. Se começasse com a balança, pesagem – por exemplo, se colocar esse no primeiro prato da balança, ou no segundo prato, o que irá acontecer? –, eu acredito que os alunos teriam mais dificuldade, apenas na imaginação. Eu também não tenho a balança, a escola também, mas poderia abordar de outra forma esse conteúdo uma balança, fazendo pesagens. Isso é uma possibilidade, é mais didático. Por falta de tempo, acabei me limitando ao que estava no livro didático.

Quadro 58: Recorte 31, fala de P3
Fonte: a pesquisa

Como vimos, o professor considera uma boa proposta a apresentada pelo autor do livro didático, que apresenta o recurso da balança de dois pratos para fazer a introdução do conteúdo. No entanto, conforme P3 colocou, devido à falta desse recurso na escola, fez a opção pela não utilização dele, pois seus estudantes teriam mais dificuldade para assimilarem o conteúdo. O segundo motivo, de acordo com o professor, foi a escassez do tempo.

Propusemos-lhe, então, a segunda pergunta, que se referiu à resolução de problema: “O senhor não trabalhou apenas com equações formadas (x+2=10), mas com os problemas para os estudantes transformarem a linguagem comum na linguagem algébrica. Por quê?”

A resposta a essa questão está registrada no quadro abaixo apresentado. Vamos vê-la, então.

Como a ideia do estudo das equações é voltada para resolução de problemas que levem os alunos a entender que as mesmas são usadas para resolverem problemas da vida deles, então a ideia de fazer essa transformação da linguagem materna pra a matemática é uma ponte do que eles poderão vivenciar em seu cotidiano. Se eu pegar uma equação já pronta, eles não conseguirão visualizar isso, entendeu? Eu preciso fazer com que eles usem essas pontes do cotidiano pra a sala de aula. Essa questão dos sinais (positivo e negativo) não adianta colocar no quadro (três mais três ou menos três). Quando trabalho com números negativos, o uso de temperaturas acima de zero, abaixo de zero, fica mais fácil fazer a aula nesse sentido, já é outra perspectiva pra o ensino.

Quadro 59: Recorte 32, fala de P3
Fonte: a pesquisa

Vemos, no recorte de fala acima transcrito, que o professor fez a opção de não apenas trabalhar com as equações formadas, mas com problemas do cotidiano de seus alunos. Destacamos que esse é um ponto positivo de suas aulas, uma vez que os alunos são levados a fazerem transformações da linguagem materna para a linguagem matemática.

A última pergunta foi a seguinte: “O livro didático utiliza a metáfora da balança para princípio de equivalência e você não usou esse recurso em sala. Por quê?”

No quadro abaixo, está transcrita a resposta de P3 a essa questão.

Verdade, a questão da balança no livro até tem o desenho, mas acho inviável o desenho sem poder mexer. Está lá, no livro, parado. Talvez, possa até ajudar o aluno a imaginar a situação, mas não é uma coisa prática. Uma coisa é você imaginar qual o objeto mais pesado, outra coisa é fazer a comparação vendo a balança se mexendo. Como não consegui fazer isso, eu optei por outra forma para minha sala. Retirei o exemplo da balança e trabalhei outras situações. Se ficarmos bitolados apenas em resolver, por exemplo, equações do segundo grau apenas com as formulas... Existem outras formas para se trabalhar as equações do primeiro grau sem usar a balança, exemplos até mais próximos à realidade dos alunos. Por exemplo: a compra de objeto. Durante três meses, o aluno queria comprar o objeto que custava R$ 65,00 e aí posso dizer que faltou R$ 5,00 pra completar o valor. Qual é o valor da mesada? Então, jogo uma situação, querendo ou não, é uma situação sobre equação. E aí movimento o pensamento deles, eles se reúnem pra discutirem as situações e não apenas jogar o que está no livro didático.

Quadro 60: Recorte 33, fala de P3
Fonte: a pesquisa

Durante nossas observações das aulas de P3, vimos que seguiu o livro didático de referência, não utilizando o livro *Matemática* em momento algum, nem mesmo em suas notas de aulas. A justificativa para o não uso da balança de dois pratos é que, por não dispor da balança na escola, isso se torna inviável para que os alunos imaginem as situações concretas.

É importante registrar, contudo, que, durante a nossa pesquisa de campo, houve greve na rede municipal de ensino. Isso pode ter contribuído para o fato de P3 ter precisado ministrar 13 aulas sobre o conteúdo em enfoque neste estudo e foi o motivo de ele ter sido o último a ser filmado (lembramos que P1 e P2 precisaram de 12 aulas).

Durante nossas observações, verificamos que cada professor tem uma relação diferente com o livro, mesmo sendo o de referência.

P1 seguiu o livro de referência em parte, pois no livro *Tempo de matemática* o conteúdo de equações está dividido em dois capítulos. O primeiro, intitulado “Equações do 1º grau”, traz as tarefas, técnicas e tecnologias de duas maneiras: o método completo (adicionar ou subtrair valores em ambos os lados da equação) e o método prático para resolver as técnicas (inverter o termo de local com o sinal contrário). Nesse capítulo o autor praticamente não propôs resoluções de problemas. Nas duas últimas páginas, há duas seções. A primeira é classificada como exercícios selecionados e testes de revisão com questões de vestibulares de várias universidades, mas, das 24 questões propostas, apenas duas propõem problemas para serem resolvidos, as demais são equações formadas ($2x + 5 = 12$). Já ao final do capítulo, o autor apresenta a seção “Problemas do 1º grau com uma incógnita”. Ao todo, esse capítulo contemplou 76 problemas, mas a professora não trabalhou esse segundo capítulo. Em relação ao livro *Matemática* trabalhou apenas duas aulas.

P2, que escolheu o livro *Matemática*, disponível na escola, trabalhou-o em todas as aulas e os estudantes tinham-no em mãos. A professora procurou trabalhar com as equações formadas ($2x + 3 = x - 10$) e com os problemas propostos pelo autor do livro. Pelo que constatamos no acompanhamento e observações da rotina da professora P2, ela não costuma ter outros livros de referência para preparação das aulas.

P3 seguiu o seu livro de referência, *Praticando Matemática*, cujo autor propôs o recurso da balança de dois pratos na introdução do conteúdo. Apesar disso, esse professor optou por não trabalhar com essa metáfora, conforme já registramos acima. Ressaltamos ainda que a utilização desse recurso é comum nas coleções didáticas de nosso país e uso dele é comum por parte dos professores para a introdução das equações polinomiais do primeiro, mesmo que esse recurso possa gerar dificuldades aos estudantes, pois esse tipo de balança só tem números positivos. Já P1 e P2 utilizaram tal recurso, que também está presente nas três coleções didáticas analisadas.

Tomemos, agora, os programas curriculares e dos livros didáticos a fim de melhor compreendê-los.

4.7 Análise do programa curricular nacional e regional

A preferência por esses dois documentos se deve ao fato de serem recomendações construídas com a finalidade de orientar os professores em seu cotidiano e auxiliar nas opções que sejam adequadas aos diversos contextos do trabalho docente.

Com a finalidade de estudar as equações polinomiais do primeiro grau, atemo-nos aos programas de ensino fundamental brasileiro: os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) que, embora não tenham *status* de programa, são ainda a principal referência curricular brasileira. Recorremos a tais Parâmetros por neles estarem definidos os objetos a ensinar, as recomendações e exigências bem como a finalidade do ensino. Os PCN (BRASIL, 1998), diretrizes propostas pelo Governo Federal que guiam a educação, são separadas por disciplina.

Para o ensino da Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, os PCN propõem quatro blocos de conteúdos: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Tratamento da Informação. Esse documento propõe, ainda, que os conteúdos matemáticos sejam trabalhados de forma articulada com outros conteúdos e esses conteúdos sejam revistos em outros momentos ao longo do ano letivo. No bloco "Números e Operações", é contemplado o estudo da álgebra e, especificamente, das equações polinomiais do primeiro grau, nosso objeto de estudo.

Os PCN constituem-se em orientações para o currículo das disciplinas em cada ciclo, a partir das quais a escola pode adequar ao seu próprio projeto pedagógico. Apresenta as seguintes ideias: "caracterização da área"; "objetivos gerais da área"; "objetivos da área para o ciclo"; "conteúdo da área para cada ciclo"; "critérios de avaliação" e "orientações pedagógicas". Isso dá um caráter genérico aos objetivos, conteúdos, avaliações e orientações pedagógicas.

Em relação à metodologia de ensino, esse documento propõe que o professor tenha um papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, fazendo uso de recursos diversos em sala de aula, tais como: a resolução de problemas; história da matemática; o jogos e uso de tecnologias.

Na busca desses elementos, recorremos primeiro a Chevallard e Grenier (1997), que consideram a palavra grega *topos* em seu significado, ou seja, lugar tomado ou ação a desempenhar em um determinado contexto. Portanto, identificam a função do professor ou o *topos* do professor como o papel de constituir o estudo e reconhecer os diferentes tipos de tarefas que satisfazem a um determinado tema com a apoio das propostas institucionais, dos livros didáticos e de outros documentos.

Em relação ao "topos" esperado do professor, no trabalho com os alunos, são apontados como elementos fundamentais:

> Reconhecer os conhecimentos prévios dos alunos com os quais irão trabalhar; propor situações para os alunos que permitam que os mesmos sejam capazes de solucioná-las utilizando seus conhecimentos prévios para a formação de novos conhecimentos; auxiliar os alunos no desenvolvimento destas situações propondo as ajudas necessárias em função do estado de desenvolvimento real destes alunos; avaliar o desenvolvimento destes mesmos alunos, verificando se ao final do trabalho proposto eles são capazes de pelo menos mobilizar os conhecimentos desenvolvidos em outras situações e em novos contextos; mediar a relação entre os alunos, o que é fundamental quando se deseja que o próprio aluno seja responsável pela construção de seu conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 39)

Destarte, os professores são os responsáveis de como avaliar as possibilidades no desenvolvimento dos estudantes e orientadores na construção do conhecimento, necessitando levar em consideração as relações pessoais desenvolvidas até o momento da introdução de novas noções, para utilizá-las como elementos de transformações na constituição do conhecimento.

Os PCN representam, em certo sentido, as expectativas institucionais para o desenvolvimento da Matemática. Particularmente no caso do trabalho com equações polinomiais do primeiro grau, podemos identificar os seguintes “topos” do estudante:

> • identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações;
>
> • conhecer a história de vida dos alunos, sua vivência de aprendizagens fundamentais, seus conhecimentos informais sobre um dado assunto, suas condições sociológicas, psicológicas e culturais;
>
> • ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdos de ensino e as formas de avaliação estão intimamente ligadas a essas concepções. (BRASIL, 1998, p. 35).

Para nossa caracterização, a análise e a comparação das organizações matemáticas sobre o ensino de equações do primeiro grau constituem-se da modelização *a priori*, das praxeologias matemáticas regionais (praxeologia pontual é referente à resolução de certo tipo de problema, enquanto a praxeologia local diz respeito à resolução de vários tipos de problemas até se transformar em praxeologia regional) existentes em torno da resolução de equações do primeiro grau, ao menos em termos de subtipos de tarefas, técnicas e tecnologias, a partir de estudos teóricos e didáticos.

No quadro a seguir, apresentamos o resumo das informações identificadas, de forma mais ou menos explícita, da praxeologia regional existente nos PCN para o ensino da álgebra no terceiro ciclo do Ensino Fundamental.

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
• Calcular o valor numérico de expressões algébricas.	(não explicita)	• Propriedade das operações numéricas.
• Traduzir sentenças matemáticas da linguagem usual para a forma algébrica.	(não explicita)	(não explicita)

Quadro 61: Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do primeiro grau no PCN
Fonte: Brasil (1998)

As diretrizes acerca do domínio da álgebra são propostas para serem introduzidas no bloco de “números e operações” por meio de atividades em que o estudante amplie os seguintes conceitos e procedimentos (BRASIL, 1998, p.72):

- ✓ Utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas sequências numéricas.
- ✓ Compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas.
- ✓ Construção de procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples.

Segundo o documento, ainda nesse ciclo (6º e 7º ano) devem ser desenvolvidas tarefas no sentido de permitir aos estudantes compreender a noção de variável e reconhecer a expressão algébrica como uma forma de demonstrar relações existentes entre variação de duas grandezas, modelização, resolução de problemas (aritmeticamente difíceis) e representação de problemas por meio de equações.

O segundo documento analisado foram os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PC/PE), uma vez que o contexto da pesquisa foi esse estado.

4.8 Descrição e análise do programa curricular regional

Após as análises dos PCN (BRASIL, 1998), que é o documento de referência nacional, faremos a análise nos Parâmetros Curriculares de Matemática para o

Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012). Esse documento se caracteriza por orientações para o currículo das disciplinas em cada ciclo, que as escolas podem adequar ao seu próprio projeto pedagógico.

A sua estruturada está dividida em cinco eixos: Geometria, Estatística e Probabilidade, Álgebra e Funções, Grandezas e Medidas, Números e Operações.

Esse documento está dividido da seguinte forma:

- ✓ O estatuto da matemática e seu papel na educação básica;
- ✓ Na matemática na sala de aula;
- ✓ Fazer matemática na sala de aula;
- ✓ Expectativas de aprendizagens para os anos iniciais do ensino fundamental;
- ✓ Expectativas de aprendizagens para os anos finais do ensino fundamental"; e
- ✓ Expectativas de aprendizagens para o ensino médio.

Em nosso entendimento, esse documento é uma ferramenta importante para o professor em sala de aula, uma vez que as orientações pedagógicas nele contidas nortearão o cotidiano escolar.

Os PC/PE correspondem às expectativas institucionais para o desenvolvimento da Matemática em nível regional, em particular, das aplicações das equações polinomiais do primeiro grau, utilizando nosso referencial teórico central, ou seja, a teoria antropológica do didático associada à noção de "topos" do professor da maneira que passamos agora a descrever.

> Em primeiro lugar, deve-se defender um ensino que reconheça e valorize saberes e práticas matemáticas dos cidadãos e das comunidades locais – competências prévias relativamente eficientes –, mas não se deve abdicar do saber matemático mais universal; Em segundo lugar, é preciso desenvolver competências e habilidades matemáticas que contribuam mais diretamente para auxiliar o cidadão a ter uma visão crítica da sociedade em que vive e a lidar com as formas usuais de representar indicadores numéricos de fenômenos econômicos, sociais, físicos, entre outros (PERNAMBUCO, 2012, p. 21).

Os princípios centrais apresentados pelos Parâmetros Curriculares de Matemática para o ensino fundamental e médio são assim definidos:

> [...] ao ensinar matemática, o professor não isole os conteúdos em blocos estanques e autossuficientes e leve em conta que a aprendizagem é mais eficiente quando os conteúdos são revisitados, de forma progressivamente ampliada e aprofundada, durante todo o percurso escolar. Que outros documentos sejam considerados pelo professor ao planejar a sua atividade docente (PERNAMBUCO, 2012, pp. 14 e 15).

Em relação ao *topos* esperado do professor, no trabalho com os estudantes, são apontados como elementos fundamentais, esse documento ainda propõe um ensino que aceite e aprecie os saberes e práticas dos cidadãos e das comunidades locais. Ou seja, que desenvolva as competências e habilidades que cooperem inteiramente para auxiliar o cidadão em sua formação crítica da sociedade.

Especificamente em relação ao ciclo (6º e 7º ano) referente às equações polinomiais do primeiro grau, esse documento traz as seguintes diretrizes:

> As equações de primeiro grau devem aparecer de forma natural, não como um objeto de estudo em si mesmo, mas como uma representação de um determinado problema a ser resolvido. Assim, cabe ao professor elaborar situações em que, cada vez mais, os procedimentos aritméticos sejam considerados pouco econômicos para resolvê-las, levando os estudantes à necessidade de estabelecer outros processos. É preciso, porém, levar em consideração que a passagem acima referida não se dá na forma de uma ruptura, pois há estudantes que sistematicamente buscam procedimentos aritméticos, sempre que é possível. (PERNAMBUCO p. 102).

Esse documento acrescenta os seguintes exemplos:

- ✓ Resolver problemas de partilha e de transformação (por exemplo: dentro de dois anos, a minha idade será o dobro da idade que você tinha há dois anos atrás), fazendo uso das representações simbólicas;
- ✓ Estabelecer a técnica da equivalência (metáfora da balança) para resolver equações de primeiro grau do tipo A(x) = B(x), sendo A(x) e B(x) expressões polinomiais.

No quadro a seguir, registramos o resumo das informações identificadas, de forma mais ou menos explícita, da praxeologia regional existente nos PC/PE para o ensino da álgebra no terceiro ciclo do Ensino Fundamental.

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
Resolver problemas de partilha e de transformação.	Transpor termos ou coeficientes.	Propriedade das operações inversas
Traduzir sentenças matemáticas da linguagem usual para a forma algébrica.	(não explicita).	• Princípio de equivalência

Quadro 62: Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do primeiro grau nos PC/PE
Fonte: Pernambuco (2012)

Acreditamos que existe uma evolução do PC/PE em relação à proposta dos PCN, uma vez que refletem as situações atuais das tendências da Educação Matemática. Outro ponto a ser destacado no PC/PE em relação ao PCN é que na Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental são propostos quatro blocos: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Tratamento da Informação. O PC/PE está dividido em cinco eixos: Geometria, Estatística e Probabilidade, Álgebra e Funções, Grandezas e Medidas; Números e Operações. Nos PCN, por exemplo, a álgebra está no bloco dos números e operações, já no PC/PE Álgebra e Funções têm sua área específica, que é distribuída por setores: regularidades em sequências; reta numérica; determinação do elemento desconhecido em uma igualdade matemática e proporcionalidade.

Nas entrevistas com os professores, destacamos que a rede estadual (PC/PE) de ensino exerce um controle maior a fim de que seus professores sigam as unidades temáticas para ciclo em seus planejamentos. Por outro lado, na rede municipal de ensino, percebemos que só em 2016 teve início a unificação dos currículos com a rede estadual de educação. Desse modo, os estudantes da rede municipal irão para a estadual e seguirão o mesmo currículo.

Quando perguntamos a P1, P2 e P3 sobre como esses documentos auxiliavam em seus planejamentos, apenas P2, que atua na rede estadual, disse que seguia as orientações deles. P1 e P3, professores da rede municipal, declararam que não buscavam os documentos, mas o livro didático.

Em síntese, podemos afirmar que, ao longo dessas quase duas décadas, os PCN têm sido referência para a construção dos PC/PE bem como para os demais estados da federação. Mais recentemente, surgiu um documento que servirá de norte para todos esses documentos regionais a fim de termos um currículo nacional: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

No próximo subtópico, abordaremos os aspectos dos níveis de codeterminação (Chevallard, 2002) e os níveis específicos no âmbito da matemática, detalhando cada nível de cada documento.

4.9 Níveis de codeterminação indicados pela TAD

A representação a seguir posiciona como os níveis de codeterminação didáticos propostos por Chevallard (2002) são considerados em nossa pesquisa.

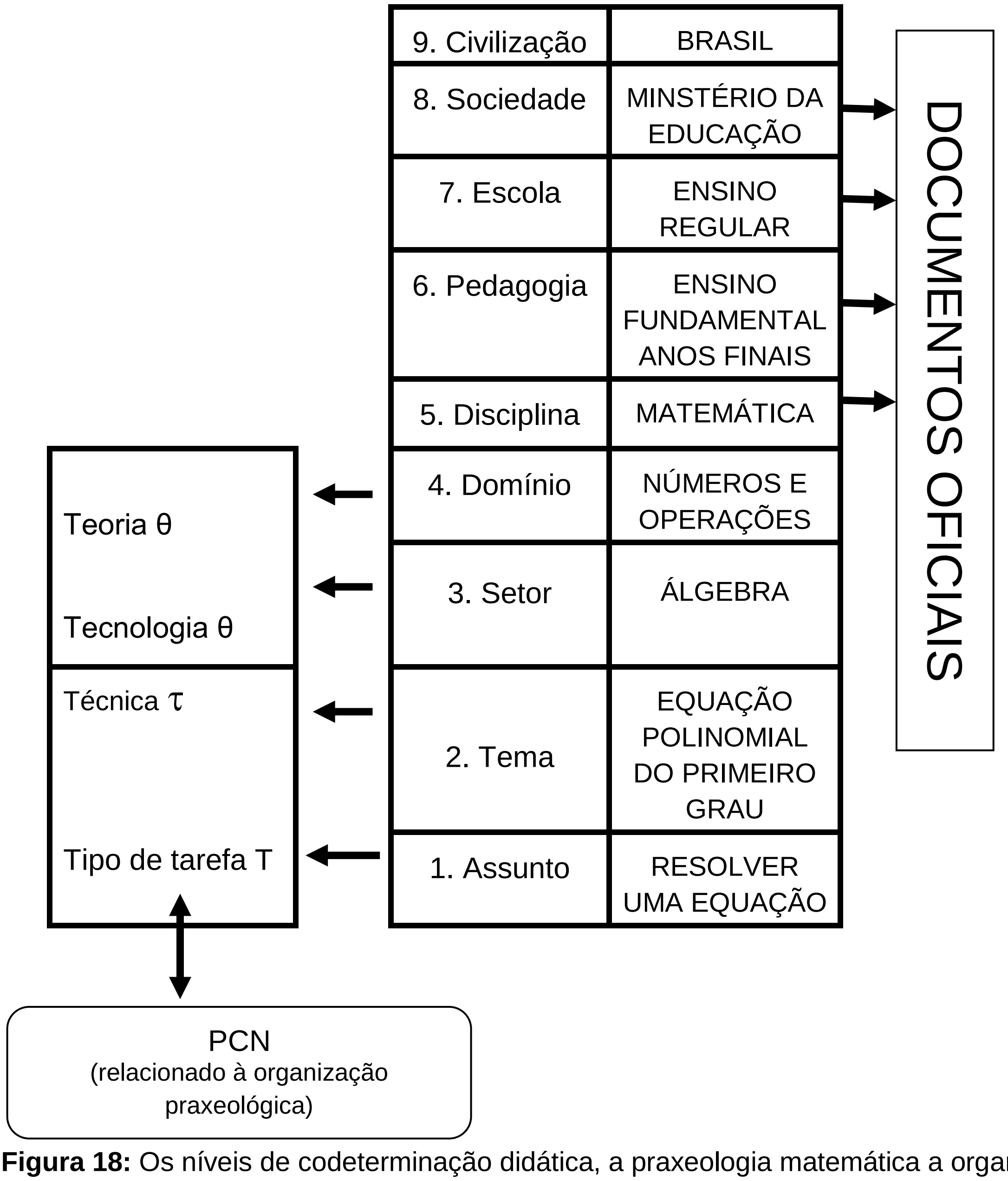


Figura 18: Os níveis de codeterminação didática, a praxeologia matemática a organização didática dos documentos oficiais PCN.

Fonte: Adaptados de Artigue e Wislow (2010, p. 7)

Destacamos um exemplo simples para cada nível hierárquico no contexto da nossa pesquisa: os níveis genéricos 7, 8 e 9 (superiores), o intermediário (pedagogia) e os específicos no âmbito matemático 1, 2, 3, 5 e 6 (inferiores). Entretanto, Artigue e Winslow (2010) ressaltam que os estudos comparativos expõem alguns níveis, mas raramente todos os níveis de codeterminação. Observemos figura a seguir.

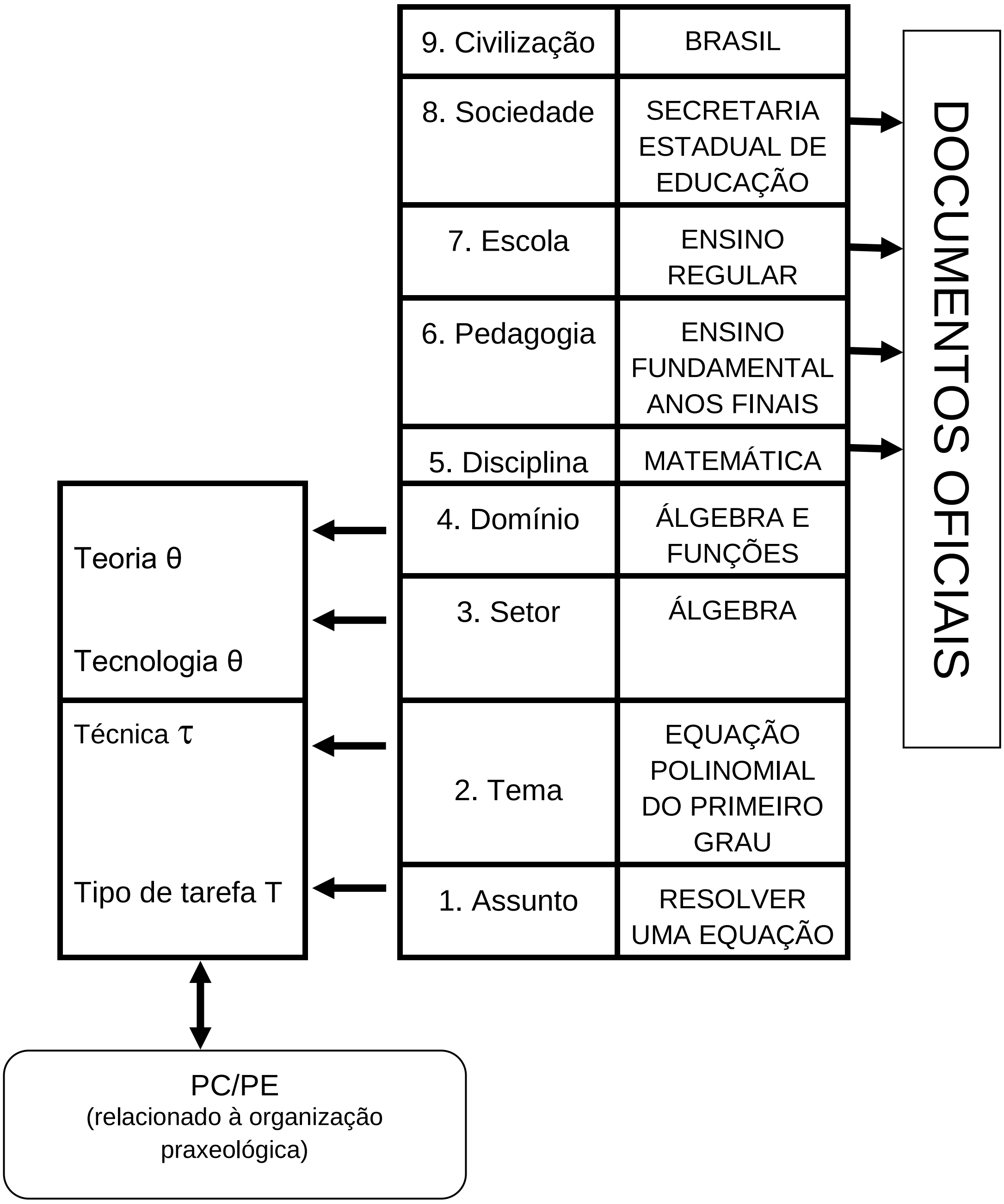


Figura 19: Os níveis de codeterminação didática, a praxeologia matemática, a organização didática dos documentos oficiais PC/PE.
Fonte: Adaptados de Artigue e Winslow (2010, p. 7)

Em relação aos PCN, esse documento apresenta as seguintes diferenças: a primeira é relacionada à sociedade, pois, apesar de ser representado pelo MEC, a Secretaria Estadual de Educação tem autonomia para criar seus próprios documentos oficias de ensino; a segunda diferença é em relação ao quantitativo de domínio do conteúdo (números e operações; grandezas e medidas; tratamento da informação e espaço e formas), pois em nível nacional o objeto equações está no domínio de números e operações. Os PC/PE contêm cinco domínios, a saber: Geometria, Estatística e Probabilidade, Álgebra e Funções, Grandezas e Medidas; Números e Operações. O próximo subtópico é referente aos níveis específicos da matemática desses dois documentos.

4.9.1 Níveis específicos no âmbito da Matemática PCN

A praxeologia específica referente ao *assunto* é o tipo de tarefa: resolver uma equação (por exemplo: a exploração de situações-problema), as diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representar os problemas por meio de equações e inequações. Em relação à técnica, esse documento deixa explícito que sua tecnologia são as propriedades numéricas, desse modo constituindo uma organização pontual do assunto.

- Organização local específica do tema equação polinomial do primeiro grau: é descrita no PCN na parte de números e operações no sétimo ano (equação do primeiro grau) pela tecnologia θ propriedade das operações inversas, em que ocorre uma composição das OM pontuais em torno de uma tecnologia comum.
- Organização regional específica do *setor álgebra* é apresentada no documento do sétimo ano (equações do primeiro grau), sendo uma composição das organizações matemáticas local e pontual, em torno de uma mesma teoria Θ.
- Organização global específica do *domínio* está no bloco de números e operações que vêm apresentados no PCN como uma ferramenta poderosa para resolver problemas, auxiliando na capacitação e generalização dos estudantes.

A figura a seguir traz um resumo e suas implicações dos PCN e de seus níveis na constituição do livro didático.

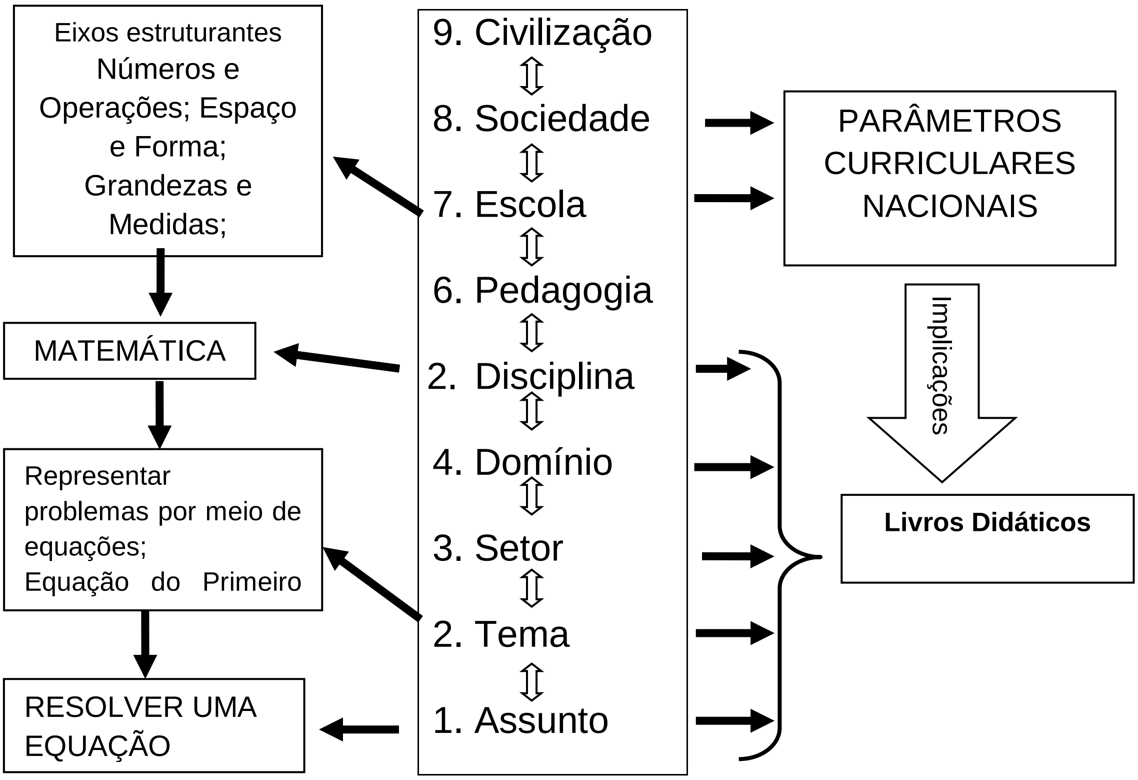


Figura 20: Relação dos níveis de codeterminação com o eixo estruturante e o tipo de tarefa. Fonte: Adaptada de Carvalho (2011, p. 106)

Após a definição dos níveis de codeterminação dos PCN, estão definidos a seguir os níveis específicos dos Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PC/PE).

4.9.2 Níveis específicos no âmbito da Matemática dos PC/PE

- A praxeologia específica do *assunto/* tipo de tarefa: resolver problemas de partilha e de transformação (por exemplo: dentro de dois anos, a minha idade será o dobro da idade que você tinha há dois anos); aplicar a técnica de transpor termos ou coeficientes, constituindo uma organização pontual do assunto.
- Organização local específica do tema equação polinomial é descrita como PC/PE na parte de álgebra e funções no sétimo ano (equação do primeiro grau) pela tecnologia θ propriedade das operações inversas e o princípio de equivalência, em que ocorre uma composição das OM pontuais em torno de uma tecnologia comum.

- Organização regional específica do *setor álgebra e funções* é apresentada pelo PC/PE no sétimo ano (equações do primeiro grau), sendo uma composição das organizações matemáticas local e pontual em torno de uma mesma teoria θ.
- Organização global específica do *domínio* em nossa pesquisa é o bloco da álgebra e funções que vêm apresentadas no PC/PE como ferramenta para auxiliar no ensino dos outros blocos da matemática.

Ao finalizar as análises dos níveis de codeterminação desses dois documentos, discutimos a seguir os aspectos de procedimentos de análise do livro didático, detalhando o livro didático que chegou à escola e o livro de referência dos professores, bem como seu Modelo Epistemológico de Referência (MER). Isso porque julgamos importante avaliar as praxeologias (matemática e didática) contidas em cada livro do sétimo ano e comparar as relações dos professores com os respectivos livros didáticos.

4.10 Análise dos livros didáticos

Os livros escolhidos foram selecionados de acordo com o estudo original, tendo duas coleções para análise. Entretanto, na cidade em que foi realizada a pesquisa, ficou apenas o livro *Matemática* e, em duas escolas na avaliação do PNLD, os professores escolheram outras coleções didáticas, apesar de a que chegou à escola ter sido a coleção *Matemática*.

No quadro apresentado abaixo, registramos os livros de referência dos professores sujeitos desta pesquisa.

Professor	**Título do Livro**	**Autor**
P1	*Tempo de Matemática*	Miguel Assis Name
P2	*Matemática*	Imenes & Lellis
P3	*Praticando Matemática*	Andrini & Vasconcelos

Quadro 63: Livros de referência dos professores
Fonte: a pesquisa

Desse modo, passaram a compor as análises, esses dois livros didáticos (Tempo de matemática e Praticando Matemática) foram norteadores das aulas dos professores P1 e P3, conforme apresentaremos a seguir.

4.10.1 Descrição, organização e distribuição dos conteúdos algébricos

No quadro a seguir, apresentaremos a organização e distribuição do conteúdo equação do primeiro grau nos respectivos livros.

***Tempo de Matemática* (L1)**	***Matemática* (L2)**	***Praticando Matemática* (L3)**
	Capítulo 10 Usando letras em Matemática Comunicando ideias pelos símbolos Calculando com letras	Capítulo 9 Equações Letras e padrões
Capítulo 15 Equações do Primeiro Grau Equações Conjunto universo e conjunto solução de uma equação Equações do 1º grau Capítulo 16 Problemas do 1º grau com uma incógnita	Capítulo 11 Equações Letras para descobrir números desconhecidos Usando letras para resolver problemas Resolvendo equações Regra de três	Equações Algumas operações com letras Balança em equilíbrio e equações Mais problemas e equações

Quadro 64: Distribuição dos conteúdos nos livros
Fonte: a pesquisa

Nesse quadro, percebemos que os autores fizeram escolhas diferentes para introduzir as equações polinomiais do primeiro grau. Assim, passamos a analisar como cada autor propôs a introdução e a distribuição dos conteúdos algébricos bem como as organizações matemáticas e didáticas, *topos* e o modelo dominante em cada livro referente às equações polinomiais do primeiro grau. Ao final dessas três análises, estabeleceremos uma comparação entre as coleções.

O primeiro livro analisado foi *Tempo de Matemática*; o segundo, *Matemática*; e o terceiro, *Praticando Matemática*.

4.10.2 O livro *Tempo de Matemática*

Tempo de Matemática não participou da avaliação do PNLD de 2014, mas P1 balizou suas aulas nessa obra.

Esse livro didático tem um total de 192 páginas em que são distribuídos os 26 capítulos. A seção que contempla os conceitos ou procedimentos ligados à temática da pesquisa está localizada no capítulo 15, *Equações polinomiais do primeiro grau*, com um total de 11 páginas, e no capítulo 16, *Problemas do 1º grau com uma incógnita*, que tem 8 páginas. Ou seja, o autor destinou cerca de 10% do livro para o conteúdo das equações do primeiro grau.

Esse livro dispõe ainda de seções para demonstração das tarefas, técnicas, modo prático, exercício de fixação, tarefa especial. No 15º capítulo não existem praticamente problemas, apenas equações formadas ($2x + 4 = 20$), pois o trabalho com as resoluções de problemas com equações está concentrado no capítulo 16. Essa forma que o autor propôs para os professores trabalharem em sala de aula não contribui para uma integração entre a resolução de problemas e a resolução de equações. Por exemplo, P1 trabalhou apenas o capítulo 15, que enfoca o processo operacional das tarefas e técnicas.

O estudo da álgebra (**conceitos algébricos**) é introduzido no capítulo 15, intitulado *Equações do 1º grau* (NAME, 2010, p.93) por meio da metáfora da balança de dois pratos, destacando a incógnita, o primeiro e o segundo membro, conforme podemos ver na figura abaixo.

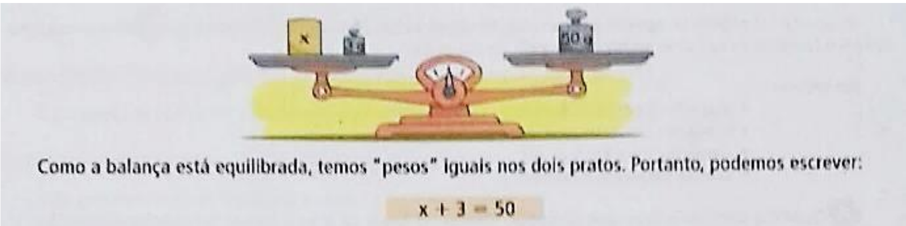


Figura 21: Introdução de equação polinomial do primeiro grau
Fonte: NAME (2010, p. 93)

O uso da balança para introdução das equações, quando é trabalhada a noção de equilíbrio de uma igualdade, é pouco explorado pelo livro, pois aparece apenas em alguns exercícios. O trabalho da álgebra prossegue na seção "conjunto universo e conjunto solução de uma equação", por meio de atividades que visam elaborar e sistematizar técnicas que consistem em *desenvolver*, isto é, simplificar expressões algébricas como apresentado na a seguir registrada.

Considere as seguintes situações-problemas:

A Qual é o número natural que podemos colocar no lugar de *x* para tornar verdadeira a equação $x + 7 = 10$?

Solução:

$\boxed{3} + 7 = 10$

A equação é satisfeita apenas para $x = 3$. Nenhum outro número natural torna verdadeira a equação. Então, o número 3 chama-se **solução** ou **raiz** da equação.

Figura 22: Exercício sobre aplicação da propriedade aritmética
Fonte: NAME (2010, p. 94)

Nessa atividade apresentada na figura acima, as expressões algébricas são concebidas como expressões que contêm letras. Desse modo, a álgebra é introduzida como uma extensão da aritmética.

4.10.3 Análise praxeológica sobre o ensino de equações do primeiro grau

Especificamos abaixo os componentes das análises das tarefas referentes às equações polinomiais do primeiro grau.

Exploração do subtipo de tarefas t_1 e elaboração da técnica τ_{NTC}: esse momento se realiza com a apresentação do processo de resolução da equação $x - 3 = 7$**,** conforme apresentado na figura abaixo.

Veja como resolver as equações a seguir.

Exemplos:

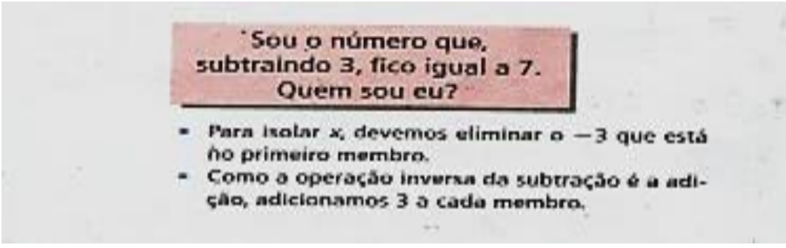
A $x - 3 = 7$

Solução:

$x - 3 = 7$
$x - 3 + 3 = 7 + 3$
$x + 0 = 10$
$x = 10$
Logo: $S = \{10\}$

Figura 23: Resoluções de equações por meio da técnica τ_{NTC}
Fonte: NAME (2010, p. 95)

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da τ_{NTC}: observa-se, a partir do extrato acima, que se faz uso da técnica τ_{NTC} (neutralizar termos ou coeficientes), subtraindo-se termos iguais nos dois membros da equação de forma semelhante. Essa técnica é justificada por meio das *propriedades gerais da igualdade* (θ_{PGI}), assim enunciadas:


"Sou o número que, subtraindo 3, fico igual a 7. Quem sou eu?"

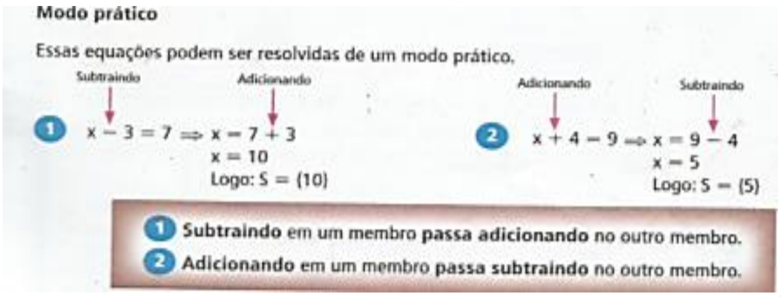
- Para isolar x, devemos eliminar o -3 que está no primeiro membro.
- Como a operação inversa da subtração é a adição, adicionamos 3 a cada membro.

Figura 24: Ambiente tecnológico e sistematização da τ_{NTC}
Fonte: NAME (2010, p. 95)

Avaliação dos elementos técnico-tecnológicos: ocorre quando o autor propõe, na figura acima, que o estudante resolva o problema para descobrir o coeficiente.

Trabalho da técnica τ_{NTC}: esse momento é proposto para se efetivar na seção intitulada *Exercícios de fixação* (NAME, 2010, p.97). Assim, os estudantes, ao fazerem esses exercícios, trabalham essa técnica nas situações propostas pelo autor do livro.

Exploração do subtipo de tarefa t_1 e elaboração da técnica τ_{TTC}: esse momento ocorre simultaneamente ao momento anterior. Quando o autor apresenta a técnica de neutralizar termos e coeficientes (**τ_{NTC}**) com a seguinte seção "*modo prático*", refaz o exemplo anterior, conforme ver na figura abaixo.


Modo prático

Essas equações podem ser resolvidas de um modo prático.

1) Subtraindo / Adicionando: $x - 3 = 7 \Rightarrow x = 7 + 3$; $x = 10$; Logo: $S = \{10\}$

2) Adicionando / Subtraindo: $x + 4 = 9 \Rightarrow x = 9 - 4$; $x = 5$; Logo: $S = \{5\}$

1) Subtraindo em um membro passa adicionando no outro membro.
2) Adicionando em um membro passa subtraindo no outro membro.

Figura 25: Resoluções de equações por meio da técnica τ_{TTC}
Fonte: NAME (2010, p. 95)

Nessa atividade, podemos observar que as equações são caracterizadas como sentenças que contêm letras representando valores desconhecidos.

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica τ_{TTC}.: os momentos de exploração do subtipo de tarefa t_1 e de elaboração da técnica, bem como de constituição do ambiente tecnológico e sistematização ocorrem simultaneamente. Como podemos compreender a partir da Figura 25, a sistematização da técnica transpor termos e coeficientes (τ_{TTC}) é implicitamente justificada por elementos tecnológicos que constituem as *propriedades das operações inversas* (θ_{POI}), assim enunciadas: *para desfazer as operações, efetuamos a operação inversa* (ibidem, p. 95).

Avaliação dos elementos técnico-tecnológicos: a avaliação da τ_{TTC} não ocorre de forma explícita. Ressaltamos ainda que o autor, na página 95, constituiu as duas Técnicas: τ_{NTC} (neutralizar termos ou coeficientes) e a τ_{TTC} (transpor termos e coeficientes) e constituição da tecnologia θ_{POI} (*propriedades das operações inversas)*.

Trabalho da técnica τ_{TTC}: esse momento é proposto para se realizar na seção intitulada *Exercícios de fixação* (NAME, 2010, p.97), de modo que, ao fazerem esses exercícios, os estudantes trabalhem essa técnica nas situações propostas pelo autor do livro.

Exploração do subtipo de tarefa t_4 e a elaboração da técnica mista τ_{DRE_NTC}.: esse momento se dá no exercício 20, com a apresentação do processo de resolução da equação $2(2x-1)=2(x+1)+3$ como exemplo, recorrendo-se à técnica mista τ_{DRE_NTC}, conforme apresentado na figura 26.

$$3(2x-1) = 2(x+1) + 3$$
$$6x - 3 = 2x + 2 + 3$$
$$6x - 2x = 2 + 3 + 3$$
$$4x = 8$$
$$x = \frac{8}{4}$$
$$x = 2$$

- Eliminar os parênteses.
- Transpor os termos mudando os sinais.
- Reduzir os termos semelhantes.

Então: S = {2}

Figura 26: Extrato de modelo de resolução de equações por meio da técnica mista τ_{DRE_NTC}
Fonte: NAME (2010, p.99)

Essa equação satisfaz ao subtipo de tarefa t_4: resolver equações do tipo $A_1(x)=A_2(x)$).

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica τ_{DRE_NTC}: esse momento ocorre simultaneamente ao momento anterior, que se realiza por meio de um exemplo resolvido. Podemos notar que essa técnica se cumpre em duas etapas:

a) desenvolver ou reduzir expressões (τ_{DRE});

b) neutralizar termos ou coeficientes (τ_{NTC}).

Ainda que essas propriedades não tenham sido mencionadas, a técnica τ_{DRE} fundamenta-se nas *propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM}), enquanto a técnica τ_{NTC} se ancora nas propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}).

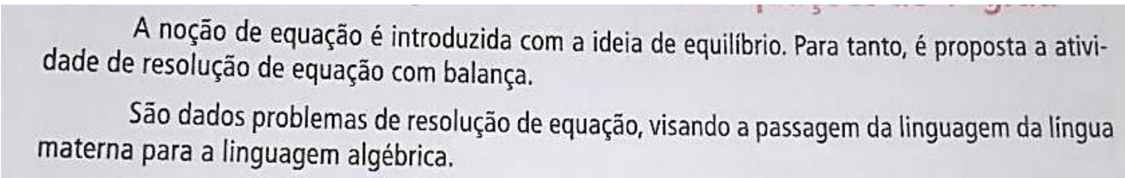
Trabalho da técnica τ_{DRE_NTC}: esse momento é realizado nos exercícios propostos em Name (2010, pp. 99-101).

4.10.4 Síntese avaliativa do livro *Tempo de Matemática*

A avaliação das organizações matemáticas existentes nesse livro em torno da resolução de equações do primeiro grau adota como referência os seguintes critérios propostos por Chevallard (1999): a) verificar se os subtipos de tarefas estão bem *identificados*, acompanhados de explicações de sua *pertinência* (ou razão de ser), são *representativos* tanto em quantidade como qualidade; b) os elementos técnico-tecnológicos estão *explicitados* ou não; bem *enunciados* e *justificados.* Assim, passamos a descrever esses elementos de avaliação a seguir.

Identificação dos subtipos e tarefas: nesse livro as tarefas e subtipos de tarefas são bem identificados nos capítulos 15º e 16º. Os primeiros enunciados relativos à resolução de equações do primeiro grau fazem referência à palavra *equação* e expressões do *primeiro grau*. Os enunciados adotados para identificação dos tipos de tarefas são escritos desde o início do processo de oficialização do conceito de equação e de sistematização das técnicas – por exemplo, quais sentenças são equações; indique a incógnita; separe as equações com uma incógnita.

Pertinência ou razão de ser: o tipo de tarefa “resolver equações do primeiro grau” é um recurso (ferramenta) em si no capítulo 15. No capítulo 16, passa ser utilizado como uma ferramenta para resolver problemas. É o que podemos observar na figura abaixo.



A noção de equação é introduzida com a ideia de equilíbrio. Para tanto, é proposta a atividade de resolução de equação com balança.

São dados problemas de resolução de equação, visando a passagem da linguagem da língua materna para a linguagem algébrica.

Figura 27: Razão de ser da equação polinomial do primeiro grau
Fonte: NAME (2010, p. 15)

Representatividade: os exercícios explorados sobre resolução de equações do primeiro grau contemplam os diferentes subtipos de tarefas (t_1, t_2, t_3, t_4). No total foram identificados 55 exercícios propostos por meio de equações, dos quais 52 eram as equações e apenas três problemas no capítulo 15; já no capítulo 16 concentraram-se 76 problemas. Desse modo, os dois capítulos somam 131 atividades.

Destacamos ainda que esses exercícios do capítulo 15 referentes às equações para serem resolvidas (por exemplo: questão 1 – resolva as equações: letra a, b, c, d, e, f...) somaram 138 equações do capítulo. Dentre essas equações, tomamos como parâmetro as tarefas e técnicas em que os autores fizeram a sequência de estudo do capítulo. No entanto, essas tarefas e técnicas podem ser resolvidas com o apoio de outras tarefas e técnicas. Assim, identificamos as tarefas registradas na tabela abaixo.

Tabela 05: Subtipos de tarefas do livro *Tempo de Matemática*

Subtipos de Tarefas	**T_1**	**T_2**	**T_3**	**T_4**	**%**
τ_{TTC}	52	-	-	-	38
$\tau_{DRE\_}\tau_{TTC}$	-	12	-	-	9
τ_{NTC}	-	-	09	-	6
τ_{DRE_NTC}	-	-	-	65	47

Fonte: a pesquisa

Percebemos que as tarefas do grupo t_1 representam 38% e a tarefa t_4, 47%. Essas são as tarefas mais propostas pelo autor para o trabalho na sala de aula.

Elementos técnico-tecnológicos: a álgebra é definida como uma linguagem essencial, *gramática*, formada por regras. A noção de *expressão algébrica* não é oficializada por meio de enunciados, ela é utilizada como se fosse conhecida pelos alunos. A noção de *equação* é mais ou menos oficializada como sendo *igualdades* que contêm números desconhecidos, representados por *incógnitas*.

Em relação às *técnicas* elaboradas ou sistematizadas, foram identificadas as seguintes:

- ✓ τ_{NTC}: *neutralizar termos ou coeficientes*, elaborada e justificada por meio das propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}) (figura 19);
- ✓ τ_{TTC}: *transpor termos ou coeficientes*, mais ou menos justificada pelas *propriedades das operações inversas* (θ_{POI}) (figura 21).

A partir dessas três técnicas, com auxílio da τ_{DRE} (*desenvolver ou reduzir termos*), justificada por meio das *propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM}), foram sistematizadas também as técnicas mistas:

- ✓ τ_{DRE_NTC}: *desenvolver ou reduzir termos/neutralizar termos ou coeficientes* (figura 22).

Evolução dos subtipos de tarefas e da tecnologia: o estudo da resolução de equações polinomiais do primeiro grau é introduzido por meio de exploração de exercícios que correspondem à realização dos subtipos de tarefas, como podemos ver no quadro abaixo delineado.

Subtipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
t_1 (resolver equações do tipo $ax+b=c$).	*Neutralizar termos ou coeficientes* (τ_{NTC})	*Propriedades gerais inversas* (θ_{PGI})
	Transpor termos ou coeficientes (τ_{TTC})	Propriedades *das operações inversas* (θ_{POI})
t_2 (resolver equações do tipo $A(x)=0$)	Técnica mista τ_{DRE_TTC}, que consiste em duas etapas: a) *desenvolver ou reduzir expressões* (τ_{DRE}), para transformar a equação do tipo $A(x)=0$ em outra do tipo $ax+b=c$; b) *transpor termos ou coeficientes* (τ_{TTC})	*Propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM}).
t_3 (resolver equações do tipo $a_1x+b_1=a_2x+b_2$).	*Neutralizar termos ou coeficientes* (τ_{NTC})	*Propriedades gerais da igualdade* (θ_{PGI}).
t_4 (resolver equações do tipo $A_1(x)=A_2(x)$)	Técnica mista τ_{DRE_NTC}, que consiste em duas etapas: a) *desenvolver ou reduzir expressões* (τ_{DRE}), para transformar a equação do tipo $A(x)=0$ em outra do tipo $ax+b=c$; b) *transpor termos ou coeficientes* (τ_{TTC})	*Propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM}).

Quadro 65: Evolução das tarefas e tecnologias
Fonte: a pesquisa

Conforme o quadro acima, o autor sugeriu os quatros subtipos de tarefas. O trabalho das tarefas mais simples para as tarefas é que mobiliza mais elementos para a resolução das equações.

Organização didática: a transposição das praxeologias matemáticas existentes em torno dos subtipos de tarefas referentes às resoluções de equações do primeiro grau está registrada no quadro apresentado a seguir.

Momentos Didáticos	Critérios de Análise	Livro
PRIMEIRO MOMENTO	De maneira é feita a introdução da equação polinomial do primeiro grau com incógnita no livro?	A introdução é realizada a partir da alusão da balança de dois pratos a fim de formar ou sistematizar a técnica eletiva para resolver a equação (subtipo de tarefa), por meio da explicação do procedimento de resolução.
SEGUNDO MOMENTO	Como se dá a exploração do tipo de tarefas T no livro? E a elaboração de uma técnica τ relativa a esse tipo de tarefas?	É indicado nas seções intituladas *exercícios de fixação; exercícios complementares* e *exercícios selecionados.*
TERCEIRO MOMENTO	Qual a constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica?	A constituição do ambiente tecnológico é bem definido e justificado por meio das tecnologias: propriedades gerais da igualdade; propriedade das operações inversas; e propriedade distributiva da multiplicação.
QUARTO MOMENTO	Como é o trabalho das técnicas?	É sugerido por meios de seções específicas, logo após a constituição das tecnologias. O autor propôs um total de 139 exercícios para resoluções.
QUINTO MOMENTO	Como se efetiva a institucionalização: no início, no meio ou ao final do livro?	A institucionalização das tecnologias ocorreu logo após a apresentação das duas primeiras técnicas (neutralizar termos e coeficientes e transpor termos e coeficientes).
SEXTO MOMENTO	De que maneira se realiza a avaliação: no início, no meio ou ao final do livro?	A avaliação não ocorre de forma explícita. Em alguns momentos, depois da institucionalização das tecnologias.

Quadro 66: Momentos didáticos constituídos no livro *Tempo de Matemática*
Fonte: a pesquisa

Concluímos que a passagem de procedimentos aritméticos para procedimentos algébricos não é realizada de forma explícita, posto que, quando os autores afirmam que os processos (técnicas) principais podem ser agrupados para resolver equações, eles não deixam claro quais tipos de equações podem ser resolvidos, utilizando-se das operações inversas e quais tipos só podem ser resolvidos, efetuando-se a mesma operação nos dois membros da equação.

No tocante ao manual didático do professor, observamos os seguintes objetivos:

- ✓ Compreender ideias iniciais da utilização da Álgebra;
- ✓ Identificar termos semelhantes;
- ✓ Utilizar equações para representar situações de igualdade;
- ✓ Identificar equações do 1º grau numa incógnita;
- ✓ Identificar solução de uma equação do 1º grau;
- ✓ Resolver equações do 1º grau.

Esses são os *topos* esperados pelo autor do livro *Tempo de matemática* em relação ao trabalho docente (com os estudantes) em sala de aula.

A distribuição das equações polinomiais do primeiro grau e de suas atividades é voltada para o ensino da repetição e memorização, não explorando as diversas situações didáticas, tais como o uso de jogos na sala de aula e a resolução de problemas, entre outras. Dessa forma, esse livro é pautado na definição do conteúdo, exemplos e exercícios repetitivos para auxiliar a memorização dos estudantes.

4.10.5 O livro *Matemática*

Esse livro está dividido em capítulos, que estão subdivididos em itens, de modo que apresentam as seguintes seções: *Conversar para aprender; Ação; Problemas e exercícios; Problemas e exercício para casa*. Além do mais, apresenta, ao final de cada capítulo, uma seção: *Para não esquecer e Supertestes*.

Ao final do livro do estudante, é disponibilizado um *Dicionário,* as soluções de cada seção, *Problemas e exercício*s para cada uma e indicações de leituras. No livro didático do professor, além das seções citadas acima, o autor auxilia o trabalho docente com as seguintes seções: *Problemas e exercícios complementares*; *Supertestes para autoavaliação* e um manual denominado *Guia e recursos didáticos*.

O livro didático do 7º ano dispõe de 13 capítulos, dentre os quais dois destinam-se ao conceito de equação polinomial do primeiro grau: o capítulo 10, denominado de “Usando letras na matemática”, e o 11º capítulo, “Equações”.

Ao todo, o livro didático do aluno tem 328 páginas, de forma que o capítulo “Equações” apresenta 36 páginas, o que representa 11% do livro. Além disso, há um caderno de atividades, “Atividades para aprender e estudar”, com 224 páginas. Essas atividades são voltadas para leituras complementares, são atividades complementares.

O autor propôs o estudo das equações polinomiais do primeiro grau no capítulo 10 (IMENES; LELLIS, 2010, p. 213), denominado “Usando letras na matemática” e os objetivos desse estudo são:

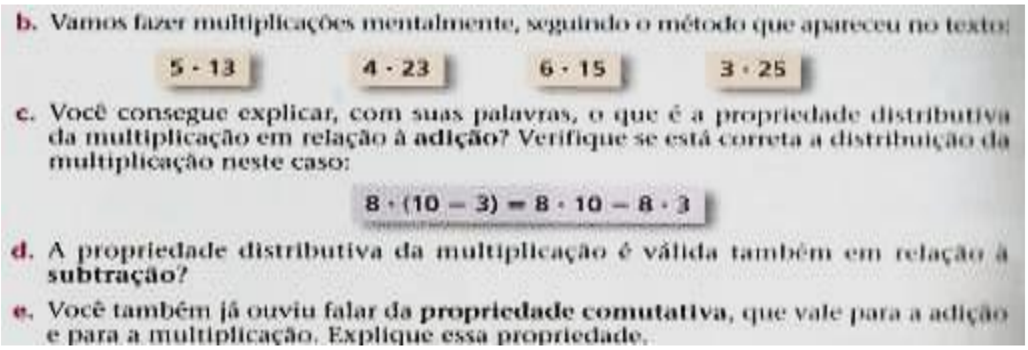
- ✓ Observar padrões e expressar generalizações verbalmente;
- ✓ Expressar generalizações, usando variáveis e outros símbolos da linguagem matemática;
- ✓ Efetuar cálculos simples, envolvendo números e variáveis.

O capítulo trata da linguagem algébrica, retomando o estudo iniciado no 6º ano, com a finalidade de usar as letras na Matemática e explorar os cálculos literais simples. A proposta dos autores foi a utilização das letras para *comunicar ideias*, por meio de um problema, isto é, generalizar relações matemáticas para comunicar o procedimento que permite calcular áreas de retângulos e problemas (números de vértices de um polígono, arestas, faces, uma corrida de táxi, entre outras situações).

O trabalho de álgebra prossegue na seção *Calculando com letras* (ibidem, p.220) por meio de atividades que visam elaborar e sistematizar técnicas que consistem em *desenvolver e/ou fatorar expressões algébricas*, ou seja, simplificar expressões algébricas, conforme apresentamos na figura abaixo.

Figura 28: Exercício sobre aplicação da propriedade distributiva
Fonte: Imenes; Lellis (2010, p. 220)

Nessa atividade, o autor propõe que seja realizada a decomposição do número 13 em duas parcelas $(6.13 = 6.(10 + 3)$ e depois que se trabalhe com a expressão algébrica, concebida como expressões que contêm letras ($6.(x + 5) = 6.x + 30$). Os procedimentos para desenvolver ou reduzir expressões algébricas se apoiam em propriedades aritméticas, tais como propriedades distributivas da multiplicação (ou divisão) em relação à adição (ou subtração). Desse modo, a álgebra é introduzida como uma extensão da aritmética, como podemos ver na figura apresentada a seguir.



b. Vamos fazer multiplicações mentalmente, seguindo o método que apareceu no texto:

5 · 13   4 · 23   6 · 15   3 · 25

c. Você consegue explicar, com suas palavras, o que é a propriedade distributiva da multiplicação em relação à **adição**? Verifique se está correta a distribuição da multiplicação neste caso:

$8 \cdot (10 - 3) = 8 \cdot 10 - 8 \cdot 3$

d. A propriedade distributiva da multiplicação é válida também em relação à **subtração**?

e. Você também já ouviu falar da **propriedade comutativa**, que vale para a adição e para a multiplicação. Explique essa propriedade.

Figura 29: Aplicação da propriedade distributiva
Fonte: Imenes; Lellis (2010, p. 222)

Observamos que, nesse momento, os estudantes são convidados a refletirem sobre o papel das letras e a utilidade delas para a álgebra (aritmética generalizada), fazendo uso do cálculo mental e das propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição.

Sobre o segundo capítulo, intitulado “Equações”, é que faremos a descrição e as respectivas análises das organizações matemáticas e didáticas.

4.10.6 Análise praxeológica sobre o ensino de equações do primeiro grau

Para as análises dos componentes praxeológicos matemáticos e didáticos, já evidenciados na metodologia sobre as equações polinomiais do primeiro grau, percebemos, no livro *Matemática*, os aspectos sobre os quais passamos a discorrer.

Equações polinomiais do primeiro grau: o estudo das equações do primeiro grau é introduzido no capítulo 11 intitulado *Equações* (IMENES; LELLIS, 2010, p.229). Esse capítulo inicia-se com um problema em que se propõe que se encontre um valor numérico. Para melhor visualizarmos isso, observemos a figura abaixo apresentada.

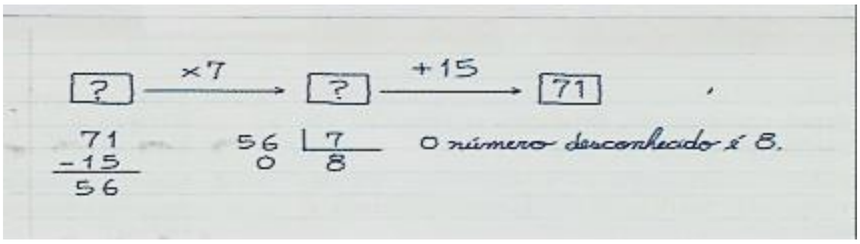


Figura 30: Introdução à noção de equação polinomial do primeiro grau
Fonte: Imenes e Lellis (2010, p. 229)

Esse é o momento do primeiro encontro do estudante com a resolução de equações do primeiro grau.

Exploração do subtipo de tarefa t_1 e elaboração da técnica τ_{TTC}: essa técnica consiste em *transpor termos ou coeficientes* (τ_{TTC}), invertendo as operações para resolver a $7n+15=71$ que corresponde ao subtipo de tarefa t_1 (resolver equações do tipo $ax+b=c$), conforme indica a figura abaixo apresentada.

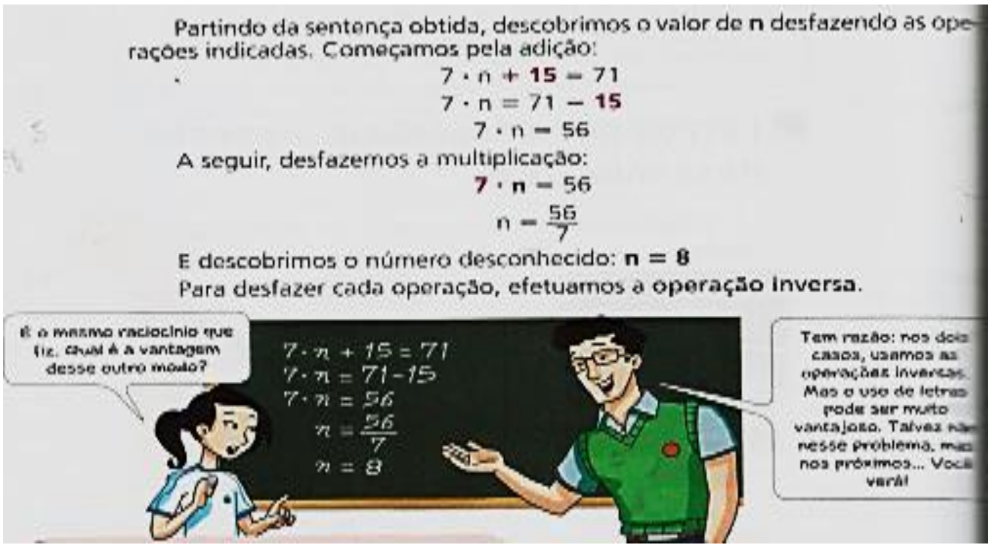


Figura 31: Resoluções de equações por meio da técnica τ_{TTC}
Fonte: Imenes e Lellis (2010, p. 230)

Nessa atividade, podemos observar que as equações são caracterizadas como sentenças que contêm letras representando valores desconhecidos.

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica τ_{TTC}: esse ambiente é constituído ao mesmo tempo dos momentos anteriores. De fato, os momentos de exploração do subtipo de tarefa t_1 e de elaboração da técnica bem como de constituição do ambiente tecnológico e sistematização ocorrem simultaneamente. Como podemos compreender, a partir da Figura 31, a sistematização da técnica τ_{TTC} é implicitamente justificada por elementos tecnológicos que constituem as *propriedades das operações inversas* (θ_{POI}), assim enunciadas: *Para desfazer as operações, efetuamos a operação inversa* (ibidem, p. 230).

Avaliação dos elementos técnico-tecnológicos: esse momento é perceptível na Figura 32, na seção *conversando para aprender* por meio das seguintes indagações.

a. Comente o diálogo final do texto. Será que, nas duas resoluções, usamos o mesmo raciocínio?

b. Considere a sentença $3 \cdot x - 8 = 31$. Explique o que devemos fazer para descobrir o valor de x.

Figura 32: Extrato com reflexões sobre equações
Fonte: Imenes e Lellis (2010, p. 230)

Assim, o estudante terá que explicitar como chegou ao valor da incógnita x, indagando as ordens das operações de subtração e, depois, da multiplicação.

Trabalho da técnica τ_{TTC}: esse momento é proposto na seção intitulada *problemas e exercícios* (IMENES; LELLIS, 2010, p.231) de modo que, ao fazerem esses exercícios, os estudantes trabalham essa técnica nas situações sugeridas pelo autor do livro.

Exploração do subtipo de tarefas t_3 e elaboração da técnica τ_{NTC}: essa tarefa é perceptível na apresentação do processo de resolução da equação $5x+4=2x+5$, fazendo-se uso da metáfora da balança de dois pratos, conforme podemos comprovar na figura abaixo apresentada.

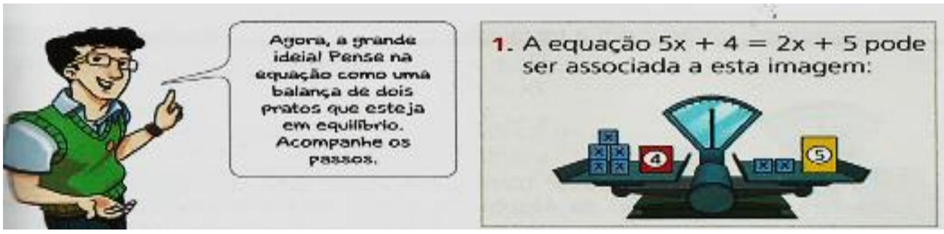


Figura 33: Extrato de modelo de resoluções de equações por meio da técnica τ_{NTC}
Fonte: Imenes; Lellis (2010, p.237).

Essa equação corresponde à realização do subtipo de tarefas t_3 (resolver equações do tipo $a_1x+b_1=a_2x+b_2$).

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da τ_{NTC}: a constituição do ambiente tecnológico ocorre simultaneamente à do momento anterior. Observa-se, a partir da Figura 33, que, ao trabalhar-se a técnica τ_{NTC} (neutralizar termos ou coeficientes) para transformar a equação do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$ em outra do tipo $ax + b = c$, subtraindo-se termos iguais nos dois membros da equação, procede-se de forma semelhante ao que se pode fazer na balança para mantê-la em equilíbrio. Essa técnica é justificada por meio das *propriedades gerais da igualdade* (θ_{PGI}), assim enunciadas:

> Nas balanças, você pode tirar ou acrescentar pesos iguais nos dois pratos, sem alterar o equilíbrio. Nas equações ocorre algo parecido: você pode somar ou subtrair um mesmo número dos lados, mantendo a igualdade. Aliás, nas equações, são possíveis mais operações que não alteram a igualdade: você pode multiplicar ou dividir os dois lados por mesmo número, que não seja zero (IMENES; LELLIS, 2010, p.237).

Esse *novo* procedimento algébrico, que denominamos de técnica que consiste em *neutralizar termos ou coeficientes* (τ_{NTC}), foi usado para transformar a equação do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$ em uma equação $ax + b = c$. Percebe-se que a última equação passa a ser resolvida por meio da aplicação da técnica τ_{TTC}. A combinação dessas técnicas dá origem à técnica mista τ_{NTC_TTC}.

Avaliação dos elementos técnico-tecnológicos: a avaliação é proposta pelo autor do livro na seção *conversando com o texto*, percebido nos questionamentos registrados na figura abaixo.

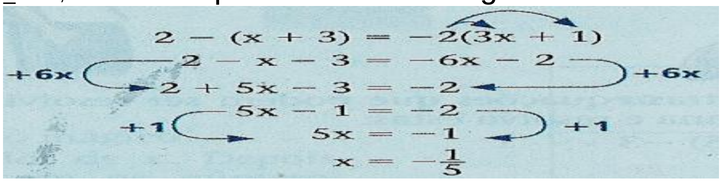
b. O que significa a expressão algébrica 5x? Que operação está indicada nela?
c. O que significa **resolver uma equação**?
d. Relacionando uma equação com uma balança de braços em equilíbrio, o que as duas têm de parecido?
e. Quanto é o triplo da terça parte da incógnita **m**?
f. Você lembra o que é simplificar uma fração? Em que ponto do texto foi feita uma **simplificação**?
g. Explique, só com palavras, o que deve ser feito para resolver a equação $2x + \frac{x}{3} = 7$.

Figura 34: Questionamentos sobre as resoluções de equações
Fonte: Imenes e Lellis (2010, p. 238)

A partir da metáfora da balança em equilíbrio, o estudante deverá analisar as duas situações e perceber as diferenças para, em seguida, explicar como resolver uma equação na forma fracionária.

Trabalho da técnica τ_{NTC}: essa técnica é proposta na seção intitulada *problemas e exercícios* (IMENES; LELLIS, 2010, p.239). Assim, ao fazerem esses exercícios, os estudantes trabalham essa técnica nas situações propostas pelo livro.

Exploração do subtipo de tarefa t_4 e a elaboração da técnica mista τ_{DRE_NTC}: essa técnica ocorre no exercício 25, com a apresentação do processo de resolução da equação $2-(x+3)=-2(3x+1)$, como, por exemplo, recorrendo-se à técnica mista τ_{DRE_NTC}, conforme podemos ver na Figura 35.



$$2-(x+3)=-2(3x+1)$$
$$2-x-3=-6x-2$$
$$2+5x-3=-2$$
$$5x-1=-2$$
$$5x=-1$$
$$x=-\frac{1}{5}$$

Figura 35: Extrato de modelo de resolução de equações por meio da técnica mista τ_{DRE_NTC}
Fonte: Imenes e Lellis (2010, p. 239)

Essa equação caracteriza esse subtipo de tarefa t_4 (resolver equações do tipo $A_1(x)=A_2(x)$).

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica τ_{DRE_NTC}: esse ambiente tecnológico acontece simultaneamente ao do momento anterior, que se realiza por meio de um exemplo resolvido. Podemos notar que essa técnica se cumpre em duas etapas:

a) desenvolver ou reduzir expressões (τ_{DRE});

b) neutralizar termos ou coeficientes (τ_{NTC}).

Ainda que essas propriedades não tenham sido mencionadas, a técnica τ_{DRE} fundamenta-se nas *propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM}), enquanto a técnica τ_{NTC} se ancora nas propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}).

Trabalho da técnica τ_{DRE_NTC}: o trabalho dessa técnica é realizado nos exercícios propostos nas páginas 239, 240, 241 (IMENES; LELLIS, 2010). Ao praticarem esses exercícios, os estudantes trabalham essa técnica nas situações propostas pelos autores livro.

A seguir, realizamos um resumo avaliativo desse livro didático e de suas organizações matemáticas e didáticas, o manual do professor e o guia do livro didático PNLD 2014.

4.10.7 Síntese Avaliativa do livro *Matemática*

Para a avaliação das organizações matemáticas existentes no livro *Matemática* em torno da resolução de equações polinomial do primeiro grau, adotamos como referência os seguintes critérios propostos por Chevallard (1999): a) verificar se os subtipos de tarefas estão bem *identificados*, acompanhados de explicações de sua *pertinência* (ou razão de ser), são *representativos* tanto em quantidade como qualidade; b) observar se os elementos técnico-tecnológicos estão *explicitados* ou não, são bem *enunciados* e *justificados.* A seguir, passaremos a descrever esses elementos de avaliação.

Identificação dos subtipos e tarefas: nesse livro os primeiros enunciados relativos à resolução de equações do primeiro grau não fazem referência à palavra *equação* e às expressões do *primeiro grau*. Os enunciados mais convencionais adotados para identificação desse tipo de tarefa só começam a ser escritos após todo o processo de oficialização do conceito de equação e de sistematização das técnicas – por exemplo, encontre o valor de n; obtenha o valor de y; descubra o valor de x; resolva as equações e solucione a equação.

Pertinência ou razão de ser: o tipo de tarefa “resolver equações do primeiro grau” é um recurso (ferramenta) a ser utilizado para resolver problemas. É o que podemos ver na figura a seguir.

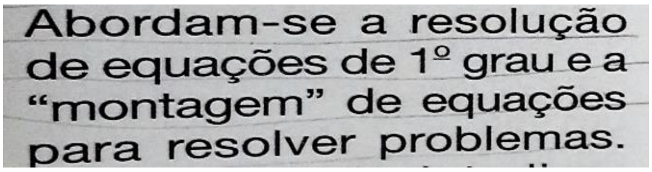

Abordam-se a resolução de equações de 1º grau e a “montagem” de equações para resolver problemas.

Figura 36: Razão de ser da equação polinomial do primeiro grau
Fonte: Imenes e Lellis (2010, p. 239).

A razão de ser das equações polinomiais do primeiro grau é explicitamente demarcada nesse livro didático em termos de aplicações, procedimentos técnicos e na interligação dos temas para resolução de problemas das equações e seu domínio na álgebra e funções.

Representatividade: os exercícios explorados sobre resolução de equações polinomiais do primeiro grau contemplam os diferentes subtipos de tarefas (t_1, t_2, t_3, t_4). No total, foram identificados 34 exercícios propostos por meio de equações, dentre os quais oito eram as equações formadas, o que corresponde a 24%, e 26 problemas, que representam 76% de todo o capítulo.

Destacamos, ainda, que esses exercícios referentes às equações formadas para serem resolvidas (por exemplo, questão 1: resolva as equações da letra a ($x + 3 = 15$) letra b, c, d...) somaram 38 equações no capítulo 11. Dentre essas equações, tomamos como parâmetro as tarefas e técnicas que autores propuseram na sequência de estudo do capítulo. No entanto, essas tarefas e técnicas podem ser resolvidas com o apoio de outras tarefas e técnicas. Assim, identificamos as tarefas registradas na tabela abaixo.

Tabela 06: Subtipos de Tarefas livro Matemática

Subtipos de Tarefas	t_1	t_2	t_3	t_4	%
τ_{TTC}	12	-	-	-	32
$\tau_{DRE\_}\tau_{TTC}$	-	04	-	-	10
τ_{NTC}	-	-	6	-	16
τ_{DRE_NTC}	-	-	-	16	42

Fonte: a pesquisa

Percebemos que as tarefas do grupo t_1 representam 32% e as tarefas do grupo t_4, 42%, ou seja, foram as mais propostas pelos autores para o trabalho na sala de aula.

Elementos técnico-tecnológicos: a álgebra é definida como uma linguagem essencial, *gramática*, formada por regras. A noção de *expressão algébrica* não é oficializada por meio de enunciados, mas utilizada como se fosse conhecida pelos estudantes. A noção de *equação* é mais ou menos oficializada como sendo *igualdades* que contêm números desconhecidos, representados por *incógnitas*.

Em relação às *técnicas* elaboradas ou sistematizadas, foram identificadas as seguintes técnicas:

- ✓ τ_{TTC}: *transpor termos ou coeficientes*, mais ou menos justificada pelas *propriedades das operações inversas* (θ_{POI}), conforme Figura 27;
- ✓ τ_{NTC}: *neutralizar termos ou coeficientes*, elaborada e justificada por meio das propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}), como na Figura 29.
- ✓ τ_{RTS}: reagrupar termos semelhantes, invertendo as operações (sinais) dos termos transpostos (Figura 31).

A partir dessas três técnicas, com auxílio da τ_{DRE} (*desenvolver ou reduzir termos*), justificada por meio das *propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM}), foram sistematizadas também as técnicas mistas:

- ✓ τ_{DRE_TTC}: *desenvolver ou reduzir termos/ transpor termos ou coeficientes*;
- ✓ τ_{DRE_NTC}: *desenvolver ou reduzir termos/ neutralizar termos ou coeficientes.*

Evolução dos subtipos de tarefas e da tecnologia: a evolução das resoluções das equações polinomiais do primeiro grau foi contemplada no quadro abaixo registrado.

Subtipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
t_1 (resolver equações do tipo $ax+b=c$).	*Neutralizar termos ou coeficientes* (τ_{NTC})	Propriedades *das operações inversas* (θ_{POI})
t_2 (resolver equações do tipo $A(x)=0$	Técnica mista τ_{DRE_TTC}, que consiste em duas etapas: a) *desenvolver ou reduzir expressões* (τ_{DRE}), para transformar a equação do tipo $A(x)=0$ em outra do tipo $ax+b=c$; b) *transpor termos ou coeficientes* (τ_{TTC})	*Propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM})
t_3 (resolver equações do tipo $a_1x+b_1=a_2x+b_2$).	*Neutralizar termos ou coeficientes* (τ_{NTC})	*Propriedades gerais da igualdade* (θ_{PGI})
t_4 (resolver equações do tipo $A_1(x)=A_2(x)$),	Técnica mista τ_{DRE_NTC}, que consiste em duas etapas: a) *desenvolver ou reduzir expressões* (τ_{DRE}), para transformar a equação do tipo $A(x)=0$ em outra do tipo $ax+b=c$; b) *transpor termos ou coeficientes* (τ_{TTC})	*Propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM})

Quadro 67: Evolução das tarefas e tecnologias
Fonte: a pesquisa

Conforme o Quadro 67, vimos que os autores sugeriram os quatros subtipos de tarefas. O trabalho vai das tarefas mais simples às que mobilizam mais elementos para a resolução das equações.

Organização didática: a transposição das praxeologias matemáticas existentes em volta dos subtipos de tarefas referentes às resoluções de equações polinomiais do primeiro grau constitui nos seis momentos descritos no quadro a seguir.

Momentos Didáticos	Critérios de Análise	Livro
PRIMEIRO MOMENTO	De maneira é feita a introdução da equação polinomial do primeiro grau com incógnita no livro?	A partir da introdução de um problema ou situação realizada para formar ou sistematizar a técnica eletiva para resolver a equação (subtipo de tarefa) procurada na situação, por meio da explicação do procedimento de resolução.
SEGUNDO MOMENTO	Como se dá a exploração do tipo de tarefas T no livro? E a elaboração de uma técnica τ relativa a esse tipo de tarefas?	É indicado nas seções denominadas *conversar para aprender*.
TERCEIRO MOMENTO	Qual a constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica?	A constituição do ambiente tecnológico é bem definido e justificado por meio das tecnologias: propriedades gerais da igualdade, propriedade das operações inversas e propriedade distributiva da multiplicação.
QUARTO MOMENTO	Como é o trabalho das técnicas?	É sugerido por meios de seções específicas, logo após a constituição das tecnologias, nas seções intituladas *problemas e exercícios*. Os autores propuseram um total de 38 exercícios para resolução.
QUINTO MOMENTO	Como se efetiva a institucionalização: no início, no meio ou ao final do livro?	A institucionalização das tecnologias ocorreu logo após a apresentação da técnica (neutralizar termos e coeficientes)
SEXTO MOMENTO	De que maneira se realiza a avaliação: no início, no meio ou ao final do livro?	A avaliação ocorre de forma explícita, ao final da institucionalização das tecnologias.

Quadro 68: Momentos didáticos constituídos no livro *Matemática*
Fonte: a pesquisa

Concluímos que a passagem de procedimentos aritméticos para procedimentos algébricos não é realizada de forma explícita, posto que os autores afirmam que há dois processos (técnicas) principais que podem ser agrupados para resolver equações, mas eles não deixam claro quais tipos de equações podem ser resolvidos, utilizando-se das operações inversas e quais tipos só podem ser resolvidos, efetuando-se a mesma operação nos dois membros da equação.

A seguir fizemos as análises do manual do Manual do Professor desse livro com os seguintes destaques, em relação ao objetivo desse capítulo:

- ✓ Conceituar equação e solução de equação;
- ✓ Compreender a lógica dos procedimentos de resolução de equações (baseados na inversão de operações e na propriedade das igualdades);
- ✓ Resolver equações;
- ✓ Resolver problemas, usando equações (incluindo problemas envolvendo proporcionalidade).

Esses são os *topos* esperado pelo autor do livro *Matemática* em relação ao trabalho docente em sala de aula e desenvolvidos pelos estudantes ao final da unidade temática.

Nesse livro ainda há um caderno de atividades que, no manual do professor, ressalta que os estudantes precisam desenvolver habilidades básicas de cálculo com ênfase no cálculo algébrico.

Em relação ao guia PNLD 2014, destaca que, a partir da

> Álgebra com uso moderado de regras, inova-se na abordagem da álgebra, buscando-se desmistificar sua dificuldade. A mesma intenção revela-se na sistematização feita sem exageros da nomenclatura e da simbologia. Os assuntos são retomados de um ano para o outro, ampliados e explorados em problemas variados e interessantes. Há equilíbrio entre o cálculo algébrico e o emprego da álgebra para modelizar situações cotidianas (BRASIL, 2014 p. 50).

Concordamos com essa avaliação em face da distribuição e integração desse conteúdo com demais. O livro traz uma boa proposta, principalmente, para não se trabalhar apenas o conteúdo em único capítulo, mas retomá-lo nos demais capítulos. Esse livro é uma referência para os demais autores de livros didáticos da educação matemática, um dos poucos livros que estiveram presentes em todas as avaliações do PNLD, no entanto essa foi a última avaliação de que a coleção participou. No PNLD de 2017, a coleção não foi inscrita. Na figura a seguir, podemos ver a distribuição dos conteúdos em cada ano do ensino fundamental.

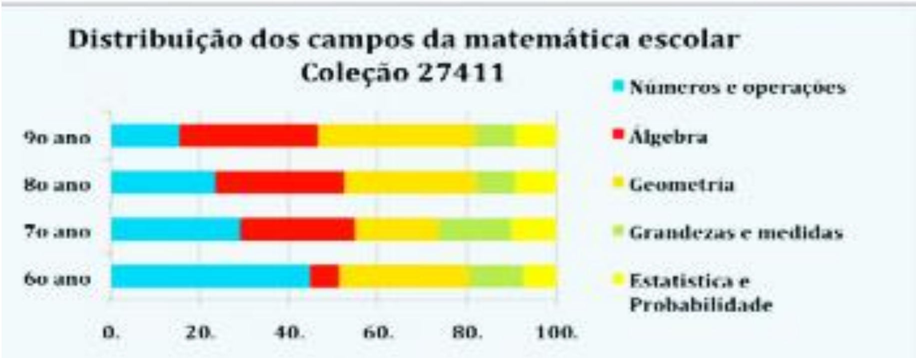


Figura 37: Distribuição dos campos da matemática escolar do livro *Matemática*
Fonte: Brasil (2015, p. 49)

Podemos observar que, nessa coleção, apesar de álgebra ter início no sexto ano, é a partir do sétimo ano que se concentra o trabalho com os conceitos algébricos, distribuídos com praticamente o mesmo quantitativo de conteúdos nos anos finais.

A seguir, analisamos o último livro didático, *Praticando Matemática*, que foi o livro de referência para as aulas do professor P3.

4.10.8 Livro *Praticando Matemática*

Nesse livro do 7° ano, os temas matemáticos são organizados em capítulos identificados por títulos que expressam as temáticas trabalhadas, as quais, por sua vez, são subdivididas em várias seções, que contemplam conceitos ou procedimentos ligados à temática maior. Em cada uma das seções, há ainda uma subseção intitulada “Algumas informações importantes”, em que se aplica o que se aprendeu e apresentam-se desafios; uma seção livre, de autoavaliação, que proporciona ao estudante interagir de maneira mais ativa com a Organização Matemática proposta; e outras duas seções destinadas à realização de exercícios.

O livro didático do 7º ano dispõe de 11 capítulos. O conteúdo referente ao conceito de equação polinomial do primeiro grau está no capítulo 9, denominado de “Equações”. Ao todo, o livro do estudante tem 288 páginas, e o capítulo das “Equações” apresenta 21 páginas, o que representa 8% do livro.

Os Conceitos algébricos: o estudo da Álgebra é introduzido no capítulo 9 intitulado *Equações* (ANDRINI; 2012 p.197), a partir de um problema relativo ao cálculo por meio de sequência de figuras em quadro, visando elaborar e sistematizar técnicas que consistem em *desenvolver expressões algébricas*, ou seja, generalizar e simplificar expressões algébricas conforme podemos ver na figura a seguir apresentada.

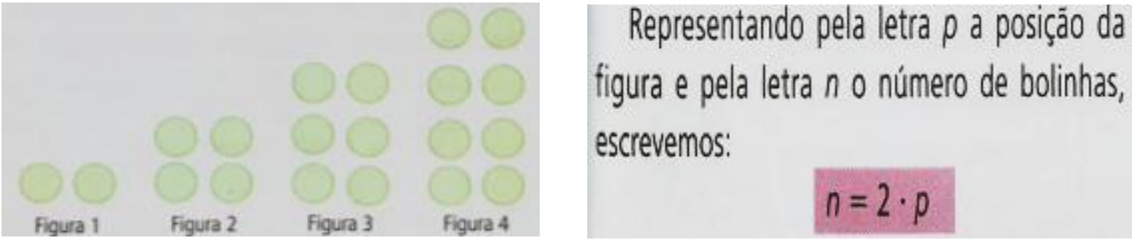


Figura 38: Exercício para introduzir a noção de expressões algébricas
Fonte: Andrini (2012, p. 197)

Podemos observar que esse é o momento do primeiro encontro do estudante com o estudo de expressões algébricas. A partir desse problema é que o autor trabalha o significado das letras nas expressões matemáticas, apresentando uma definição do que seja uma expressão algébrica.

Equações polinomiais do primeiro grau: o estudo das equações do primeiro grau é introduzido no capítulo 09 intitulado de *Equações* (ANDRINI; 2012, p. 198), que se inicia com um problema para encontrar um valor numérico, conforme podemos ver na Figura 39.

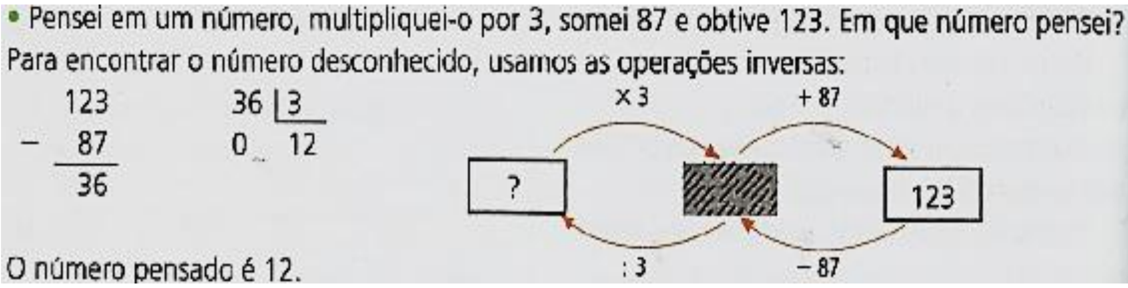


Figura 39: Introdução à noção de equações do primeiro grau
Fonte: Andrini (2012, p. 198)

Esse é o momento do primeiro encontro do estudante com a resolução de equações do primeiro grau. Por meio das operações inversas, o estudante chegará à solução do problema.

4.10.9 Análise praxeológica sobre o ensino de equações polinomiais do primeiro grau

Especificamos abaixo os componentes das análises, conceitos algébricos, das equações do primeiro grau, conforme a modelização *a priori* definida na metodologia.

Exploração do subtipo de tarefa t_1 e elaboração da técnica τ_{TTC}: nesse momento ocorre a apresentação da técnica que consiste em *transpor termos ou coeficientes* (τ_{TTC}), invertendo as operações, para resolver a $3x + 87 = 123$ que corresponde ao subtipo de tarefa t_1 (resolver equações do tipo $ax + b = c$), conforme podemos observar na figura a seguir.

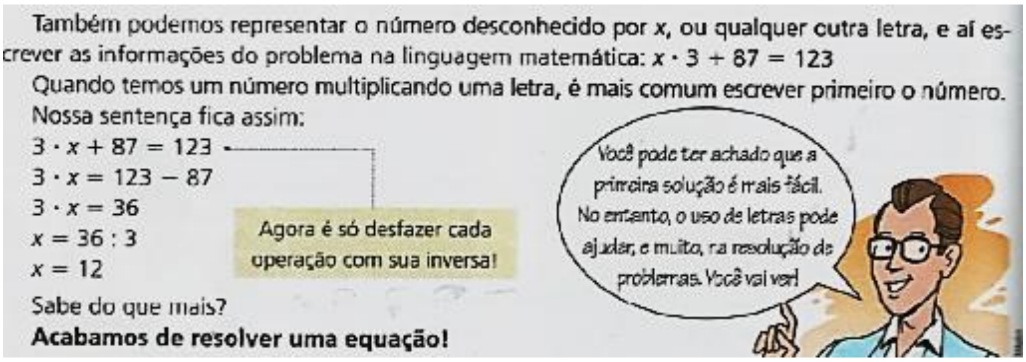


Figura 40: Resoluções de equações por meio da técnica τ_{TTC}.
Fonte: Andrini (2012, p. 198)

Nessa atividade, podemos observar que as equações são caracterizadas como sentenças que contêm letras representando valores desconhecidos.

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica τ_{TTC}: esse momento se alcança simultaneamente aos momentos anteriores. De fato, os momentos de exploração do subtipo de tarefa t_1 e de elaboração da técnica, bem como de constituição do ambiente tecnológico e sistematização, ocorrem simultaneamente. Como podemos compreender, a partir da figura acima, a sistematização da técnica τ_{TTC} é implicitamente justificada por elementos tecnológicos que constituem as *propriedades das operações inversas* (θ_{POI}), assim enunciadas: *Para desfazer as operações, efetuamos a operação inversa* (ibidem, p. 198).

Avaliação dos elementos técnico-tecnológicos: esse momento é proposto logo após a resolução da equação por meio das indagações apresentadas na figura abaixo.

Quando resolvemos a equação acima encontramos o valor do número desconhecido, que é 12. Dizemos que 12 é a **solução**, ou **raiz**, da equação, pois, substituindo-se x por 12 na equação, obtemos uma igualdade verdadeira.

Uma equação pode ter uma única solução, mais do que uma solução ou, ainda, pode não admitir solução. Observe:

- $n + 2 = 5 \rightarrow$ admite somente uma solução: $n = 3$;
- $x = x + 3 \rightarrow$ não admite soluções: um número nunca é igual à sua soma com 3;
- $y = y \rightarrow$ tem infinitas soluções, pois todo número é igual a ele mesmo.

Figura 41: Extrato com reflexões sobre equações
Fonte: Andrini(2012, p. 198)

Nessa ocasião o estudante observará o valor das incógnitas n, x, y, bem como substituirá o valor encontrado na equação para verificar se a solução é a que satisfaz a igualdade.

Trabalho da técnica τ_{TTC}: esse momento é proposto para se realizar na seção intitulada *exercícios* (ANDRINI, 2012, p.201, 202), de modo que, ao fazerem esses exercícios, os alunos trabalhem essa técnica nas situações propostas pelo autor do livro.

Exploração do subtipo de tarefa t_2 e elaboração de técnica mista τ_{DRE_TTC}: o subtipo de tarefa t_2 (resolver equações do tipo $A(x) = c$) é introduzido a partir de um problema transcrito pela equação $x + 2(x+3) = 60$, que é resolvido por meio da técnica mista τ_{DRE_TTC}, conforme figura abaixo apresentada.

$x + 2(x + 3) = 60$ Aplicando a propriedade distributiva:
$x + 2x + 6 = 60$ Como $x + 2x = 3x$, vem:
$3x + 6 = 60$
$3x = 60 - 6$
$3x = 54$
$x = \frac{54}{3}$
$x = 18$

Figura 42: Extrato de modelo de resoluções de equações por meio da técnica mista τ_{DRE_TTC}
Fonte: Andrini (2012, p. 204)

Nessa atividade, ainda se usa *sentença* para denominar as equações.

Constituição da tecnologia e sistematização da técnica τ_{DRE_TTC}: a partir da figura acima, podemos notar que o processo de resolução de equação é composto de duas técnicas: *desenvolver ou reduzir expressões* (τ_{DRE}) para transformar a equação do tipo $A(x) = c$ no tipo $ax + b = c$; *transpor termos ou coeficientes* (τ_{TTC}) para isolar a incógnita. A técnica τ_{DRE} é justificada pelas *propriedades distributivas da multiplicação* θ_{PDM}, assim enunciadas: *para encontrar o valor de x, podemos distribuir a* *multiplicação, obtendo um tipo de sentença já concebida* (ibidem, p.198). A técnica (τ_{TTC}), já descrita anteriormente, se apoia nas propriedades das operações inversas.

Trabalho da técnica τ_{DRE_TTC}: esse momento é proposto na seção intitulada exercícios (ANDRINI, 2012, p.205) a partir de atividades em que, como o próprio título sugere, faz uso da resolução de equações (sentenças) para resolver problemas escritos na língua materna.

Exploração do subtipo de tarefas t_3 e elaboração da técnica τ_{NTC}: esse momento se realiza com a apresentação do processo de resolução da equação $5x-8=3x+6$, fazendo-se uso da metáfora da balança de dois pratos.

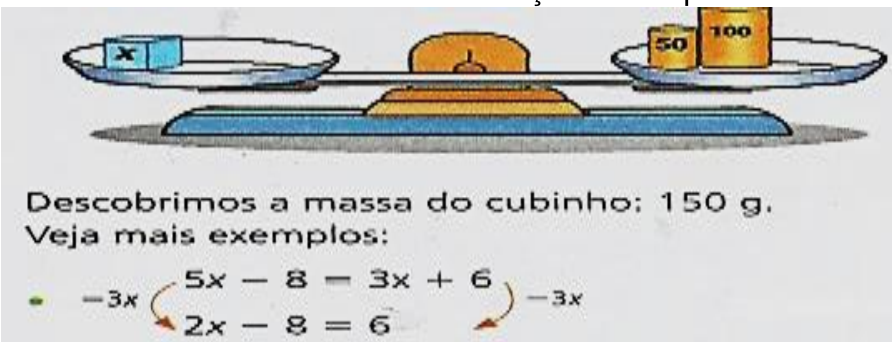


Figura 43: Extrato de modelo de resoluções de equações por meio da técnica τ_{NTC}
Fonte: Andrini (2012, p. 206).

Essa equação corresponde à realização do subtipo de tarefas t_3 (resolver equações do tipo $a_1x+b_1=a_2x+b_2$).

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da τ_{NTC}: esse momento ocorre simultaneamente ao anterior. Observa-se, a partir do extrato acima, que se faz uso da técnica τ_{NTC} (neutralizar termos ou coeficientes) para transformar a equação do tipo $a_1x+b_1=a_2x+b_2$ em outra do tipo $ax+b=c$, subtraindo-se termos iguais nos dois membros da equação, de forma semelhante ao que se pode fazer na balança para mantê-la em equilíbrio. Esta técnica é justificada por meio das *propriedades gerais da igualdade* (θ_{PGI}), assim enunciadas:

> Numa balança de dois pratos em equilíbrio, quando acrescentamos ou retiramos massas iguais dos dois pratos, o equilíbrio se mantém. Nas igualdades é parecido: você pode somar ou subtrair um mesmo número dos lados, mantendo a igualdade. E mais: pode multiplicar ou dividir os dois lados por mesmo número, mantendo a igualdade; dividir os dois membros da equação por mesmo número diferente de zero (ANDRINI, 2012, p. 206).

Desse modo, esse *novo* procedimento algébrico, que denominamos como técnica que consiste em *neutralizar termos ou coeficientes* (τ_{NTC}), foi usado para transformar a equação do tipo $a_1x+b_1=a_2x+b_2$ em uma equação $ax+b=c$. Percebe-se que a última equação passa a ser resolvida por meio da aplicação da técnica τ_{TTC}. A combinação dessas técnicas dá origem à técnica mista τ_{NTC_TTC}.

Avaliação dos elementos técnico-tecnológicos: a avaliação desse momento é proposta logo após a resolução das equações, como percebido na figura a seguir apresentada.

Substitua x por 7 na equação e faça as operações indicadas. Você obteve uma igualdade verdadeira?

Figura 44: Questionamentos sobre as resoluções de equações
Fonte: Andrini (2012, p .207)

A partir da metáfora da balança de dois pratos em equilíbrio, o estudante analisará as duas situações e perceberá as diferenças.

Trabalho da técnica τ_{NTC}: esse momento é proposto para se efetivar na seção intitulada *problemas e exercícios* (ANDRINI, 2012, p.208). Assim, ao fazerem esses exercícios, os estudantes trabalham essa técnica nas situações propostas no livro.

Exploração do subtipo de tarefa t_4 e elaboração da técnica mista $\tau_{ED\_DRE\_TTC}$: esse subtipo de tarefa é introduzido por meio da apresentação do processo de resolução de uma equação escrita com números fracionários, a equação $\frac{x+7}{3}-\frac{x}{2}=x+1$, conforme figura abaixo exposta.

$$\frac{x+7}{3}+\frac{x}{2}=x+1$$

Escrevemos as frações num mesmo denominador, usando frações equivalentes:

$$\frac{2(x+7)}{6}+\frac{3x}{6}=\frac{6(x+1)}{.\ 6}$$

Multiplicamos ambos os membros por 6 e usamos o cancelamento:

$$\cancel{6}\cdot\frac{2(x+7)+3x}{\cancel{6}}=\cancel{6}\cdot\frac{6(x+1)}{\cancel{6}}$$

$$2(x+7)+3x=6(x+1)$$

Figura 45: Atividade utilizada para sistematizar a técnica mista $\tau_{ED\_DRE\_NTC}$
Fonte: Andrini (2012, p. 210)

Constituição do ambiente tecnológico e sistematização da técnica mista $\tau_{ED\_DRE\_TTC}$: verifica-se que, a partir da Figura 41, a resolução da equação se dá em três etapas:

a) *eliminar denominadores* (τ_{ED}), multiplicando os dois membros da igualdade pelo mínimo múltiplo comum (M.M.C) dos denominadores;

b) *desenvolver ou reduzir expressões* (τ_{DRE}), efetuando os cálculos algébricos;

c) *neutralizar termos ou coeficientes* (τ_{NTC}), somando termos iguais aos dois membros da igualdade. As técnicas τ_{ED} e τ_{NTC} são implicitamente explicadas por meio de enunciados que se apoiam nas *propriedades gerais da igualdade* (θ_{PGI}), enquanto a técnica τ_{DRE} se ampara nas *propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM}).

Trabalho da técnica $\tau_{ED\_DRE\_TTC}$: esse momento é proposto para ser realizado nas seções dedicadas aos exercícios (ibidem, p. 211, 212, 213).

Ao final dessa análise, fizemos uma síntese avaliativa a qual passamos a apresentar.

4.11 Síntese avaliativa do livro *Praticando Matemática*

A avaliação das organizações matemáticas existentes nesse livro em torno da resolução de equações do primeiro grau adota como referência os critérios propostos por Chevallard (1999) e descritos nas sínteses anteriores. Assim, descrevemos os elementos da avaliação a seguir.

Identificação dos subtipos e tarefas: nesse livro, os primeiros enunciados relativos à resolução de equações polinomiais do primeiro grau não fazem referência à palavra *equação* e expressões do *primeiro grau*. Os enunciados mais convencionais sugeridos para identificação desse tipo de tarefa tem seu início após todo o processo de oficialização do conceito de equação e de sistematização das técnicas (por exemplo, encontre o valor de x; obtenha o valor de y; descubra o valor de x).

Pertinência ou razão de ser: o tipo de tarefa resolver equações do primeiro grau é um recurso (ferramenta) a ser utilizado para resolver problemas. Podemos verificar isso na figura abaixo.

neste volume, é mostrar as equações como ferramenta útil na representação e resolução de problemas, sem ofuscar as habilidades de cálculo mental, as resoluções por tentativas e por meio da Aritmética.

Figura 46: Razão de ser da equação polinomial do primeiro grau
Fonte: Andrini (2012, p. 11).

A razão de ser das equações polinomiais do primeiro grau é demarcada nesse livro didático em termos de aplicações para resolução de problemas das equações.

Representatividade: os exercícios propostos sobre resolução de equações do primeiro grau contemplam os diferentes subtipos de tarefas (t_1, t_2, t_3, t_4). No total foram identificados 94 exercícios propostos por meio de equações, dos quais 25 eram as equações formadas e 69 problemas. Destacamos ainda que nesses exercícios referentes às equações formadas para serem resolvidas (por exemplo: questão 1 – resolva as equações: letra a, b, c, d, e, f) somaram 108 equações no capítulo. Dentre essas equações, tomamos como parâmetro as tarefas e técnicas a partir das quais autores fizeram a sequência de estudo do capítulo. No entanto, essas tarefas e técnicas podem ser resolvidas com o apoio de outras tarefas e técnicas. Assim, identificamos as tarefas elencadas na tabela registrada a seguir.

Tabela 07: Subtipos de tarefas do livro *Praticando Matemática*

Subtipos de Tarefas	t_1	t_2	t_3	t_4	%
τ_{TTC}	47	-	-	-	43
$\tau_{DRE\_}\ \tau_{TTC}$	-	22	-	-	21
τ_{NTC}	-	-	10	-	9
$\tau_{ED\_DRE\_NTC}$	-	-	-	29	27

Fonte: a pesquisa

Percebemos que as tarefas do grupo t_1 representam 43% e as tarefas do grupo t_4, 27%, ou seja, essas são as tarefas mais propostas pelos autores para o trabalho na sala de aula.

Elementos técnico-tecnológicos: a álgebra é definida como uma linguagem essencial, *gramática*, formada por regras. A noção de *expressão algébrica* não é oficializada por meio de enunciados, mas utilizada como se fosse conhecida pelos estudantes. A noção de *equação* é mais ou menos oficializada como sendo *igualdades* que contêm números desconhecidos, representados por *incógnitas*.

Em relação às *técnicas* elaboradas ou sistematizadas, foram identificadas as seguintes:

- ✓ τ_{TTC}: *transpor termos ou coeficientes*, mais ou menos justificada pelas *propriedades das operações inversas* (θ_{POI}) (Figura 36);
- ✓ τ_{NTC}: *neutralizar termos ou coeficientes*, elaborada e justificada por meio das propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}) (Figura 38).

A partir destas três técnicas, com auxílio da τ_{DRE} (*desenvolver ou reduzir termos*), justificada por meio das *propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM}), foram sistematizadas também as técnicas mistas:

- ✓ $\tau_{ED\_DRE\_TTC}$: *desenvolver ou reduzir termos/ transpor termos ou coeficientes* (Figura 41);
- ✓ τ_{DRE_NTC}: *desenvolver ou reduzir termos/ neutralizar termos ou coeficientes.*

Evolução dos subtipos de tarefas e da tecnologia: o estudo da resolução de equações do primeiro grau é introduzido a partir de exploração de exercícios que correspondem à realização dos subtipos de tarefas elencadas no quadro abaixo.

Subtipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
t_1 (resolver equações do tipo $ax+b=c$).	*Transpor termos ou coeficientes* (τ_{TTC})	*Propriedades das operações inversas* (θ_{POI})
t_2 (resolver equações do tipo $A(x)=0$	Técnica mista τ_{DRE_TTC}, que consiste em duas etapas: a) *desenvolver ou reduzir expressões* (τ_{DRE}), para transformar a equação do tipo $A(x)=0$ em outra do tipo $ax+b=c$; b) *transpor termos ou coeficientes* (τ_{TTC})	*Propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM})
t_3 (resolver equações do tipo $a_1x+b_1=a_2x+b_2$).	*Neutralizar termos ou coeficientes* (τ_{NTC})	*Propriedades gerais da igualdade* (θ_{PGI})
t_4 (resolver equações do tipo $A_1(x)=A_2(x)$),	Técnica mista τ_{DRE_NTC}, que consiste em duas etapas: a) *desenvolver ou reduzir expressões* (τ_{DRE}), para transformar a equação do tipo $A(x)=0$ em outra do tipo $ax+b=c$; b) *transpor termos ou coeficientes* (τ_{TTC})	*Propriedades distributivas da multiplicação* (θ_{PDM}) *Propriedades gerais da igualdade* (θ_{PGI})

Quadro 69: Evolução das tarefas e tecnologias
Fonte: a pesquisa

Conforme o quadro acima, os autores sugeriram os quatros subtipos de tarefas. O trabalho vai das tarefas mais simples às que mobilizam mais elementos para a resolução das equações;

Organização didática: consiste na transposição das praxeologias matemáticas existentes em torno dos subtipos de tarefas referentes às resoluções de equações do primeiro grau, como descrito no quadro a seguir apresentado.

Momentos Didáticos	Critérios de Análise	Livro
PRIMEIRO MOMENTO	De maneira é feita a introdução da equação polinomial do primeiro grau com incógnita no livro?	A partir da introdução de um problema ou situação realizada para formar ou sistematizar a técnica eletiva para resolver a equação (subtipo de tarefa) procurada na situação, por meio da explicação do procedimento de resolução.
SEGUNDO MOMENTO	Como se dá a exploração do tipo de tarefas T no livro? E a elaboração de uma técnica τ relativa a esse tipo de tarefas?	É indicado nas seções denominadas de *exercícios; revisando e desafios.*
TERCEIRO MOMENTO	Qual a constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica?	A constituição do ambiente tecnológico é bem definida e justificada por meio das tecnologias: propriedade das operações inversas, propriedades gerais da igualdade e propriedade distributiva da multiplicação.
QUARTO MOMENTO	Como é o trabalho das técnicas?	É sugerido por meios de seções específicas, logo após a constituição das tecnologias. Os autores propuseram um total de 94 exercícios para resolução.
QUINTO MOMENTO	Como se efetiva a institucionalização: no início, no meio ou ao final do livro?	A institucionalização das tecnologias ocorreu logo após a apresentação da técnica (transpor termos e coeficientes).
SEXTO MOMENTO	De que maneira se realiza a avaliação: no início, no meio ou ao final do livro?	A avaliação ocorre de forma explícita ao final da institucionalização das tecnologias.

Quadro 70: Momentos didáticos constituídos no livro didático *Praticando Matemática*
Fonte: a pesquisa

Concluímos que a passagem de procedimentos aritméticos para procedimentos algébricos não é realizada de forma explícita, posto que os autores afirmam que há dois processos (técnicas) principais que podem ser agrupados para resolver equações, mas eles não deixam claro quais tipos de equações podem ser resolvidos, utilizando-se das operações inversas e quais tipos só podem ser resolvidos, efetuando-se a mesma operação nos dois membros da equação.

No que concerne ao manual do professor, esse capítulo tem como objetivo geral:

- ✓ Reconhecer a linguagem algébrica como instrumento de representação e solução de problemas.

E como objetivos específicos os seguintes:

- ✓ Descrever alguns padrões numéricos utilizando a linguagem algébrica;
- ✓ Reconhecer e resolver equações do primeiro grau;
- ✓ Utilizar equações para representar, resolver e analisar problemas.

Esses são os *topos* esperados pelos autores do livro *Praticando Matemática* em relação ao professor em sala de aula e desenvolvidos pelos estudantes ao final da unidade.

Ainda o manual do professor destaca que os autores trazem alguns comentários sobre as observações de padrões em sequências de figuras, o uso de resolução de problemas e a integração com outras áreas do conhecimento e textos complementares para o professor.

Na avaliação do guia do PNLD 2014, esse livro, em relação ao ensino da álgebra, tem a seguinte avaliação:

> Álgebra. O estudo do campo é, em geral, conduzido de modo satisfatório. A álgebra é estudada em seus vários papéis, em particular para criar modelos matemáticos para situações reais, seja por meio de equações, inequações ou funções. Os significados das letras são também focalizados. (BRASIL, 2015, p. 62).

Para a distribuição dos conteúdos, a avaliação do PNLD 2014 mostra os domínios da matemática que estão registrados no gráfico abaixo.

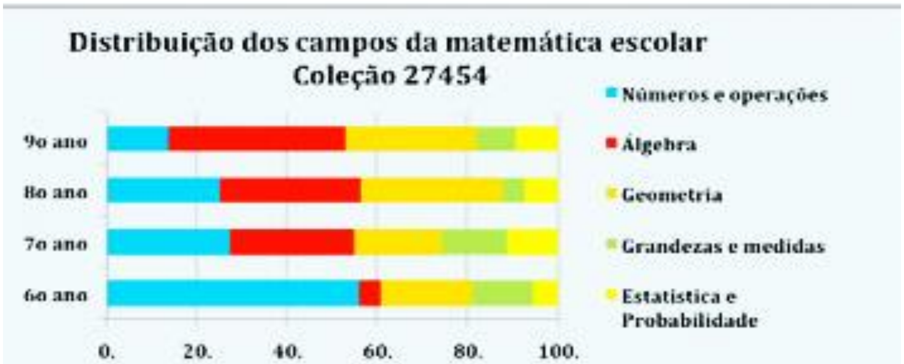


Figura 47: Distribuição dos campos da matemática escolar do livro *Praticando Matemática*

Fonte: Brasil (2015, p. 62)

Percebemos que o ensino da álgebra tem início no sexto ano, aprofunda-se no sétimo ano e vai intensificando-se até a maior concentração no nono ano. Em relação ao livro *Matemática*, os conteúdos são iguais apenas no sexto ano. Quanto aos demais anos existem diferenças no tocante à organização matemática e didática da álgebra, pois o livro *Matemática* é mais equilibrado na distribuição dos conteúdos, já na coleção *Praticando Matemática* há maior concentração no nono ano.

Após a avaliação das praxeologias matemáticas e didáticas referentes aos livros didáticos, fizemos uma síntese conclusiva dos três livros, a qual passamos a registrar.

5.12 SÍNTESE CONCLUSIVA DAS TRÊS OBRAS

Um dos objetivos de nosso estudo consistiu em analisar, identificar e caracterizar as organizações curriculares, as praxeologias matemáticas e didáticas, bem como o Modelo Epistemológico de Referência dominante nos livros didáticos e dos professores. A seguir, apresentamos os principais resultados do estudo realizado com os três livros do 7º ano.

Organização curricular

Os temas algébricos são tratados em capítulos próprios, referentes ao domínio dos números e operações nos PCN e álgebra e funções no PC/PE. No livro *Matemática*, as noções algébricas são introduzidas oficialmente por meio do cálculo algébrico. Já no livro *Tempo de Matemática*, as noções algébricas são apresentadas como um processo envolvendo igualdades que são as equações. Por sua vez, o livro *Praticando Matemática* introduz as noções algébricas oficialmente por meio do cálculo algébrico.

Organização matemática

A análise das coleções, à luz das praxeologias matemáticas relativas à resolução de equações polinomiais do primeiro grau, nos permitiu identificar as seguintes organizações matemáticas pontuais relativas ao:

(a) Subtipo de tarefa t_1 (resolver equações do tipo). Os resultados mostram que, nos livros *Matemática* e *Praticando Matemática*, os exercícios relativos a esse subtipo de tarefa foram inicialmente propostos para serem resolvidos por meio de técnica justificada por meio das propriedades das operações inversas (θ_{POI}). Já o livro *Tempo de Matemática* faz o inverso: apresenta primeiro as propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}).

(b) Subtipo de tarefa t_2 (resolver equações do tipo $A(x) = c$). Os resultados mostram que, no livro *Matemática* e no livro *Tempo de matemática*, os autores não apresentaram essa tarefa de forma explícita, já no livro *Praticando Matemática foi* apresentada a tarefa t_2. Assim, os exercícios relativos a esse subtipo de tarefas são propostos para serem resolvidos por meio da técnica mista τ_{DRE_TTC}, oficializada por meio de exemplos. Nos livros essa técnica mista implica desenvolver e reduzir a expressão $A(x)$ à forma, por meio da técnica τ_{DRE}. Essa técnica auxiliar τ_{DRE} é justificada por meio das propriedades distributivas da multiplicação (θ_{PDM}).

(c) Subtipo de tarefa t_3 (resolver equações do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$). Os resultados indicam que, nas coleções, os exercícios relativos a esse subtipo de tarefas são propostos para serem resolvidos por meio da técnica τ_{NTC}, cuja sistematização é organizada em regras que se apoiam nas propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}).

(d) Subtipo de tarefa t_4 (resolver equações do tipo $A_1(x) = A_2(x)$). Os resultados mostram que, no livro *Matemática*, os exercícios relativos a esse subtipo de tarefas são propostos para serem resolvidos por meio da mobilização da técnica mista τ_{DRE_NTC}, sistematizada por meio de exemplos. A técnica auxiliar é justificada por meio das propriedades distributivas da multiplicação (θ_{PDM}) e a técnica τ_{NTC} e por meio das propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}).

No quadro abaixo, apresentamos uma síntese da comparação feita nos itens acima.

Subtipo de tarefas	***Matemática***		***Tempo de Matemática***		***Praticando Matemática***	
	Técnica	Tecnologia	Técnica	Tecnologia	Técnica	Tecnologia
t1: $ax + b = c$	τ_{TTC}	θ_{POI}	τ_{NTC} τ_{TTC}	θ_{PGI} θ_{POI}	τ_{TTC}	θ_{POI}
t2: $A(x) = c$	Não explicita		Não explicita		τ_{DRE_TTC}	θ_{PDM}
t3: $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$	τ_{NTC}	θ_{PGI}	τ_{NTC}	θ_{PGI}	τ_{NTC}	θ_{PGI}
t4: $A_1(x) = A_2(x)$	τ_{DRE_NTC}	θ_{PDM} $\_\theta_{PGI}$	τ_{DRE_NTC}	$\theta_{PDM}\_\theta_{PGI}$	$\tau_{ED\_DRE\_TTC}$	θ_{PDM} $\_\theta_{PGI}$

Quadro 71: Comparativo das técnicas e tecnologia nos três livros
Fonte: a pesquisa

Percebemos que os três livros apresentam propostas diferentes para o ensino de equações polinomiais do primeiro grau em relação à tarefa t_1 $(2x + 8 = 17)$. Quanto à técnica de transpor termos e coeficientes, nos livros *Matemática* e *Praticando Matemática*, os autores adotam a mesma sequência para essa tarefa, no entanto, no livro *Tempo de Matemática*, o autor propõe trabalhar com as técnicas de neutralizar termos e coeficientes e transpor termos e coeficientes (método prático).

Em relação à tarefa t_2 $(x + 2(x + 3) = 60)$, apenas o livro *Praticando Matemática* fez a explicitação dessa tarefa e de uma técnica mista: desenvolver ou reduzir expressões para transformar em seguida, transpor termos e coeficientes.

Já em relação à tarefa t_3 $(5x - 8 = 2x + 6)$, os três livros apresentam a mesma sequência e as mesmas técnicas das propriedades gerais da igualdade.

No que concerne à tarefa t_4 $2(2x - 1) = 2(x + 1)$, os livros *Matemática* e *Tempo de Matemática* apresentam a mesma sequência de tarefa, enquanto o livro *Praticando Matemática* trabalhou com denominadores para apresentar essa tarefa. Em relação às técnicas (propriedades distributivas da multiplicação e propriedades gerais da igualdade), elas são iguais nos três livros.

Tendo em vista essas considerações, concordamos com Chevallard (1999) para quem o livro didático determina em grande parte a opção do professor com relação ao tipo de conteúdo a desenvolver em sala de aula e a maneira como fazê-lo, já que o aluno é uma das maiores fontes de aquisição do saber. Acreditamos que o livro didático é um meio que exerce grande influência na atuação do professor em sala de aula, pois ele se torna uma das únicas ferramentas disponíveis para o trabalho docente.

Por fim, passamos a apresentar uma comparação entre os três professores e seus respectivos livros de referência, adotados em seu cotidiano escolar, analisando as relações de cada professor com o seu livro.

4.13 Comparativo entre as praxeologias propostas nos livros didáticos e as praxeologias efetivamente ensinadas pelos professores

Neste subtópico, fazemos um resumo da comparação entre os livros didáticos, as tarefas modelizadas *a priori* e as práticas docentes realizadas em sala de aula. Iniciamos pela apresentação de um quadro em que essa síntese foi registrada.

	Subtipo de tarefas	**Técnicas**		**Tecnologia/Teoria**	
		Livro	**Professor**	**Livro**	**Professor**
P1	T_1	τ_{NTC}	τ_{NTC}	θ_{PGI}	θ_{PGI}
		τ_{TTC}	τ_{TTC}	θ_{POI}	θ_{POI}
P2		τ_{TTC}	τ_{TTC}	θ_{POI}	θ_{POI}
P3		τ_{TTC}	τ_{TTC}	θ_{POI}	θ_{POI}

Quadro 72: Comparativo do subtipo de tarefas t_1 técnicas e tecnologias dos livros e professores
Fonte: a pesquisa

Podemos perceber que os professores seguiram os livros balizadores de suas aulas e trabalharam as tarefas e técnicas propostas pelos autores. Ressaltamos uma diferença na forma de apresentação do livro de referência da professora P1: ele apresenta duas maneiras para resolver as equações, como a técnica de *neutralizar termos ou coeficientes*, método completo, seguida da técnica de *transpor termos ou coeficientes* com operações inversas (adição ou subtração), método prático. Nas aulas, P1 fez opção por trabalhar com a forma prática (método prático), pois, segundo ela, quando entrevistada, esse era o método mais simples para seus estudantes entenderem esse assunto.

O próximo quadro refere-se ao tipo de tarefa t_2 $(x + 2(x + 3) = 60)$.

	Subtipo de tarefas	Técnicas		Tecnologia/Teoria	
		Livro	Professor	Livro	Professor
P1	T_2	Não explicita	Não trabalhou	Não explicita	Não trabalhou
P2		Não explicita	τ_{DRE_TTC}	Não explicita	$\theta_{PDM\_}$ θ_{POI}
P3		$\tau_{DRE\_\_TTC}$	$\tau_{DRE\_\_TTC}$	θ_{PDM}	$\theta_{PDM\_}$ θ_{POI}

Quadro 73: Comparativo do subtipo de tarefas t_2 técnicas e tecnologias dos livros e professores
Fonte: a pesquisa

Essa tarefa t_2 não foi explicitada nos livros *Matemática* e *Tempo de Matemática*. Enquanto que o livro *Praticando Matemática* explicitou essa tarefa logo após a constituição da tarefa t_1. Ressaltamos que os dois livros de referência dos professores (P1 e P2) que não explicitaram esse subtipo de tarefa contemplaram-na nos exercícios sugeridos pelos autores para os estudantes. Os professores P2 e P3, nas atividades que propuseram em suas aulas, trabalharam com esse subtipo de tarefa. P1 não trabalhou em suas aulas a técnica alusiva a t_2 e a tecnologia que justifica essa tarefa.

O quadro abaixo apresenta a descrição da tarefa t_3 $(5x - 2 = 3x + 6)$.

	Subtipo de tarefas	Técnicas		Tecnologia/Teoria	
		Livro	Professor	Livro	Professor
P1	T_3	τ_{NTC}	Não trabalhou	θ_{PGI}	Não trabalhou
P2		τ_{NTC}	τ_{NTC}	θ_{PGI}	θ_{PGI}
P3		τ_{NTC}	τ_{NTC}	θ_{PGI}	θ_{PGI}

Quadro 74: Comparativo do subtipo de tarefas t_3 técnicas e tecnologias dos livros e professores
Fonte: a pesquisa

No subtipo de tarefa t_3, os três livros didáticos apresentaram a técnica de neutralizar termos e coeficientes bem como a tecnologia das propriedades gerias da igualdade. Em relação aos professores, P2 e P3 trabalharam a sequência proposta no livro didático, mas P1 não trabalhou em sua de aula a tarefa t_3. Quando questionada na entrevista sobre esse fato, ela justificou que, em face do tempo e do nível dos seus estudantes, procurou trabalhar com as tarefas mais simples.

O último quadro é referente à tarefa t_4 $(2(2x - 2) = 3(x + 2)$.

	Subtipo de tarefas	Técnicas		Tecnologia/Teoria	
		Livro	Professor	Livro	Professor
P1		τ_{DRE_NTC}	Não trabalhou	$\theta_{PDM}\_\theta_{PGI}$	Não trabalhou
P2	T_4	τ_{DRE_NTC}	τ_{DRE_NTC}	$\theta_{PDM}\_\theta_{PGI}$	$\theta_{PDM}\_\theta_{PGI}$
P3		$\tau_{ED\_DRE\_TTC}$	$\tau_{ED\_DRE\_TTC}$	$\theta_{PDM}\_\theta_{PGI}$	$\theta_{PDM}\_\theta_{PGI}$

Quadro 75: Comparativo do subtipo de tarefas t_4 técnicas e tecnologias dos livros e professores
Fonte: a pesquisa

A partir do quadro acima, observamos que P2 e P3 seguiram as propostas dos autores dos livros didáticos e trabalharam as tarefas mais simples até chegarem às mais complexas, que demandam mais recursos e propriedades matemáticas para a justificação das técnicas. Entretanto, P1 não trabalhou essa quarta tarefa em suas aulas, detendo-se nas tarefas de transpor termos e coeficientes com o método prático para resolver uma equação. Em relação às tecnologias, trabalhou a propriedade geral da igualdade e a propriedade das operações inversas.

Ressaltamos ainda que apenas P2 escolheu o livro *Matemática*, que chegou à sua escola. P1 e P3 escolheram outras coleções que não chegaram às suas escolas. Percebemos que o livro didático escolhido por P2 foi constantemente trabalhado em suas aulas. Já os demais professores não trabalharam com o livro *Matemática*. O ponto comum desses professores é que os livros didáticos norteiam suas aulas: P1 tomou como referência o livro *Tempo de Matemática*; P2, *Matemática*; e P3, *Praticando Matemática*. Nas entrevistas, esses professores não citaram outros livros didáticos.

Concordamos com Chevallard (2007) quando trata das relações pessoais e institucionais referentes a um objeto. Para esse autor, uma pessoa detém um conjunto de praxeologias, o que ele denominou de equipamento praxeológico (EP(x)). Segundo Chevallard (2007), esse equipamento tende a ser desenvolvido e remodelado ao longo do tempo à medida que a relação dele com os objetos é aprimorada. Essa relação é pessoal e subjetiva, ou seja, cada sujeito possui uma forma peculiar de reconhecer o mesmo objeto.

Dessa forma, percebemos que os três professores tiveram relações diferentes com o objeto equação polinomial do primeiro grau ao introduzirem-no. As professoras P1 e P2 trabalharam com a metáfora da balança de dois pratos em equilíbrio, como sugerido pelos autores de seus respectivos livros de referência. Enquanto o professor P3 não trabalhou com esse recurso, mesmo sugerido em seu livro de referência. P3 justificou isso na entrevista alegando não haver balança na escola.

Em relação às atividades docentes, verificamos que elas foram baseadas nos componentes praxeológicos matemáticos e didáticos de três livros didáticos, nos documentos oficiais e na prática efetiva dos três professores, sendo eles os organizadores das tarefas e técnicas e tecnologia de crescente complexidade (FONSECA, 2004), que são tornadas rotineiras para serem problematizadas em sala de aula. Destacamos, porém, que a professora P1 não trabalhou com as tarefas e técnicas que necessitam de recursos mais complexos para resolver as tarefas do tipo t_2, t_3 e t_4. Na entrevista, P1 justificou que não fez isso em virtude de os estudantes terem baixo rendimento escolar em decorrência dos anos anteriores. Alegou ainda a questão relacionada ao currículo escolar, sugerindo que se precisa ministrar os demais conteúdos ao longo do ano. Ressaltamos que essa professora, ao não proporcionar aos estudantes a ampliação de seu “Equipamento Praxeológico”, poderá trazer dificuldades para eles no momento em que forem enfrentar novos tipos de tarefas.

O quadro a seguir traz um comparativo entre o Modelo Epistemológico de Referência Chevallard (1999), por exemplo: o modelo aritmeticamente (t_1: Resolver uma equação do tipo $ax+b=c$; t_2: Resolver uma equação do tipo $A(x)=c$, sendo $A(x)$ uma expressão polinomial não reduzida à forma canônica) e o modelo algébrico (t_3: Resolver uma equação do tipo $a_1x+b_1=a_2x+b_2$; t_4: Resolver uma equação do tipo $A_1(x)$ e $A_2(x)$ A sendo $A_1(x)$ ou $A_2(x)$ expressões polinomiais não reduzidas à forma canônica), proposto pelos autores dos livros didáticos, e o modelo dominante dos professores construído em sala de aula.

Modelo mais frequente dos Livros		**%**	**Modelo mais frequente dos professores**		**%**
Tempo de Matemática	T_4	42	P1	T_1	100
Matemática	T_4	47	P2	T_1	46
Praticando Matemática	T_1	44	P3	T_1	67

Quadro 76: Comparativo entre o modelo dominante nos livros didáticos o modelo dos professores
Fonte: a pesquisa

Em relação ao modelo dominante nesses três livros didáticos, percebemos que nos livros *Tempo de Matemática* e *Matemática*, os autores concentram-se nas tarefas do tipo T_4 (expressões polinomiais não reduzidas à forma canônica) com quase 50% de tarefas sugeridas para o trabalho docente em sala de aula, ou seja, o trabalho com os procedimentos de resoluções de equações que não podem ser resolvidas por procedimentos que se apoiem em raciocínio exclusivamente aritmético. Já o livro *Praticando matemática* tem como modelo dominante as tarefas do tipo T_1 (equação do tipo $ax + b = c$) com 44% de proposições para o trabalho em sala, isto é, as equações que podem ser resolvidas por meios de procedimentos aritméticos.

Após o comparativo do modelo dominante dos livros didáticos, fizemos o comparativo entre esses livros e a relação de cada professor com eles. Pudemos inferir, então, que o modelo dominante dos três professores são as tarefas do tipo T_1 (equação do tipo $ax + b = c$). O professor P3 foi o único que adotou o mesmo modelo dominante do livro. As professoras P1 e P2 não concentraram o trabalho no modelo proposto pelos autores dos seus livros de referência. Destacamos ainda que P1 apenas trabalhou com esse modelo (tipo T_1) em suas aulas, pois enfocou as resoluções das equações por meios dos procedimentos aritméticos.

Em relação ao modelo algébrico funcional caraterizado por Ruiz-Muzón, Bosch Gascón (2010), não é possível seguir as três etapas desse processo. Que dizer, as resoluções das equações (tarefas do tipo T_1) são baseadas em procedimentos aritméticos, padrão clássico análise-síntese. Para resolver as equações (tarefas do tipo T_3) que não se apoiam em raciocínio exclusivo aritmético, é necessário ampliar a modelagem do sistema progressivo, denominado de primeira fase do processo de algebrização.

Para Chevallard (1989), Gascón (1994) e Bolea (2003), o modelo epistemológico dominante, na Álgebra escolar do contexto francês e espanhol, é a aritmética generalizada. As letras indicam sempre incógnitas com valor numérico a ser determinado. De forma que, coincide com o modelo apresentado em sala de aula pelos professores dessa pesquisa. Quanto ao papel das variáveis ou parâmetros, estes ficam em segundo plano bem como os possíveis significados não numéricos. Também podemos destacar que, no contexto brasileiro, temos a mesma realidade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa pesquisa teve por objetivo analisar comparativamente as praxeologias nos documentos oficiais, do livro didático e professor, referentes ao ensino de equações polinomiais do primeiro grau.

De forma que, tomamos como ponto de partida o estudo original de mestrado em que analisamos as praxeologias matemáticas e didáticas em duas coleções didáticas aprovadas nos PNLD de 1999, 2002, 2005, 2008 e 2011 sobre equações polinomiais do primeiro grau. Em face do estudo original, nesse trabalho expandimos nossas análises para os documentos oficiais (PCN e o PC/PE), os professores e os respectivos livros didáticos norteadores de suas aulas.

Isto nos norteou à seguinte problemática: as relações institucionais almejadas nos livros didáticos e documentos oficiais para o ensino da álgebra, sobre as equações polinomiais do primeiro grau, em comparação com as praxeologias efetivadas em sala de aula por professores que atuam em um ambiente institucional complexo com vários elementos que não são obrigatórios?

Nesse sentido, desde a concepção dos documentos oficiais e dos livros didáticos (Transposição Didática externa) até o professor (Transposição Didática interna), o saber passa por diversas transformações. Ou seja, para validar as organizações matemáticas e didáticas reconstruídas por meio das análises dos documentos oficiais e dos livros didáticos, é preciso compreender suas relações institucionais com o objeto matemático, a equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita, bem como observar o possível distanciamento entre os documentos oficiais, o livro didático e a prática professor na sala de aula.

A nossa hipótese foi que: o professor efetivará suas praxeologias Matemáticas e Didáticas de acordo com o livro didático que ele tem como referência em sua sala de aula e não com base em documentos oficiais e no livro didático utilizado pela escola.

Isso nos conduz às nossas principais questões de pesquisa: a) Como os documentos oficiais e livros didáticos estruturam e orientam o trabalho docente sobre as equações polinomiais do primeiro grau? b) O que é necessário para se introduzirem as equações polinomiais do primeiro com uma incógnita em uma sala de aula?

Defendemos nessa tese que: o professor oficializa os saberes em sala de aula de acordo com seu livro de referência. Entretanto, o professor, fará sua própria sequência das aulas para ministrar o conteúdo na sala de aula.

Ao final de nossa pesquisa, concluímos que, os estudos teóricos e didáticos realizados nos capítulos desta tese visaram responder as perguntas da pesquisa.

De forma geral, os professores em parte balizaram suas aulas nas sequências sugeridas pelos autores dos livros didáticos. Quanto à introdução das equações polinomiais do primeiro grau, as professoras P1 e P2 utilizaram o recurso da metáfora da balança de dois pratos. Já o professor P3 não trabalhou com esse recurso da balança e um dos motivos disso foi o fato de a escola não dispor desse recurso.

As relações pessoais e institucionais dos professores com o objeto equação polinomial do primeiro grau compuseram-se de um conjunto de praxeologias, ou equipamento praxeológico (EP(x), CHEVALLARD, 2007). Constatamos, então, que os professores são os organizadores das tarefas e técnicas e tecnologia de crescente complexidade (FONSECA, 2004), que foram tornadas rotineiras e problematizadas em sala de aula.

Assim, em relação às técnicas trabalhadas pelos professores foram de fácil utilização. Ressaltamos ainda que, os professores P2 e P3 desenvolveram as técnicas mais próximas das sugestões dos autores dos livros propuseram. Já as tecnologias trabalhadas pelos professores para justificaram as técnicas foram comuns aos três professores. Os professores P2 e P3 fizeram uso ainda das propriedades distributivas da multiplicação.

Quanto às organizações didáticas, os professores contemplaram os seis momentos didáticos, mas as sequências das aulas de cada professor foram diferentes. P2 e P3 construíram as praxeologias matemáticas a serem ensinadas (livro didático) e efetivaram as tarefas modeladas *a priori* (T_1. T_2, T_3, e T_4). P1 efetivou apenas as tarefas do T_1 de complexidade mais simples.

Em relação às entrevistas, destacamos que P1 e P3 justificaram não terem trabalhado com o livro *Matemática* em virtude do nível dos estudantes, a realidades dos estudantes. Perguntamos-lhe, então, sobre seus livros de referências. P1 disse tratar-se de “um livro que têm muitos exercícios, é resumido e explica bem o conteúdo”. E P3, por sua vez, afirmou que “a proposta didática do livro é melhor para o trabalho na sala de aula". P2, que escolheu essa coleção, disse tê-lo feito porque "o livro sempre retorna a um conteúdo, no início de cada capítulo têm as revisões".

Outro destaque da entrevista foi a seguinte pergunta: em que você se baseia na preparação das aulas? Os três professores citaram que o livro didático é fundamental para a preparação das aulas.

O modelo dominante adotado pelos três professores são as tarefas do tipo T_1 (equação do tipo $ax+b=c$). P3 foi o único que adotou o mesmo modelo dominante do livro.

Em relação ao modelo dominante nos três livros didáticos, percebemos que, nos livros *Tempo de Matemática* e *Matemática*, os autores concentraram-se nas tarefas do tipo T_4 (quase 50% de tarefas sugeridas para o trabalho docente em sala de aula), ou seja, priorizaram o trabalho com os procedimentos de resoluções de equações que não podem ser resolvidas por procedimentos que se apoiem em raciocínio exclusivamente aritmético. Já o livro *Praticando Matemática* tem como modelo dominante as tarefas do tipo T_1 (equação do tipo $ax+b=c$), com 44% de proposições referentes às equações que podem ser resolvidas por meio de procedimentos aritméticos para o trabalho em sala.

Quanto aos três livros didáticos pesquisados apresentam propostas diferentes para a introdução das equações polinomiais do primeiro grau e a sequência do capítulo do livro. Um ponto comum aos três livros é o uso da metáfora da balança de dois pratos para construir a ideia de equivalência entre as equações. Quanto as tarefas (t_1 $(x+3=5)$, destacamos que: a técnica de transpor termos e coeficientes são iguais nos livros (Matemática e Praticando Matemática), já o livro Tempo de Matemática inicia o capítulo com a técnica de neutralizar termos e coeficientes.

Em relação à tarefa t_2 $(x+2(x+3)=60)$, verificamos que apenas o livro *Praticando Matemática* explicitou essa tarefa e uma técnica mista: desenvolver ou reduzir expressões para transformar e, em seguida, transpor termos e coeficientes. No entanto, os outros livros os autores sugerem nos exercícios o trabalho dessa tarefa.

Já quanto à tarefa t_3 $(5x-8=2x+6)$, vimos que os três livros apresentam a mesma sequência e as mesmas técnicas das propriedades gerais da igualdade.

Relativamente à tarefa t_4 $2(2x-1)=2(x+1)$, os livros *Matemática* e *Tempo de Matemática* apresentam a mesma sequência de tarefa, quanto ao livro *Praticando Matemática* trabalhou com denominadores para apresentar essa tarefa.

No tocante às técnicas (propriedades distributivas da multiplicação e propriedades gerais da igualdade), verificamos que os três livros se assemelham.

No que concerne às relações institucionais, os resultados obtidos a partir das análises dos documentos oficiais e de livros didáticos indicam que, nos PCN, o ensino da álgebra não tem destaque como um domínio próprio do conhecimento matemático, estando no domínio "números e operações". Enquanto, nos PC/PE, o ensino da álgebra está no domínio da "álgebra e funções".

Os resultados obtidos a partir das análises dos documentos oficiais (PCN e PC/PE) apontam que o ensino das equações polinomiais do primeiro grau é implicitamente demonstrado como uma ferramenta para resolver problemas de contextos sociais. Além disso, esses documentos analisados não fornecem dados que favoreçam a caracterização das praxeologias matemáticas existentes em torno da resolução de equações polinomiais do primeiro grau.

Destacamos ainda que esses documentos praticamente não exercem quase nenhuma influência sobre a prática docente. Na entrevista, os professores P1 e P3 da rede municipal de ensino não citaram os documentos oficiais na elaboração dos planos de aula. P2, que é professora da rede estadual de ensino, afirmou que, na elaboração do plano de ensino, adapta os conteúdos para seus estudantes – em alguns casos, por exemplo, um conteúdo que seria ministrado no primeiro bimestre passa para o segundo ou até para o término do ano letivo. Um dos fatores pra isso se deve em parte por meio de um controle maior da secretária de educação do estado sobre os professores, quando cobram mais de seus professores, os planos de aulas, que sigam as Orientações para os trabalhos em cada unidade temática e os Parâmetros Curriculares do estadual.

Destacamos que as políticas públicas para o livro didático ainda ocorrem falhas na distribuição e aquisição dos livros didáticos como constatamos nessa pesquisa, em que o professor escolheu uma coleção para seu trabalho e a coleção não chegou a escola. Esse fato se deve também, por parte da organização das secretárias de educação que não solicitam os quantitativos de livros que atendam as demandas dos professores e estudantes. E acabam enviando pra escolas outras coleções que estão em seus depósitos, no entanto, em parte esse material acaba ficando nas bibliotecas sem o devido uso.

Por fim, no percurso desta pesquisa, em que analisamos a trajetória do saber a ensinar até o saber efetivamente ensinado em sala de aula. Constatamos que, o professor foi o mediador desse processo e, apesar de termos os documentos oficiais (PCN e PC/PE) ou outros meios didáticos, o professor opta em seguir, em parte, o que propõem os autores de livros didáticos, ou seja, o livro didático ainda exerce grande influência na sala de aula. Embora, mesmo o professor escolhendo seu livro de referência, farão adaptações no processo de ensino em sua sala de aula. Isso se deve em outros fatores: ao um currículo extenso a ser trabalhado ao longo do ano letivo, a formação inicial dos professores que pecam também no excesso de conteúdos nas graduações; as salas de aula com um número elevado de estudantes, dificultando o acompanhamento dos estudantes com maior grau de dificuldade; ao baixo nível de conhecimento dos estudantes que se acumulam aos longo dos anos letivos, constatados pelos sistemas de avaliações externas.

PERSPECTIVAS DE PESQUISAS

Neste estudo, deixamos questões em aberto para novas investigações. A primeira delas é a que trata da construção do saber em jogo pelo estudante. A segunda questão é até ponto o estudante propõe novos modelos para a resolução de equações polinomiais do primeiro grau, tendo em vista o livro didático e o professor. A terceira diz respeito à aplicação do processo de algebrização Ruiz-Munzón, Bosch e Gascón (2010). A quarta questão refere-se à possibilidade de fazer-se um estudo comparativo entre os resultados encontrados na Espanha por Bolea (2002) e Munzón (2010) com estudantes brasileiros e seus respectivos equipamentos praxeológicos.

Ao longo desses três anos, tive oportunidades de aprender e refletir sobre minha prática docente com a interação com os docentes do Programa e os colegas de turma por meio das disciplinas, seminários. As leituras dos livros, artigos, teses e dissertações contribuíram para esta pesquisa bem como as considerações dos professores nas apresentações dos seminários. Nesse tempo, tive a oportunidade de participar do 5º Congresso Internacional da Teoria Antropológica do Didático na Espanha, a ocasião em que apresentei um seminário sobre a tese.

Enfim, ao fechar esse ciclo de estudo e constituir uma nova fase de minha vida acadêmica como professor e pesquisador, estarei voltando para as minhas atividades normais no curso de licenciatura em matemática, para a regência das aulas, orientação dos projetos de pesquisa e extensão, e orientação dos trabalhos de conclusão de curso. E, partir de agora, também posso integrar o programa de mestrado de ensino de ciências e matemática. Por tudo isso, o doutorado me proporcionou um novo olhar sobre as minhas atividades acadêmicas e, principalmente, me permitirá contribuir para a formação de novos profissionais em uma universidade no interior do estado de Pernambuco.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; TERTO, L. L. Funções quadráticas nos livros didáticos: um estudo sob a ótica da resolução de problemas. In: CURI, E.; ALLEVATO, N. S. G. (Org.). **Pesquisas e práticas em educação: matemática, física e tecnologias computacionais**. São Paulo: Terracota, 2009. p. 33-50.

ALMEIDA, F. E. L.. O Contrato Didático na Passagem da Linguagem Natural para a Linguagem Algébrica e na Resolução da Equação na 7º Série do Ensino Fundamental. **Dissertação de Mestrado**, UFRPE, 2009.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da Matemática**, Curitiba: Ed. UFPR, 2007. p.218.

ANDRÉ, M. E.D.A. de. **Etnografia da prática escolar.** Campinas, SP: Papirus, 18 ed. 2011**.**

ANDRINI, A**. Praticando Matemática**, 7 / Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos. 3ª Ed. Renovada - São Paulo: Editora do Brasil, 2012 (Coleção Praticando Matemática)

ARAUJO, A. J. de, O ensino de Álgebra no Brasil e na França: um estudo sobre o ensino de equações do 1° grau à luz da teoria antropológica do didático. **Tese de doutorado**, UFPE, 2009.

ARTIGUE, M. e WINSLOW, C. International comparative studies on mathematics education: a viewpoint from the anthropological theory of didactics. **Appeared in: Recherches en Didactique des Mathématiques** vol. 31 no. 1 (2010), pp. 47-82.

ATTORPS, I. Teachers' Image of the "Equation" Concept. In: **CERME: Conference of the European Society for Research in Mathematics Education**, 3., 28 Feb. 3 Mar. 2003, Bellaria. Proceeding…Disponível em: <HTTP:// www.dm.unipi.it/~didattica/ CERME3/proceeding/Groups/TG1/TG1_ATTORPS_cerme3.pdf>. Acesso em 13 de set de 2015.

BARBOSA, Y. O. Multissignificados de equação: uma investigação sobre as concepções de professores de Matemática. 2009. 194 f. **Dissertação (mestrado em Educação em Matemática)** Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2009.

BARBOSA, E.J.T, Equação do Primeiro Grau em Livros Didáticos Sob a Ótica da Teoria Antropológica do Didático. **Dissertação de mestrado**, UEPB. 2011.

BARBOSA E. J. T.; LINS A. F.. Equação do Primeiro Grau: um estudo das organizações matemática e didática. In: **Anais do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Recife, PE, junho de 2011.

BARBOSA E. J. T.; LINS A. F.. Organizações praxeológicas: equação do primeiro em livros didáticos do 7° do ensino fundamental. In: **Anais do V Seminário de Pesquisa em Educação matemática.** Petrópolis, RJ, outubro de 2012.

BARDIN L. **Análise de conteúdo**. Lisboa, Portugal; Edições 70 LDA, 2009.

BEDNARDZ, N., KIERAN, C. et LEE, L. **Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching**. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Peblisshers, London, 1996.

BERNARD, J. E.; COHEN, M. P. Uma Integração dos Métodos de Resolução de equações numa Sequência Evolutiva de Aprendizagem . In Coaxford, A. F & Shulte, A. P. **As ideias da Álgebra.** Tradução de Domingues, H.H. São Paulo, Atual, 1995

BESSA DE MENEZES, M. Praxeologia do professor e do aluno: uma análise das diferenças no ensino de equações do segundo grau. **Tese de Doutorado**, UFPE, 2010.

BESSOT, A. **Transposition Didactique et Rapport Institutionnel.** Cours donné Le 23 octobre 2003, pour Le M2 EIAH-D, UE1<<Concepts fondamentaux de la didactique>> Laboratoire Libniz de l' Université Joseph Fourier, équipe DDM, 2003.

BOLEA, P.. El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. **Tesis doctoral.** Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza, 2002.

BOLEA, P., BOSCH, M., GASCÓN, J. (2001a). ¿Cómo se construyen problemas en didáctica de las matemáticas? **Educación Matemática**, 13/3, 23-63, 2001.

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2001b) La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 21/3, 247-304, 2001.

BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2004), La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos, **Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas***.* Recuperable en http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm

BOSCH M., FONSECA, C. y GASCÓN, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares, **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 24/2.3, pp. 205-250.

BOSCH, M. & GASCON, J.. La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A. et Margolinas, C. (Coord.), **Balises en Didactique des Mathématiques**, (pp. 107-122), La Pensée Sauvage: Grenoble, 2005.

BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra*.* In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. ***As Idéias da Álgebra***. São Paulo: Atual, 1995. **(**Parte 1: Álgebra: Idéias e Questões, Cap. 3, p. 23-36).

BOUJADDI, M. **Algèbre et généralisation en classe de seconde: 'à chacun sa vérité'***.* Mémorie profissionnel: I.U.F.M. de Grenable, 1996.

Boyer, Carl B.. **História da Matemática (2ª ed.)**. S. Paulo: Editora Edgard Blücher, ltda, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª Séries) Matemática.** Brasília, DF, 1998. 142 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Infantil e Ensino fundamental. **Guia de Livros Didáticos.** Brasília, DF, 2013, v.3, 6° a 9° séries. 55 p.

BRITO MENEZES, A. P. A.. Contrato Didático e Transposição Didática: Inter-Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação á Álgebra na 6º Série do Ensino Fundamental. **Tese de Doutorado,** UFPE, 2006.

BROUSSEAU, G. Fondementes e méthodes de la didactique dês mathématiques. **Recherche en Didactique des Mathématiques,** 7(2), 33-115., 1986.

CATALÁN, B. P.. El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. 2002. **Tesis (Doctoral en Matemáticas) –** Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, 2002.

CATALÁN, B. P.. El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. **Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano**, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza, 2003.

CÂMARA DOS SANTOS, M. Le rapport au Savoir de L'eiseignant de Mathématique en Situation Didatique; une aproche par l'approche aproche par l'analyse de son discours. Tese de doutoramento, Université Paris-X, 1995.

CÂMARA DOS SANTOS, M. A relação ao conhecimento do professor de matemática em situação didática: uma aboradagem pela análise de seu discurso. **Anais da XX Reunião da ANPEd**. Caxambu, MG. (mímeo), 1997.

CARVALHO, J. B. P.; LIMA, P. F. Escolha e uso do livro didático. In: **Matemática: Ensino Fundamental.** João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho/coord. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. (Coleção Explorando o Ensino, v. 17, p. 15-30). Disponível em: portal.mec.gov.br/index.php? option=com_docman&task. Acesso em maio de 2015.

CHACON, A. M. A. La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques : Etude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica. **THÈSE Du Doctorat** De L'université De Toulouse Délivré par l'Université Toulouse III – Paul Sabatier en *Didactique des Disciplines Scientifiques et Technologiques* Spécialité : Didactique Des Mathematiques. 2008.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M., GASCÓN, J.. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.** Tradução: Daisy Vaz de Moraes, Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

______. Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège: l'évolution de la transposition didactique. In: **Petit X** n° 5, IREM, Grenoble, 1984.

______. Le passage de l'arithmetique a l'algebre dans l'enseignement des mathematiques au college. Deuxieme partie. In: **Petit x** n° 19, IREM de Grenoble, pp.43-75, 1989.

______. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L'approche anthropologique. **Actes de l'U.E. de la Rochelle**, 1998.

______. Le passage de l'arithmetique a l'algebre dans l'enseignement des mathematiques au college. Deuxieme partie. **Petit x** n° 19, IREM de Grenoble, pp.43-75, 1989.

______. Le passage de l'arithmetique a l'algebre dans l'enseignement des mathematiques au college. Troisieme partie. **Petit x** n° 30, IREM de Grenoble, pp.5-38, 1990.

______. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L'approche anthropologique. **Actes de l'U.E. de la Rochelle**, 1998.

______. Organiser l'etude 1. Structures et Fonctions, in Dorier, J – L. Et al (eds) **Actes de la 1 lieme Ecole d'ete de didactique des mathematiques** – corps –21–30 Aout 2001, Grenoble: La Pensée Sauvage, pp 3–22.

______. Dimension ibstrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique.**Séminaire de didactique des mathématiques et de L'informatique de Grenoble.** LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble, 1991.

______. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L´approche antropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Vol 19, nº 2, pp. 221-266, 1.999.

______. **La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado.** Editora Aique, Argentina, 1991.

______. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Em ruiz-Higueras, L.; Estepa, A.Garcia, F.J. (Eds). Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de La teoria Antropológica de La Didática. (pp. 705-746). Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007.

CHIZZOTTI, A. **A pesquisa em ciências humanas e sociais.** São Paulo, 6 ed. Cortez Editora, 2003.

COTRET, R. S. Problématique à propos de la mise en équation de problèmes écrits. **IX Séminaire Franco-Italien de Didactique de l´Algèbre**, p. IX-23 – IX-37, 1997.

D'AMBROZIO, U.. **Educação Matemática**: Da Teoria A Prática. – 14° Ed – Campinas Sp: Papirus, 1996.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática.** Tradução: Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. 449 p.

DREYFUS, T., Hoch, M. Equations: A structural approach. **Proceedings of the 28th Conference Of Internatoinal Group for the PME**, 2004, p. 1-152 – 1-155

FIORENTINI, D. **Investigação em Educação Matemática: Percursos Teóricos e Metodológicos** / Dario Fiorentini, Sérgio Lorenzato. - 8. Ed. Rev. – Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

FIORENTINI D; MIORIM, M. A; MIGUEL, A. As concepções de educação algébrica. **Pro-Posições**. São Paulo: Cortez, 19 mar, v.1, n.1, p.39-54, 1993.

FONSECA, C. (2004), Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Enseñaza Secundaria y la Enseñaza Universitaria. **Tesis Doctoral.** Departamento de Matemática Aplicada I. Universidad de Vigo, 2004.

FONSECA, C., BOSCH, M., GASCÓN, J. (2007). El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la «Regra de Ruffini». En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), **Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)** (pp. 139-158). Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén., 2007.

FREITAS, J. L. M. Produção de Provas em Aritmética-Álgebra por Alunos Iniciantes de Licenciatura em Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, Recife. **Anais do VIII Encontro de Educação Matemática**, Recife, PE, 2004.

GALVEZ, G.. **A Didática da Matemática / In. Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas** Cecília Parra, Irma Saiz...[et. al.]; trad. Juan Acuña Liorens. Porto Alegre: Arte Medicas, 1996.

GARCÍA, F. F. Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra. In: **Revista de Didáctica de las Matemáticas***.* Número 14, ano IV, outubro de 1997. Barcelona: Graó.

GARCÍA, F. J.. La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales (**Tesis doctoral no publicada**). Universidad de Jaén, 2005.

GASCÓN, J.. Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. **Recherches en didactique des mathématiques***, 13*(3), 295-332, 1993.

GERMI, P. E. Statut des lettres et notion de variable*.* **Petit x**, número 45, p. 59- 79. Grenoble/França, 1997.

GUELLI, O. **Equação: O Idioma da Álgebra.** Contando a História da Álgebra. São Paulo – SP, Editora Ática, 2005.

HENRY, M.. **Didactique des Mathématiques: sensibilizations à la didactique en vue de la formation initiale dês ensignants de mathématiques.** Laboratoire de Mathématiques – IREM, Besançon, 1991.

IMENES, L. M. **Matemática**. Imenes & Lellis. Obra em 4 v. para alunos de 6° ao 9° ano. São Paulo: Moderna, 1ª ed. 2010.

KAPUT, J. (2005) **Teaching and learning a new algebra with understanding**. Documento retirado de http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/KaputAlgUnd.pdf em 22 de Janeiro de 2014.

KIERAN, C. The learning and teaching of algebra. Montreal: Université du Québec à Montréal, 1992.

______. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. **As Idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

______. Learning and teaching Algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F.K. Lester, Jr., (Ed.), **Second Handbook of research on mathematics teaching and learning** (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing, 2007.

LIMA, R. N. Equações algébricas no ensino médio: uma jornada por diferentes mundos da Matemática. 2007. 358 f. Tese (**Doutorado em Educação Matemática**) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

LEE, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. Em: BEDNARZ, N.; KIERAN, C. & LEE, L. (Eds.) (1996). **Approaches to Algebra: Perspectives of Recearch and Teaching**. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 87-106.

LIMA, I. De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs : étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale. **Thèse d'Université**, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2006

LINS, R. C; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. 4 ed. Campinas: Papirus Editora, 1997, 176 p.

LOPES, Alice Casimiro. **Currículo e Epistemologia**. Ijuí: Editora Unijuí, 2007, p. 205–228.

LUCAS, C. Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas. 2010. 256 p. Tesina (**Diploma de Estudios Avanzados: Programa Doctoral de Técnicas Matemáticas Avanzadas y sus Aplicaciones) –** Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo, Vigo, 2010.

NAME, M. A. **Tempo de Matemática**, 7: ensino fundamental, 2 ed.- São Paulo: Editora do Brasil, 2010

NCTM. ***Princípios e normas para a Matemática escolar*****.** Lisboa: APM, 2007.

NOGUEIRA, R.C.S, A. Álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental: Um análise praxeológica. 2008. **Dissertação de mestrado**, UFMT.

OLIVEIRA, A. T. de C. C. de. Reflexões sobre a Aprendizagem da Álgebra. **Educação Matemática em Revista**. SBEM, nº. 12, Ano 9, p.35-39, junho/2002.

PAIS, L.C. **Didática da Matemática: uma análise da influência Francesa.** Belo Horizonte: Autêntica, 2. Ed., 2002. 128p

______. **Ensinar e Aprender Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006. 152p

______. Transposição Didática. In: **Educação matemática**: uma (nova) introdução. Org. Silvia Dias Alcântara Machado. 3 ed. Revisada. São Paulo: EDUC, 2010.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco- Recife, 2012.

PITOMBEIRA, J. B.& LIMA, P. F. O PNLD *e* sua influencia sobre os livros didáticos. Rio de Janeiro: **Em aberto,** 2002.

RAVEL-BUENO, Laetitia. Des programmes a la classe: etude de la transposition didactique interne: exemple de l'arithmétique en terminale S spécialtité mathématique. 2003. **Tese (Doutorado em Matemática e Informática)**. Universidade Grenoble I Joseph Fourier, Grenoble, 2003.

Ribeiro, A. J. Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP. São Paulo, 2001. 116 p. **Dissertação (Mestrado em Educação Matemática).** Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

__________. Equação e seus Multisignificados no Ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico. São Paulo, 2007, 142p. **Tese (Doutorado em Educação Matemática).** Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

ROMANATTO, M. C. A Coleção didático: alcances e limites. In: **Encontro Paulista de Matemática**, 7, 2004, São Paulo. Anais... São Paulo, 2004. Disponível em: <www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas.../mr19-Mauro.doc>. Acesso em: 20 de janeiro de 2013.

SANTOS, M. R. dos**-** A Transposição Didática do conceito de área de figuras geométricas planas no 6º ano do ensino fundamental: um olhar sob a ótica da teoria antropológica do didático. 2015. 281 f. **Tese (doutorado em Ensino das Ciências e matemática)** Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, PE, 2015.

SANTOS, A.B.C dos- Investigando epistemologias espontâneas de professores de matemática sobre o ensino de equações do primeiro grau. 2014. 124 f. **Dissertação (mestrado em Educação matemática).** Universidade Federal do Pará, Belém, PA, 2014

RUIZ-MUNZÓN, N. La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional. 2010. 2 v. **Tesis (Doctoral en Matemáticas)** – Departamento de Matemática, Universitat Autónoma de Barcelona, Barcelona, 2010.

RIBEIRO, A. J.. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática** - Diciembre DE 2008 - NÚMERO 16 - PÁGINA 172.

RUIZ-MUNZÓN, N. (2006). Ecologia de la modelització algebraico-funcional al Batxillerat. **(Memoria de investigación, Diploma de estudios avanzados),** Universitat Autònoma de Barcelona, 2006.

RUIZ-MUNZÓN, N., BOSCH, M., GASCÓN, J. La algebrización de los programas de cáculo aritméticos y la introducción del álgebra en secundaria. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A Sierra, (Eds.), **investigación en educación Matemática** XIV (pp. 545-556. Lleida: SEIEM, 2010.

SANTOS, Wildson Luiz; CARNEIRO, Maria Helena da Silva. Livro Didático de Ciências: Fonte de informação ou apostila de exercícios. In: **Contexto e Educação**: Ano 21. Julho/dezembro, Ijuí: Editora Unijuí. 2006.

SIERRA, T. (2006). Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes continuas. Madrid: **Colección digital de tesis de la Universidad Complutense de Madrid**, 2006.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 23 ed. rev. e atual. São Paulo: Cortez, 2007.

SILVA JÚNIOR, C. V. Critérios de Adoção e Utilização da Coleção Didático de Matemática no Ensino fundamental e a Participação do Professor na Adoção: **o caso do agreste de Pernambuco. 2005. 144 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências e matemática) Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, PE, 2005.**

SILVA JUNIOR, C. G. da. REGNIER, J.-C. Critérios de adoção e utilização do livro didático de matemática no ensino fundamental do nordeste brasileiro. In: **4e Rencontres Internationales: Analyse Statistique Implicative,** Castellon (Espanha). Proceedings. Castellon (Espanha): Universidade JAUME I, 2007.

TELES, R.A.M. A Aritmética e a Álgebra na Matemática escolar. Educação Matemática em Revista**. São Paulo, Ano 11, n. 16, p 8-15, maio. 2004.**

TELES, R.A.M.. A relação entre Aritmética e Álgebra na Matemática escolar: um estudo sobre a influência da compreensão das propriedades da igualdade e do conceito de operações inversas com números racionais na resolução de equações polinomiais do 1º grau . **Dissertação (Mestrado em Educação**). Universidade Federal De Pernambuco, Recife, PE, 2002.

APÊNDICES

APÊNCICE A – AS AULAS DOS PROFESSORES

Aulas de P1

Aula 01

P1 – Hoje vamos iniciar o assunto “Equações do primeiro grau”. Alguém sabe aqui o que é uma equação? Pra que usamos equações em nosso cotidiano? Vamos usar as letras para resolver operações. Acredito que todos conhecem a balança de dois pratos. [Alunos respondem “Sim, aquela usada na feira”]. Isso mesmo. Ela serve pra quê? Pra pesar, não é isso? Quando coloco pesos iguais nos dois pratos o que irá acontecer? Vai ficar igual, ou seja, em equilíbrio. Assim, é uma equação.

A professora faz o desenho no quadro da balança (exemplo do livro x+3=50). Adotou a sequência do livro, p. 93, explicando os elementos que compõem a equação: o sinal de igualdade, o primeiro membro, em que deve ficar a incógnita (a parte com letra), e o segundo membro, os números; Então, são os termos da equação x+3=50.

Aula 02: Exercício de fixação do livro página, p. 93

1º) Quais sentenças são equações?

a) 3x+1=16;
b) 2x+4<12

2º) Dada a equação 5x-7+x=8 -2x, responda.

3º) Indique a incógnita de cada equação.

4º) Separe as equações com uma incógnita e as equações com duas incógnitas.

Correção do exercício em sala com alunos:

Primeira questão: Quais são equações: letras a, c, d, e. As outras letras não são, pois não têm o sinal da igualdade.

Segunda (questão: letra a) primeiro membro (5x-7+x); letra b) qual o segundo membro (8-2x); letra c) (7) e letra d) (8).

Terceira questão: letra a); letra b) y; letra c) z; e d) a incógnita é x.

Quarta questão: uma incógnita: letras a, b, d. Duas incógnita: letras c, e, f.

Aula 03: Conjunto universo e conjunto solução de equação

Exemplo x+7=10. Pessoal, vou procurar um número que satisfaça a minha igualdade, que não sei ainda o valor de x, somando 3, ficarei com 10. Quero... podemos pensar: vamos ver o 2+7=9. O valor não é igual a dez. Então, temos que procurar o valor que torne verdadeira minha sentença. Vamos pensar no 3: 3+7=10. 10=10, pessoal. Então, a solução ou raiz desta equação é 3, pois, se eu somar os valores, os valores serão iguais.

Exercício de fixação do livro página pág. 94:

Encontrar o valor desconhecido; exercício do livro 5, 6,

Quinta questão: Em que número Fabíola pensou: um número natural que, adicionado a 6, é igual a 15. Pode ser o 7? Não, porque, se somamos 8+6, o resultado será 14. Então, o número será 9. Vamos ver 9+6=15? O número que ela pensou foi o 9.

Sexta questão: Descubra mentalmente o número que falta.

Letra a) 8 +10=18; letra b) -14+10=-4; letra c) 13-6=7; letra d) 6-8=-2

Aula 04: Exercício de fixação do livro página p. 94. Continuação, questões 7 e 8.

Sétima questão: Qual número Roberto pensou? 7 x 5=35

Oitava questão: Descubra mentalmente os números em cada igualdade.

Letra a) 7x 3 = 21; letra b) 18 x 0,5= 9; letra c) 15 : 5= 3; letra d) 12=24:2

Aula 05: Dizemos que é uma equação do primeiro grau quando o expoente da incógnita for igual a 1 (Definição do livro *Tempo de Matemática*).

Exemplos: 7x-10=0 $\longrightarrow$ a equação de primeiro na incógnita x;
Y+6=2y $\longrightarrow$ a equação de primeiro na incógnita y;
z/2+1=5/3 $\longrightarrow$ a equação de primeiro na incógnita z;
Resolução de equação do 1º grau com uma incógnita em Q

A professora faz os dois exemplos da página 95. Exemplo 01: x-3=7. Nas equações, já sabemos que há o primeiro membro antes da igualdade, onde fica a incógnita, e depois da igualdade, a parte numérica. Então, vejamos que o x está no lugar certo. E o menos três? Não, lembra da balança para se manter o equilíbrio? O que faço? Adiciono ou subtraio valores iguais e manterei o equilíbrio. Aqui, podemos adicionar o oposto de menos 3, ou seja, o mais 3. X -3+3=7+3. O resultado fica o seguinte: x (menos três mais três) e 7+3. Assim, x=10. Veja que o menos três sumiu com o seu oposto. Logo, a solução é 10.

Exemplo 02: x+4=9. Ou faço direto, basta eu mudar de membro, invertendo o sinal: X = 9-4; x=5. Veja que fiz passar o número com sinal trocado e fazer a operação. Este o modo prático. Solução é 5.

Ainda escreveu no quadro a observação do livro da página 95. Subtraindo de um, passa adicionado no outro membro; ou adicionando em membro, passa subtraindo no outro membro.

Multiplicar ou dividir os dois membros da igualdade seguindo a sequência do livro p. 96

Por exemplo:

5x=30 Qual é operação inversa da multiplicação é a divisão;
Se o 5 está multiplicando ela vai para o segundo membro dividindo.
X=30/5
X=6 conjunto solução S=(6)
x/2=7 Agora o dois está dividindo vou passar para o segundo membro multiplicando.
X=7.2
X=14 conjunto solução S=(14)

Aula 06: Exercício de fixação

Primeira questão: Resolva as equações, sendo x um número racional.

a) X+4=10;

b) X+1=9
c) X-2=8
d) X+3=3
e) X+101=300
f) X-234=237
g) X+7=2
h) X+9=-1
i) X-8=10
j) 10+x=15
k) 14+x=9

Fez a correção do exercício em classe com os alunos de forma prática, invertendo o sinal dos números. Como o livro, classifica de forma prática.

Aula 07: Exercício

1º) Resolva as equações;

a) 5=x+3
b) 72=48+x
c) 7=10+x
d) 0=x+18
e) -7=x+50

2º) Resolva as equações:

a) 3x=12
b) 4x=28
c) 7x=0
d) 9x=18
e) 48=12x
f) 4x=20
g) 35x=105

Aula 08: Exercício de fixação

Observe o exemplo: -7x=-14 (-). Você vai multiplicar por menos 1 toda a equação para que a incógnita fique positiva e depois respondo normalmente a equação.

Então: 7x=14

X=14/7

X=2 conjunto solução S(2);

a) –x=-7
b) –x=-7
c) -8x=-16
d) –x=-4
e) -6x=3
f) 45=-3x
g) 60=-5x
h) -30x=10

Segunda questão: Resolva

a) x/2=8

b) 3x/4=8
c) x/4=-5
d) 2x/5=-4
e) 2x/3=10

Aula 09: Exercício da p. 99 (balança de dois pratos)

As questões 26, 27 e 28.

Exercício da página 100.

Questão 29: letras a, b, c, d, e, f g.

Redução de termos semelhantes

Aula 10: Aulas baseadas no livro *Matemática*

1) Identifique as sentenças que representam equações.
2) Qual das equações o resultado é 5?
3) Encontre a solução de cada equação.

A professora explica o exercício aos alunos: "A primeira questão, vocês já sabem o que são equações que têm a incógnita e o sinal de igualdade. Destas sentenças, quais são equações? A letra A é uma equação? E a letra B é? Não. A letra C é. A letra D é. A letra E tem o primeiro membro e o segundo membro, mas não tem o valor de x. Letra F não, pois não temos a sinal de igualdade.

Segunda questão: Qual destas letras – a, b, c e d – tem solução igual a 5? Eu vou observar aqui que a letra b, por quê? Se eu colocar aqui letra b no lugar do x, o resultado será verdadeiro. Se eu colocar 5 mais 3, é igual a 8. Mas aí eu observo se as outras letras têm mais alguma resposta verdadeira. Não temos mais respostas corretas.

Terceira questão: Qual o número que somado a 4 dá 10? Então, o número não está aí. Você vai colocar o x no primeiro membro. Então x+4=10. Você faz a conta e coloca a resposta. Na letra b: qual o número que, somado a 7, é igual a 2? Letra c: qual o número que, somado com 9, dá -1?

E o quarto quesito será do livro, p. 231. No primeiro quesito, letra a, b, c. Certo?

Os alunos fazem o exercício. Em seguida, tem início a correção.

Primeira questão: Oh! Neste primeiro aqui, a gente vai ter que marcar as letras que são equações. A equação tem que vir com o sinal de igualdade, tem que ter o primeiro membro e o segundo membro, e tem que ter a incógnita. Quais aqui são equações? Letras a, b e c. Letra d não tem incógnita não, parece uma equação, mas não é. Eu vou descobrir o valor de quem aqui? Letra f não tem o sinal de igualdade. Então, só as letras a, b, c são equações. As letras d e E não são.

Na segunda, quais das equações têm solução igual a cinco? Letra b. Bem simples: se coloca aqui no lugar do x e verifica o resultado. Então 5+3=8. Então o primeiro membro será igual ao segundo membro. Realmente os valores serão iguais.

Na terceira, qual o número que, somado a 4, dá 10? Então, vamos montar a equação. O número eu sei qual é, não? Então, coloco x+4=10. Se eu quiser resolver, faço o quê? X é igual a 10 menos 4, então x é igual a 6.Qual o número que, somado com 7, dá 2? Então, eu não sei o número. Coloco x+7=2. Vou descobrir, x é igual a 2. Aqui o sete está positivo, ele vem pra cá negativo. O resulto será 5 positivo? [Os alunos: Não!] Ah! Estou tirando do menor para o maior. Ficará menos 5.

O próximo x+9=-1. Então, se eu colocar aqui, x vai ser igual a -1. Aqui está o 9, está positivo, passa ele negativo. Sinais iguais, o que fazemos? Soma e repete-se o sinal, menos 1 com menos 9, é igual a menos 10.

Observação, pessoal: a letra, quando falei, se tiver o número e a letra junto do número, está multiplicando o número.

Aula 11: O exemplo de uma equação x+5=10. Vamos lá! Quando eu olho pra a incógnita, se ela estiver positiva no segundo membro, passa pra o primeiro membro negativa. Se estiver no primeiro membro e for passar para o primeiro membro, faço a mesma coisa, mudo o sinal. Certo? Então vou passar um exercício. Vou escrever do primeiro até o quarto, o quinto será uma questão do livro. Aí vocês vão escrever do livro no caderno, formar grupos e responder. Certo, gente?

E do livro, qual é a primeira questão? A letra a é 11n+77=132. Então, vou observar o primeiro membro e segundo membro. Então, no primeiro membro, ficará o número que está com a incógnita. Qual é o número que está com a incógnita? 11n. Então, a incógnita é n. 11n será igual a quem? 132. No segundo membro, ficarão apenas os números. O 132 já está no segundo membro. Precisa mudar o sinal? Não, mas eu tenho 77, que está no primeiro membro e é positivo. Se ele tem que ir para o segundo membro, ele mudará de sinal. Então, 11n=132-77... 11n= 55... Agora, preciso descobrir um número que, multiplicado por 11, seja igual a 55. Então, como vou descobrir? N= 55/11, n= 5. Então, se eu colocar aqui no lugar do n o 5? Oh! 11vezes 5 é igual a 55. Então, está correto, não é isso?

Na letra B, 7n-17=200. Vamos descobrir quanto vale n? Eu faço o que agora? Vou separar os membros da equação e resolver. Então, 7n primeiro membro, que é o número que está acompanhado da letra. Então, 7n=200. Aqui está negativo o 17, tem que passar pra lá, vai positivo. 7n é igual a 217. N=217/17, faço a continha ao lado de 217/17. Dois dá pra dividir por 7? Não. Vou pegar o 21 e dividir por 7. É 3. Três vezes sete é igual a 21, 21 menos 21, zero. Baixo o que agora? O sete. Sete pra dividir por sete é igual a 1. Uma vez sete menos sete, zero, está feita a divisão. O resultado é 31.

Letra C: como que faço a letra c 4n+5=7? 4n vai ficar no primeiro membro igual a 7, menos o 5 (pois ele está positivo, vai para o segundo membro negativo) fica agora 7 menos 5. 4n é igual a 7 menos cinco 2. 4n=2,

N=2/4 dá pra dividir? Dá, mas dará um número decimal. Se eu não quiser dividir, posso simplificar, por quanto? Por 2. Faço 2/2 é igual a 1 e 4/2 é 2. O resultado fica ½.

Letra D: 8n+52=12. Vamos lá, 8n. Tem mais alguma coisa com letras? Não. Coloco o sinal de igual depois da igualdade quem vem o 12 (está positivo, permanece positivo) e o 52 está no primeiro membro, vai para o segundo negativo. Então, agora 8n=12-52. Tenho apenas 12 reais e estou devendo 52. Ficarei devendo ainda 40, n= -40/8. O resultado será menos 5.

Aula 12: *Exercício de fixação:*

Letra (a) –x=-7. Aqui nós vamos multiplicar por menos um (-1), porque, toda vez que a minha incógnita estiver negativa, eu multiplico para poder resolver. Então, a partir deste x, ou pode ser: y, a, z.. Não pode ser negativo. Se, por exemplo, o x fosse positivo, não precisaria multiplicar, poderia resolver. Como aqui está negativo, tenho que multiplicar com menos um (-1) ambos os lados, primeiro membro e o segundo membro. Quando vou multiplicar por menos um (-1), vou mudar todos os sinais da equação. Quem é negativo ficará positivo. Então, menos vezes do –x ficará positivo. E, com o sete negativo, faço a mesma coisa: menos vezes -7 ficará sete positivo. A minha equação ficou x=7. Não preciso colocar o sinal do sete, pois ele é positivo.

Letra (b). Agora eu tenho que -8x=16, a minha parte que vem com a incógnita está negativa. Eu posso resolver esta equação com isso aqui negativo? Não. Tenho que fazer o quê? Multiplicar por menos um (-1). Então, multiplicando por menos um (-1), terei que mudar todos os sinais da equação. Minha equação vai ficar assim: menos vezes menos ficará positivo 8x, e o 16 está positivo, mas com menos vai dá o quê? Menos, -16. Agora, eu vou resolver esta equação: x é igual a -16 depois da igualdade não muda o sinal dividido por 8. Agora tenho menos -16 dividido por 8, dará quanto? O resultado dará menos (-2), meu conjunto solução será aqui menos (-2).

Na letra (c) -8x=-40, o que tenho que fazer aqui? Eu posso resolver a minha equação com a parte negativa? Não, eu tenho que multiplicar por menos um. Multiplicando tudo por menos um (-1), ficarei com 8x=40. Agora faço o quê? Ele diz que 8x=40. Então, vamos descobrir quem é o valor de x. X é igual a quem? 40. X=40/8, o resultado da divisão é 5, por quê? Se fizer 5 vezes 8, o resultado será 40. Então, o conjunto solução aqui é 5.

Na letra (d) posso resolver esta equação? Não, o valor de x está negativo. O que devo fazer? Multiplicar tudo por menos (-1). -20x=10, multiplicando terei 20x=-10. Aqui x será igual x=-10/20. Dá pra dividir menos -10 pra 20? Não, por quê? 10 é menor que vinte. Então, eu simplifico. E o que é simplificar? É encontrar um número que dívida, ao mesmo tempo, o numerador e o denominador. Neste caso aqui, eu posso simplificar por quanto? Por 2. Então -10/2 ficará -5 e 20/2 dará 10. Eu ainda posso simplificar -5/10 por quanto? Agora por cinco (5. -5/5 fica -1), e o 10, dividido por 5, fica 2. A resposta de minha equação é uma fração -1/2

Na letra (e) -2x=28. Aqui eu posso resolver esta equação? Não, o x está negativo. O que faço? Multiplico tudo por menos um. Minha equação ficará 2x=-28, o x=-28/2. Esta divisão é igual a x= - 14. Por quê? Se eu fizer -14 vezes 2, o resultado será -28. Meu conjunto solução é s{-14}.

Na letra (f) -6x=3, como é que faço pra resolver? Multiplico o por menos um e a equação fica 6x=-3. Então x=-3/6, posso dividir? Não, posso simplificar por 3 o numerador e denominador. 3/3 é igual a 1(menos um) e o 6/3 é igual a 2.

Na letra (g) 45=-3x. Vou fazer a mesma coisa, multiplicar por menos um. Terei -45=3x. Agora temos que fazer o que pra resolver? Inverter. O 3x está no segundo membro, vai para o primeiro membro e -45 está no primeiro membro, vai pra segundo, mudando o sinal. -3x=45, tenho que multiplicar de novo por menos um: 3x=-45. Eu poderia ter trocado logo início pra não ter que multiplicar de novo. Então x=-45/3, o x será igual a -15.

Na letra (h) -60=-5x posso resolver? Não. Multiplico por menos um. Então, aqui vai ficar 60=5x. Só que agora ele não está do lado correto. Vou ter que inverter e multiplicar novamente. Oh! -5x=-60, multiplicando por menos, fico com 5x=60, x=60/5 x=12. Se eu multiplicar 12 por 5, o resultado será 60.

Na segunda questão, a letra (a) x/2=8. Veja que aqui é diferente. O que faço aqui? Tudo que tiver letra fica no primeiro membro e os números, no segundo membro. Então x= 8 vezes 2. Então, nós vamos fazer o inverso: se é uma divisão, vou fazer uma multiplicação. Então x aqui vale quanto? 8 vezes 2 é igual a 16. Se eu colocar o 16 no lugar do x e dividir por 2, eu tenho resultado igual a 8.

Na letra (b) x/2=-8, x é igual a menos - 8 vezes 2. Por aí vai dar diferente o resultado? O sinal negativo do 8, o resultado será menos 16.

Na letra (c) x/4=-5. Então faço x= -5 vezes 4. O resultado será -20.

Na letra (d) 3x/4=9 . Então, tenho 3x=9 vezes 4, fica 3x=36, então x=36/3, x=12.

Na letra (e) 2x/5=-4 , Então 2x=-4 vezes 5, 2x=-20 e x=-20/2, x=-10.

Letra f, última letra 2x/3=-10

2x=-10.3

2x=-30

x=-30/2

x=-15.

Aulas de P2

Obs.: Duas aulas diárias geminadas (seguidas)

Aula 01/02: Bom dia! Abram seus livros na página 102, só pra gente relembrar o conceito. A página é 202. Perdão!

Vamos lá! Como a gente viu, na multiplicação tem uma regrinha dos sinais, né? A gente multiplica um número negativo, o resultado será negativo; quando multiplica o número positivo, dá número positivo; quando a gente vai à divisão, também existem algumas regras. Vocês podem perceber que tudo eu expliquei pra vocês este ano, basicamente, é a operação inversa. Lembram que a multiplicação é a operação inversa da divisão? E a soma é a operação inversa da subtração?

Então, vamos lá! O diagrama informa que o número a/8=-15. Aí a gente vai... Que basta lembrar (leitura da questão da página 202). Então, quando digo que a multiplicação é a operação inversa da divisão, se este 8 está multiplicando este a, eu posso passar ele para o outro lado da igualdade fazendo o quê? Multiplicando, né? Então vai ficar: a é igual a -15.8. Nós vimos, na aula anterior, que, quando se multiplica o número negativo, ele ficará negativo. Então, a é igual a menos (-120). Se eu estou devendo 15 reais e multiplico esta dívida 8 vezes, então vou dever mais, certo?

Aí, na outra página, diz o seguinte: portanto -120 dividido por 8, se fizer a operação inversa, o resultado será -15. (*Filmagem parte 26*).

Agora, estou fazendo operações com números decimais

Faz a leitura da página do livro 203/204 e reforça as regras de sinais e escreve no quadro as mesmas. Ainda trabalha com os alunos a página 211 referente ao jogo de sinais. Fez uma observação que expressão numérica não é ainda uma equação, porque não envolve letras.

Agora, na página 213, vamos ver o cálculo com letras, que vocês estudaram as regras de sinais, mas precisamos ver isso novamente para lembrar a vocês. Isso aqui, os jogos de sinais, a gente se enrola. Consultem as regrinhas, entenderam?

Tem início o capítulo 10 que tem como título “Usando letras na matemática”. Faz a leitura do livro.

[*Escrevendo no quadro.*] Quando digo assim: a+3a, eu sei qual o valor de a? Eu chamo este a de variável, é número natural qualquer e aí eu pego o valor de a multiplicado por 3 e terei o resultado. **E isso é equação** (*Continua a leitura do exemplo do livro da página 213. Filmagem parte 27)*

Continuação da leitura da página 213 (“Comunicando ideias pelos símbolos”). Escreve no quadro o exemplo do livro, a fórmula do retângulo, dando ênfase ao fato de que a matemática é uma linguagem universal. Refaz no quadro o cálculo da área do retângulo. As letras A, B e C são variáveis. Em seguida, resolve o exemplo da página 215.

Continuando, vai para a página 216 (“Conversar para aprender”). Faz a pergunta e vai respondendo com os alunos. Pede para a turma resolver as questões 2,3 e 4.

Essa primeira parte é mais pra vocês entenderem a coisa. Quem tiver dúvida, pergunta. Mas, tentem usar o raciocínio de vocês, certo!

Convida um aluno para fazer no quadro a questão 2. Vai auxiliando o aluno na resposta da questão. O aluno não está conseguindo resolver a questão. Ela vai lendo a questão com os alunos e dizendo os valores para o aluno que está no quadro. A letra a. E, para responder a letra b, chama outro aluno que também não consegue responder. A professora vai ao quadro e refaz a questão com os alunos. Mas ainda não chegaram à fórmula.

Existe uma coisa que eu posso fazer pra chegar à fórmula. Posso melhorar isso? [*Escreve no quadro o que representa cada letra (custo (C) e venda(V)*]. Então, a fórmula será v=c+c/2. Terminem em casa as outras duas questões.

Aula 03/04

Nós respondermos a primeira questão, letra a e b, não foi? A segunda questão, a, b. E ficaram o 3º e 4º quesitos para responder, página 216. Quem vem fazer pra mim (no quadro)? Como resolveríamos esta questão baseada na letra b da questão anterior? Olha, pessoal, nesta questão não vamos atribuir valores x e y. É apenas para desenvolver uma fórmula. Vamos lá! Já que ninguém respondeu como eu queria, vamos fazer agora! Posso escrever da seguinte maneira: 5x+7y. Se nós atribuímos valores pra x, por exemplo: uma nota de R$ 2,00, e y vale R$ 5,00. Mas a questão não me dá valores. A letra b, vou usar isso aqui novamente 5x+7y e retirar o -z. Esta seria a quantidade total dela.

Faz a leitura da questão 4, explicando o é uma bandeira de táxi.

Como é nós faríamos esta conta? Ele paga 3,20 só pra entrar no táxi, e a pessoa rodou 5 km na cidade. Vamos dizer que x é o que quero saber, certo? Vamos lá P= 3,20+1,50x (pela hierarquia, primeiro fazemos a multiplicação, divisão e depois soma ou subtração). Então x é igual R$ 10,70.

Quando a gente faz a letra a, a letra b fica fácil. Vamos lá, me ajudem! Como faço P=3,20+1,50?

Então P=3,20+1,50x16

P=3,20+24

P=27,20

Letra (c). Lembra o que é “generalizam”, que vimos na outra aula? “Generalizam” é quando uma coisa dá muitas coisas. Como eu faria esta fórmula? Nós já desenvolvemos aqui na letra a e b, e já sabíamos quantos quilômetros iríamos percorrer. Agora eu quero uma que sirva pra todos os casos. Então, podemos fazer assim: P=3,20+1,50x. Digamos que queiramos saber o preço de uma corrida de 25 km. Vou conseguir resolver com esta formula? Sim, é só substituir o x por 25 e terei a resposta.

Vamos continuar, na página 220, calculando com letras. Foi isto que fizemos nas questões anteriores, misturando números com letras. [*Faz a leitura do exemplo do livro*.] Isso aqui nós vimos lá no sexto ano. Se eu não me engano, vimos isto em cálculo mental e, no lugar de x, ele pode usar qualquer número. O que está no livro (3x+7x=10x), se eu substituir o x por 1, terei o seguinte 3.1+7.1=10.1. Então, 3+7=10.... (três mais sete) é igual 10=10, dez é igual a dez? Sim. Então, está correto. Pessoal, se eu tenho uma nota de R$ 10,00 em um bolso e no outro uma nota de R$ 10,00, os valores são iguais? Sim, têm os mesmos valores. Entenderam? Vamos lá! O exemplo sobre cálculo mental é melhor multiplicar assim, não é, gente? Lembra que falei pra vocês que, quando o nosso cérebro vê o número 10, torna-se mais fácil a multiplicação? [*Faz o exemplo da operação distributiva do livro. Refaz os exemplos 3 e 4 da página 221*].

Então, vamos fazer o exercício da página 222 (“Conversar para aprender”). Alguém tem alguma dúvida? Eu sei que isso aqui é um pouco complicado. [*Responde com alunos na sala esta atividade. E, depois, propõe atividade para casa da página 223, a questão 16].*

Aula 05/06

Começou lendo a página 229 referente ao capítulo “Equações”. Faz uma observação que pode ser qualquer letra do alfabeto. Em seguida, resolve o exemplo desta página no quadro para encontrar o valor desconhecido. Propõe a primeira questão do exercício da página 231. Depois de algum tempo, faz a correção da questão 01 (letras a, b, c, d, e, f). Em seguida, propõe as questões 02 e 03. Chama um aluno para resolver a questão no quadro a questão 02. Depois, refaz os passos do aluno. Na letra b (8m+32=0), o aluno deixou a resposta 4 positivo. Nesse momento, a professora começa a indagar o aluno: “Se ele tem uma dívida de 32 reais e dividiu para 8 pessoas, quanto ficou para cada um?”

Ah! Ficou com -4 reais. Pessoal, olha pra cá! O número negativo não pode assustar vocês. Vamos trabalhar constantemente com números negativos. Esta equação eu não estou inventando não, foi o livro que me deu. Vamos resolver 8m+32=0. Como é que isolo o 8m na igualdade e o 32 vai para o segundo membro vai negativo. Então, -32 +0, ficou -32. Olhem pra cá! O zero é positivo, 32 é negativo. Eu subtraio e o dou resultado do número maior. Qual é a dificuldade? E agora, o que faço? Divido o 32 por 8. Então divido o 32/8. Fica - 4.

A questão 3 diz que 15(x+17)=60. Existem duas formas de fazer isso aqui. A forma distributiva e existe uma forma que vocês já sabem, que é passar o número para o outro lado. Qual o número que é mais fácil para trabalhar? O quinze (15). Se vai tirar o 15, eu posso tirar do parênteses e fica com x+17. E quanto é 60/15=4?

X+17=4

X=4-17

X=-13

E difícil? Vejam que aos poucos vocês vão conseguir!

Aula 07/08

Inicia-se com a leitura da página 232 (usando letras para resolver problemas) e a resolução do problema proposto. “Pessoal, x+x, fica quanto?” *O aluno responde:* “Fica 20”. “Pessoal, não confunda com algarismo romano, pois estamos estudando equação!” *Faz a resolução de x+x=368. E continua fazendo a leitura da página 233.*

Exercício página 234. Resolvem as questões 11 e 12. Os alunos ainda estão com dificuldade em resolver os quesitos e começam a levar para professora o que resolveram e a professora faz o quesito para alguns alunos que estão próximos ao birô.

Um aluno vai fazer a questão 11 no quadro e monta o problema x+x=150 e desenvolve-o com a ajuda da professora e dos colegas. E a professora ainda explica os passos do aluno.

Outro faz a questão 12 no quadro. Nesse momento, há várias indagações sobre a questão que o aluno fez. A professora começa a explicar os procedimentos realizados pelo aluno. Monta a equação x+2x+3x+3=45.

O mais três vai para o outro lado da igualdade positivo ou negativo? Negativo, vai x+2x+3x=45-3. Vamos resolver direto? Já dá pra fazer direto. Aqui, no x, tem um embutido, então, 6x= 42(sinais iguais, somam-se e dá o sinal do maior? 45-3= 42). Então, x=42/6, x=7. Então, vamos ver quanto cada filho recebeu? O primeiro, eu chamei de x, 2x, 3x+3. Então, o filho mais velho recebeu 7 camelos, o segundo recebeu o dobro, ele recebeu 14 camelos, e o mais novo recebeu 24 camelos.

Em seguida, propôs os exercícios para casa das páginas 13,14 e 15.

Aula 09/10

Inicia-se a aula com a leitura da página 236 (“Resolvendo equações”).

Por exemplo, 3n+2=5. Vou resolver. Chamo de equação porque tem o sinal de igualdade.

Fez um comentário a respeito do ponto de multiplicação que está expresso na equação do livro, mesmo sem colocar o ponto esta multiplicando. Faz menção à ***metáfora da balança****.*

A gente... para que a balança estivesse em equilíbrio, precisa ter quantidades iguais, os pratos têm que ter quantidades iguais. Todo mundo aqui já viu uma balança. Se eu tenho uma maçã e uma laranja de mesmo peso, e eu retirar de um dos lados da balança, vai alterar a balança. Então, se eu tiro da balança quantidades iguais dos pratos, a balança ficará em equilíbrio. Se eu subtraio um valor da equação dos lados, vou manter o equilíbrio. Isso pode acontecer. Aqui estou dando o exemplo da balança pra você. A equação do livro é: 5x+4=2x+5. Se eu retirar o 2x da balança, vou manter em equilíbrio minha balança. A equação ficou menor, vê só! [*Escreve no quadro a 5x+4=2x+5*] Se eu subtraio -2x dos dois lados da equação, eu tenho que fazer isso dos dois lados da equação. Ficarei com 3x+4=5. Tirei o 2x de ambos os lados, aí diminuí minha equação, tá vendo? Agora vamos fazer a operação inversa. Este quatro está somando, passo ele para o próximo lado com o sinal negativo. Agora 3x=5-4, sinais iguais agente soma, sinais diferentes, soma-se e repete o sinal do maior. Se eu tenho 5, tiro 4, ficarei com 1. Então x= 1/3. E, se eu quiser tirar a prova, eu multiplico pelo valor de x. Entenderam?

[*Continua a leitura da página 237*] Você pode multiplicar, dividir os lados da equação por um mesmo número da equação, que não seja zero. [*Continua a leitura da página 238*]

Vamos praticar o que aprendemos? Todo dia estamos aprendendo uma coisa nova. Agora vocês farão as questões 23 e 24 (perguntas e respostas).

Correção do exercício da página 239, questão 23. Desenha no quadro a balança como está no livro. Em seguida, monta a equação. 5x+3=4x+3.3.

Agora eu tenho duas técnicas. A operação inversa é aquela que passa pra o outro lado da equação é soma, passa negativo. Então, nesta técnica eu tenho de fazer dos lados da igualdade. Se eu faço uma subtração, tenho que fazer dos dois lados da igualdade. Se for uma soma, tenho que fazer dos dois lados da igualdade. Se for multiplicação, tenho que fazer dos dois lados. Divisão, tenho que fazer dos dois lados. Neste caso, se x-3=9, ficarei apenas com o x, o três vai sumir. E, se tenho 9 -3, ficarei com 6. Ou então faço o seguinte: x+3=9.

Neste exemplo, a professora fez diferente da anterior. O três era negativo na equação da questão 23: x=9-3. Assim, X=6.

Então, pessoal, você poderá usar a técnica que achar melhor, certo? Tem gente que tem facilidade pra fazer a subtração dos dois lados da equação, ou fazer de forma direta, mudando o sinal. Olhem pra cá (quadro) como resolvo esta equação 3y+7=2y+1. Vamos tentar usar as duas técnicas? Quando é quando posso subtrair dos dois lados? Aqui, deste lado (segundo membro), posso tirar o 3y? Não. Então, vou subtrair o 2y(-2y) e vou ficar com y+7=1. E agora o que posso fazer aqui? Y=1-7, y =-6 (sinal diferente soma e dá o sinal do maior). Não se esqueçam! Aqui eu resolvi com as duas técnicas que aprendi a técnica de operação inversa. Vamos fazer de outra forma: eu vou passar o que y para o outro lado e o que não tem y para o outro lado da igualdade. 3y-2y=1-7. Então, vou ficar y=-6. E aí eu mostrei duas fórmulas! Este foi mais prático, mas vocês vão usar a que acharem melhor. Vamos usar tudo que aprendermos. E aí, estão clareando as ideias?

Ainda faz mais uma equação no quadro (8n+3=6n+4). A professora confere a questão da aluna e diz que a mesma usou a técnica de inverter os lados.

Vamos fazer a mesma equação usando a outra técnica de operações inversas. Qual o número que vou neutralizar os dois lados? Primeiro (-6n) fiquei agora com 2n+2=4, agora tiro -2 dos dois lados e ficarei com 2n=4. Dividindo, fico n=2/2, n=1. Veja: quando a gente se lembra de um, fazemos o outro jeito.

Faz mais um exemplo no quadro: 3x+1=x+1.

Eu posso subtrair 3x dos dois lados da igualdade? Não, posso fazer o (-x). Fico com 2x+1=1. E agora, o que posso fazer? 2x=1-1 fico 2x=0 e agora, fica x=0/2. Eu tenho zero pra dividir pra duas pessoas, quanto cada pessoa irá receber? Zero.

O aluno fala: “A senhora é muito boa nisso, professora!”

Mais um exemplo de equação 5n+3=4n+9. Se eu tiro o menos 4n dos dois lados da equação e depois o menos três, fico n=9-3, n=6.

A professora propõe que as questões 24 e 25 da página 239 sejam resolvidas em casa.

Aula 11/12

Inicia a aula com a correção do exercício da página 239.

Vou fazer o exemplo da página azul para clarear pra você alguma coisa.

Faz o exemplo do livro em destaque da questão 25(2-(x+3)= -2(3x+1).

A gente tem que se orientar pelas setinhas. Lembra que na aula anterior eu falei sobre a propriedade distributiva? O menos 2 está multiplicando tudo isso que está aqui dentro dos parênteses. Agora, existe algum número fora dos parênteses que não estamos conseguindo enxergar? [*Um aluno responde que é o 2 e a professora fala:*] Não, o dois não está multiplicando o que está dentro do parênteses. Existe um sinal aqui fora, o menos. A gente vai multiplicar tudo por menos 1. Lembram das regras dos sinais? Vamos fazer a mesma coisa aqui. Olha pra cá! Isso aqui é mais complicado. [*A professora faz primeiro o segundo membro a multiplicação:...= -6x-2x*] E agora vamos fazer o outro lado: 2-x-3 =-6x-2.

A professora dá uma pausa na resolução e observa a resolução do livro e depois continua a resolver a equação como está descrita nos passos no livro. Mas a professora faz um, equivoca-se no jogo de sinal e refaz o procedimento da subtração do (6x). -1+5x=-2.

Agora, somo mais um nos lados da equação. O livro pulou uma etapa. Vamos fazer no passo a passo. O livro não tem esse passo não (a soma e subtração de cada operação!). Fico com agora com 5x=-1, x=-1/5. Feito isso, vamos para a página 242. Essa equação que fizemos antes é um pouquinho mais complexa.

Aulas do professor Pietro (P3)

Obs.: As aulas ocorriam em dois dias da semana. Na terça, havia duas aulas geminadas (seguidas) e, na quinta, duas aulas geminadas (seguidas) e uma após o recreio.

Aula 01/02/03

Hoje vamos falar sobre equações! [*Um aluno pergunta sobre equação do segundo grau, o professor responde que não*] Vocês só verão no nono ano. Vamos aprender como trabalhar com equações.

Alguém sabe o que uma equação? Já viram uma equação? Primeiro vamos ver o que é uma equação. Nós vamos pegar alguns exemplos. Vamos pegar um problema e traduzir em uma linguagem matemática. Podemos pegar as palavras e transformá-las em símbolos, letras e números. Por exemplo: eu falo o dobro de um número, ou duas vezes dez, estou falando algo matemático. Agora posso colocar 2x3=6 ou 2x de um número. Se for o número for 4, então 2x4=8. Agora, vamos escrever o que é uma equação e em seguida vamos fazer alguns exemplos na prática.

Definição do que é equação: Podemos traduzir informações da linguagem comum para a linguagem matemática. Então, vamos pegar alguns exemplos. Em nossa língua portuguesa, dois somado a cinco; outra sentença matemática, o triplo de seis. Alguém tem mais algum exemplo? O dobro de quatro. Existem alguns casos fora este que foram citados, o dobro de um número, só disse isso: como é representado matematicamente? Deixa eu colocar mais dois exemplos aqui pra vocês. Certo número somado a sete, um número mais seis. Em todos esses casos, estamos com a linguagem comum. O que faremos pra transformar para a linguagem matemática? Então, o primeiro como fica? 2+5, 3x6, 2x4, 14:2. E agora, o que faço? Tem um número desconhecido, que posso substituir por uma letra a, b, c , x, y.

O dobro de um número: 2x. Que número é esse? Ninguém sabe? Considerem que o x seja igual a dois. Aí vocês teriam o dobro de dois. O x pode assumir qualquer valor. As duas sentenças – x+1 e x+6 –, eu coloquei x, mas poderia ser qualquer outra letra. Por exemplo: y+1 ou y+6.

[*Em seguida coloca um problema para os alunos resolverem*] Pensei em um número, multipliquei por 3 e, somando 87, o resultado será 123. Em que número pensei? Vejam se vocês conseguem descobrir este número.

Este exemplo foi retirado do livro Praticando Matemática, *página 198*. *Resolve no quadro conforme os passos descritos no livro*.

Então, podemos pegar as operações opostas. Se no início eu multipliquei por 3 e somei a 87, o resultado foi 123. Agora irei pegar o 123, retirar o 87, fico com 36 e divido por 3. O meu resultado será 12. Agora, vou colocar este problema na linguagem matemática: x.3+87=123. É comum nos livros o número vir antes da letra. Vai modificar alguma coisa? Não, o resultado será o mesmo. Pra chegarmos aos resultados, pegamos as operações opostas. Vou passar 87 para o outro lado da igualdade com o sinal negativo. Então, 3x=123-87, 3x=36, x=36/3, x=12. A primeira solução até parece ser mais fácil, mas essa última é melhor, pois te dá uma segurança maior.

Observações desta aula: usamos sempre uma letra para representar um número desconhecido. Usamos também as operações inversas. Dizemos que 12 é raiz de nossa equação, ou a solução de nosso problema. Se eu pegar o 12 e substituir o 12 na equação, terei uma igualdade verdadeira. Se quiser, pode fazer a prova.

Copia no quadro o que significa a palavra "equação" como está no livro, página 198.

Quatro coisas importantes: primeira, as letras são chamadas de incógnitas (poderia ser a, b, c, d, y...); segunda, o sinal da multiplicação não precisa aparecer, a equação tem dois membros, o primeiro membro e o segundo membro (x+1=20+10) . O primeiro membro fica antes do sinal da igualdade e o segundo membro depois. Então, x+1 é primeiro membro e 20+10 segundo membro. Quem são os termos? [*Faz a sequência da página 199 e o exemplo da equação do livro 3x-4=-6-3*]

3x-4=-9

3x=-9+4

3x=-5 Esse três está multiplicando, passo ele dividindo!

X=-5/3 Já podemos parar por aqui. Este já é o valor da equação, no livro, a divisão.

Neste exemplo, 2a/5+1=7, quem são os membros? São todos esses números, só o 7 está no segundo membro. Quantos termos tem esta equação? Três termos! Quantos estão no primeiro membro? Dois, e no segundo um. Quem é a incógnita? É a letra a.

2a/5+1=7 Eu poso pegar este 1, levar pra o outro lado? Posso. Ele vai como menos um.

2a/5=7-1

2a/5=6 Esse está fazendo o que aqui no primeiro membro? Dividindo dois a. Se ele está dividindo aqui, o que ele vai fazer do outro lado? Multiplicar.

2a= 6.5

2a=30

a= 30/2

a=15 Então, a solução ou raiz é S=(15). Se eu substituir o valor na equação, esse resultado tem que dar 7. Querem fazer a prova? Vejam: substituindo no valor de a, fico com 7.

Aula 04/05/06

[*Retoma a aula anterior*] Hoje, vamos aprender se a solução realmente atende o que foi pedido na questão. Na aula de hoje, será a verificação da resposta do problema. Em seguida, teremos alguns exercícios para fixamos bem na memória. E aí é praticar, certo?

P3 trouxe uma anotação sobre a aula e foi copiando no quadro "verificando a solução de uma equação". Descreve os passos do livro, página 200, e faz o exemplo com os alunos no quadro. 6x+18=102 (problema do livro).

Eu poderia chamar de d que representa a distância, mas vou chamar de x.

Em seguida, passa um exercício de fixação e faz a seguinte observação:

Prestem a atenção! O segredo aqui é prestar atenção. Eu vou responder uma letra e com essa vocês farão as demais. Pode ser a letra f? Então letra f, da primeira questão, do jeito que fizeram esta, vocês farão as outras.

128+x=900

Pra resolver a equação, vocês lembram das operações opostas? Se um número está somando de um lado, passa pra o outro lado subtraindo. Vai ficar: x=900-128. X=772.

Sempre vamos trabalhar com x no primeiro membro. Os números que não tiverem x, ou variável, passam todos para o segundo membro. Aí fica fácil de resolver a equação. Verificando a resposta: 128+772= 900. A primeira questão segue esse modelo. Questão do livro página 201[a *questão do livro é a 8ª*]. E esta questão x-8=-10? Qual será o valor de x? Esta é mais difícil uma coisinha. Cuidado com os valores negativos!

Vou fazer a letra c da segunda questão: 5x-2=7+6 [*Esta questão no livro está na página 202, 15ª questão*].

Então: 5x-2=13 [*passo a passo*]!

5x=13+2

5x=15

X=15/5

X=3 Vocês têm certeza que o valor do x é 3? Vamos ver: 5.3 -2=13

15-2=13

13=13

A terceira questão: 3x/4=9 [*Está no livro, na página 202, questão 18ª*] Então, se o 4 está dividindo o 3x, se eu quiser trazer pra o segundo membro, ele virá com qual operação? Vezes. Então, 3x=9.4

3x=36

X=36/3

X=12 substituindo o 12 aqui, na equação, farei a verificação se está correta a operação. Então, 3.12/4=9

36/4=9

9=9

Vou fazer uma letra da quarta questão! Vou fazer uma fração maior, a anterior era pequenininha, 8x-5/2=9. Olhem o tamanho do numerador! 8x-5=9.2

8x-5=18

8x=18+5

8x=23

X=23/8 Pode parar por aqui!

Aula 07/08

Na aula passada, passamos um exercício pra vocês e resolvermos uma letra de cada questão. Então, hoje, nós vamos aprender como fazer para resolver uns probleminhas que aparecem no nosso dia a dia e usar as equações para resolver esses problemas. Lembrando a vocês que as provas de vocês serão probleminhas.

O professor segue o livro na página 203, faz o exemplo do livro no quadro: x+2x=8,40. Em seguida, o professor faz o segundo exemplo do livro. Transforma o problema em linguagem matemática, página 204: x+2(x+3)=60.

Prestem atenção aos parênteses! Vamos fazer a propriedade distributiva. Então, fica x+2x+6=60

3x=60-6

3x=54

X=54/3

X=18

Esse valor no problema é a torta de limão! Custa R$ 18,00 e R$ 21,00 o preço da torta de morango, tenho multiplicar por dois. E o resultado será R$ 42,00 as duas tortas de maçã.

Na sequência da aula, passa um exercício do livro da página 205, as questões 24º, 26º, 27º, 28º e 29º. No quadro, fez a sequência 1º, 2º, 3º, 4º e 5º. Faz a correção dos exercícios e inicia-a pela segunda questão.

Não tem ministério não, pessoal! É apenas ir transformando a linguagem normal em matemática: x+3x=-600.

4x=-600

X=-600/4

X=-150

Vamos conferir: -150+ 3(-150)=-600. Vejam pra não se esquecerem de colocarem os parênteses, dois sinais juntos não pode acontecer.

-150-450=-600

-600=-600. Então, pessoal, tem que quebrar a cabeça um pouquinho, pensar e resolver os problemas. Tem que encarar o problema de frente.

A questão seguinte fala sobre os números consecutivos! O que são números consecutivos? É uma sequência, vem imediatamente depois do outro.

Um aluno fala: "Professor, está ficando mais difícil". O professor responde: "É assim mesmo, depois piora. É estudar".

X+2(x+1)=206. Primeiro faço aqui a propriedade distributiva e multiplica-se o que está dentro dos parênteses.

X+2x+2=206

3x=206-2

3x=204

X=204/3

X=68

Façam os cálculos e vejam quais são números. O primeiro eu sei que é x=68. O segundo é x+1= 68+1= 69. O seu dobro 138.

Continua a resolver as questões, utilizando a propriedade distributiva.

Temos que eliminar os parênteses: 4(x+1)=12

4x+4=12 Tudo o que tem x fica no primeiro. Se eu mudar de membro, mudo o sinal.

4x=12-4

4x=8

X=8/4

X=2

Aula 09/10/11

Continua a correção da aula anterior, com uma situação-problema sobre uma corrida de táxi (questão do livro, página 205).

5 +3x=47. Agora, é com vocês. Respondam e aí e me deem o valor da corrida.

3x=47-5

3x=42

X=42/3

X=14 km

Para tirar a prova, eu substituo no lugar do x o 14 e vejo se os valores são iguais. Então, a nossa conta está correta.

Em seguida, continua a correção do exercício da página 205, questão 29.

Aula 12/13

Exercício da página do livro, p. 209, questão 36 (geometria, área dos triângulos). Monta a equação e resolve com os alunos. O resultado foi x=3.

Depois que você encontra o x, vai substituir pra saber o lado de cada triângulo.

O professor faz a questão 37 do livro, utilizando a propriedade distributiva. Fez a questão 38 do livro (problema). Montou a equação.

4(n-3)+1=65

4n-12+1=65

4n=65+11

4n=76

N=76/4

N= 19

Essa questão está no livro Matemática, *mas ele não foi utilizado em nenhuma aula. Foi seguido o* Praticando Matemática. *Nas aulas, eram feitos resumos em folha do professor que escrevia no quadro as definições e questões dos exercícios, seguindo a ordem do livro. Ele, P3, não fez menção à metáfora da balança em nenhum momento, apesar de o livro que segue trazer exemplos com balança.*

APÊNDICE B – ENTREVISTA COM OS PROFESSORES

P1

Data: 20/06/2016
Entrevista realizada com uma professora de Matemática de uma Escola Municipal de Caruaru. A entrevistada é graduada em matemática, tem 12 anos de atuação na docência e atua nessa escola há três anos.

Pesquisador: Em que você se baseia para a preparação de suas aulas?

Professora: Assim... Sempre no primeiro dia de aula, procuro conhecer meus alunos, fazer uma dinâmica pra ver o nível da turma, pra ver o que posso trabalhar com eles e seguir o que está no livro. Eu também pesquiso na internet pra preparar uma aula diferente. Cada turma é diferente. Se você tiver quatro turmas (sétimos anos), eles nunca serão iguais: uma turma é mais avançada, outra mais devagar. Você vai de acordo com a turma. Eu gosto sempre de ir com nível da turma e preparar uma aula diferenciada.

Pesquisador: Quais recursos você utiliza na preparação de suas aulas?

Professora: Aqui, a escola infelizmente não dá muito recursos pra o professor trabalhar. Não temos data show, às vezes tiro xerox de uma atividade diferenciada e faço com eles

Pesquisador: Você toma como referência algum(uns) dos documentos oficiais (PCN, PCPE, BCC, Guia do livro, entre outros) na elaboração de seu planejamento? Justifique sua resposta.

Professora: Aqui não faço não. Trabalho com esses documentos no estado. A gente segue todo o planejamento vindo da Secretaria de Educação do Município.

Pesquisador: O que você leva em consideração na hora de escolher o livro didático para o uso em sala de aula?

Professora: Primeiro, observo o tipo de atividade, se tem muitos exercícios, se está de acordo com a realidade do meu aluno. Porque cada escola tem um nível diferente. Então, a gente precisa ver isso. Não adianta pegar um livro que tenha o nível muito alto e meu aluno não conseguir acompanhar. Vejo o livro por partes: primeiro, o conteúdo e se tem bastante exercício e não tem muitos assuntos. É aquela coisa, uma coisa mais resumida.

Pesquisador: Por que você escolheu esse livro didático (*Tempo de Matemática*, de Name)?

Professora: Eu gosto muito do Name. É bem enxuto o livro, tem muito exercício, bem resumido e explica bem, direto e passo a passo, e não enrola tanto. Ou melhor, não é enrolar, a gente às vezes dificulta o assunto pra os alunos. Então, ele é bem enxuto, gosto bastante do jeito dele abordar os conteúdos.

Pesquisador: O livro que chegou à sua escola foi *Matemática*, do Imenes. Qual motivo pra não utilizar esse livro?

Professora: Não é que não trabalhe com esse livro. Ele é muito avançado pra o nível dos alunos da minha escola. Não só eu mas outros professores também não usam. Como a gente não escolheu ele, quando houve a escolha do livro, escolhemos outro livro e infelizmente não chegou à escola.

***Pesquisador*:** Como você faz para ensinar um assunto um assunto novo, especificamente equações do primeiro grau?

Professora: Como a matemática já aquela coisa de não gostarem da matéria, eu procuro fazer uma coisa mais dinâmica pra ensinar, que envolva bem o conteúdo, como uma atividade mais simples para que meu aluno possa desenvolver.

***Pesquisador*:** Para introduzir o conteúdo de equação do primeiro grau, você adotou a sequência do livro didático, utilizando a metáfora da balança (x+3=50). Você introduziu dessa forma porque estava no livro didático ou porque acredita que é a forma mais adequada de fazer essa introdução? Haveria outra(s) maneira(s) de introduzir esse conteúdo?

Professora: Não, eu procurei a forma mais simples pra trabalhar com os alunos. Você sabe como professor de matemática tem dificuldade para trabalhar novos conteúdos. E aí foi a forma mais simples de resolver um problema, o aluno pega mais fácil. Não foi apenas a ordem do livro, foi apenas por ser mais prático, e aí para depois desenvolver questões mais avançadas.

***Pesquisador*:** Na página 95 do livro *Tempo de Matemática*, em relação à resolução das equações, ele demonstra os dois *(mostro o livro*) métodos (por exemplo: x-3=7 o livro faz adicionando ou subtraindo em ambos os membros da equação com as operações inversas e o modo prático, em que apenas basta inverter o sinal e mudar de membro). Qual método você trabalha mais nas aulas? E por quê?

***Professora**:* Eu procuro o método diferente*,* prático, porque, assim, eles assimilam mais rápido, o aluno aprende mais rápido. E eles pegando esse método prático, fica mais fácil aprenderem o outro método.

***Pesquisador*:** Em relação às tarefas propostas pelo livro didático, classificamos em quatros tipos: T_1 (x+4=8), T_2 (x+(x-2)=10; T_3(2x+3=x+6) e T_4 ((x+3)/2=2/3). E, em suas aulas, você fez a opção em trabalhar com tarefas T_1. Por quê?

Professora: É que às vezes o tempo é bem resumido. Então, a gente trabalha mais o básico. Se der tempo, a gente aprofunda o conteúdo, mas, se não der tempo, nós fazermos novas sequências pra os alunos. Hoje é muito difícil, com essas condições de trabalho, fazer mais e melhor. As aulas pra nossos alunos ficam muito a desejar.

P2

Data: 15/06/2016

Entrevista realizada com uma professora de Matemática de uma Escola Estadual de Caruaru. A entrevistada é bacharela em Administração, tem três anos de atuação na docência e atua nessa escola há dois anos.

Pesquisador: Em que você se baseia para a preparação de suas aulas?

Professora: A gente trabalha com os parâmetros do estado, o que é fornecido pela Secretaria de Educação e a gente tenta adequar os parâmetros aos livros didáticos que temos e também trazemos atividades da internet pra tentar fazer uma aula mais dinâmica, com atividades lúdicas, vídeos, jogos, tudo que envolva a matemática.

Pesquisador: Quais recursos você utiliza na preparação de suas aulas?

Professora: Eu uso efetivamente o livro didático. Tento fazer com que o livro didático seja mais utilizado e que os alunos tenham uma rotina. Eles precisam de uma rotina, entendeu? Eles ainda estão precisando de uma rotina. Como eles são do fundamental II, precisam de uma rotina. Eles têm uma mentalidade e eu sigo o que está exposto no livro.

Pesquisador: Você toma como referência algum(uns) dos documentos oficiais (PCN, PC/PE, BCC, Guia do livro, entre outros) na elaboração de seu planejamento? Justifique sua resposta.

Professora: Tento adequar os parâmetros (PCN, PCPE). De certa forma, a gente tenta trazer pra realidade do aluno, mas sabemos que muitas vezes os alunos não acompanham o que está ali. Por exemplo, tem alguns conteúdos que os parâmetros focam pra serem trabalhados no primeiro e segundo bimestre. Só que a gente sabe, na prática com os alunos, que eles não conseguem acompanhar e aí vai adequar esses conteúdos para o III e IV bimestre. Porque falta muita bagagem e eles não conseguem absorver os conteúdos, não com tanta rapidez e a gente tentar adequar a essa realidade. E os parâmetros do estado são baseados nos parâmetros nacionais e vou trabalhando com ambos, fazendo as adaptações em ambos.

Pesquisador: O que você leva em consideração na hora de escolher o livro didático para o uso em sala de aula?

Professora: Eu levo em consideração a linguagem. Eu tento pegar um livro didático com melhor acesso pra meus alunos. Como é de fundamental II, tento pegar o livro que tenha gravuras, exemplos do cotidiano, pra eles (alunos) assimilarem melhor os conteúdos.

Pesquisador: Por que você escolheu esse livro didático (*Matemática*, de Imenes e Lellis)?

Professora: Porque assim... dentre as opções que tinha, era o livro que chegava mais perto do que eu queria, entendeu? Por ter mais uma linguagem melhor, exemplos do cotidiano, o livro é bem lúdico, tem várias figuras e eu acho mais gostoso de trabalhar com ele. E tentei trabalhar com outros livros e esse (pense) foi o que mais gostei, me identifiquei com o mesmo. Os livros didáticos chegam à escola e a gente sabe que é difícil adotar o livro que escolhemos na escola, mas, como essa é uma escola pequena, eu tive o privilégio de adotar o livro que queria, até porque a demanda que veio pra escola deu pra suprir a demanda da escola. Mas eu tive outra experiência com outros autores, não gostei. O que gosto mesmo é o Imenes e Lellis.

Pesquisador: Como você faz para ensinar um assunto novo, especificamente equações do primeiro grau?

Professora: Na matemática um assunto puxa outro assunto. Se o aluno tem uma boa base, a gente trabalha o conteúdo com eles e eles não vão sentir dificuldade. Agora, se os alunos não têm uma base, que é uma realidade dos alunos da rede estadual, a gente precisa estar puxando um assunto pra depois puxar o outro. Então, procuro ensinar nessa lógica, cadeia. Procuro ensinar as quatro operações, operações com sinais, pra depois ensinar equações e outros assuntos. Eu trabalho desse jeito, entendeu?

Pesquisador: Na sua aula, antes de iniciar o capítulo sobre equações, a senhora inicia na página 202 do livro em que o conteúdo exposto é a divisão dos números racionais, uso das regras de sinais. Por quê?

Professora: Outra característica que gosto do livro é que ele sempre retorna no início do capítulo uma ideia que você vai usar, qual é o conhecimento que o aluno vai precisar para usar naquele capítulo, entendeu? No começo do livro, ou melhor, no início do capítulo, você vai precisar de tal e tal conhecimento pra poder absorver esse conteúdo. De certa forma já é uma revisão. Isso facilita a nossa vida, porque a gente sabe que o professor não tem só uma turma, não tem apenas uma turma pra se dedicar, mas várias turmas. E o livro ajuda muito em relação a isso. No começo do capítulo já dá uma revisão e uma introdução do conteúdo que será trabalhado. Porque os alunos têm muita dificuldade com a questão de regra de sinais, das operações com números não naturais. Eles têm um uma dificuldade de assimilar isso aí. Então, a gente tem sempre que trabalhar essas questões da regra dos sinais e de outros conteúdos.

Pesquisador: Para introduzir o conteúdo, a senhora seguiu o que estava no livro didático cujo capítulo é intitulado “Usando letras na matemática”. Você introduziu dessa forma porque estava no livro didático ou porque acredita que é a forma mais adequada de fazer essa introdução?

Professora: Eu faço isso que seja a forma mais adequada para fazer essa introdução. Uma vez ou outra é que tento trazer exemplos de fora. Eu acredito que o livro supre bastante essa necessidade, entendeu? Não adianta trazer uma coisa que eles não irão entender, ou só chegar e jogar uma conta no quadro. Assim, eu sempre tento trazer coisas pra fazer sentido no cotidiano de meus alunos. A gente vê muitos professores de matemática serem “perguntados”: “Vou usar isso na minha vida? Onde vou usar uma equação na minha vida?”, mesmo sabendo que eles têm conhecimento de que irão usar esses conteúdos nos vestibulares, concursos. Só que eles têm essa mentalidade que eles não precisam daquilo, né? O livro traz os exemplos do cotidiano, que eles vão aprendendo naquele momento. Eu sempre trago outros exemplos. Até agora, é o que está suprindo minhas necessidades, que podem ser usados na sala de aula. Certo, é... eu acho que seria trabalhando o uso de sinais, começaria vendo as regras de sinais e o cálculo pra eles, mas ensinaria sem exemplos concretos. Não teria um exemplo concreto onde eles iriam usar esse tipo de cálculo, até porque, depois, vem a equação do segundo grau. A gente tem uma fórmula e a equação do primeiro grau não tem. Muitas vezes eles acham que é mais difícil e complicada a equação do primeiro grau do que a equação do segundo grau em virtude da fórmula. Aí tento trazer exemplos. Eu acho que seria mais complicado pra mim, até por que eu tenho 8 turmas, mas tentaria mais alguns exemplos pra melhor compreensão dos alunos.

***Pesquisador*:** Em suas aulas, você trabalhou os quatros tipos de tarefas. Por exemplo: T_1 (x+4=8), T_2 (x+(x-2)=10; T_3(2x+3=x+6) e T_4 (2(x+3)=2(x-1). Mas, em suas aulas, não trabalhou equações com números nos denominadores. Por quê?

***Professora*:** Porque assim... antes de trabalhar as equações, eu tenho que trabalhar os sinais, também as operações com frações e os alunos não absorveram muito bem esse conteúdo de operações com frações, frações equivalentes e também de ensinar o mínimo múltiplo comum (M.M.C). Eles não conseguiram aprender esses conteúdos com facilidade. Eu tentei trazer esse conteúdo, a forma mais simples e depois poder aprofundar. Assim, quando dou esse conteúdo, eu percebo que eles têm dificuldade de assimilarem. Por exemplo, o livro traz um exemplo. Se você fizer nos dois lados da igualdade, dividindo, multiplicando os lados da igualdade, não irá alterar o resultado, será o mesmo. Só que eles não conseguiram absorver esse exemplo. Por isso, trago esse exemplo mais simples. Essa questão do denominador é aquela questão de que eles têm que ter a base, eles eram pra aprenderem isso tudo nas séries iniciais e isso não acontece. Com isso, as dificuldades vão se acumulando pra os próximos anos (6º, 7°,...) e aí eles não conseguem por conta dessa carência, entendeu? Assim, eu queria, no meu ideal como professora, como professora da rede da rede estadual de educação, eu acredito que o estado impõe pra gente fazer mágica, temos que fazer mágica. Eles impõem pra trabalharem muitos conteúdos e não temos suporte para fazer um trabalho em sala de aula, salas superlotadas, com uma pressão para aprovar os alunos, mesmo que não saibam dos conteúdos.

P3

Data: 15/06/2016

Entrevista realizada com um professor de Matemática de uma Escola Municipal de Caruaru.

O entrevistado é graduado em matemática, tem 11 anos de atuação na docência e atua nessa escola há 3 anos.

***Pesquisador*:** Em que você se baseia na preparação de suas aulas?

***Professor*:** Aqui minha realidade é que minhas turmas são escolhidas pela direção e supervisão e só fico sabendo quais turmas irei trabalhar na primeira reunião pedagógica em fevereiro. A partir disso eu pego o livro didático pra preparar o meu plano de aula pra o ano todo, faço o plano pra cada ano específico, preparo a aula em cima do livro, situação problema, pego outros livros que tenho em casa, monto situações do cotidiano sobre compras de um brinquedo, mesada. E alguns conteúdos consigo introduzir com jogos. Temos aqui jogos e vou introduzindo o conteúdo.

***Pesquisador*:** Quais recursos você utiliza na preparação de suas aulas?

***Professor*:** Aí eu pesquiso no livro deles (alunos), pesquiso na internet. Até já consegui um material da Secretaria do Rio de Janeiro. É um tipo de apostilha com questões-problema e faz algumas orientações, é bem didático. Tenho também a questão dos jogos e a internet, é uma ferramenta muito rica pra sala de aula.

Pesquisador**:** Você toma como referência algum(uns) dos documentos oficiais (PCN, PC/PE, BCC, Guia do livro, entre outros) na elaboração de seu planejamento? Justifique sua resposta.

Professor**:** O caso aqui na rede municipal mudou e agora estamos tendo como base os parâmetros do estado. O nosso plano de curso esse ano já veio todo em cima da rede estadual. Então, hoje, existe uma associação entre as duas redes de ensino. Até porque o nosso aluno sairá daqui, da rede municipal, pra estadual. Pra que trabalhar de uma forma diferente entre ambos? Então, agora estão unificados os currículos.

Pesquisador**:** O que você leva em consideração na hora de escolher o livro didático para o uso em sala de aula?

Professor**:** Há inclusive a escolha do livro didático para a nossa escola pra os próximos três anos e essa escolha não pode ser de forma isolada. Nós nos reunimos, os professores de matemática, e avaliamos os pontos positivos e negativos dos livros. Se o livro traz questões contextualizadas ou se é apenas a matemática limpa, se tem uma forma de iniciar o conteúdo e não vai direto ao assunto. Tem autores que, por exemplo, vão inserir o assunto equações e vão colocando e fazendo as equações. Esse livro nós já descartamos, o novo foco que apoiem os pontos históricos, questões de informações, tabelas, gráficos, tudo tem que ser analisado, não pode ser qualquer livro, principalmente aquele que traga a matemática limpa, são logo descartados.

Pesquisador**:** Por que você escolheu esse livro didático (*Praticando Matemática*, do Andrini)?

Professor**:** Na época, o livro dele tinha uma proposta melhor pra sala de aula como tinha falado, já esse ano nossa escolha não foi tanto na dinâmica desse livro. Pra o próximo ano, o livro escolhido aqui na escola foi o do Dante, o mesmo mudou aquele perfil da matemática mais aplicada, ele tornou a didática melhor do livro e, querendo ou não, o grupo de professores viu que seria melhor o livro dele.

Pesquisador**:** O livro que chegou à sua escola foi o livro *Matemática*, do Imenes. Qual motivo pra não utilizar esse livro?

Professor**:** O Imenes foi adotado por uma parte das escolas da rede, mas aqui não é. Foi por isso, o Imenes não tem uma didática aceitável e coerente com o nível de alunos que temos aqui na escola. Até daria certo se um tivesse uma turma que gostasse da matemática pura e gostasse de suas aplicações. Aqui, pra minha realidade, a didática dele não é muito boa. A parte histórica é muito fraca, ele não atende as minhas necessidades específicas.

Pesquisador**:** Como você faz para ensinar um assunto um assunto novo, especificamente equações do primeiro grau?

Professor**:** Muito bem, dentro de nosso planejamento desse ano, com base nos parâmetros do estado, o conteúdo é ponte pra outro conteúdo, são interligados e aí acabamos trabalhando dois, três conteúdos. Acaba fazendo essa parte entre os conteúdos e passamos pra outro conteúdo de forma imperceptível pra o aluno, sem que tenha uma pausa, já se torna uma forma em espiral. Basicamente o aluno nem percebe que mudamos de conteúdo, ele só vai conseguindo até o aproveitamento melhor no final do bimestre. Também não vemos o guia na hora de escolher o livro didático. Nós pegamos o livro mesmo e vamos analisando os pontos fortes e fracos pra nossa realidade de nossas salas de aulas. O livro é didático, então o próprio aluno, lendo e estudando o livro, já deveria ter uma noção dos conteúdos, ele já estuda em casa pra entender o conteúdo, tem livro que não colabora com isso, sem complicar a vida do aluno.

***Pesquisador*:** Na introdução sobre equação polinomial você adotou a sequência proposta no livro didático, usando letras e padrões e definindo o que é uma equação. Você adotou essa sequência porque estava no livro didático ou porque acredita que é a forma mais adequada de fazer essa introdução? Qual seria outra maneira para introduzir esse conteúdo?

***Professor*:** Pois é, o livro traz uma boa proposta, uma sequência mais acessível pra eles. Se começasse com a balança, pesagem, por exemplo: se colocar esse no primeiro prato da balança, ou no segundo prato, o que irá acontecer? Eu acredito que os alunos teriam mais dificuldade, apenas na imaginação. Eu também não tenho a balança, a escola também, mas poderia abordar de outra forma esse conteúdo, uma balança, fazendo pesagens, isso é uma possibilidade, é mais didático. Por falta de tempo, acabei me limitando ao que estava no livro didático.

***Pesquisador*:** Em suas aulas, o senhor não trabalhou apenas com equações formadas (x+2=10), mas com os problemas para os alunos transformarem da linguagem comum para a linguagem algébrica. Por quê?

***Professor*:** Como a ideia do estudo das equações é voltada para resolução de problemas que levem os alunos a entender que as mesmas são usadas para resolverem problemas da vida deles, então a ideia de fazer essa transformação da linguagem materna pra a matemática é uma ponte do que eles poderão vivenciar em seu cotidiano. Se eu pegar uma equação já pronta, eles não conseguirão visualizar isso, entendeu? Eu preciso fazer com que eles usem essas pontes do cotidiano pra a sala de aula. Essa questão dos sinais (positivo e negativo) não adianta colocar no quadro (três mais três ou menos três). Quando trabalho com números negativos, o uso de temperaturas acima de zero, abaixo de zero, fica mais fácil fazer a aula nesse sentido, já é outra perspectiva pra o ensino.

***Pesquisador*:** O livro utiliza a metáfora da balança para princípio de equivalência e você não usou esse recurso em sala. Por quê?

***Professor*:** Verdade, a questão da balança no livro até tem o desenho, mas acho inviável o desenho sem pode mexer, está lá no livro. Parado. Talvez possa até ajudar ao aluno imaginar a situação, mas não é uma coisa prática. Uma coisa é você imaginar qual o objeto mais pesado, outra coisa é fazer a comparação, vendo a balança se mexendo. Como não consegui fazer isso, eu optei por outra forma para minha sala. Retirei o exemplo da balança e trabalhei outras situações. Se ficarmos bitolados apenas em resolver, por exemplo, equações do segundo grau apenas com as fórmulas, existem outras formas para se trabalhar as equações do primeiro grau sem usar a balança, exemplos até mais próximos à realidade dos alunos. Por exemplo: a compra de objeto, durante três meses o aluno queria comprar o objeto que custava R$ 65,00 e aí posso dizer que faltou R$ 5,00 pra completar o valor. Qual é o valor da mesada? Então, jogo uma situação, querendo ou não, é uma situação sobre equação. E aí, movimento o pensamento deles, eles se reúnem pra discutirem as situações e não apenas jogar o que está no livro didático.