UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

MARCELLA LUANNA DA SILVA LIMA

UM ESTUDO SOBRE AS PROVAS E DEMONSTRAÇÕES NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: ARTICULAÇÕES ENTRE OS NÍVEIS DE PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE E OS TIPOS DE PROVA DE BALACHEFF

Recife, PE
2020

MARCELLA LUANNA DA SILVA LIMA

UM ESTUDO SOBRE AS PROVAS E DEMONSTRAÇÕES NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: ARTICULAÇÕES ENTRE OS NÍVEIS DE PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE E OS TIPOS DE PROVA DE BALACHEFF

Tese apresentada à Banca Examinadora como requisito para a obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Recife, PE
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L732e Lima, Marcella Luanna da Silva
Um estudo sobre as provas e demonstrações na Licenciatura em Matemática: articulações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff / Marcella Luanna da Silva Lima. - 2020.
398 f. : il.

Orientador: Marcelo Camara dos Santos.
Inclui referências e apêndice(s).

Tese (Doutorado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Recife, 2020.

1. Licenciatura em Matemática. 2. Provas e demonstrações matemáticas. 3. Níveis de pensamento geométrico. 4. Geometria. 5. Educação Matemática. I. Santos, Marcelo Camara dos, orient. II. Título

CDD 507

MARCELLA LUANNA DA SILVA LIMA

UM ESTUDO SOBRE AS PROVAS E DEMONSTRAÇÕES NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: ARTICULAÇÕES ENTRE OS NÍVEIS DE PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE E OS TIPOS DE PROVA DE BALACHEFF

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências (PPGEC) da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

____

Prof. Dr. Marcelo **CÂMARA DOS SANTOS**
Presidente / 1º Examinador / Orientador
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

____

Profa. Dra. Anna Paula de Avelar **BRITO LIMA**
2º examinador interno
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

____

Prof. Dr. Jadilson Ramos de **ALMEIDA**
3º examinador interno
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

____

Profa. Dra. Abigail Fregni **LINS**
4º examinador externo
Instituição: Universidade Estadual da Paraíba - UEPB

____

Prof. Dr. Saddo **AG ALMOULOUD**
5º examinador externo
Instituição: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC - SP

Data da aprovação: 04 de março de 2020

Dedico este trabalho às minhas amadas avós Arlinda Josefa da Silva (*in memoriam*) e Maria Eunice dos Anjos Lima e aos meus amados pais Marcelo Antônio dos Anjos Lima e Lucineide da Silva Lima, por serem meus incentivadores, meus orientadores e meus exemplos de amor, coragem, determinação e fé.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me oportunizar mais um aprendizado na Terra. Por seu amor e seu amparo, e por ser meu leme em todos os momentos.

Em segundo lugar, à minha família que sempre me incentiva, me dar forças e me mostra o caminho certo a seguir. Ao meu pai Marcelo Lima e à minha mãe Neide Lima (como gosta de ser chamada), por todo amor, dedicação, orientação, renúncias e conselhos em todos os momentos da minha vida e por terem compreensão nos momentos de minha ausência. Além de minha irmã, Bruna Lima, pelo apoio e atenção na elaboração desta tese e por sempre me dar forças e me escutar nos momentos difíceis com amor, atenção e carinho. Sem vocês eu nada seria! Amo vocês! Obrigada por tudo!

Ao meu esposo Alan Gonçalves por todo amor, carinho, apoio, paciência e atenção durante todo o processo do Doutorado, me acompanhando e me ajudando em todos os momentos. Obrigada por ser meu porto seguro!

À minha amiga Lorena Brizza por me acolher durante um ano e meio em sua residência, pelo incentivo e pela compreensão nesse processo. Serei eternamente grata!

Ao meu amigo Rochelande Felipe por estar sempre disponível a me escutar e me ajudar durante o Doutorado. Agradeço pelo apoio e palavras de incentivo!

Ao Professor Dr. Marcelo Câmara dos Santos por sua paciência durante o Doutorado, por seu incentivo e por suas valiosas orientações, sempre acreditando em mim. Serei eternamente grata por tudo.

À banca examinadora, nas pessoas de Profa. Dra. Anna Paula de Avelar Brito Lima, Prof. Dr. Jadilson Ramos de Almeida, Profa. Dra. Abigail Fregni Lins e Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud por suas valiosas contribuições e ideias que enriqueceram meu trabalho.

A todos os docentes do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências (PPGEC), da UFRPE, pelas ricas contribuições em minha formação acadêmica.

A todos os companheiros da turma de Doutorado 2016.2 com os quais compartilhei estudos, sorrisos, medos, anseios e muito aprendizado durante um ano e meio de disciplinas cursadas. Em especial, aos amigos mais próximos Carina Morais, Hemerson Nascimento e Suellen Tarcyla, que dividiram comigo as alegrias e dificuldades da Pós-Graduação.

Aos sujeitos participantes dessa pesquisa, meus ex alunos queridos, por se dispuserem a participar e contribuir com o estudo. Serei eternamente grata por me ajudarem!

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a minha formação (pessoal e acadêmica), endereço meus sinceros agradecimentos!

“O êxito de um professor de Matemática deve ser medido pela quantidade de alunos que, ao longo da vida, ele ensinou a pensar por si mesmos e não pelo volume de fórmulas que os fez memorizar.”

Gilberto G. Garbi

RESUMO

LIMA, M. L. S. **Um estudo sobre as provas e demonstrações na Licenciatura em Matemática:** articulações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff. 398 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2020.

Esta pesquisa de doutorado teve por objetivo estabelecer articulações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff, a partir das discussões trazidas por Jaime e Gutiérrez e Balacheff, e das argumentações/justificações produzidas por licenciandos em Matemática. A pesquisa realizada caracteriza-se como quali-quantitativa, com aspectos de um estudo de caso. Os procedimentos de coleta de dados foram: questionário, atividades com provas matemáticas, notas de campo, observação participante, videogravações e entrevistas semiestruturadas, realizadas após a aplicação das atividades. Participaram da pesquisa onze licenciandos em Matemática de uma universidade pública do estado da Paraíba, que se encontravam entre o 6º e 10º período do curso. Como referencial teórico, utilizamos a abordagem das provas e demonstrações matemáticas sob o olhar de Balacheff e consideramos a abordagem dos níveis de pensamento geométrico sob as discussões de van Hiele, De Villiers, Nasser, Kaleff *et al*., Dall'Alba, Ontário, Vargas e Araya, Jaime e Gutiérrez, entre outros. A análise dos resultados mostrou que: (1) os licenciandos não sabiam diferenciar as palavras *prova* e *demonstração*, não tiveram uma vivência com as provas e demonstrações na Educação Básica e o trabalho com elas na Licenciatura não foi satisfatório, pois eles ainda têm muita dificuldade em escrevê-las e entende-las, e não se identificam com a área; (2) os licenciandos, em sua maioria, apresentaram argumentações/justificações dentro das *provas pragmáticas*, sem um embasamento matemático adequado, apenas validando as afirmações por meio da experimentação. Somente uma dupla conseguiu em seis de sete atividades construir provas do tipo *experiência mental*, validando as suas estratégias genericamente; (3) os licenciandos oscilaram muito de um nível de pensamento para outro, principalmente nas atividades que envolviam os mesmos conceitos. Devido a isso, eles construíram diferentes tipos de prova; (4) os licenciandos, em sua maioria, compreendem a diferença entre casos particulares e casos genéricos na Matemática ao analisarem as suas argumentações, justificativas e provas de afirmações matemáticas. Averiguamos experimentalmente que os licenciandos que se encontravam no nível 4 de van Hiele, conseguiram elaborar provas do tipo *experiência mental* e os que se encontravam no nível 3, elaboraram provas do tipo *exemplo genérico*. Já os licenciandos que se encontravam no nível 2, conseguiram elaborar dois tipos de *provas pragmáticas*: *empirismo ingênuo* e *experiência crucial*, enquanto àqueles que se encontravam no nível 1, não realizaram provas, pois não sentiram a necessidade de justificar as suas ideias. Portanto, podemos dizer que a pesquisa traz uma contribuição para a Educação Matemática ao estabelecer articulações mais específicas entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff, as quais ainda não foram discutidas na literatura. Além disso, acreditamos que os resultados podem levar a uma reflexão sobre a possibilidade de diferenciação das palavras *prova* e *demonstração*, o ensino da Matemática com o intuito de desenvolver o raciocínio matemático dos alunos e o ensino das demonstrações na Licenciatura em Matemática possibilitando o *fazer matemática*.

Palavras-chave: Licenciatura em Matemática. Provas e demonstrações matemáticas. Níveis de pensamento geométrico. Geometria. Educação Matemática.

ABSTRACT

LIMA, M. L. S. **A study on the proofs and demonstrations in Mathematics Degree:** articulations between van Hiele’s levels of geometric thinking and Balacheff’s proof types. 398 p. Thesis (Doctorate in Science and Mathematics Teaching) – Rural Federal University of Pernambuco, Recife, 2020.

This doctoral research aimed to establish articulations between van Hiele's levels of geometric thinking and Balacheff's types of proof, based on the discussions brought by Jaime and Gutiérrez and Balacheff, and the argumentations/justifications produced by undergraduates in Mathematics. The research carried out is characterized as quali-quantitative, with aspects of a case study. The data collection procedures were: questionnaire, activities with mathematical proofs, field notes, participant observation, video recordings and semi-structured interviews, carried out after the application of the activities. Eleven undergraduates in mathematics from a public university in the state of Paraíba participated in the research, who were between the 6th and 10th period of the course. As a theoretical framework, we used the approach of mathematical proofs and demonstrations under the perspective of Balacheff and considered the approach of the levels of geometric thinking under the discussions of van Hiele, De Villiers, Nasser, Kaleff et al., Dall'Alba, Ontario, Vargas and Araya, Jaime and Gutiérrez, among others. The analysis of the results showed that: (1) the undergraduates did not know how to differentiate the words proof and demonstration, they did not have experience with the proofs and demonstrations in Basic Education and the work with them in the Mathematics Degree was not satisfactory, because they still have a lot of difficulty in writing and understanding them, and do not identify with the area; (2) the undergraduate students, in their majority, presented arguments/justifications within the pragmatic proofs, without an adequate mathematical basis, only validating the statements through experimentation. Only one pair was able to construct mental experience proofs in six out of seven activities, validating their strategies generically; (3) the undergraduate students fluctuated a lot from one level of thinking to another, mainly in activities that involved the same concepts. Because of this, they built different types of proof; (4) the majority of undergraduates understand the difference between particular cases and generic cases in mathematics when analyzing their arguments, justifications and proof of mathematical statements. We check out experimentally that the undergraduates who were at level 4 of van Hiele, managed to elaborate proofs of the mental experience type and those who were at level 3, elaborated proofs of the generic example type. The undergraduates who were at level 2, on the other hand, managed to elaborate two types of pragmatic proofs: naive empiricism and crucial experience, while those who were at level 1, did not take proofs, as they did not feel the need to justify their ideas. Therefore, we can say that the research contributes to Mathematics Education by establishing more specific articulations between van Hiele's levels of geometric thinking and the types of proof proposed by Balacheff, which have not yet been discussed in the literature. In addition, we believe that the results can lead to a reflection on the possibility of differentiating the words proof and demonstration, the teaching of Mathematics in order to develop the mathematical reasoning of students and the teaching of demonstrations in the Mathematics Degree, enabling them to do mathematics.

Keywords: Mathematics Degree. Mathematical proofs and demonstrations. Levels of geometric thinking. Geometry. Education Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular.

CEFET - Centro Federal de Educação Tecnológica.

CONEDU – Congresso Nacional de Educação.

CTS – Ciência, Tecnologia e Sociedade.

ENADE – Exame Nacional de Desempenho de Estudantes.

ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática.

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio.

GPS - Global Positioning System (Sistema de Posicionamento Global).

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

IES – Instituição de Ensino Superior.

LIBRAS – Língua Brasileira de Sinais.

OCEM – Orientações Curriculares para o Ensino Médio.

PPC – Proposta Pedagógica Curricular.

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais.

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).

SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

SINAES – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior.

UNEB – Universidade do Estado da Bahia.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Muitos professores de Matemática escutam de seus alunos perguntas do tipo: “*Por que estudar Matemática?”* e “*Para que estudá-la?”*. Isso muitas vezes se deve ao fato de esses alunos verem à Matemática como algo que foge à sua possibilidade de compreensão, de pouca utilidade prática, gerando representações e sentimentos que os afastarão do conhecimento matemático. Almouloud, Regnier e Fusco (2009) corroboram essa ideia ao afirmarem que essas indagações surgem nos alunos em razão da *síndrome do imediatismo*, ou seja, nossos alunos têm a ânsia por resultados imediatos, em que tudo que fazemos ou pensamos deve gerar um resultado prático e imediato.

Ponte, Pereira e Henriques (2012) afirmam que o grande objetivo do ensino da Matemática é o de desenvolver a capacidade de raciocínio dos alunos, porém esse raciocínio não é desenvolvido por simples memorização de conceitos, representações e procedimentos rotineiros, pois isso os leva a ter uma visão da Matemática como um conjunto de regras mais ou menos desconexas, e não como uma disciplina lógica e coerente. Para que os alunos desenvolvam essa capacidade é preciso trabalhar com tarefas que tanto requerem raciocínio como o estimulem.

Esses pesquisadores consideram que ser capaz de raciocinar é essencial tanto para usar eficazmente a Matemática em diversas situações, como para a sua própria compreensão. Ao raciocínio matemático podemos associar diversas formas de pensamento, tais como prever resultados, questionar soluções, procurar padrões, recorrer a representações alternativas, analisar e sintetizar. Relacionado a essas discussões, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) esperam que o currículo de Matemática contemple atividades que desenvolvam experiências em que os alunos sejam capazes de argumentar, justificar, conjecturar e provar determinados conteúdos, isto é, atividades que proporcionam o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos.

Em oposição a essas afirmações, ao observarmos o ensino da Geometria percebemos que ele ainda se encontra muito aquém do esperado nesses documentos oficiais (PCN). Lorenzato (2006) afirma que a Geometria ainda é uma parte da Matemática cujo ensino tem sido boicotado pelos professores. São muitos os motivos do boicote ou do desprezo pelo ensino e aprendizagem da Geometria, alguns deles dizem respeito ao abandono da Geometria após o Movimento da Matemática Moderna, à má formação dos professores, aos currículos dos cursos de formação de professores que não oferecem uma formação em Geometria adequada, à exagerada importância que o livro didático desempenha, entre outros. Já Pavanello (1993) afirma que a partir da promulgação da Lei n° 5692/71, os professores tiveram a liberdade de montar seu programa de conteúdos de acordo com as necessidades dos alunos, facilitando assim o abandono da Geometria.

Quanto aos cursos de graduação, Kaleff *et al*. (1994) afirmam que os alunos dos últimos semestres apresentam dificuldades no desenvolvimento do pensamento abstrato em Geometria. Esses alunos não conseguem, muitas vezes, relacionar sistemas axiomáticos diversos, como também têm dificuldades em sistematizar o pensamento dentro da própria Geometria Euclidiana. Esses alunos vêm de um ensino em que a Geometria é deixada de lado, ou seja, esses alunos chegam à graduação em Matemática com dificuldades em Geometria e a abstração torna-se ainda mais laboriosa na Academia.

Na maioria das vezes, em razão dessa falta de conhecimento geométrico, muitas vezes algebrizado, os professores e futuros professores não compreendem nem a teoria da Geometria nem a sua aplicação. Assim, o ensino da Geometria é deixado em segundo plano ou por falta de tempo/aula ou por insegurança e falta de conhecimentos (SCHNEIDER, LUNKES e REISDOEFER, 2013). Para essas autoras, as origens das dificuldades que os professores encontram no processo de ensino e aprendizagem da Geometria diz respeito à formação precária em Geometria, aos cursos de formação inicial que não oferecem uma reflexão profunda quanto ao ensino de Geometria e às formações continuadas que ainda não estão atendendo aos objetivos em relação à Geometria.

Para Lorenzato (1995), essas práticas de omissão e/ou simplificação dos conceitos geométricos em sala de aula, nos diferentes níveis de escolaridade, geram o chamado *círculo vicioso*, ou seja, "[...] a geração que não estudou geometria não sabe como ensiná-la" (p. 4). Além desses apontamentos, Neves, Baccarin e Silva (2013) argumentam que ainda existe uma forte resistência ao ensino e aprendizagem da Geometria, inclusive no Ensino Superior, em que ela também é pouco abordada com a justificativa de que os alunos tiveram pouco acesso ao estudo de tais conceitos na sua formação. O que vem a corroborar a ideia de círculo vicioso proposta por Lorenzato.

Dois pesquisadores muito importantes para a Educação Matemática buscaram investigar as dificuldades de aprendizagem da Geometria que seus alunos tinham. Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geldof dedicaram seus estudos de doutorado a entender e modificar esse cenário, que era de um fraco desempenho de seus alunos em Geometria. O casal van Hiele, a partir da identificação das dificuldades dos seus alunos do curso secundário na

Holanda, elaborou um modelo estabelecendo uma relação entre a compreensão e o nível de maturidade geométrico do aluno. Ou seja, a ideia principal do modelo de van Hiele é que os alunos progridam de acordo com uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto aprendem Geometria.

Em 1957, Pierre van Hiele apresentou seus resultados e nesse trabalho descreveu um modelo para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria baseado em cinco níveis de pensamento geométrico e em cinco fases de instrução (NASSER, 1991). Além disso, esse modelo se coloca como um guia para a aprendizagem e para a avaliação das habilidades dos alunos em Geometria (KALEFF *et al*., 1994).

Para van Hiele (1957), a linguagem e os materiais adotados devem ser escolhidos de forma criteriosa, pois desempenham um papel importante no desenvolvimento do raciocínio geométrico. Ou seja, para ele, os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico não dependem da idade ou da maturidade biológica, mas sim da instrução recebida, por isso os métodos, os materiais utilizados e os conteúdos propostos são elementos importantes no processo de ensino e aprendizagem da Geometria e devem ser cuidadosamente selecionados, levando em consideração os níveis em que os alunos se encontram.

A principal falha nos currículos de Geometria nas escolas, de acordo com van Hiele, diz respeito ao fato de o currículo ser apresentado em um nível mais alto do que o dos alunos, ou seja, os alunos não conseguem entender o professor, nem o professor entende o porquê de os alunos não o entender, justamente porque estão em níveis diferentes e o professor não tem conhecimento disso. Além disso, para que os alunos consigam avançar de um nível para outro é necessário tempo e uma maturação natural do aprendiz(ado), porém isso não é possível devido ao currículo sobrecarregado dos Ensinos Fundamental e Médio (DE VILLIERS, 2010).

Alguns pesquisadores afirmam que existe uma estreita ligação entre o modelo de van Hiele e a habilidade de justificar em Matemática. De Villiers (2010) afirma que a ocorrência do desenvolvimento da *capacidade de provar*, dentro do modelo de van Hiele, surge a partir do nível 3, porém em várias de suas pesquisas empíricas, ele observou que as funções de prova, tais como *explicação, descoberta* e *verificação,* podem ser significativas para alunos nos níveis inferiores ao nível 3 de van Hiele, contanto que os argumentos sejam de natureza intuitiva ou visual. Ou seja, os alunos que estão nos níveis 1 ou 2 não duvidam da validade de suas observações empíricas e por isso a demonstração não faz sentido para eles.

Battista e Clementes (1995) afirmam que somente após o nível 3 é que os alunos podem justificar as declarações formando argumentos que estejam em conformidade com as normas aceitas, isto é, após o nível 3, esses alunos são capazes de construir provas formais e até demonstrações. Pietropaolo (2005) também afirma que o modelo de van Hiele sugere que os currículos de Geometria das escolas deveriam enfatizar a explicação e a justificação das ideias dos alunos, tornando esse estímulo gradual e incentivando-o ao uso da demonstração. Nasser e Tinoco (2003) também argumentam que nos dois primeiros níveis, os alunos não duvidam da validade de suas observações empíricas e não sentem a necessidade de demonstrar as afirmações, como também as atividades elaboradas no sentido de desenvolver habilidades em argumentação e provas contribuem para o acesso ao terceiro nível de van Hiele.

Senk (1989) acrescenta que a demonstração deve ser desenvolvida apenas em salas cujos alunos estejam pelo menos no nível 3. Usiskin (1982) também observou que os níveis de pensamento geométrico de van Hiele são sim um bom indicador quando se trata de prever o sucesso na escrita e elaboração de provas. Gutiérrez e Jaime (1998) afirmam que os alunos que estão no nível 1 de van Hiele não entendem o conceito de provas e por isso não as elaboram. Para os alunos do nível 2, uma prova consiste em alguma verificação experimental da veracidade de uma propriedade em um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, os alunos podem ser convencidos apenas com um exemplo especial ou podem precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Os alunos do nível 3 são capazes de fazer deduções e provas informais, como também são capazes de dar razões informais para a verdade das propriedades. Os alunos do nível 4 de van Hiele podem entender e escrever provas formais. Já os alunos do nível 5 são treinados para analisar o grau de rigor e formalismo de vários sistemas dedutivos e compará-los entre si, pois já capturam a Geometria de forma estritamente abstrata.

Quanto ao trabalho com as provas e demonstrações matemáticas, Nasser (1991) reitera que é comum encontrarmos alunos que não conseguem raciocinar sobre um problema ou discutir possíveis soluções para este. Na maioria dos casos, os alunos não estão habituados a pensar, uma vez que simplesmente aplicam fórmulas para obter os resultados pedidos. Isso se deve ao fato do caráter superficial com que o ensino da Geometria é tratado nas escolas. Esses alunos não veem demonstrações nem tampouco são pedidas justificativas para as respostas dadas, ou quando veem, a demonstração é apresentada já pronta, tal qual está no livro, de forma acrítica e formalista.

Uma das formas de auxiliar na mudança desse cenário, como também de auxiliar o ensino e aprendizagem da Matemática, seria a utilização de provas e demonstrações matemáticas de modo falibilista, quase empírico, construindo e debatendo com os licenciandos a demonstração de determinado teorema, a fim de que eles percebam que a Matemática não como uma ciência que trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como uma ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos. Isso pode vir a tornar mais claro para os alunos a importância da demonstração na Matemática, possibilitando que eles construam, questionem, levantem hipóteses, testem, refutem, conjecturem e validem as afirmações matemáticas.

A partir de pesquisas de educadores matemáticos, tais como Nasser (1991), Nasser e Tinoco (2003), Balacheff (2000), Almouloud, Regnier e Fusco (2009), Hanna (1990), Aguilar Jr e Nasser (2012), Grinkraut (2009), Pietropaolo (2005), Almouloud (2007), Jahn, Healy e Pitta Coelho (2007), entre outros, observamos que o uso de provas e demonstrações matemáticas no cotidiano escolar é cada dia mais esquecido, fazendo com que o aluno não perceba a necessidade de provar e demonstrar matematicamente, vindo a ter dificuldades de argumentação, perca a capacidade de justificar suas respostas e de deduzir o raciocínio matemático com segurança nas respostas por ele formalizadas.

Para os PCN (BRASIL, 2000), não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas de dar aos alunos a oportunidade de perceber a Matemática como uma ciência que valida e apresenta seus conhecimentos dentro de um sistema hipotético-dedutivo, bem como proporcionar o desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática. O que confirma a proposta de fazer esse trabalho na Educação Básica, de forma que apresentemos uma Matemática falível e experimental, em que para conseguirmos fazer a dedução de uma demonstração, iniciamos por levantamento de hipóteses, testes de conjecturas, refinamento de teorias, refutações de conjecturas, aprimoramento da escrita e generalização dos exemplos.

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017) também apresenta a importância de se desenvolver o raciocínio e argumentação dos alunos, orientando-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Há também uma preocupação quanto ao compromisso do Ensino Fundamental com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas.

No Ensino Médio, a BNCC (BRASIL, 2018) espera que a área de Matemática e suas Tecnologias aproveite ao máximo todo o potencial já constituído pelos alunos no Ensino Fundamental, promovendo ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Ou seja, os novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos alunos formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos.

As Diretrizes Curriculares para os Cursos de Matemática (BRASIL, 2001) desejam que um Licenciado em Matemática tenha: visão de seu papel de educador e saiba se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos; visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação de indivíduos críticos e participativos na sociedade; visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, tomando consciência de seu papel na superação dos preconceitos ainda presentes no ensino e aprendizagem da disciplina. Além disso, espera-se que os currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática sejam elaborados de maneira a desenvolver algumas das seguintes competências e habilidades: capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão; capacidade de compreender, criticar e utilizar novas ideias e tecnologias para a resolução de problemas; habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema; entre outras (BRASIL, 2001).

As orientações da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM (SBEM, 2003) também ressaltam a importância desse trabalho ao recomendarem que é fundamental que o professor em formação seja levado a explorar situações-problema, a procurar regularidades, a fazer conjecturas, a fazer generalizações, a pensar de maneira lógica e a comunicar-se matematicamente utilizando diferentes linguagens. Além disso, esse documento enfatiza a importância do licenciando conceber que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação e por isso é importante que ele compreenda as noções de conjectura, de teorema, de demonstração e saiba examinar as consequências do uso de diferentes definições.

Neves, Baccarin e Silva (2013) afirmam que há estudos que avaliam métodos eficientes de utilizar as demonstrações na Licenciatura em Matemática com o intuito de favorecer o desenvolvimento de habilidades junto aos licenciandos para que eles, em sua prática, superem as dificuldades relacionadas aos conceitos geométricos. Nasser e Tinoco (2003) corroboram essa ideia ao argumentarem que é preciso auxiliar os alunos no desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo e da habilidade de argumentar. Por isso acreditamos que se os licenciandos vivenciarem as competências e habilidades esperadas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática (BRASIL, 2001) e as recomendações da SBEM (2003) em sua formação inicial, eles serão capazes de desenvolver as recomendações propostas nos PCN (BRASIL, 2000) e na BNCC (BRASIL, 2017, 2018), uma vez que eles estarão a par das inúmeras possibilidades do trabalho com as provas e demonstrações, assim como das funções da demonstração.

Em nossa pesquisa, estamos trabalhando com duas palavras (*prova* e *demonstração*) que na visão de muitos matemáticos são consideradas sinônimas. Porém ressaltamos que aqui consideramos que prova e demonstração não são palavras sinônimas. Ou seja, tomaremos a *prova* em um significado mais amplo, podendo ser entendida como um discurso para estabelecer a validade de uma afirmação, não necessariamente aceita pela comunidade matemática. Enquanto a *demonstração* será considerada como um tipo de prova aceita pela comunidade dos matemáticos, baseada em um conjunto de axiomas e de outras propriedades já demonstradas, devendo ser obtida por meio de um processo hipotético-dedutivo (GRINKRAUT, 2009).

Além disso, a partir de nosso referencial teórico, Balacheff (2000) argumenta que as *provas* são explicações aceitas em um determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para uma comunidade, mas também pode ser rejeitada por outra. Quando a prova faz referência a um enunciado matemático, então ela passa a se chamar *demonstração*. Ou seja, as demonstrações se tratam de uma série de enunciados que se organizam seguindo um conjunto bem definido de regras.

É possível inferir que Balacheff (2000) considera a prova como um discurso que valida uma proposição para determinada comunidade, podendo assumir diferentes níveis de generalização, enquanto que a demonstração consiste em um tipo particular de prova, que valida uma proposição por meio de um desenvolvimento dedutivo rigoroso com o intuito de formalizar as afirmações matemáticas. Isto quer dizer que o termo *prova* é mais diverso do que o da *demonstração* que é mais específica, ou seja, uma demonstração é uma prova, mas nem toda prova é uma demonstração.

Essa diferenciação torna-se importante na medida em que pode vir a provocar um obstáculo à pesquisa e por isso Balacheff (2000) defende que deve haver uma distinção entre as noções de prova e demonstração. Somente com essa diferenciação, poderemos considerar como justificativas: casos particulares, exemplos específicos, figuras, entre outros. Essa diferenciação se deve ao fato de os alunos não serem obrigados desde cedo a demonstrar, sem possuírem a racionalidade[1] e o estado específico de conhecimentos que essa prática necessita.

---

[1] Balacheff (2004, n.p) entende racionalidade como “o sistema de critérios ou regras mobilizadas quando é necessário fazer escolhas, tomar decisões ou executar julgamentos”. Para o pesquisador, a racionalidade nos permite raciocinar e decidir e é então a base de qualquer processo de prova.

Ou seja, segundo Balacheff (2000), os alunos não devem ser obrigados a demonstrar, eles devem, a partir de seus argumentos, serem motivados a pensar, refutar e levantar conjecturas, fazendo com que eles tomem para si a responsabilidade de sua aprendizagem e para que a demonstração comece a fazer sentido para eles.

À vista dessas discussões, julgamos nossa pesquisa relevante por trazermos apontamentos importantes sobre a formação inicial de professores de Matemática acerca da utilização das provas e demonstrações tanto na Educação Básica como na Licenciatura, como também por apresentarmos resultados alarmantes acerca da escrita matemática e da utilização da argumentação, justificação e provas na Licenciatura em Matemática. Além disso, por entendermos que existe uma relação entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e o processo de provas e demonstrações, conseguimos elaborar articulações mais específicas entre esses níveis e os tipos de prova de Balacheff (2000), até então não realizadas.

Evidenciamos também como relevante as orientações e discussões trazidas nos PCN, na BNCC, nas Diretrizes Curriculares para os cursos de Matemática e na SBEM, enfatizando que os licenciandos devem ter contato com as provas e demonstrações em sua formação inicial, compreendendo e se apropriando das noções de argumentação, justificação, prova e demonstração e percebendo a importância de se demonstrar em Matemática, para que assim eles consigam trabalhar com elas na Educação Básica, enquanto professor. Além disso, é necessário que eles também conheçam o modelo de van Hiele para que possam selecionar os materiais adequados e utilizar a linguagem adequada para cada turma, uma vez que isso possibilita o conhecimento dos diferentes níveis de pensamento geométrico em que se encontram os seus alunos. E assim conseguindo trabalhar com essas duas propostas, conforme destacado anteriormente, uma vez que os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico estão estritamente relacionados com a habilidade de argumentar, justificar, provar e demonstrar.

Consideramos também importante estabelecermos articulações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele (1957) e os tipos de provas propostos por Balacheff (2000), uma vez que a partir de vários pesquisadores percebemos a relação existente entre esses níveis e o processo de construção e elaboração de provas e demonstrações. Contudo, as articulações propostas aqui nessa tese, entre os níveis de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff, ainda não foram encontradas e discutidas na literatura da Educação Matemática, podendo vir a contribuir para um trabalho adequado com as provas e demonstrações, tanto na Educação Básica como na Licenciatura em Matemática, enfatizando a importância de estimular o raciocínio matemático dos alunos por meio de atividades que mobilizem a argumentação, a justificação, as provas empíricas, as provas formais e por fim as demonstrações.

Acreditamos assim que esse trabalho se justifica por sua relevância ao contribuir com as discussões acerca da formação inicial de onze licenciandos em Matemática de uma instituição pública do estado da Paraíba e do trabalho com provas e demonstrações na Licenciatura em Matemática, como também por averiguar as articulações estabelecidas entre os níveis de pensamento geométrico e os tipos de prova de Balacheff.

Como referencial teórico, tomamos a abordagem das provas e demonstrações matemáticas sob o olhar e pesquisas apresentadas por Balacheff (2000) e quanto à abordagem dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, estamos considerando as diferentes ideias e pesquisas propostas por van Hiele (1957), De Villiers (2010), Nasser (1991), Kaleff *et al*. (1994), Dall'Alba (2015), Ontário (2006), Battista e Clements (1995), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), entre outros. Além disso, para a etapa da análise de dados buscamos concretizar as articulações entre os níveis de pensamento geométrico e os tipos de prova que elaboramos no Capítulo 4, a partir das discussões feitas por van Hiele (1957), Balacheff (2000), Battista e Clements (1995), Nasser e Tinoco (2003), Senk (1989), De Villiers (1987), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), Gutiérrez e Jaime (1998), Usiskin (1982), entre outros.

Nosso objeto de estudo está na busca de uma relação entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff. Com isso, estamos interessados em responder o seguinte questionamento:

- *Que articulações podemos identificar entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff quando analisarmos as argumentações/justificações produzidas por licenciandos em Matemática?*

Orientados por essa questão, objetivamos estabelecer articulações entre os níveis de pensamento geométrico discutidos por van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff, o que nos possibilita levantar a hipótese de que com o pensamento geométrico desenvolvido pode-se trabalhar com os variados tipos de prova e as demonstrações. Por fim, temos como objetivos específicos:

1 – Analisar o significado de prova e demonstração que possuem os licenciandos em Matemática, bem como as suas vivências com esse trabalho na Educação Básica e no Ensino Superior;

2 – Estudar as argumentações, justificações e estratégias utilizadas pelos licenciandos ao responderem atividades que exigem provas de afirmações matemáticas;

3 – Analisar os tipos de prova elaborados pelos licenciandos e o nível de pensamento geométrico em que eles se encontram;

4 – Verificar o que os licenciandos entendem por casos particulares e casos genéricos ao analisarem argumentações, justificativas e provas de afirmações matemáticas.

Nesse sentido, norteados por essa questão, organizamos nosso trabalho em seis distintos capítulos. No Capítulo 1, apresentamos algumas discussões acerca da *Geometria e seu ensino* e, para isso, discorremos acerca da história da Geometria, enfatizando alguns marcos importantes para o desenvolvimento dessa área na Matemática. Abordamos também sobre a Geometria na Educação Básica no Brasil, refletindo sobre os PCN e a BNCC, as mudanças curriculares da Matemática ocorridas no Brasil e as dificuldades ainda presentes do ensino de Geometria, com o intuito de refletirmos um pouco mais sobre esse ensino e como ele ainda está esquecido ou sendo abordado de forma mecânica, apesar das inúmeras pesquisas nessa área. Também explanamos sobre a Geometria nas Licenciaturas em Matemática no Brasil, refletindo sobre o que se espera de um licenciando, as dificuldades ainda presentes do ensino de Geometria no curso de Matemática, os resultados do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes – ENADE (BRASIL, 2014) e uma análise das ementas de disciplinas de Geometria de instituições públicas dos Estados da Paraíba e Pernambuco.

No Capítulo 2, apresentamos algumas discussões sobre o *Modelo de van Hiele*, discorrendo sucintamente acerca das bases epistemológicas de van Hiele, que o auxiliou a refletir e a desenvolver sua tese sobre a aquisição da compreensão em Geometria. Além disso, abordamos também alguns conceitos gerais do modelo de van Hiele, acerca da aquisição da compreensão, os meios que auxiliam a desenvolvê-la e os meios que podem dificultá-la, refletindo assim sobre o ensino e aprendizagem da Geometria. Também explanamos sobre o seu modelo, explicitando o motivo do seu desenvolvimento, algumas influências para a sua escrita, os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico e as fases de instrução para auxiliar nessa progressão. Além disso, como todo modelo que já está há mais de 60 anos publicado, abordamos algumas críticas recebidas ao longo desse tempo, que ajudam a refletir e a tentar melhorar as pesquisas na área e ao ensino e aprendizagem de conceitos geométricos.

No Capítulo 3, apresentamos algumas discussões acerca das *Provas e Demonstrações Matemáticas*, discorrendo sobre as terminologias envolvendo essas palavras, a partir das visões de pesquisadores da Matemática Pura e da Educação Matemática, ressaltando quais terminologias utilizamos em nossa pesquisa. Abordamos também aspectos sobre as demonstrações em Geometria, a perspectiva histórica, as dificuldades de licenciandos em demonstrar e o que se propõe para melhorar esse trabalho. Além disso, discutimos sucintamente a base epistemológica de Balacheff, que diz respeito ao método das provas e refutações de Imre Lakatos. Como também abordamos alguns conceitos e terminologias gerais das ideias defendidas por Balacheff acerca de raciocínio, explicação, prova e demonstração, assim como a utilização do método de Lakatos em sua pesquisa com alunos na França. Explanamos também sobre os tipos de prova propostos por Balacheff a partir de suas pesquisas, como também trazemos as funções da demonstração discutidas por De Villiers em seus estudos.

No Capítulo 4, apresentamos as *Possíveis articulações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff*, traçadas teoricamente a partir das discussões realizadas por Senk (1985, 1989), Usiskin (1982), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), Jaime (1993), Gutiérrez e Jaime (1998), entre outros, acerca da relação existente entre os níveis de pensamento geométrico e o processo de justificativa e prova. As articulações estabelecidas nesse capítulo foram averiguadas em nossa pesquisa por meio da aplicação de atividades com provas matemáticas a onze licenciandos em Matemática de uma instituição pública do estado da Paraíba.

No Capítulo 5, apresentamos a *Abordagem Metodológica*, discorrendo acerca do delineamento metodológico traçado para o desenvolvimento da nossa pesquisa. Para isso, iniciamos retomando a questão central e os objetivos de pesquisa e, em seguida, a caracterizamos. Discutimos acerca dos sujeitos participantes e o campo da pesquisa, abordando as características da instituição da qual os sujeitos pesquisados fazem parte. Por fim, apresentamos os momentos de coleta dos dados, os instrumentos utilizados para tal e como se deu a análise dos resultados.

No Capítulo 6, apresentamos a *Análise dos dados*, discutindo o perfil dos licenciandos, traçado a partir da aplicação do questionário, como também apresentando as análises *a priori* e *a posteriori* das atividades com provas matemáticas, abordando os níveis de pensamento geométrico em que se encontram os sujeitos, os conhecimentos geométricos que possuem e averiguando as articulações, estabelecidas por nós, entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff, a partir dessas atividades e das entrevistas semiestruturadas.

Após o Capítulo 6, apresentamos as *Considerações finais*, revisitando a questão de pesquisa e o objetivo do nosso estudo, apontando os resultados obtidos com a realização da pesquisa, como também discutindo as limitações do estudo e as perspectivas futuras. Por fim, apresentamos as *Referências*.

CAPÍTULO 1 – GEOMETRIA E SEU ENSINO

Neste capítulo, discorremos acerca da história da Geometria, enfatizando alguns marcos importantes para o desenvolvimento desta área na Matemática. Abordaremos também sobre a Geometria na Educação Básica no Brasil, refletindo sobre os PCN, a BNCC, as mudanças curriculares da Matemática ocorridas no Brasil e as dificuldades ainda presentes do ensino de Geometria.

Também explanaremos sobre a Geometria nas Licenciaturas em Matemática no Brasil, refletindo sobre o que se espera de um licenciando, as dificuldades ainda presentes do ensino de Geometria nesse segmento, os resultados do ENADE 2014 e uma análise sucinta das ementas de disciplinas de Geometria de instituições públicas do Estado da Paraíba e Pernambuco.

1.1 PERCURSO HISTÓRICO DA GEOMETRIA

O termo Geometria deriva do grego e quer dizer *geo* (terra) e *metria* (medida), ou seja, medição/medida da terra. A justificativa da origem de seu nome deve-se ao fato de que os primeiros conhecimentos geométricos que o homem obteve partiram de suas necessidades em compreender melhor o meio onde vivia.

De acordo com Eves (1997), as primeiras considerações feitas a respeito da Geometria são muito antigas tendo como origem a simples observação e a capacidade de reconhecer figuras, de comparar formas e tamanhos. Um dos primeiros conceitos geométricos desenvolvidos foi a noção de distância. O pesquisador afirma que nos primórdios os homens só consideravam problemas geométricos concretos. Só mais tarde eles conseguiram observar as formas, os tamanhos e as relações espaciais de objetos físicos específicos e deles conseguiram extrair propriedades que tinham relações com outras observações já vistas e estudadas.

Acredita-se que as primeiras medições de distâncias, áreas e volumes tenham surgido de necessidades do dia a dia. Civilizações antigas, como a babilônica e a egípcia, precisavam medir as terras para demarcar os limites de propriedades e de plantações, projetar templos e pirâmides, prever o movimento dos astros, etc. Para Boyer (1974), a Geometria teve sua origem no Egito e surgiu da necessidade de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio Nilo.

Para delimitar as áreas de cultivo, os antigos faraós nomeavam os funcionários, chamados de agrimensores, que avaliavam os prejuízos decorrentes das cheias dos rios e restabeleciam as fronteiras entre as diversas propriedades. Segundo Piaseski (2010), ao tentarem refazer os limites entre as propriedades, os agrimensores tinham apenas algumas informações e às vezes nenhuma, pois em algumas inundações as fronteiras podiam ter sido destruídas por completo. Dessa forma, eles acabaram por aprender a determinar áreas de terrenos dividindo-os em retângulos e triângulos e quando se deparavam com superfícies irregulares utilizavam o método de triangulação, dividindo um campo em porções menores e triangulares cujas áreas somadas correspondiam a área total. Além disso, eles sabiam que para formar ângulos retos, bastaria ter um triângulo cujos lados medissem 3, 4 e 5 ou que fossem múltiplos desses números e, então, o ângulo formado pelos dois lados menores seria de 90º.

Foi na Grécia que a Geometria se desenvolveu como uma forma de conhecimento organizada, sem a preocupação de ter aplicações úteis. Como os gregos valorizavam a busca pelo conhecimento, eles conseguiram estruturar a Geometria de uma maneira mais ordenada e buscavam explicar os porquês dos fatos pelo argumento mais conciso e lógico possível.

Tales de Mileto (624 a.C – 546 a.C.) foi um de seus primeiros expoentes. Ele fazia muitas viagens e em uma de suas viagens, ele buscou explicações teóricas para o fato de os egípcios terem construído suas pirâmides, sem terem conhecimento para medir a sua altura. Foi a partir desse fato que Tales deduziu fórmulas geométricas, tais como as propriedades de triângulos semelhantes, ao se tentar medir a altura da pirâmide de Quéops, sendo o primeiro a demonstrar teoremas geométricos. Um outro matemático grego muito importante foi Pitágoras (570 a.C. – 495 a.C.), que ajudou a estabelecer a Geometria como uma teoria dedutiva, formulando claramente problemas e explicando hipóteses. Pitágoras foi o primeiro grego a aprender a Geometria egípcia, como também aprendeu os hieróglifos egípcios (PIASESKI, 2010).

Garbi (2006) afirma que tivemos outro matemático que contribuiu de forma significativa para as descobertas matemáticas, Euclides de Alexandria, que viveu por volta do século III a.C. Ele foi o primeiro a apresentar a Geometria como ciência de natureza lógica e dedutiva, não se limitando em anunciar um grande número de leis geométricas, preocupando-se sempre em demonstrar esses teoremas. Euclides introduziu um sistema axiomático ou dedutivo que parte de conceitos e proposições sem demonstração, chamados de postulados ou axiomas, para então construir e apresentar de maneira lógica os problemas (PIASESKI, 2010).

Euclides escreveu o clássico livro *Os Elementos*, conhecido como um tratado matemático e geométrico, composto por 13 livros que englobam uma coleção de definições, postulados ou axiomas, proposições e demonstrações matemáticas dessas proposições. Esses 13 livros cobrem a Geometria Euclidiana e a versão grega antiga da Teoria dos Números elementar. Desses 13 livros, cinco são dedicados à Geometria Plana, nos quais Euclides apresenta noções de ponto, reta e superfície, que são elementos admitidos sem definição. Euclides elaborou um total de 23 definições para que a Geometria tivesse sentido e pudesse provar as suas proposições. Além disso, ele coletou e arranjou nesses cinco livros proposições da Geometria Plana, apoiando-se em um conjunto de cinco postulados:

> **Postulado 1:** Dados dois pontos distintos, há um único segmento de reta que os une;
> **Postulado 2:** Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;
> **Postulado 3:** Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir uma circunferência de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada;
> **Postulado 4:** Todos os ângulos retos são congruentes (semelhantes);
> **Postulado 5:** Se duas linhas intersectam uma terceira linha de tal forma que a soma dos ângulos internos em um lado é menor que dois ângulos retos, então as duas linhas devem se intersectar neste lado se forem estendidas indefinidamente. (Postulado de Euclides ou Postulado das Paralelas)

Segundo Eves (1997), mais tarde Platão (428 a.C. – 347 a.C.) também se interessou pela Geometria. Ele acreditava em uma Geometria intuitiva e foi um matemático que buscou defender a teoria dos cinco elementos, aliando esses elementos a cinco sólidos geométricos regulares. Platão associou o fogo ao tetraedro, o ar ao octaedro, a água ao icosaedro, a terra ao cubo e o Universo ao dodecaedro. Ele e seus seguidores estudaram esses sólidos, conhecidos como *Poliedros de Platão*, com muita intensidade. Em 1637, o matemático francês René Descartes (1596-1650), publica o livro *A Geometria*, conseguindo estabelecer uma ligação entre fórmulas e figuras geométricas, entre uma figura e uma equação ou vice-versa. Ou seja, Descartes consegue unir a Geometria e a Álgebra.

Kaleff (2010) afirma que até o século XIX o modelo axiomático desenvolvido por Euclides foi muito bem considerado entre os filósofos e matemáticos, uma vez que ninguém colocava em dúvida que essa obra representa uma grande contribuição da Antiguidade para o desenvolvimento das Ciências. Contudo, o *Quinto Postulado* ou *Postulado das Paralelas* de Euclides sempre foi alvo de críticas, pois muitos afirmavam que a redação era mais complexa, extensa e menos intuitiva que os anteriores, levando alguns matemáticos a desconfiarem de sua validade enquanto postulado e a sugerirem que ele pudesse ser uma consequência lógica dos quatro postulados anteriores.

Muitos estudiosos tentaram provar que esse postulado não existia, utilizando os quatro postulados originalmente considerados por Euclides, mas não conseguiram e isto perdurou durante mais de 2 000 anos. Na primeira metade do século XIX, vários matemáticos como Carl Frederich Gauss (1777-1855), Nikolai Lobachevsky (1792-1856), Janos Bolyai (1802-1860), Georg Bernhard Riemann (1826-1866) e posteriormente Eugenio Beltrami (1835-1900), Jules-

Henri Poincaré (1854-1912) e Felix Klein (1849-1925) concluíram que a pretendida demonstração não era possível (KALEFF, 2010).

Foi a partir dos estudos desses matemáticos que hoje conseguimos olhar para além dos conhecimentos propostos por Euclides, pois foi a partir dos processos de negação do *Quinto Postulado Euclidiano* que se deu origem às *Geometrias não-Euclidianas*, que são sistemas axiomáticos dedutivos alternativos ao modelo Euclidiano. Kaleff (2010) afirma que foi a partir dessas novas Geometrias que os cientistas buscaram explicar o mundo físico dos nossos dias, por meio de ferramentas teóricas modernas ligadas à Teoria da Relatividade, possibilitando aos estudiosos perceberem que os conceitos anteriores ao século XIX eram insuficientes para a representação dos fenômenos físicos, uma vez que esses antigos conceitos não descreviam tão bem as formas fragmentadas e irregulares, como as que eram e são encontradas na natureza.

Em 1824, o matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) inovaria ainda mais a Geometria, estabelecendo as bases para a futura Teoria da Relatividade proposta por Albert Einstein no século seguinte. Gauss não conseguia ver, a princípio, razão alguma para imaginar o espaço em linhas retas, tal como se fazia na época de Euclides. Para ele, uma linha podia ser curva, assim como uma superfície. Contudo, Gauss nunca chegou a publicar suas ideias sobre o espaço curvo, pois temia as consequências de afrontar um conhecimento de quase dois mil anos.

No entanto, houve um matemático húngaro que não teve esse temor. Janos Bolyai (1802-1860) publicou um novo tipo de Geometria baseada no espaço curvo. Para Bolyai, se o espaço fosse realmente curvo, então a soma dos ângulos internos de um triângulo seria menor do que 180º, diferentemente da Geometria Euclidiana, na qual o espaço é plano e a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180º. Essa nova Geometria proposta por Bolyai é chamada de Hiperbólica.

Outro matemático que contribuiu com a construção da Geometria Hiperbólica foi Lobachevsky (1792-1856), que rejeitou somente o quinto postulado de Euclides e conservou os demais postulados e axiomas da Geometria Euclidiana. Felix Klein (1849-1925) e Henri Poincaré (1854-1912) também ajudaram na criação de modelos para a Geometria Hiperbólica. Uma utilização moderna da Geometria Hiperbólica diz respeito à Teoria Especial da Relatividade, particularmente no espaço-tempo de Minkowski e no espaço girovetorial.

Um aluno de Gauss, o alemão Bernhard Riemann (1826-1866) propôs conceitos radicalmente novos sobre a estrutura do espaço geométrico. Enquanto Bolyai pensou em uma nova Geometria em duas dimensões, Riemann estendeu a Geometria para várias dimensões, com um espaço de quatro, cinco, seis ou mais dimensões. Ele subverteu totalmente as fronteiras da Geometria tradicional, postulando espaços fantásticos de quatro ou mais dimensões.

As Geometrias Hiperbólica e Elíptica são as geometrias mais importantes da não-Euclidiana. A partir da revolução iniciada por Gauss e expandida por Riemann, o físico alemão Albert Einstein, em 1910, utilizou as ideias de espaço curvo e de várias dimensões para formular uma nova teoria da gravitação, que substituiu a de Newton mais de 200 anos depois. Hoje, esses estudos da Geometria Hiperbólica e da Elíptica são empregados para tentar se chegar a uma teoria de todas as coisas, um tipo de teoria final que explicaria praticamente todos os fenômenos da natureza. Nessa teoria, chamada de *supercordas*, as partículas elementares, como elétrons, quarks e fótons, são vistas como diminutas cordas vibrantes, como as de um violino, e o espaço tem inimagináveis 10, 11 dimensões.

Outra Geometria que surgiu antes da Hiperbólica foi a *Geometria Projetiva*, que estuda as propriedades descritivas das figuras geométricas. Ela foi consolidada a partir de uma publicação de Jean Victor Poncelet (1788-1867), intitulada *Tratado das Propriedades Projetivas das Figuras*, em 1822. O desenvolvimento da Geometria Projetiva está atrelado ao desenvolvimento da perspectiva e, em termos axiomáticos, uma das diferenças entre a Euclidiana e a Projetiva está na inexistência de retas paralelas. A Geometria Projetiva criou uma grande área na Geometria, única e elegantemente desenvolvida, cujos postulados transcendem os limites do espaço euclidiano. Essa Geometria não se preocupa com as propriedades métricas de seus objetos e sua axiomática é diferente daquela adotada por Euclides (LOVIS e FRANCO, 2015).

A *Topologia* surgiu a partir do problema das sete pontes de Königsberg solucionado por Leonard Euler (1707-1783). Essa área estuda as questões qualitativas dos objetos e não quantitativas, ou seja, estuda-se as noções de vizinhança, de interior e exterior, de aberto e fechado, de conexo e desconexo, de contínuo e descontínuo, entre outros (LOVIS e FRANCO, 2015). A Topologia foi consolidada no século passado por meio dos trabalhos do matemático francês Henri Poincaré. Ele deixou grandes contribuições para essa área, como também deixou em aberto, no início do século passado, um desafio matemático, chamado Conjectura de Poincaré, que afirma, em termos simples, que a esfera é o objeto mais simples em qualquer dimensão. A resolução desse problema levou praticamente um século, sendo completada recentemente pelo matemático russo Grigory Perelman (1966), conhecido por não falar com a imprensa e não aceitar prêmios.

Outro tipo de Geometria, associada à autossimilaridade, à dimensão e à complexidade infinita dos objetos, é chamada *Geometria Fractal* e teve seu início com Benoit Mandelbrot

(1924-2010). Essa Geometria descreve muitas situações que não podem ser explicadas facilmente pela Geometria clássica e que foram aplicadas em Ciência, Tecnologia e Arte gerada por computador. Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. As raízes conceituais dos fractais remontam às tentativas de medir o tamanho dos objetos para os quais as definições tradicionais da Geometria Euclidiana falham, ou seja, nessa Geometria também são abandonados os postulados de Euclides (LOVIS e FRANCO, 2015). Os primeiros fractais estudados foram o conjunto de Cantor, floco de neve de Koch e o triângulo de Sierpinski.

Em resumo, foi com o surgimento das novas Geometrias que a sociedade e a própria Matemática conseguiu se desenvolver mais rapidamente, apresentando assim uma Matemática que até o século XIX não era percebida. Essa nova Matemática é composta por um sistema de conhecimentos que foram e são construídos por meio da história, que podem sofrer reformulações e transformações ao longo dos anos, cujas afirmações, frente a determinados questionamentos, geram revisões de seus próprios conceitos, fazendo com que se criem novas teorias matemáticas, assim como aconteceu com a negação do Quinto Postulado de Euclides, dando origem às Geometrias não-Euclidianas (KALEFF, 2010).

Portanto, percebe-se a importância de compreendermos a Matemática como uma ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como uma ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos. Tomando a evolução da Geometria, nota-se que ela sempre esteve presente em várias situações do nosso dia a dia, nas quais os matemáticos buscaram e ainda buscam explicações lógicas e coerentes para os fatos que nos rodeiam. A Geometria Euclidiana e as novas Geometrias, construídas a partir da negação do quinto postulado de Euclides, contribuíram e ainda contribuem para muitas pesquisas, estudos e discussões com o intuito de auxiliar na construção da cidadania, uma vez que a nossa sociedade se utiliza cada vez mais de conhecimentos científicos e tecnológicos. Por isso compreende-se o quão a Geometria é importante para o desenvolvimento da própria Matemática, como também para as outras áreas do conhecimento nas sociedades atuais.

1.2 A GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL

De acordo com Sena e Dorneles (2013), foi a partir de 1648 que aqui no Brasil os estudos da Geometria foram iniciados pela necessidade de preparo militar. Os soldados que não tinham conhecimentos matemáticos apresentavam dificuldades em acertar alvos, realizar leitura de mapas e organizar o material de artilharia. Em 1699 foi criada uma aula especial sobre fortificações, com o intuito de ensinar a desenhar e a trabalhar em um forte. Nos anos 1730, o ensino militar tornou-se obrigatório a todo oficial e há registro do primeiro livro brasileiro sobre Geometria, chamado *Exames de Artilheiros e Exames de Bombeiros*. Foi a partir da necessidade de ter noções geométricas que o exército brasileiro impulsionou os estudos matemáticos, incorporando-os nos currículos oficiais.

Sena e Dorneles (2013) afirmam que em 1824 com a gratuidade do nível primário, tentou-se incluir as noções geométricas no ensino, além das quatro operações fundamentais, porém as tentativas foram infrutíferas, por não possuírem professores do primário habilitados para tal ensino e por não ser um conhecimento escolar solicitado para o ingresso em nenhuma instituição secundária, fazendo com que o ensino de Geometria ficasse reservado somente ao ensino secundário. Em 1889, torna-se obrigatório o ensino do desenho técnico e geométrico em todo país com um caráter científico e positivista, expressando rigor e precisão.

Até a década de 30, permeou-se no Brasil, segundo Fiorentini (1995), a tendência *formalista clássica*, na qual o ensino era livresco, centrado no professor e a aprendizagem era para poucos, somente para os bem-dotados de saber. Nessa época, a Matemática foi pautada pelo modelo euclidiano e por uma concepção platônica, caracterizada por uma visão estática, a-histórica e dogmática das ideias. Foi nessa época também que ocorreu uma excessiva geometrização. Durante a década de 30, a tendência era *empírico-ativista*, marcada pela reforma educacional Francisco Campos, pela criação das primeiras instituições de ensino destinadas à formação de professores para cursos secundários e por uma preocupação com a organização curricular. Concebeu-se o aluno como ativo, valorizou-se métodos desenvolvidos em pequenos grupos, formulou-se diretrizes metodológicas e unificou-se o ensino da Matemática em quatro campos (Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria). O estudo geométrico passou a ser ensinado em todo o curso secundário, composto por desenho (natural e técnico) e o estudo dedutivo da Geometria (FIORENTINI, 1995).

Sena e Dorneles (2013) afirmam que em abril de 1942, com a criação da lei orgânica do ensino secundário, ocorreu uma reestruturação do ensino, criando o ginásio, de 4 anos, e o científico, de 3 anos. Nessa nova proposta, a Geometria passou a ser organizada com o mesmo programa estabelecido na reforma de 30, sendo abordada intuitivamente nas duas primeiras séries do ginásio e dedutivamente nas duas últimas e no científico, ela estava presente em todos os anos. Contudo, houve críticas aos extensos programas e ocorreu uma nova reestruturação do ensino. A Geometria foi então redistribuída e passou a não mais constar no programa da 2ª série do ensino ginasial e no 2º ciclo, ficando toda concentrada ao 1º ano. A Geometria Analítica passou a ser desenvolvida no 3º ano do 2º ciclo, sob o nome de função linear. Não houve uma diferenciação substancialmente da reforma anterior, apenas se distinguiu pela distribuição dos conteúdos nas séries (SENA e DORNELES, 2013).

Nos anos de 1955, 1957, 1959, 1961 e 1966, com os Congressos Brasileiros de Ensino de Matemática, a Educação Matemática passou por uma fase de mobilização e assim ocorreu aqui no Brasil, o Movimento da Matemática Moderna (SENA e DORNELES, 2013). Fiorentini (1995) chama esse período de *formalista moderno*, que teve como intenção unificar os três campos fundamentais da Matemática (Teoria dos Conjuntos, Estruturas Algébricas e Funções), dando ênfase aos aspectos estruturais e lógicos.

Na tentativa de buscar melhorar o ensino da Matemática, surgiu também, do final da década de 60 até o final da década de 70, uma tendência chamada *tecnicismo*, que entendia que a escola tinha como finalidade preparar o indivíduo para a sociedade. Sendo assim, ocorreu nesse período uma ênfase às tecnologias do ensino, reduzindo a Matemática a um conjunto de técnicas, regras e algoritmos, sem a devida preocupação com as justificativas e fundamentações (SENA e DORNELES, 2013).

Foi a partir das décadas de 60 e 70 que aqui no Brasil o ensino começa a ser influenciado pelas ideias construtivistas, concebendo a Matemática como uma construção humana, na qual os conteúdos são vistos como meios úteis e não indispensáveis para a construção das estruturas básicas da inteligência. Dentro dessa concepção, o importante é aprender a aprender e o erro passa a ter valor. A Matemática deixa de ser vista como um conhecimento pronto e acabado e passa a ser concebida como um saber prático e dinâmico, produzido histórica e culturalmente pelas diferentes práticas sociais (SENA e DORNELES, 2013).

Sena e Dorneles (2013) ressaltam que as alterações curriculares ocorridas nessa época deram ênfase em um curso intuitivo no primeiro grau, envolvendo estudos de medidas e introdução à Teoria dos conjuntos. Houve a substituição da disciplina de Desenho Geométrico por Educação Artística e essa modificação trouxe consequências desastrosas, pois a maioria dos alunos deixou de aprender Geometria. Os professores dos anos iniciais limitaram-se somente a trabalhar a Aritmética e as noções de Conjunto. Já no ginásio, como não se tinha o suporte do Desenho Geométrico, os alunos passaram a apresentar maiores dificuldades em Geometria e assim os conteúdos ou foram deixados de lado, ou passaram para o final do ano letivo, caso houvesse tempo.

Foi a partir das críticas ocorridas nesses períodos que nos anos 1980 surgiu uma apresentação favorável de propostas para a construção de uma escola inspirada em valores democráticos. A proposta defendida para esse segundo período, segundo Pires (2008), era que o conteúdo a ser ensinado estivesse compreendido como "veículo para o desenvolvimento de uma série de ideias fundamentais, convenientemente articuladas, tendo em vista as grandes metas que são a instrumentação para a vida e o desenvolvimento do raciocínio" (idem, 2008, p. 22).

De 1995 a 2002, desencadeou o processo de elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), para diferentes níveis e modalidades de ensino. Segundo Pires (2008), para os PCN da área de Matemática do Ensino Fundamental buscou-se expressar a contribuição das investigações e das experiências na área de Educação Matemática. Com a criação dos PCN, tem-se uma Geometria caracterizada pelo estudo de espaço, de formas e medidas, em que a percepção da Geometria na arte (projetiva), a representação das figuras geométricas e medidas de áreas e perímetros de figuras são trabalhadas ainda sem o uso de fórmulas (SENA e DORNELES, 2013).

Muito se discutia e, ainda se discute, sobre o abandono do ensino da Geometria nas escolas do Brasil, porém hoje, após as inúmeras pesquisas existentes que buscaram e buscam contribuir para modificar esse cenário, ainda existe esse abandono? O que os PCN nos trouxeram de novo? E a BNCC? As pesquisas da Educação Matemática, conseguiram chegar às escolas? Para responder a esses questionamentos, traremos alguns resultados de pesquisas de educadores matemáticos sobre o ensino da Geometria no Brasil.

Sena e Dorneles (2013) trazem em seu artigo um mapeamento nas teses brasileiras, de 1991 a 2011, cujas pesquisas tenham como temática a Geometria, no olhar da Educação Matemática, tendo como questão norteadora: *Quais os rumos sobre ensino da geometria se apresentam nas pesquisas, das duas últimas décadas, em nosso país?* As autoras, a partir desse mapeamento, observaram que os estudos mostram que os alunos não entendem bem os conteúdos de Geometria ensinados pelo professor, como também não dominam conceitos básicos ou elementares necessários para o ano (ou série) que cursa. Há também estudos que apontam as dificuldades com relação ao ensino da Geometria, uma vez que os professores valorizam apenas os acertos e não estabelecem um diálogo ou debate, com o intuito de favorecer as tomadas de consciência sobre os conceitos por parte dos alunos.

As pesquisadoras também apontam que os trabalhos de Gazire (2000), Santos (2001), Silva (2002) e Frecheiras (2010) ressaltam a falta de prioridade no ensino da Geometria, enfatizando a complexidade do fato, pois os professores não possuem, em geral, conhecimento sobre o assunto e sim opiniões vagas quanto à Filosofia, História e Epistemologia. O professor de Matemática enxerga a Geometria somente em assuntos algébricos e em cálculos e não há prioridade para seu ensino como foi no passado. Sena e Dorneles (2013) então concluem o artigo afirmando que, a partir do estudo feito com o mapeamento das teses, as duas últimas décadas de pesquisa em Geometria revelam que o estudo dessa área ainda não é uma das prioridades no ensino da Matemática, apontando para um descaso que parte do processo histórico e se faz presente no cotidiano atual. Ainda há a falta de preparo dos professores para trabalhar com a Matemática de forma geral, especialmente a Geometria.

Nascimento (2012) considera como problemas de desempenho docente no ensino da Geometria dois fatores. O primeiro, a maior parte dos professores não quer aprofundar seus estudos por falta de base na sua vida escolar, e o segundo, porque eles não sabem utilizar as tecnologias mais simples, por meio do uso dos instrumentos como: compasso, régua, transferidor, esquadro, como também as tecnologias da computação, como: informática básica, programas educativos em Matemática e etc. Além disso:

> no currículo da escola básica, de nível fundamental e médio, não se evidencia no projeto pedagógico das instituições educativas públicas uma disciplina específica sobre geometria. O que se verifica é a disciplina matemática delineada de forma generalista, onde a geometria se constitui apenas uma unidade de estudo, isto é, um só professor tem que abranger geometria e álgebra, o que dificulta ainda mais o interesse e a motivação para a realização de experiências no campo da geometria, quer por parte dos alunos e dos professores (NASCIMENTO, 2012, p. 30).

Hueb (2013) faz um balanço das dissertações e teses relativas à Educação Matemática defendidas no ano de 2010 a partir da relação publicada pela revista Zetetiké. A autora acreditava que a Trigonometria, assim como a Geometria eram temas relegados para segundo plano, porém ao fazer esse balanço das dissertações e teses, ela percebeu que estava equivocada. Hueb (2013) inicia sua pesquisa em publicações de 1998 a 2010 e durante as análises preliminares das 2 563 dissertações e teses ela percebe que o tema mais investigado era o da Geometria, contradizendo o que ela acreditava inicialmente. Porém ela ainda se questionava dos por quês de ainda haver tantas dificuldades no ensino e aprendizagem da Geometria.

Por meio da pesquisa realizada por Hueb (2013), percebe-se que a maior preocupação dos pesquisadores em suas dissertações e teses está contida na linha Ensino e Aprendizagem. Para a autora, os motivos para essa preocupação são confirmados a partir da análise crítica de Gustavo Ioschpe, consultor das Nações Unidas para a Educação, que afirma que a população brasileira não é completamente alfabetizada, há falta de formação adequada nos anos iniciais e estes são uma ponte para o não aprendizado nos demais anos, e na avaliação do Pisa, o Brasil se encontra no 57º lugar em Matemática. Hueb (2013) conclui então questionando-se se essas inúmeras pesquisas chegam até os professores nas escolas? Qual movimento deve ser realizado para que essas pesquisas cheguem e sejam incorporadas nos planejamentos? A Geometria que está sendo ensinada, os alunos estão realmente aprendendo?

Leivas (2010) enfatiza em seu artigo que há algumas discussões no cenário nacional que ainda abordam a respeito do ensino de Geometria e seu abandono. Para ele, isso já não mais pode ser argumentado, devido ao número elevado de trabalhos existentes na área nos últimos eventos de Educação Matemática, especialmente o ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática), apontando que 20% dos trabalhos são sobre esse tema, de acordo com um levantamento realizado por Andrade e Nacarato (2004).

Esse levantamento feito por Andrade e Nacarato (2004) diz respeito a um estudo nos Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática - ENEM, com o intuito de identificar e analisar as atuais tendências didático-pedagógicas para o ensino de Geometria no Brasil, no período de 1987 a 2001, composto pela realização de sete encontros. Esses pesquisadores conseguiram encontrar, dos 363 trabalhos analisados, abordagens mais exploratórias que utilizam aspectos experimentais e teóricos do pensamento geométrico, seja na utilização de diferentes mídias em contextos de aulas mais dialogadas com produção e negociação de significados, seja na utilização de softwares de Geometria Dinâmica. Eles também conseguiram identificar um significativo número de trabalhos que vêm discutindo sobre o papel das provas e argumentações no ensino da Geometria, além de uma preocupação mais recente com discussões de aspectos epistemológicos, tais como visualização e representação em Geometria.

Andrade e Nacarato (2004) destacam que os trabalhos em Geometria se mantiveram na média de 20% do total de trabalhos apresentados nesses sete ENEM. Para os pesquisadores, se distribuíssemos o total de trabalhos publicados nas três áreas de conhecimento matemático (Aritmética, Álgebra e Geometria) e se considerássemos que existem ainda outras temáticas discutidas dentro da Educação Matemática, o percentual de trabalhos que discutem a Geometria é extremamente relevante, chegando a conclusão de que, pelo menos da esfera das produções acadêmicas, houve um resgate do ensino de Geometria. Embora haja esse resgate do ensino da Geometria, essas mesmas pesquisas indicam que a Geometria ainda está bastante ausente da sala de aula, principalmente na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Carvalho e Tucci (2011) afirmam que grande parte dos livros didáticos, após as críticas e pesquisas quanto ao abandono da Geometria, já traz atividades de cunho geométrico não mais localizadas na parte final deles, o que permite que o assunto seja tratado com a importância e o merecimento devido. Esses autores ressaltam a importância do ensino da Geometria, pois ela proporciona ao aluno compreender o mundo em que vive, tornando-o apto a descrevê-lo, a representa-lo e a localizar-se nele. Além disso, caso as pessoas não estudassem Geometria, elas não conseguiriam desenvolver o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essas habilidades, elas dificilmente conseguiriam resolver situações de vida que são geometrizadas, assim como não poderiam utilizá-la como fator altamente facilitador para a compreensão de questões de outras áreas do conhecimento humano.

A pesquisa de Mestrado de Lima (2015) diz respeito ao pensamento geométrico e às provas e demonstrações matemáticas na Educação Básica. Para responder ao seguinte questionamento: *Que tipo de provas e demonstrações matemáticas e nível do pensamento geométrico podem ocorrer a partir de uma proposta didática por alunos do 2º Ano do Ensino Médio?*, a pesquisadora aplicou uma Proposta Didática a uma turma do 2º ano do Ensino Médio, que continha vinte alunos, em uma escola pública na cidade de Areia/PB. Essa Proposta contém dezoito atividades e foi dividida em quatro partes. Na Parte I, há oito atividades sobre o Teorema de Pitágoras; na Parte II, três atividades acerca do teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo; na Parte III, duas atividades sobre o Teorema do ângulo externo. Nessas três primeiras partes, as atividades foram desenvolvidas no lápis e papel. Na última parte da Proposta (Parte IV) há cinco atividades acerca do Teorema de Pitágoras e da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo para serem trabalhadas com o auxílio do GeoGebra.

A aplicação dessa Proposta ocorreu em duas tardes. Na primeira tarde, os vinte alunos responderam as onze atividades iniciais (Partes I e II). Na segunda tarde, houve um imprevisto e só foram para a escola sete dos vinte alunos do 2º ano, respondendo assim as sete últimas atividades (Partes III e IV). Desses sete que foram, a pesquisadora analisou as atividades respondidas por um trio de alunos, pois esses alunos conseguiram responder mais atividades da Proposta. Das dezoito atividades, a pesquisadora analisou duas atividades sobre o Teorema de Pitágoras da Parte I, uma atividade acerca do teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo da Parte II, que foram realizadas no lápis e papel, como também analisou as cinco atividades da Parte IV, realizadas no GeoGebra e que versam sobre esses dois assuntos.

Por se tratarem de alunos do 2º ano do Ensino Médio, a pesquisadora acreditava que eles não iriam encontrar dificuldades, já que viram esses assuntos anteriormente, porém a realidade foi outra. Os alunos tiveram dificuldades de compreender os enunciados das atividades, uma vez que na escola não havia o trabalho com provas e demonstrações matemáticas; dificuldades em algebrizar as áreas das figuras geométricas contidas na Proposta; não conseguiram inferir os assuntos presentes nas movimentações das construções no GeoGebra; não lembravam o que era hipotenusa e cateto de um triângulo retângulo e não sabiam construí-lo no aplicativo, pois de acordo com esses alunos, eles não conheciam nem sabiam manuseá-lo. Com isso, Lima (2015) afirma que esse trio de alunos é somente uma amostra da situação alarmante em que se encontra o ensino de Geometria nas escolas brasileiras, assim como infere que esses alunos possuem um conhecimento superficial dos teoremas presentes na Proposta Didática, em que esses conteúdos são apenas memorizados e não compreendidos por eles (LIMA, LINS e PEREIRA, 2018).

Lima (2015) também conclui que, por meio das atividades e dos áudios gravados, os alunos se encontravam nos dois primeiros níveis do pensamento geométrico, propostos por Parsysz (2006), a Geometria concreta (G0) e a Spatio-Graphique (G1), pois as observações e constatações para justificar as características físicas foram validadas apenas pela percepção e quando necessitava-se de conceitos e propriedades das figuras, esses alunos não lembravam e sentiram muita dificuldade em desenvolver suas ideias e justificativas. Quanto aos tipos de prova, a pesquisadora observou que esses alunos conseguiram desenvolver provas do tipo *Empirismo Ingênuo*, utilizando casos particulares para justificar uma afirmação; da *Justificativa Gráfica*, construindo um caso particular de triângulo e observando que vale a afirmativa de que a soma de seus ângulos internos é sempre 180º; e da *Justificativa Pragmática*, construindo um caso particular de triângulo retângulo e verificando que vale, para qualquer triângulo retângulo, a relação encontrada por eles em uma das atividades, feita de forma incorreta, pois eles não conseguiram perceber que se tratava do Teorema de Pitágoras.

Martins, Silva e Puggian (2013), em seu artigo, descrevem os resultados de uma pesquisa qualitativa, que teve como objetivo demonstrar como a Geometria Finita pode contribuir no desenvolvimento de conceitos geométricos. Para isso, os pesquisadores desenvolveram situações didáticas, com o intuito de motivar e aprimorar o desempenho do aprendiz em relação às leituras geométricas, desenvolver o raciocínio lógico-matemático e despertar diferentes caminhos do pensamento dedutivo com o uso da Geometria Finita. O experimento realizado por eles ocorreu durante os segundo e terceiro trimestres escolares de 2011 e participaram alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola técnica do Rio de Janeiro, do curso de Turismo.

Esses pesquisadores perceberam que o grupo de alunos reconheceu os triângulos sem fazer uso de definições, ajudando-os a caracterizá-los quanto aos lados e aos ângulos. A partir dos resultados encontrados, eles afirmaram que os alunos apresentaram dificuldades no reconhecimento dos diversos tipos de quadriláteros, como também alguns reconhecem retas paralelas e outros nem se lembram desse conceito. Concluíram ressaltando que os resultados encontrados indicam a necessidade de aprimorarmos as abordagens didáticas para o ensino da Geometria, especialmente da Geometria Finita.

Ferreira *et al*. (2013), em seu artigo, buscam os conhecimentos e/ou dificuldades no aprendizado de conteúdos geométricos de alunos do 1º ano do Ensino Médio em uma escola parceira do PIBID Matemática, IFCE – Canindé. Para isso, elaboraram um teste com dezesseis questões com quatro opções de resposta cada uma, das quais sete eram sobre Geometria e todos os itens se baseavam na Matriz de Referência do 9º ano do Ensino Fundamental da Prova Brasil. Os autores trazem em seu artigo alguns dados de 2011 referentes à realidade dos educandos do Ceará, por meio de uma avaliação estadual realizada pelo Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará (SPAECE). Eles observaram que 76,39% dos alunos do Ceará encontram-se nos níveis crítico e muito crítico de proficiência em Matemática, enquanto que apenas 3,4% estão no nível adequado de desempenho matemático para a série que cursam.

A partir dessa realidade, eles sentiram a necessidade de pesquisarem os conhecimentos e dificuldades de alunos do 1º ano do Ensino Médio com relação a alguns conteúdos geométricos. Os assuntos presentes nas sete questões sobre Geometria dizem respeito a propriedade e semelhança de triângulos (lados e ângulos); planificação de sólidos geométricos; modificações de áreas de polígonos utilizando malha quadriculada; soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo; interpretação de coordenadas cartesianas; perímetro de figuras planas; e noções de volume (FERREIRA *et al*., 2013).

De modo geral, Ferreira *et al*. (2013) encontraram: lacunas conceituais referentes aos conteúdos geométricos do Ensino Fundamental; a não compreensão das propriedades dos triângulos e das suas relações; a não compreensão da quantidade de faces de um determinado poliedro, a partir de sua planificação, colocando uma quantidade maior de lados em um pentágono; lacunas conceituais sobre as operações básicas com números inteiros; não conseguiram identificar o ângulo reto em um triângulo retângulo, embora saibam que existe; alguns não conheciam/entendiam a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo; não compreendem o significado da igualdade de uma equação, assim como tiveram dificuldades em resolver equações simples; alguns não compreendem as relações trigonométricas de um triângulo retângulo; alguns não demonstraram conhecer a classificação do trapézio trabalhada em um dos itens da atividade; alguns não têm o conceito formado de perímetro; e alguns desconhecem as medidas de capacidade.

Ferreira *et al*. (2013) concluem então afirmando que esses alunos do 1º ano do Ensino Médio, sendo uma pequena amostra analisada, ainda apresentam lacunas em seu conhecimento geométrico ao que se pretende que seja aprendido no Ensino Fundamental, conforme as orientações dos PCN. Para eles, muitas dessas dificuldades podem estar relacionadas a forma como a Geometria é apresentada e trabalhada em sala de aula, desconectada do mundo que os cerca, sendo apresentado somente procedimentos de cálculos com números, sem acesso ao aspecto intuitivo ou a observação e construção de figuras e isso, muitas vezes, também é vivenciado pelos professores em suas formações.

Apresentamos, então, algumas pesquisas que evidenciam que, embora tenha tido alguns avanços quanto ao resgate da Geometria nos estudos da Educação Matemática, com o intuito de trazer uma Geometria mais dinâmica, lúdica e prazerosa aos alunos da Educação Básica, assim como ao resgate de seu ensino nesse setor, parece-nos que essas mesmas pesquisas ainda não chegaram aos professores que lá ensinam, uma vez que ainda há relatos de pesquisadores que encontram problemas e lacunas conceituais de alunos dos Ensinos Fundamental e Médio no que diz respeito aos conteúdos geométricos. O que se torna ainda mais alarmante é encontrar problemas conceituais de conteúdos do Fundamental em alunos do Ensino Médio, que já deveriam estar sedimentados e compreendidos por eles, se seguíssemos as recomendações dos PCN.

Há um confronto entre a fala de Leivas (2010) e os resultados dessas pesquisas citadas acima, uma vez que para ele esse abandono não deve ser mais argumentado, devido aos inúmeros trabalhos existentes na área da Geometria. Contudo, os recortes de pesquisas que trouxemos acima nos indicam que ainda há sérios problemas com o ensino e aprendizagem da Geometria. Assim como afirma Ávila (2010), percebemos que a Geometria ensinada na Educação Básica ainda é pouco significativa e foi ou é abandonada nos planejamentos escolares, sendo privilegiadas as outras áreas do conhecimento matemático.

Quanto às recomendações dos PCN (BRASIL, 1997), em especial os do Ensino Fundamental, encontramos vários objetivos a serem alcançados pelos alunos desse segmento com relação às finalidades do ensino da Matemática. Destacamos dois que afirmam que a resolução de situações-problema, validando estratégias e resultados, desenvolvem formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizam conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos que levam à construção da cidadania por parte dos alunos. Além disso, os alunos aprenderão a comunicar-se matematicamente, isto é, eles irão descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e as diferentes representações matemáticas.

Nos PCN Ensino Fundamental 3º e 4º ciclos (BRASIL, 1998), há uma preocupação quanto à seleção dos conteúdos nos currículos de Matemática. Segundo os Parâmetros, os conteúdos devem contribuir para o desenvolvimento intelectual do aluno, ou seja, para a construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, para o desenvolvimento da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, entre outros. Há a afirmação de que embora a Lógica não se constitua como um assunto a ser tratado explicitamente nos PCN, alguns de seus princípios podem e devem ser integrados aos conteúdos, uma vez que é ela que permite a compreensão dos processos de construção do conhecimento matemático, como também é ela que possibilita o desenvolvimento da capacidade de argumentar e de fazer conjecturas e generalizações, bem como o da capacidade de justificar por meio de uma demonstração formal.

Nos 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, de acordo com os PCN (BRASIL, 1998), é necessário explorar o potencial crescente de abstração, fazendo com que os alunos descubram regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas, criando condições para que o aluno perceba que a atividade matemática estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. Dessa forma, é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações. Tendo iniciado esse trabalho, no quarto ciclo o aluno poderá reconhecer a importância das demonstrações na Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas.

Os PCN (BRASIL, 1998) recomendam que no quarto ciclo os problemas de Geometria irão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo e isso não deve significar que o professor deve fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da Geometria. Além disso, a exploração de raciocínios dedutivos não deve se restringir apenas aos conteúdos geométricos, uma vez que a busca da construção de argumentos plausíveis pelos alunos vem sendo desenvolvida desde os ciclos anteriores em todos os blocos de conteúdos. Mesmo tendo iniciado um trabalho com algumas demonstrações no 4º ciclo do Ensino Fundamental, os PCN recomendam que não devemos abandonar as verificações empíricas, pois elas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos.

Com base nos objetivos e recomendações para o Ensino Fundamental, percebe-se que não há coerência entre o que se encontra nos PCN (BRASIL, 1998) com os resultados encontrados nas pesquisas de Martins, Silva e Puggian (2013), Ferreira *et al*. (2013) e Lima (2015), uma vez que se essas recomendações tivessem sido seguidas, possivelmente não teríamos resultados tão negativos com alunos do Ensino Médio.

Quanto ao Ensino Médio, os PCN nesse segmento (BRASIL, 2000) esperam que como os alunos já se aproximaram de vários campos do conhecimento matemático no Ensino Fundamental, então agora eles têm condições de utilizá-los e ampliá-los, desenvolvendo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e a interpretação da própria realidade. Com relação à Geometria nesse segmento, os PCN (BRASIL, 2000) desse nível de ensino afirmam que ela é essencial para a descrição, representação, medida e dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços. Ao utilizar as figuras geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real, segundo os PCN, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) afirmam que o estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como por exemplo a orientação no espaço, a leitura de mapas, a estimativa e comparação de distâncias percorridas, o reconhecimento das propriedades de figuras geométricas básicas e a diferenciação das unidades de medida. Também é nesse segmento que os alunos podem ter a oportunidade de apreciar a Matemática a partir de seus teoremas e argumentações dedutivas.

Podemos perceber a importância da Geometria, do desenvolvimento do raciocínio dedutivo e da demonstração como justificativa das propriedades aplicadas, uma vez que:

> [...] os problemas de Geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da Geometria. Embora os conteúdos geométricos propiciem um campo fértil para a exploração dos raciocínios dedutivos, o desenvolvimento dessa capacidade não deve restringir-se apenas a esses conteúdos (BRASIL, 1998, p. 86).

Os PCN do Ensino Médio (BRASIL, 2000) ressaltam a importância da dedução e da argumentação, pois a sua prática é fundamental para a compreensão das demonstrações. Além disso, os documentos esclarecem que o refinamento das argumentações produzidas pelos alunos ocorre de maneira gradativa a partir da assimilação dos princípios da lógica formal, possibilitando assim as demonstrações.

Além das orientações dos PCN para os Ensinos Fundamental e Médio, temos agora a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que irá nortear os currículos de todo o Brasil. Na BNCC também encontramos a importância de se desenvolver o raciocínio e argumentação dos alunos. Além disso, a base orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. De acordo com a BNCC do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017), apesar de a Matemática ser uma ciência hipotético-dedutiva, uma vez que suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática.

Além disso, há uma preocupação quanto ao compromisso do Ensino Fundamental com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. A BNCC (BRASIL, 2017) orienta que na fase final do Ensino Fundamental é importante iniciar os alunos, gradativamente, na compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática, envolvendo-os nas leituras de textos matemáticos e no desenvolvimento do senso crítico em relação à argumentação neles utilizada.

Quanto ao Ensino Médio, a BNCC (BRASIL, 2018) orienta que na área de Matemática e suas Tecnologias, o aluno deve consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Essa área tem a responsabilidade de aproveitar ao máximo todo o potencial já constituído pelos alunos no Ensino Fundamental, para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. Ou seja, os novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos alunos formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos.

Os alunos então devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada mais sofisticados. Dentro da competência de argumentar, a BNCC do Ensino Médio (BRASIL, 2018) orienta que seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas, além dos aspectos já citados anteriormente em relação às competências de raciocinar e representar.

À vista de todas essas orientações e recomendações, percebemos a preocupação da BNCC e dos PCN quanto ao letramento matemático, a fazer com que os alunos pensem, questionem, conjecturem, argumentem, justifiquem suas ideias, até levar ao caminho da produção e construção de demonstrações, sem deixar de lado as experimentações empíricas, muito importantes para a elaboração e refutação de conjecturas. Além disso, essas orientações deixam claro que esse trabalho não deve ser feito apenas na Geometria, mas dentro de todos os conteúdos da Matemática, uma vez que a argumentação deve ser trabalhada dentro de todos e isso possibilita o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Percebemos então que embora haja muitas orientações quanto ao trabalho com argumentações, justificativas e desenvolvimento do raciocínio matemático, como também tenha tido um grande avanço nas pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da Geometria na Educação Básica, ainda encontramos sérios problemas conceituais nesse segmento. Percebe-se que há alunos que desconhecem conceitos básicos da Geometria e nem são incentivados a justificar e argumentar as suas ideias, o que nos leva a crer que ainda há um descaso com a Geometria nos Ensinos Fundamental e Médio, assim como ainda não se chegou ou não se tem acesso as pesquisas da Educação Matemática, ou porque os pesquisadores só vão às escolas e fazem as suas pesquisas, não retornando as instituições para relatar os problemas encontrados e as soluções para melhoria, ou porque os professores não saem da zona de conforto e tentam melhorar a forma como trabalham a Geometria em sala de aula.

Portanto, enfatizamos que se conseguíssemos trabalhar seguindo as recomendações dos PCN e agora com as orientações curriculares da BNCC, teríamos uma possível melhora no ensino e aprendizagem da Geometria no Brasil, uma vez que haveria o compromisso com uma educação de qualidade, levando o aluno a racionar, pensar, refletir, questionar, justificar e comunicar as suas ideias. Enfatizamos também que, ao contrário das recomendações, os alunos da Educação Básica ainda apresentam sérias dificuldades na aprendizagem da Geometria, apesar das mais variadas pesquisas acadêmicas que buscam modificar esse cenário, propondo trabalhos com *software* dinâmico, materiais concretos, resolução de problemas, História da Matemática, jogos, entre outros. Ou seja, esses alunos estão saindo da Educação Básica com um nível de pensamento geométrico baixo, o que pode vir a prejudicar sua aprendizagem geométrica no curso que escolherem.

1.3 A GEOMETRIA NAS LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA NO BRASIL

As Diretrizes Curriculares para os Cursos de Matemática (BRASIL, 2001) afirmam que ao chegar à Universidade, o aluno/graduando já passou por um longo processo de aprendizagem escolar e construiu para si uma imagem dos conceitos matemáticos a que foi exposto durante a Educação Básica. A formação do matemático demanda o aprofundamento da compreensão dos significados dos conceitos matemáticos, a fim de que ele possa contextualizá-los adequadamente. Há também a recomendação de que é preciso levar em consideração, ao longo da formação do futuro professor, os conhecimentos dos graduandos relativos a uma vivência e a um conjunto de representações que já foram construídas.

Essas Diretrizes esperam formar um Licenciado em Matemática que seja um professor que planeja, organiza e desenvolve atividades e materiais relativos à Educação Matemática, primando, em sua atuação, pelo desenvolvimento do educando, incluindo aí sua formação ética, a construção de sua autonomia intelectual e de seu pensamento crítico. Além disso, espera-se que os currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática sejam elaborados de maneira a desenvolver algumas das seguintes competências e habilidades: capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão; capacidade de compreender, criticar e utilizar novas ideias e tecnologias para a resolução de problemas; habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema; entre outras (BRASIL, 2001).

Espera-se também que o licenciado em Matemática desenvolva as capacidades de: analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a Educação Básica; desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos alunos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos; perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente; entre outras (BRASIL, 2001).

Nos Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura (BRASIL, 2010), os temas que deverão ser abordados na formação do Licenciado em Matemática são: Fundamentos de Análise, Álgebra e Geometria; Cálculo Diferencial e Integral; Álgebra Linear; Geometria Analítica; Probabilidade e Estatística; Modelagem Matemática; Desenho Geométrico; Física Geral; História e Filosofia das Ciências Naturais e da Matemática; História, Filosofia e Sociologia da Educação; Metodologia e Prática de ensino de Matemática; Tecnologias da informação e comunicação aplicadas ao ensino de Matemática; Psicologia da Educação; Legislação Educacional; Língua Brasileira de Sinais (LIBRAS); Pluralidade Cultural e Orientação Sexual; Ética e Meio Ambiente; Relações Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS) (BRASIL, 2010).

Já as Diretrizes Curriculares para os Cursos de Matemática (BRASIL, 2001) abordam os conteúdos que deverão ser comuns a todos os cursos de Licenciatura, a saber: Cálculo Diferencial e Integral; Álgebra Linear; Fundamentos de Análise; Fundamentos de Geometria; e Geometria Analítica. Nessa parte comum deve-se ainda incluir os conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise; os conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias; e os conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática.

Sobre esses dois documentos oficiais citados acima, a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) emite um documento contendo alguns subsídios para a discussão de propostas para os cursos de Licenciatura em Matemática, afirmando que ao elaborarmos as propostas para a formação inicial de professores de Matemática é importante não se esquecer que essa formação é um processo contínuo, começando bem antes do ingresso na Licenciatura, passando nela por um período intenso de aprendizagem de conteúdos fundamentais para a profissão docente e continuando a desenvolver-se, após essa formação, à medida em que o professor reflete sobre sua prática profissional e busca superar os problemas e desafios que enfrenta pela frente (SBEM, 2003).

Nesse documento também se espera que, nos cursos de Licenciatura em Matemática, os conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, de Análise Matemática, de Álgebra, de Geometria, de Estatística, de Probabilidade, entre outros, venham a constituir os conhecimentos substantivos do futuro professor. Esses conhecimentos devem ser selecionados e abordados de forma a possibilitar ao futuro professor conhecimento amplo, consistente e articulado da Matemática, colocando em destaque aspectos de sua construção histórica, suas aplicações em outras áreas, os principais métodos utilizados por matemáticos ao longo dos tempos, os desafios atuais dessa área de conhecimento e as pesquisas matemáticas em desenvolvimento (SBEM, 2003).

Quanto ao tratamento dos conteúdos, a SBEM (2003) recomenda que é fundamental que o professor em formação seja capaz de:

> explorar situações-problema, procurar regularidades, fazer conjecturas, fazer generalizações, pensar de maneira lógica, comunicar-se matematicamente por meio de diferentes linguagens, conceber que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação, compreender noções de conjectura, teorema, demonstração, examinar consequências do uso de diferentes definições, analisar erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas, ter confiança pessoal em desenvolver atividades matemáticas e apreciar a estrutura abstrata que está presente na Matemática e sua função social (SBEM, 2003, p. 15).

Espera-se que o futuro professor seja capaz de *fazer matemática*, compreendendo a estrutura de um teorema, o que é hipótese e tese, conjecturando, testando as hipóteses, refutando, generalizando e, por fim, demonstrando. Além disso, espera-se que ele consiga estabelecer as relações da Matemática com as situações do dia a dia, apresentando problemas da realidade dos alunos, assim como apresentando aos alunos a história do desenvolvimento da

Matemática, para que eles percebam que a área não surgiu do nada, mas sim a partir das necessidades do dia a dia da população.

Contudo, somente o conhecimento de axiomas, definições, teoremas e provas, que são estudados de forma acrítica e reprodutiva no Ensino Superior, não é suficiente para que o graduando seja capaz de utilizá-los em qualquer situação ou problema. De acordo com a SBEM (2003), há críticas quanto ao ensino de disciplinas matemáticas nos cursos de Licenciatura que priorizam os aspectos algorítmicos e não refletem sobre as suas construções, apenas repassam os teoremas e demonstrações tal como estão nos livros. O aspecto formal, referente a axiomas, definições, teoremas e provas, cerne da Matemática como ciência, são componentes ativos para os processos de raciocínio e devem ser inventados ou ensinados, organizados, verificados e utilizados ativamente pelos graduandos, porém é importante refletir sobre as competências necessárias para a sua compreensão, para seu estímulo e como eles podem utilizar isso em situações práticas.

Quanto aos conhecimentos geométricos, a SBEM (2003) afirma que o curso de Licenciatura em Matemática deve propiciar condições para que o futuro professor possa perceber a Geometria como visualização, construção e medida de figuras e como estudo do mundo físico, assim como um veículo para representar outros conceitos matemáticos e como um sistema axiomático. Para isso, é necessário que as diferentes disciplinas ligadas à Geometria sejam trabalhadas em contextos mais amplos, articuladas com as demais disciplinas do curso, fazendo uso de diferentes tecnologias, de materiais manipuláveis, entre outros. A Geometria é um campo fértil para que o futuro professor explore processos que envolvem conjecturas, argumentações e provas, conseguindo perceber diferenças entre uma Geometria "Experimental" e uma Geometria Axiomática.

Apesar dessas propostas, Almouloud *et al*. (2004) comenta que há pesquisadores que apontam que grande parte dos professores que hoje estão em atividade teve formação básica muito precária em Geometria; que os cursos de formação inicial de professores, tanto os cursos de Magistério como os de Licenciatura, continuam não dando conta de discutir suficientemente com os futuros professores propostas mais eficientes para o ensino de Geometria; e que na formação continuada são postas em ação basicamente cursos de reciclagem, que não têm atingido (ainda) o objetivo de mudar a prática na sala de aula em relação ao ensino de Geometria.

Em uma mesa redonda, em 2007, Pavanello volta a falar sobre o ensino de Geometria no Brasil, afirmando que por meio de avaliações internas e externas quanto ao nível de conhecimento dos nossos alunos, percebe-se notas baixas nas questões de Geometria e para a pesquisadora há duas justificativas para isso: ou os alunos não possuem os conceitos geométricos, ou a abordagem ainda é realizada de forma precária. Pavanello segue afirmando que alunos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática demonstram dificuldades em Cálculo, Álgebra Linear e Geometria Analítica, justamente pela falta de conteúdo em Geometria durante os seus anos de estudo na Educação Básica. Assim, ela conclui questionando: se durante os cursos de formação, os futuros professores apresentam essas dificuldades em relação à Geometria, o que esperar de seu trabalho pedagógico nas escolas quanto a esse conteúdo? E que ações os cursos superiores estão desenvolvendo para auxiliar esses alunos a superar suas dificuldades? (PAVANELLO, 2007).

Kaleff *et al*. (1994) afirmam que nos cursos de graduação em Matemática, os alunos dos últimos semestres apresentam dificuldades no desenvolvimento do pensamento abstrato em Geometria. Esses alunos não conseguem, muitas vezes, relacionar sistemas axiomáticos diversos, como também têm dificuldades em sistematizar o pensamento dentro da própria Geometria Euclidiana. Esses alunos vêm de um ensino em que a Geometria é deixada de lado, ou seja, esses alunos chegam à graduação em Matemática com dificuldades em Geometria e a abstração torna-se ainda mais laboriosa na Academia. Isto quer dizer que esses alunos chegam à Universidade e terminam sua Licenciatura em Matemática ainda apresentando um baixo nível de desenvolvimento do pensamento geométrico, pois eles não são estimulados a raciocinar, pensar e refletir acerca das provas e demonstrações de teoremas matemáticos que são desenvolvidas ao longo do curso, uma vez que a apresentação das demonstrações ocorre de forma reprodutiva tal qual está nos livros e os alunos apenas copiam e reproduzem aquilo que o professor faz.

Neves, Baccarin e Silva (2013) realizaram uma pesquisa sobre a formação geométrica de licenciandos em Matemática a partir da replicação de duas questões do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE) e os resultados mostraram que há dificuldades de aprendizagem dos conceitos geométricos entre os alunos e professores e que não há experiência com demonstrações. Além disso, essas autoras observaram que o tempo destinado às disciplinas de Geometria no curso de Matemática não contribui para a modificação desse quadro.

Gonçalves (2007) afirma que as dificuldades em Matemática encontradas pelos alunos ingressantes no Ensino Superior tornam-se cada vez mais frequentes. No decorrer dos semestres percebe-se que as dificuldades vão aumentando gradativamente, principalmente nos cursos que utilizam a disciplina de Matemática no primeiro semestre. Esse baixo rendimento permanece e isso pode ser verificado pelo alto índice de reprovação e evasão nessas disciplinas. A pesquisadora afirma que há estudos mostrando que, em geral, os alunos ingressantes no Ensino

Superior apresentam deficiências em conhecimentos de Matemática Básica, como também na leitura, na interpretação e resolução de problemas e na capacidade de argumentação.

Sabemos que na universidade a Matemática irá adquirir um caráter mais distinto e avançado do que foi visto na Educação Básica e para acompanhar esse avanço é necessário que os alunos tenham um conhecimento anterior que, em geral, eles não possuem. Por conta disso, os professores concluem que o que esses alunos sabem, pouco vale para o aprendizado da Matemática em nível superior, sendo então apontada como a causa do fracasso em disciplinas em Matemática, a falta de pré-requisitos de conhecimentos da Matemática vista na Educação Básica (GONÇALVES, 2007).

Damico (2010) realizou uma investigação que teve como objetivo a identificação, descrição e categorização dos conhecimentos matemáticos prévios de alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição localizada no ABC Paulista. Para isso, foi elaborada uma avaliação diagnóstica dissertativa contendo 30 questões, aplicada nos primeiros dias do início do ano letivo de 2009, que buscava avaliar algumas habilidades e competências básicas almejadas para os Ensinos Fundamental e Médio, envolvendo os seguintes eixos temáticos: Números e Operações; Geometria; Álgebra; Grandezas e Medidas; e Tratamento da Informação.

Damico (2010) ressalta que essa avaliação diagnóstica dos conhecimentos prévios dos alunos estava circunscrita a alguns conhecimentos básicos necessários para dar continuidade nos estudos em nível universitário, em especial os que estavam relacionados à Matemática Pura e Aplicada. De modo geral, o pesquisador observou um quadro bastante preocupante quanto à conceituação e operacionalização com números, especialmente com números racionais em sua representação fracionária. Em Geometria, foi diagnosticado as maiores dificuldades dos alunos. Contatou-se também que esses alunos estão chegando para a universidade com uma educação algébrica bastante deficitária e apresentando um baixo rendimento no cálculo de distâncias apresentadas em notação científica, em problemas que envolvem equivalência de medidas e na interpretação de gráficos.

A partir desses resultados, Damico (2010) ressalta que durante o processo de formação dos futuros professores faz-se necessário que eles construam conhecimentos matemáticos complementares aos que foram adquiridos na Educação Básica, para que de fato seja desenvolvido o raciocínio matemático avançado. É importante também que esses alunos cheguem à Universidade com uma base teórica sólida, para que estas estruturas matemáticas avançadas sejam efetivamente construídas. Caso não seja observado o nível desses conhecimentos prévios dos alunos, o professor universitário poderá propor problemas que ultrapassem o nível de desenvolvimento potencial em que se encontram esses alunos, conduzindo assim a reiterados fracassos (DAMICO, 2010).

Araújo e Bortoloti (2010) realizaram uma investigação em parceria com dez campi de Universidades Estaduais da Bahia, onde, em cada instituição, escolheram turmas de calouros e de alunos do 6º semestre dos Cursos de Licenciatura em Matemática dessas instituições, buscando observar, com os calouros, como eles estão chegando ao Ensino Superior e quais as dificuldades trazidas da Educação Básica, com relação à Matemática e, com relação aos veteranos, buscaram saber se o Ensino Superior tem contribuído para o amadurecimento e enriquecimento de tais conteúdos vistos na Educação Básica. Os resultados encontrados deixaram as pesquisadoras bastante preocupadas, pois os alunos serão futuros professores de Matemática. De modo geral, Araújo e Bortoloti (2010) observaram a falta de algumas habilidades quanto aos conteúdos geométricos presentes na questão, como também os alunos ainda permanecem tendo erros quanto a conteúdos da Educação Básica.

Crescenti (2008) afirma que os cursos de formação básica, por meio de professores e coordenadores, não podem esquecer que, muitas vezes, seus alunos aprenderam pouco (ou quase nada) de Geometria nos anos anteriores e que eles necessitam suprir essas lacunas, pois, caso isso não aconteça, o círculo vicioso irá permanecer: quem não sabe ensina do jeito que sabe o pouco que sabe, e quem aprende, aprende mal. Para a pesquisadora, para que o ensino de Geometria possa estar presente nas salas de aula e para que os alunos realmente aprendam de forma significativa, faz-se necessário que o professor de Matemática tenha:

> - uma formação básica que capacite os futuros professores na aquisição do conhecimento geométrico nas disciplinas específicas do curso de licenciatura, para que possam ensiná-los com segurança, uma vez que muitos alunos ainda chegam ao ensino superior com dificuldades na parte geométrica; desenvolvimento de alternativas metodológicas variadas para ensinar os conceitos geométricos enfocando também a parte conceitual e não apenas a forma de ensiná-los; possibilite um acompanhamento dos professores em formação por profissionais mais experientes de forma a auxiliá-los na aprendizagem da docência, o que pode proporcionar segurança ao futuro professor, além de contribuir com a sua formação.
> - uma formação continuada que possibilite um acompanhamento dos professores iniciantes por profissionais mais experientes de forma a auxiliá-los no início de sua prática em sala de aula, o que pode proporcionar segurança ao professor, além de contribuir com a sua formação; com cursos promovidos pela Diretoria de Ensino, voltados para a atualização dos conhecimentos científicos/metodológicos; que atenda às necessidades e interesses dos professores em seu local de trabalho; que promova a reflexão sobre a prática e a troca entre os pares (na escola, na região, juntos a cursos de formação); com professores recebendo material de apoio de qualidade e atualizado, pois este consiste em referência tanto para o planejamento quanto para o estudo (CRESCENTI, 2008, p. 92-93).

Gazire (2000) corrobora as ideias apresentadas por Crescenti (2008) ao afirmar que ainda é possível encontrar professores que aprenderam pouco ou nada de Geometria nos cursos de Licenciatura e que, por isso, têm medo de ensiná-la na Educação Básica. Os professores investigados por Gazire (2000) afirmaram que o desconhecimento da Geometria é uma das causas de seu abandono e atribuíram à formação acadêmica esse despreparo, contudo isso não os impede de ensinar alguns de seus conteúdos.

Neves, Silva e Baccarin (2012) realizaram uma investigação sobre a formação geométrica de ingressantes e concluintes de cursos de Licenciaturas em Matemática, a partir da replicação de itens dos exames nacionais do Ensino Médio e do Ensino Superior. Para isso, os pesquisadores analisaram as competências e dificuldades apresentadas pelos ingressantes e concluintes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública de ensino superior do estado de Goiás. Participaram desse estudo feito por Neves, Silva e Baccarin (2012), 102 alunos, sendo 80 ingressantes e 22 concluintes.

Os pesquisadores propuseram uma tarefa dividida em duas partes: primeiro, perguntas com o objetivo de identificar características pessoais e educacionais; segundo, a resolução de quatro questões, sendo três do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM (2011) e uma do ENADE (2011). Dessas questões, uma envolvia Geometria Plana, outra Geometria Espacial, outra Estatística e a última envolvia ao mesmo tempo Geometria Plana e Espacial. Os alunos responderam a tarefa individualmente e foi solicitado a todos que usassem lápis grafite em suas resoluções e que não apagassem suas notações.

Neves, Silva e Baccarin (2012) observaram que, apesar das dificuldades, os alunos concluintes apresentaram um desempenho superior aos ingressantes e desenvolveram estratégias mais elaboradas em suas resoluções, especialmente quanto à clareza das justificativas e à riqueza de detalhes da argumentação. Os pesquisadores também não perceberam nas notações produzidas pelas ingressantes tentativas de análise para o problema, como eles perceberam entre os concluintes. Esses fatos estão em consonância com os estudos de Nasser e Tinoco (2003) e Pirola (2003), uma vez que mostram a dificuldade de alunos do Ensino Superior em resolver problemas envolvendo conceitos geométricos. Os pesquisadores também perceberam os avanços conceituais entre os concluintes, o que pode sinalizar que o curso tem promovido aprendizagens de conceitos geométricos ao longo do período de formação inicial.

Neves, Silva e Baccarin (2012) concluem afirmando que os resultados encontrados mostram que somente ao longo do curso de Licenciatura em Matemática, os licenciandos desenvolvem as competências que eram esperadas para os alunos ao término do Ensino Médio. Os pesquisadores inferem que, durante a Educação Básica, esses alunos não vivenciaram situações de ensino e aprendizagem em Geometria que considerassem as diferentes apreensões das figuras geométricas (perceptiva, discursiva, operatória e sequencial) e a importância de se trabalhar com os diferentes tipos de representações (desenho/figura geométrica, linguagem natural e linguagem matemática).

Em uma palestra durante o VI Congresso Nacional de Educação (VI CONEDU), em outubro de 2019, Sérgio Lorenzato discutiu acerca do letramento geométrico e apresentou algumas consequências reais e atuais sobre a Geometria, a saber: a Geometria está ausente da formação de professores; professor não sabe Geometria; professor não ensina Geometria; poucas são as pesquisas sobre ensino de Geometria; raras são as publicações sobre Geometria; a matemática visual é quase ausente na sala de aula; crescem as dificuldades de aprendizagem em Aritmética e em Álgebra; são superficiais os conhecimentos geométricos presentes nos livros didáticos e na BNCC; os alunos recebem fraca formação geométrica (LORENZATO, 2019). O que corrobora com os resultados encontrados nas pesquisas em Educação Matemática, alertando para o fato de que a Geometria ainda não é abordada e ensinada conforme as recomendações e trabalhos na área.

A partir dos resultados apresentados de investigações de alguns educadores matemáticos, infere-se que os alunos ainda estão ingressando no Ensino Superior sem ter uma efetiva aprendizagem dos conteúdos geométricos. Essas dificuldades surgem justamente porque eles saem da Educação Básica com o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico baixo e isso prejudica no aprendizado de uma Geometria mais avançada, uma vez que eles ainda não possuem o pensamento abstrato desenvolvido. Com isso, esses futuros professores chegam com muitas limitações ao Ensino Superior, que na maioria das vezes não são sanadas e voltam à Educação Básica para ensinar a Geometria que eles não conseguiram compreender nem no ensino básico nem no superior, gerando assim um círculo vicioso.

Lorenzato (1995) afirma que as práticas de omissão e/ou simplificação dos conceitos geométricos em sala de aula acabam criando um *círculo vicioso,* ou seja, “[...] a geração que não estudou geometria não sabe como ensiná-la” (1995, p. 4). E esse círculo, na maioria das vezes, é gerado por conta de um ensino de Geometria muitas vezes algebrizado, os professores e futuros professores não conseguem compreender nem a teoria da Geometria nem a sua aplicação no dia a dia (SCHNEIDER, LUNKES e REISDOEFER, 2013).

Ainda com relação às dificuldades e à falta de conhecimentos geométricos dos licenciandos, trazemos agora algumas contribuições do Relatório do ENADE 2014 (BRASIL, 2014), gerado em 07 de abril de 2016, que estão em consonância com os estudos apresentados acima, em especial os de Gonçalves (2007), Damico (2010) e Araújo e Bortoloti (2010), uma vez que mostram a dificuldade de alunos do Ensino Superior em expressar suas ideias, em interpretar questões e em resolver problemas envolvendo conceitos geométricos.

O Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) é um dos pilares da avaliação do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES), criado pela Lei n° 10.861, de 14 de abril de 2004, que tem como objetivo avaliar os cursos de Ensino Superior do Brasil. No ano de 2014, o ENADE foi aplicado também para alunos concluintes da Licenciatura e Bacharelado em Matemática, no dia 23 de novembro, com o objetivo geral de avaliar o desempenho desses alunos em relação aos conteúdos programáticos previstos nas diretrizes curriculares, às habilidades e competências para a atualização permanente e aos conhecimentos sobre a realidade brasileira, mundial e sobre outras áreas do conhecimento.

Os alunos concluintes responderam, antes da realização da prova, um questionário *on-line*, composto por 67 questões objetivas, que teve a função de compor o perfil dos participantes e buscava explorar a oferta de infraestrutura e organização acadêmica do curso, bem como certos aspectos importantes da formação profissional. Já a prova do ENADE foi estruturada em dois componentes: o primeiro, Componente de Formação Geral, comum às provas das diferentes áreas, buscando avaliar competências, habilidades e conhecimentos gerais desenvolvidos pelos alunos, que facilitam a compreensão de temas exteriores ao âmbito específico de sua profissão e à realidade brasileira e mundial; e o segundo, Componente Específico, contemplando a especificidade de cada área, no domínio dos conhecimentos e habilidades esperados para o perfil profissional.

As diretrizes para a elaboração da prova da área de Matemática estão definidas na Portaria INEP n° 261, de 02 de junho de 2014. A prova teve duração total de 4 horas e apresentou questões discursivas e de múltipla escolha relativas a um Componente de avaliação da Formação Geral, comum aos cursos de todas as áreas, e a um componente específico da área de Matemática.

No Componente de Conhecimento Específico da Área de Matemática, o ENADE 2014 (BRASIL, 2014) tomou como base o Art. 6º, Portaria INEP n° 261, avaliando se o aluno desenvolveu, no processo de formação, competências e habilidades que possibilitem: estabelecer relações entre os aspectos formais e intuitivos; formular conjecturas e generalizações; elaborar argumentações e demonstrações matemáticas; utilizar diferentes representações para um conceito matemático; analisar dados utilizando conceitos e procedimentos matemáticos; resolver problemas utilizando conceitos e procedimentos matemáticos; e elaborar modelos matemáticos utilizando conceitos e procedimentos matemáticos. Além disso, o licenciado em Matemática deve também desenvolver, no processo de formação, habilidades e competências que lhe possibilite avaliar propostas curriculares de Matemática para o ensino básico, como também elaborar e avaliar propostas e metodologias de ensino-aprendizagem de Matemática para esse segmento.

Também dentro do Componente Específico da área de Matemática, o ENADE 2014 (BRASIL, 2014) tomou como referência o que está disposto no Art. 5º, Portaria INEP n° 261, analisando o perfil de um profissional que: atua pautado em um corpo de conhecimentos rigoroso e formal, com raciocínio lógico e capacidade de abstrações; é capaz de identificar e solucionar problemas de forma prática e eficiente, valorizando a criatividade e a diversidade na elaboração de hipóteses, proposições e na solução de problemas; busca o contínuo aperfeiçoamento e atualização e é capaz de utilizar os recursos de informática em sua atuação; busca identificar concepções, valores e atitudes em relação à Matemática e seu ensino, visando à atuação crítica no desempenho profissional, analisando criticamente a contribuição do conhecimento matemático na formação de indivíduos e no exercício da cidadania.

Ainda considerando o Componente Específico da área de Matemática, o ENADE 2014 (BRASIL, 2014) adotou como referencial os conteúdos curriculares dispostos no Art. 7º, Portaria INEP n° 261, que estão divididos em: comuns ao Bacharelado e Licenciatura (conteúdos matemáticos da Educação Básica, Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, Fundamentos de Álgebra, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise e Probabilidade e Estatística); específicos para o Bacharelado (Álgebra, Álgebra Linear, Análise, Cálculo Diferencial e Integral, Análise Complexa, Geometria Diferencial e Topologia dos espaços métricos); e específicos para a Licenciatura (Matemática, história e cultura; Matemática, escola e ensino; Matemática, linguagem e comunicação na sala de aula; Matemática e avaliação; e Fundamentos de Geometria).

O Componente de avaliação de Formação Geral foi composto por 10 questões, sendo 2 discursivas e 8 de múltipla escolha, abordando situações-problema e estudos de caso, simulações, interpretação de textos, imagens, gráficos e tabelas. Já com relação ao Componente de Conhecimento Específico da Área de Matemática, continha 30 questões, sendo 3 discursivas e 27 de múltipla escolha, envolvendo situações-problema e estudos de caso.

O ENADE de 2014 (BRASIL, 2014) contou com a participação de alunos de 482 cursos e inscreveram-se nesse exame 17 347 alunos, sendo que destes, 13 854 estavam presentes. A média das notas da prova como um todo foi 32,5. No Componente de Formação Geral, os alunos de todo Brasil obtiveram desempenho médio de 51,8, já no Componente de Conhecimento Específico, a média do desempenho dos alunos de todo o Brasil foi 26,0.

No Componente de Formação Geral, os alunos de todo o Brasil obtiveram média de 53,4 nas questões objetivas e de 49,3 nas questões discursivas. Quanto às questões discursivas, os relatores observaram, de modo geral, que as respostas demonstraram que os alunos têm muita dificuldade na expressão escrita do pensamento, sendo constatado por meio da análise de profissionais da área de Língua Portuguesa.

No Componente de Conhecimento Específico, os alunos de todo o Brasil obtiveram média nas provas objetivas de 40,2 (Bacharelado) e 28,4 (Licenciatura) e nas discursivas, 10,7, mais baixa que as discursivas no Componente de Formação Geral (49,3). A questão 3 foi respondida por concluintes do Bacharelado e da Licenciatura e o desempenho dos alunos de todo o Brasil foi o mais baixo dentre as três questões discursivas desse componente, e a média foi 5,9 (BRASIL, 2014).

Essa questão abordava tópicos de Álgebra Linear e de Geometria Analítica, versando sobre uma propriedade geométrica da elipse e/ou o encaminhamento algébrico necessário à obtenção de sua equação geral; dado um operador linear específico, obter as imagens dos focos da elipse; e, obter os autovetores do operador linear dado. Foi observado pelos relatores que os alunos oriundos de cursos de Bacharelado tiveram um desempenho significativamente melhor do que aqueles provenientes de cursos de Licenciatura, o que para eles deve-se ao fato de os primeiros já terem a presença consolidada da Geometria Analítica e da Álgebra Linear nos dois períodos iniciais, enquanto que a Licenciatura em muitas instituições, após as alterações curriculares ocorridas a partir da Resolução CNE/CP nº 2, de 19 de fevereiro de 2002, moveram essas disciplinas para o segundo ano do curso e com uma abordagem menos aprofundada (BRASIL, 2014).

Foi observado pelos relatores, após a correção das questões relativas aos alunos de Licenciatura, que 65% deixaram a questão em branco, o que compromete os resultados desses alunos na prova. Os relatores julgam que esse é um dado alarmante, pois pode vir a corroborar a hipótese de que os conteúdos abordados pela questão não eram conhecidos pelos alunos, podendo ser em consequência da não apresentação de tais conteúdos nos cursos e/ou da baixa qualidade dos cursos de Licenciatura, em termos mais amplos (BRASIL, 2014).

Na questão discursiva 4 do Componente de Conhecimento Específico, os alunos de Licenciatura de todo Brasil obtiveram média de 10,2. Essa questão fornecia, textualmente, as instruções para uma construção geométrica simples: a divisão de um segmento (AB) em partes (AD e DB) que definem a proporção áurea. A resolução para essa questão possuía duas etapas: a compreensão do que estava sendo pedido para a construção e os encaminhamentos de cálculo envolvendo as medidas dos segmentos determinados, que incluem o uso do Teorema de Pitágoras (BRASIL, 2014).

O conteúdo abordado nessa questão 4 deveria ser consolidado na Educação Básica e sendo revisitado, por vezes, em disciplinas de Geometria Básica nos cursos de Licenciatura. Foi percebido pelos relatores que os alunos não costumam compreender os passos de uma construção geométrica sem o apoio de figuras e os cálculos, por sua vez, envolviam radicais e ofereceram dificuldades a esses alunos. Ou seja, as respostas erradas se deram, tanto na dimensão geométrica (que envolve a compreensão das instruções apresentadas textualmente), como na dimensão algébrica (que dependia apenas de manipulações algébricas elementares) (BRASIL, 2014).

Assim como na questão 3, o percentual de resoluções em branco também ficou em torno de 65%. Os erros revelaram a dificuldade em extrair informações básicas de textos simples, um improvável desconhecimento do Teorema de Pitágoras e a baixa proficiência em manipulações algébricas envolvendo frações e radicais. Os relatores afirmam que a partir da constatação de que esses conteúdos abordados já deveriam ser minimamente conhecidos pelos alunos, pode-se concluir que eles ingressam no Ensino Superior sem os conhecimentos mínimos que deveriam ter sido consolidados na Educação Básica e não encontram, nos cursos de graduação em Matemática, políticas de acolhimento capazes de ajuda-los a superarem tais dificuldades (BRASIL, 2014). Assim como os resultados encontrados por Gazire (2000), Araújo e Bortoloti (2010), Neves, Silva e Baccarin (2012), entre outros.

Na questão 5, do Componente de Conhecimento Específico, os alunos de Licenciatura de todo o Brasil obtiveram média de 14,2, superior aos desempenhos nas questões 3 e 4. Essa questão propunha ao aluno uma reflexão acerca de como a resolução de problemas se coloca e impacta as relações de ensino e aprendizagem da Matemática, mas de modo bastante específico e tematizado sobre um jogo bastante popular, a Torre de Hanói. Assim, queria o posicionamento de tal recurso nos PCN, quanto ao ensino e aprendizagem da Matemática; a indicação de conteúdos matemáticos que podem ser abordados por ele; e a identificação da relação existente entre o número de discos e o número de movimentos mínimos a serem realizados no jogo para que o objetivo proposto seja alcançado (BRASIL, 2014).

Segundo os relatores, essa questão pode ser considerada adequada para alunos que já conheciam o material (Torre de Hanói) e por isso as respostas dadas por esses alunos variaram muito, devido ao conhecimento prévio desse material ou não. Ao corrigir as respostas dadas pelos alunos, os relatores observaram que eles possuíam dificuldades de escrever textos simples, uma vez que continha inúmeros erros gramaticais, redundância, ambiguidade e desconexão (BRASIL, 2014).

Além disso, os relatores observaram, de modo geral, que os alunos tiveram dificuldades de encaminhar uma reflexão mais profunda acerca da resolução de problemas e isso revela a falta de articulação existente entre os conhecimentos específicos da Matemática e os conhecimentos pedagógicos desses alunos. Para os relatores, essa falta de articulação é característica e ainda persiste nos cursos de Licenciatura em Matemática há anos e isso decorre de propostas curriculares que ainda possuem uma polarização entre o específico e o pedagógico, decorridos dos antigos modelos “3+1” das Licenciaturas, em que 3 anos eram de disciplinas específicas e 1 ano era de disciplinas pedagógicas oferecidas de forma desvinculada com a área específica (BRASIL, 2014).

Percebe-se a partir das discussões trazidas pelos educadores matemáticos e dos relatores do ENADE 2014 que o ensino de Geometria ainda se encontra aquém nas Licenciaturas em Matemática de Instituições de Ensino Superior do Brasil. Ainda é preciso melhorar e muito o ensino de Geometria, tanto na Educação Básica, como no Ensino Superior, pois se não superarmos esse círculo vicioso, nossos futuros professores ainda não estarão levando a Geometria para as salas, não saberão desenvolver o raciocínio geométrico dos alunos nem tampouco saberão adotar as metodologias adequadas para os conteúdos propostos. Para que as mudanças cheguem à Educação Básica, é preciso investir no Ensino Superior, proporcionando aos licenciandos refletir, conjecturar, justificar e argumentar as suas ideias, em que eles possam vivenciar um ambiente que também seja desejável aos seus futuros alunos, tal qual estão nas orientações e recomendações dos PCN, da BNCC e da SBEM. Ou seja, faz-se necessário sair das teorias e pesquisas escritas no papel e as executarmos nas salas de aula com o intuito de melhorar a nossa educação matemática.

As discussões aqui trazidas pelos pesquisadores Kaleff *et al*. (1994), Gazire (2000), Gonçalves (2007), Damico (2010), Araújo e Bortoloti (2010), Neves, Silva e Baccarin (2012), Neves, Baccarin e Silva (2013) e os resultados encontrados no ENADE 2014 (BRASIL, 2014) nos auxiliará a confirmar ou não se as dificuldades ainda estão presentes na construção de conceitos geométricos de licenciandos em Matemática, como também se haverá dificuldade da expressão escrita do pensamento e na leitura, interpretação e resolução de problemas e na capacidade de argumentação. Os resultados aqui apresentados nos ajudaram a nortear as atividades com provas matemáticas, compreendendo a escolha dos tópicos de Geometria Plana e a escolha dessas atividades.

No subtópico abaixo discutiremos sucintamente as disciplinas e ementas de Geometrias em universidades públicas dos estados da Paraíba e Pernambuco, o que nos auxiliará a nortear a coleta dos dados.

1.3.1. A Geometria nos cursos de Licenciatura de Universidades Públicas dos Estados da Paraíba e Pernambuco

Sabemos que nos cursos de Licenciatura há uma diferenciação quanto a outros cursos superiores, uma vez que nos primeiros, os futuros professores precisam aprender estratégias eficientes sobre como ensinar e como se dará a aprendizagem dos conteúdos que irão ensinar. Percebe-se então que essas estratégias estarão diretamente ligadas aos conhecimentos didáticos dos conteúdos e isso fica evidente em algumas instituições de ensino que têm como metodologia a prática de ensino.

Acreditamos que o fato de o professor dominar totalmente um conteúdo específico não garante que ele tenha habilidade para desenvolver e elaborar estratégias de ensino que levem os alunos a aprender o que se pretende ensinar, e vice-versa. É preciso muito mais que aprender somente o conteúdo específico ou aprender somente as estratégias eficientes sobre como ensinar, faz-se necessário unir essas duas perspectivas de modo que o licenciando inicie seu processo crítico-reflexivo sobre o ensino e aprendizagem da Matemática, assim como se torne um pesquisador, a fim de modificar aos poucos a sua vivência.

Por isso, ao analisarmos as ementas das disciplinas de Geometria de universidades públicas dos Estados da Paraíba e Pernambuco, sabemos que nem sempre uma ementa institucional irá direcionar o professor ao conteúdo que ele deve trabalhar com os futuros professores em um curso de Licenciatura em Matemática, uma vez que ele tem a autonomia de acrescentar ou retirar o que julga necessário para seus alunos.

Decidimos então fazer essa procura para nos auxiliar a escolher os conteúdos geométricos mais frequentes nas Licenciaturas em Matemática e assim definirmos se trabalharíamos com a Geometria da Educação Básica ou do Ensino Superior. Assim, investigamos apenas as ementas das disciplinas de Geometria presentes em universidades públicas dos Estados da Paraíba e Pernambuco.

Das universidades do Estado da Paraíba, analisamos as ementas das disciplinas de Geometria de três instituições, sendo que duas delas possuem três campi ofertando Licenciatura em Matemática e outra com dois campi. Denominaremos essas instituições de A, B e C e discutiremos de maneira geral e sucinta o que encontramos em cada uma delas, apresentando um quadro síntese de cada instituição contendo as disciplinas, carga horária/período, ementa, objetivos (quando houver) e referências.

Na instituição A do Estado da Paraíba (Quadro 1), de modo geral, encontramos que o curso de Licenciatura em Matemática possui como disciplinas obrigatórias *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica* e *Fundamentos da Geometria Euclidiana*. Na primeira disciplina, um dos livros básicos adotados é o de Camargo e Boulus sobre Geometria Analítica, já na segunda, um dos livros básicos adotados é o de João Lucas M. Barbosa sobre Geometria Euclidiana Plana. Nas ementas percebemos a presença de conteúdos vistos no Ensino Fundamental e Médio, porém infere-se que agora será trabalhado com mais profundidade e rigor matemático, levando em consideração a escrita matemática e as demonstrações.

Como disciplina optativa, essa instituição dispõe de *Fundamentos da Geometria Espacial*, que, pela ementa, percebe-se a presença de conteúdos vistos no Ensino Médio, porém agora com mais profundidade e rigor matemático. Enfatizamos que dos três campi dessa instituição que possuem a Licenciatura em Matemática, não conseguimos localizar as ementas de dois desses campi, apenas observamos o fluxograma do curso e encontramos a presença dessas três disciplinas em todos, porém em um desses campus a disciplina *Geometria Espacial* é obrigatória.

Quadro 1 - Síntese das disciplinas de Geometria da instituição A

Campus Campina Grande				
Disciplina	**Carga horária**	**Ementa**	**Objetivos**	**Referências**
Álgebra Vetorial e Geometria Analítica (obrigatória)	60 h 1º período	Álgebra de Vetores no Plano e no espaço tridimensional. Retas. Planos. Cônicas e Quádricas. Sistemas de coordenadas polares, cilíndricas e esféricas.	* Prover aos alunos conhecimentos de Geometria Analítica Plana e Espacial e da Álgebra de vetores, visando a utilização desse conhecimento em disciplinas posteriores. * Estimular a redação matemática formal.	CAMARGO, Ivam e BOULUS, Paulo. **Geometria analítica,** 3ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005. LIMA, Elon L. **Geometría analítica e Álgebra Linear.** Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. REIS, G. L. e SILVA, V. V. **Geometria Analítica,** 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos e Científicos. 1996.
Fundamentos da Geometria Euclidiana Plana (obrigatória)	60 h 3º período	O método axiomático. Axiomas e teoremas da geometria euclidiana. Triângulos.	* Proporcionar ao aluno a compreensão do método axiomático e da sua importância histórica no desenvolvimento da	BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM –

		Polígonos. Congruências. Semelhanças. Círculos. Relações métricas no triângulo retângulo e no círculo. Áreas.	geometria e da matemática. * Proporcionar e auxiliar o aluno no estudo e compreensão dos teoremas importantes da geometria Euclidiana e suas consequências. *Favorecer/auxiliar o aluno desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo através da resolução de problemas geométricos. *Favorecer/auxiliar o aluno desenvolver a visão geométrica de objetos planos. * Treinar a escrita matemática formal.	Sociedade Brasileira de Matemática, 2003. DOLCE, Osvaldo e POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana, 1 ed. São Paulo: Atual, 1995.
Fundamentos da Geometria Espacial (optativa)	60 h	Posições relativas de retas e planos. Diedros, Triedos e Poliedros. Teorema de Euler. Cilindro. Cone. Esfera. Áreas e volumes. Inscrição e circunscrição de sólidos.	* Proporcionar ao aluno a compreensão do método axiomático e da sua importância histórica no desenvolvimento da geometria e da matemática. * Proporcionar e auxiliar o aluno no estudo e compreensão dos teoremas importantes da geometria Espacial e suas consequências. *Favorecer/auxiliar o aluno a desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo através da resolução de problemas geométricos. *Favorecer/auxiliar o aluno a desenvolver a visão geométrica de objetos espaciais. * Treinar a escrita matemática formal.	CARVALHO, Paulo César P. **Introdução à Geometria Espacial**. 3ª ed. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1999. DOLCE, Osvaldo e POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria Espacial, 5ª ed. São Paulo: Atual, 1993.
Campus Campina Grande (PARFOR)				
Disciplina	**Carga horária**	**Ementa**	**Objetivos**	**Referências**
Álgebra Vetorial e Geometria Analítica (obrigatória)	60 h 1º período			
Fundamentos da Geometria Euclidiana Plana (obrigatória)	60 h (3º período)			
Campus Cajazeiras				

Disciplina	Carga horária	Ementa	Objetivos	Referências
Álgebra Vetorial e Geometria Analítica (obrigatória)	60 h 2º período			
Geometria Euclidiana Plana (obrigatória)	60 h 2º período			
Geometria Euclidiana Espacial (obrigatória)	60 h 3º período			
Campus Cuité				
Disciplina	**Carga horária**	**Ementa**	**Objetivos**	**Referências**
Álgebra Vetorial e Geometria Analítica (obrigatória)	60 h 1º período			
Geometria Euclidiana (obrigatória)	60 h 3º período			

Fonte: PPC da instituição

Na instituição B do Estado da Paraíba (Quadro 2), de modo geral, encontramos que o curso de Licenciatura em Matemática possui como disciplinas obrigatórias *Vetores e Geometria Analítica*, *Tópicos de Geometria I* e *Tópicos de Geometria II*. Na primeira disciplina, dois dos livros básicos adotados são de Camargo e Boulus e Reis e Silva sobre Geometria Analítica; na segunda, adota-se como um dos livros básicos o de João Lucas M. Barbosa sobre Geometria Euclidiana Plana; e na terceira, adota-se o de Paulo César P. Carvalho sobre Introdução à Geometria Espacial. Nas ementas dessas disciplinas percebemos a presença de conteúdos geométricos vistos nos Ensinos Fundamental e Médio, porém inferindo-se que agora o trabalho seja feito com mais profundidade e rigor matemático, sendo explorado e desenvolvido a escrita matemática e as demonstrações.

Essa instituição possui três campi, em um deles há como disciplina obrigatória *Tópicos Especiais em Matemática Básica*, que contém conteúdos geométricos do Ensino Fundamental, adotando-se como livros básicos os dos Ensinos Fundamental e Médio e os da Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, de Gelson Iezzi. Em dois dos campi, há como disciplina optativa/eletiva *Tópicos Especiais de/em Geometria*, possuindo ementa livre, ficando a cargo do docente estabelecer os conteúdos geométricos, a metodologia e as referências adequadas para o que irá propor.

Quadro 2 – Síntese das disciplinas de Geometria da instituição B

Campus Campina Grande				
Disciplina	**Carga horária**	**Ementa**	**Objetivos**	**Referências**
Tópicos especiais em Matemática Básica (obrigatória)	60 h 1º período	Representação dos Números Reais. Expressões Decimais. A ordem na reta e a notação		DANTE, **Matemática para o Ensino Médio**, Vols. 1, 2 e 3. GENTIL, N.; SANTOS, C. A. M.;

		de intervalo. Radiciação e Potenciação (com Expoentes Inteiros e Racionais). Expressões Fracionárias. Produtos Notáveis. Equações e Inequações. Segmentos. Áreas (Definição Geral de Área). Semelhança de Figuras Geométricas. Volume (Definição Geral de Volume).		GRECO, A. C.; GRECO, S. E. **Matemática para o 2º grau.** v. 1,2 e 3, São Paulo, Editora ATICA, 1998. IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo: Atual Editora, 1998.
Vetores e Geometria Analítica (obrigatória)	60 h 3º período	Coordenadas Cartesianas. Vetores no Plano e no Espaço. Produtos Escalar Vetorial e Misto. Retas e Planos. Curvas no Plano e no Espaço. Cônicas e Quádricas.		REIS, G. L. e SILVA, V. V. **Geometria Analítica**, 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos. 1996. CAMARGO, I. e BOULUS, P. **Geometria analítica**, 3ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005. LIMA, E. L. **Geometria analítica e Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.
Tópicos de Geometria I	75 h 3º período	Segmento. Ângulo. Estudo de triângulos. Paralelismo e perpendicularidade de retas. Circunferência e Círculo. Quadriláteros. Polígonos. Comprimento da circunferência. Área de figuras planas.		BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006. CARVALHO, P.: **Geometria Espacial**, SBM. IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática**, vol. 9
Tópicos de Geometria II	75 h 4º período	Posição relativa envolvendo retas e planos. Paralelismo e perpendicularidade envolvendo retas e planos. Ângulo entre retas e planos e entre planos. Diedros. Triedros. Poliedros. Fórmula de Euler.		BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006. CARVALHO, P.: **Geometria Espacial**, SBM.

		Poliedros de Platão. Estudo dos sólidos: Prisma. Pirâmide. Cilindro. Cone. Esfera.		IEZZI, G.: **Fundamentos**, vol. 9.
Campus Monteiro				
Disciplina	**Carga horária**	**Ementa**	**Objetivos**	**Referências**
Vetores e Geometria Analítica (obrigatória)	60 h 1º período	Vetores. Operações de adição de vetores, multiplicação de um número real por vetor e soma de ponto com vetor. Produto interno e projeção ortogonal. Produto vetorial e área do paralelogramo. Produto misto e volume do paralelepípedo. Sistema de coordenadas no plano e no espaço. Coordenadas cartesianas do ponto e da reta. Estudo das equações da reta e do plano. Posições relativas de retas e planos. Ângulos entre retas e planos. Distâncias de pontos, retas e planos. Translação e rotação de eixos coordenados. Cônicas. Superfícies.		BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria Analítica:** um tratamento vetorial. 3 ed. São Paulo: Makron Books, 2004. REIS, G. L.; SILVA, V. V. **Geometria Analítica**. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996. (Livros Técnicos e Científicos) VENTURI, J. **Álgebra vetorial e Geometria Analítica**. 10 ed. Curitiba, 2015.
Tópicos de Geometria I (obrigatória)	60 h 5º período	Axiomas da Geometria Euclidiana: axioma da incidência e ordem; axioma da medição de segmentos e ângulos; axioma das paralelas. Congruência de triângulos. O teorema do ângulo externo e suas consequências. Teorema de Tales. A desigualdade triangular.		BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. DOLCE, O. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria plana. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2005. MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

		Semelhança de triângulos. O teorema de Pitágoras. Pontos notáveis de triângulos: baricentro, ortocentro, incentro. Circunferência e Círculo. Áreas de figuras planas: triângulos; circunferência; quadriláteros.		
Tópicos de Geometria II (obrigatória)	60 h 6º período	Poliedros. Fórmula de Euler. Poliedros de Platão. Prisma. Paralelepípedo. Pirâmide. Cilindro. Cone. Esfera. Áreas e volumes de paralelepípedos, pirâmides, cilindros, cones e esferas.		CARVALHO, P. C. **Introdução à Geometria Espacial**. 4ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. DOLCE, O. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria espacial: posição e métrica. 6ª ed. São Paulo: Atual, 2005. MACHADO, P. A. F. **Fundamentos de Geometria Espacial**. Belo Horizonte: CAEDUFMG, 2013.
Tópicos especiais de Geometria (eletiva)	60 h	Ementa livre.		Bibliografia livre.
Campus Patos				
Disciplina	**Carga horária**	**Ementa**	**Objetivos**	**Referências**
Tópicos de Geometria I (obrigatória)	75 h 2º período	Segmento. Ângulo. Estudo de triângulos. Paralelismo e perpendicularidade de retas. Circunferência e Círculo. Quadriláteros. Polígonos. Comprimento da circunferência. Área de figuras planas.		BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006. CARVALHO, P. C. P. **Introdução à Geometria Espacial**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2005. NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar** - Volume 2 – Geometria Euclidiana Plana. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
Tópicos de Geometria II (obrigatória)	75 h 3º período	Posição relativa envolvendo retas e planos. Paralelismo e		BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**.

		perpendicularidade envolvendo retas e planos. Ângulo entre retas e planos e entre planos. Diedros. Triedros. Poliedros. Fórmula de Euler. Poliedros de Platão. Estudo dos sólidos: Prisma. Pirâmide. Cilindro. Cone. Esfera.		Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006. CARVALHO, P. C. P. **Introdução à Geometria Espacial**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2005. LIMA, E. L. *et al*. A Matemática no Ensino Médio. V. 1, 2, 3. Rio de Janeiro: SBM, 2004.
Vetores e Geometria Analítica (obrigatória)	75 h 3º período	Vetores. Retas e Planos. Cônicas e Quádricas. Espaços Euclidianos. Matrizes e Sistemas de Equações Lineares. Funções Lineares.		LIMA, E. L. **Geometria Analítica e Álgebra Linear.** Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. dos SANTOS, N. M. **Vetores e Matrizes: uma Introdução à Álgebra Linear**. 4ª edição, São Paulo: Thomson Learning, 2007. REIS, G. L. e SILVA, V. V. **Geometria Analítica.** 2.Ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1996.
Tópicos especiais de Geometria (eletiva)	60 h	Ementa livre.		Bibliografia livre.

Fonte: PPC da instituição

Na instituição C do Estado da Paraíba (Quadro 3), de modo geral, encontramos que o curso de Licenciatura em Matemática possui como disciplinas obrigatórias *Cálculo vetorial e Geometria Analítica* e *Fundamentos da Geometria Euclidiana.* Destacamos que dessa instituição não conseguimos obter as referências adotadas nas disciplinas, porém pelas ementas percebemos a presença de conteúdos de Geometria vistos no Ensino Fundamental e Médio, porém inferindo-se que agora seja trabalhado com mais profundidade e rigor, sendo explorado e desenvolvido a escrita matemática e as demonstrações.

Essa instituição possui dois campi, em um deles há como disciplinas obrigatórias *Introdução à Geometria Diferencial* e *Matemática para o Ensino Básico I, II e IV*. Na primeira disciplina, estuda-se a Teoria das Curvas, a Teorias das Superfícies e suas aplicações; já na segunda, estuda-se Geometria Plana, Trigonometria, Geometrias Espacial e Analítica, porém pela ementa não sabemos se esses conteúdos geométricos estudados são somente uma revisão dos Ensinos Fundamental e Médio ou se são feitos de forma mais aprofundada e com rigor matemático. Entretanto, podemos inferir que são uma revisão, uma vez que essas disciplinas são ministradas no primeiro período do curso. No outro campus dessa instituição, a disciplina *Introdução à Geometria Diferencial* é optativa e também se estuda as teorias das curvas e das superfícies.

Quadro 3 - Síntese das disciplinas de Geometria da instituição C

Campus Rio Tinto				
Disciplina	**Carga horária**	**Ementa**	**Objetivos**	**Referências**
Cálculo Vetorial e Geometria Analítica (obrigatória)	60 h 1º período	Vetores. Retas. Planos. Cônicas. Quádricas. Espaços euclidianos.		
Matemática para o Ensino Básico I (obrigatória)	60 h 1º período	Aritmética. Geometria Plana. Álgebra. Tratamento da informação.		
Matemática para o Ensino Básico II (obrigatória)	60 h 2º período	Funções. Funções Polinomiais, Funções Logarítmicas e Exponenciais. Triângulo Retângulo. Ciclo Trigonométrico. Funções Trigonométricas Elementares.		
Fundamentos da Geometria Euclidiana (obrigatória)	60 h 3º período	Retas e Ângulos. Triângulos. Polígonos. Arcos e Cordas. Relações Métricas num Triangulo Retângulo, no Círculo e nos Polígonos Regulares. Planos.		
Matemática para o Ensino Básico IV (obrigatória)	60 h 4º período	Trigonometria. Geometria Espacial. Geometria Analítica.		
Introdução à Geometria Diferencial (obrigatória)	60 h 7º período	Teoria das Curvas, Teoria das Superfícies e Aplicações.		
Campus João Pessoa (presencial)				
Disciplina	**Carga horária**	**Ementa**	**Objetivos**	**Referências**
Cálculo Vetorial e Geometria Analítica (obrigatória)	60 h 2º período	Vetores. Retas e planos. Cônicas e quádricas. Espaços Euclidianos. Matrizes.		

Fundamentos da Geometria Euclidiana (obrigatória)	60 h	OBS: Não consta na grade curricular.		
Introdução à Geometria Diferencial (optativa)	60 h			
Campus João Pessoa (a distância)				
Disciplina	**Carga horária**	**Ementa**	**Objetivos**	**Referências**
Cálculo Vetorial e Geometria Analítica (obrigatória)	60 h 2º período			
Fundamentos da Geometria Euclidiana (obrigatória)	60 h 3º período			

Fonte: PPC da instituição

Percebemos que nessas três instituições há um trabalho muito forte com Vetores e Geometria Analítica, Geometria Euclidiana Plana e Geometria Espacial, embora que, em algumas dessas instituições, essa última disciplina esteja como optativa. Há a presença de algumas disciplinas de Geometria não-Euclidiana apenas na instituição C. Além disso, as ementas não deixam claro como seria o trabalho com esses conteúdos geométricos, contudo inferimos que, como se trata de curso de graduação, o trabalho com provas e demonstrações será bem mais forte e presente, fazendo uso das terminologias adequadas na Matemática.

Destacamos também que alguns dos assuntos disponibilizados nas ementas dessas instituições pesquisadas são estudados nos Ensinos Fundamental e Médio, porém inferimos que agora eles devem ser vistos com mais profundidade e rigor matemáticos, sendo exigidos a escrita matemática e as demonstrações, como também adotam os mesmos livros básicos os de Camargo e Boulus e Reis e Silva sobre Geometria Analítica, o de João Lucas M. Barbosa sobre Geometria Euclidiana Plana e o de Paulo César P. Carvalho sobre Introdução à Geometria Espacial. Além disso, percebemos que em quase todas as disciplinas ministradas nessas três instituições, há como referência bibliográfica a Coleção Fundamentos de Matemática Elementar de Gelzon Iezzi e colaboradores.

Quanto às universidades do Estado de Pernambuco, analisamos as ementas das disciplinas de Geometria de três instituições, sendo que uma delas com dois campi, outra com um e outra com três campi ofertando Licenciatura em Matemática. Denominaremos essas instituições de D, E e F e discutiremos de maneira geral e sucinta o que encontramos em cada uma delas, apresentando um quadro síntese de cada instituição contendo as disciplinas, carga horária/período, ementa, objetivos (quando houver) e referências.

Na instituição D do Estado de Pernambuco (Quadro 4), de modo geral, encontramos que o curso de Licenciatura em Matemática possui como disciplinas obrigatórias *Geometria Analítica*, *Fundamentos da Geometria Euclidiana* e *Fundamentos da Geometria Espacial.* Na primeira disciplina, adota-se o livro de Camargo e Boulus sobre Geometria Analítica; na segunda, adota-se livros do Ensino Médio, o de Dolce e Pompeo da Coleção Fundamentos de Matemática Elementar e o de Rezende e Queiroz sobre Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas; e na terceira, adota-se livros do Ensino Médio, o de Costa e Costa sobre Geometria Gráfica Tridimensional e o de Dolce e Pompeo da Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. Nas ementas dessas disciplinas percebemos a presença de conteúdos geométricos vistos nos Ensinos Fundamental e Médio, porém inferimos que agora o trabalho seja feito com mais profundidade e rigor matemático, sendo explorado e desenvolvido a escrita matemática e as demonstrações.

Essa instituição possui dois campi, em um deles há como disciplinas obrigatórias *Matemática II* e *Matemática III*, que são abordadas, respectivamente, no terceiro e quarto períodos. Nelas encontramos assuntos referentes a Trigonometria e a Geometrias Euclidiana Plana, Espacial e Analítica Plana, tendo como livros os da Coleção Fundamentos de Matemática Elementar e o de Rezende e Queiroz sobre Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas. Como são ministradas no segundo ano do curso e são anteriores à Geometria Plana e Espacial, então supomos que são disciplinas de revisão de conteúdos vistos no Ensino Fundamental e Médio. Já no outro campus, não podemos discutir sobre as ementas, pois não as encontramos disponíveis para *download*, encontramos somente que há duas disciplinas eletivas/optativas *Geometria Diferencial* e *Tópicos de Geometria Elementar*.

Quadro 4 – Síntese das disciplinas de Geometria da instituição D

Campus Caruaru				
Disciplina	**Carga horária**	**Ementa**	**Objetivos**	**Referências**
Geometria Analítica (obrigatória)	60 h 2º período	Sistemas de coordenadas. Cálculo vetorial e operações vetoriais básicas no plano e no espaço. Retas e planos. Cônicas. Superfícies quádricas.	* Estudar Geometria Analítica no plano e no espaço, dando ênfase aos aspectos geométricos e as traduções em: coordenadas cartesianas e lugares geométricos; visando o embasamento das demais disciplinas do curso que dela dependem.	CAMARGO, Ivan de, 1945; BOULOS, Paulo. **Geometria analítica:** um tratamento vetorial. 3ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005. LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 3ª ed. São Paulo: Harbra, 1994. REIS, Genésio Lima dos; SILVA, Valdir Vilmar da Geometria

				analítica. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.
Matemática II (obrigatória)	60 h 3º período	Trigonometria no triângulo retângulo, circunferência trigonométrica, funções circulares, transformações trigonométricas, equações, inequações e funções trigonométricas. Análise combinatória, Binômio de Newton e teoria das probabilidades.	* Contribuir com o amadurecimento dos alunos enquanto futuros professores da educação básica apresentando de forma mais avançada os conteúdos relacionados à Trigonometria, Análise Combinatória e Probabilidade vistos no ensino básico. * Ajudar na imersão do aluno na vida acadêmica, proporcionando uma percepção diferenciada e mais profunda sobre os temas relacionados aos conteúdos citados anteriormente.	DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações: volume único. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2009. IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 3**. 8ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2004. SANTOS, J. Plinio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. **Introdução à análise combinatória**. 4.ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.
Matemática III (obrigatória)	60 h 4º período	Estudo da Geometria plana: semelhança e congruência de figuras, relações métricas no triângulo retângulo, áreas das figuras, simetrias. Geometria espacial: poliedros, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera. Introdução à Geometria analítica plana.	Estimular a compreensão e aplicação dos conceitos de semelhanças, relações métricas, assim como equivalência plana, os conceitos da geometria espacial e o cálculo de áreas e volumes.	DOLCE, Osvaldo; POMPEO, Jose Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**, 9: geometria plana. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2005. DOLCE, Osvaldo; POMPEO, Jose Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar, 10**. 6ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2005. REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 2ª ed. Campinas, SP: Ed. da UNICAMP, 2008.
Fundamentos da Geometria Euclidiana (obrigatória)	60 h 5º período	Estudo axiomático da geometria euclidiana plana, enfatizando os teoremas centrais e a resolução de	Introduzir o discente aos formalismos de uma demonstração matemática rigorosa através do uso de	DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**: volume

		problemas, recorrendo às construções geométricas.	axiomas e regras lógicas para comprovar os teoremas da geometria clássica e fundamentar as construções feitas com régua e compasso.	único. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2009. REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 2ª ed. Campinas, SP: Ed. da UNICAMP, 2008. DOLCE, Osvaldo; POMPEO, Jose Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar, 9**. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2005.
Fundamentos da Geometria Espacial (obrigatória)	60 h 6º período	Introdução à geometria espacial com uma abordagem axiomática. Paralelismo e perpendicularidade entre retas e planos. Poliedros, prismas e pirâmides. Seção plana. Cilindros e cones de revolução. Esferas.	* Promover o desenvolvimento do pensamento crítico e do raciocínio lógico, apresentando o formalismo das bases axiomáticas da Geometria Euclidiana Espacial. * Contribuir para o embasamento teórico do futuro professor a respeito das construções geométricas espaciais e da resolução dos problemas envolvidos.	COSTA, Mario Duarte; COSTA, Alcy P. de A. Vieira. **Geometria gráfica tridimensional**. 3ª ed. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1996. DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, contexto e aplicações:** volume único. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2009. DOLCE, Osvaldo; POMPEO, Jose Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar, 10**. 6ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

Campus Recife				
Disciplina	**Carga horária**	**Ementa**	**Objetivos**	**Referências**
Geometria Analítica (obrigatória)	60 h 1º período			
Geometria Plana (obrigatória)	60 h 3º período			
Geometria Espacial (obrigatória)	60 h 4º período			
Geometria Diferencial (eletiva)	60 h			
Tópicos de Geometria Elementar (eletiva)	60 h			

Fonte: PPC da instituição

Na instituição E do Estado de Pernambuco (Quadro 5), de modo geral, encontramos que o curso de Licenciatura em Matemática possui como disciplinas obrigatórias *Geometria Euclidiana*, *Geometria Analítica* e *Evolução das ideias matemáticas*. Na primeira disciplina, adota-se como um dos livros básicos o de João Lucas M. Barbosa sobre Geometria Euclidiana Plana; na segunda, adota-se o de Elon L. Lima sobre Geometria Analítica e Álgebra Linear e o de Reis e Silva sobre Geometria Analítica; e na terceira, adota-se livros que abordem a história e a evolução das ideias matemáticas, tais como o de Boyer e o de Eves. Nas ementas dessas disciplinas percebemos a presença de conteúdos geométricos vistos no Ensino Fundamental e Médio, porém inferimos que agora seja trabalhado com mais profundidade e rigor matemático, sendo explorado e desenvolvido a escrita matemática e as demonstrações. Quanto à terceira disciplina obrigatória, pede-se como pré-requisito a disciplina de Geometria Euclidiana, pois há um trabalho quanto à evolução da Geometria, apresentando sua axiomatização e as Geometrias não-Euclidianas.

Nessa instituição há como disciplinas optativas *Geometria Espacial*, *Tópicos em Geometria Espacial* e *Introdução à Geometria Diferencial*. Nas duas disciplinas de Geometria Espacial adota-se como um dos livros básicos o de Paulo César P. Carvalho sobre Introdução à Geometria Espacial e na terceira disciplina optativa adota-se como um dos livros básicos o de Manfredo Perdigão do Carmo sobre Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Nas ementas dessas disciplinas optativas percebemos a presença de conteúdos geométricos vistos nos Ensinos Fundamental e Médio, porém inferimos que agora seja trabalhado com mais profundidade e rigor matemático, sendo explorado e desenvolvido a escrita matemática e as demonstrações.

Quadro 5 – Síntese das disciplinas de Geometria da instituição E

Campus Recife				
Disciplina	**Carga horária**	**Ementa**	**Objetivos**	**Referências**
Geometria Euclidiana (obrigatória)	60 h 2º período	Os axiomas da geometria plana de Euclides. Congruência. O teorema do ângulo externo. O axioma das paralelas. Proporcionalidade. Semelhança. O teorema de Pitágoras. O círculo. Polígonos regulares. Áreas.		BARBOSA, João Lucas M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2005. DOLCE, Osvaldo; POMPEU, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar, 9**. São Paulo: Editora Atual, 2008. NETO, Antônio Caminha Muniz. **Tópicos de**

				Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana. Coleção Professor de Matemática, Rio de Janeiro, SBM, 2012.
Geometria Analítica (obrigatória)	60 h 2º período	Vetores no plano e no espaço. Produto interno, externo e misto. Retas e planos. Cônicas e quádricas. Cilindros e Superfícies de revolução.		LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária, IMPA. REIS E SILVA. **Geometria Analítica**. Livros Técnicos e Científicos Editora. STEWART, James. **Cálculo 2**. Pioneira Thomson Learning.
Evolução das ideias matemáticas (obrigatória)	60 h 8º período	Evolução da Aritmética: Teoria dos números, Equações algébricas e o surgimento da álgebra abstrata; Evolução da Geometria: Axiomatização e geometrias não euclidianas; Evolução da análise: Ideias primitivas, o surgimento do cálculo e a formalização da análise. Tópicos de matemática contemporâneos.		ÁVILA, G. **Várias Faces da Matemática**. Edgard Blucher, 2007. BARROS, A Alves, PLÁCIDO F. **Introdução a Geometria Projetiva**. Rio de Janeiro, SBM. BOYER, C.B. **História da Matemática**. São Paulo, Edgard Blucher, 2012. EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução: Bicudo, Irineu. Ed. UNESP, São Paulo, 2009. LIMA, E.L. **Medida e forma em geometria**. Rio de Janeiro, SBM.
Geometria Espacial (optativa)	60 h	Axiomas da Geometria Euclidiana. Paralelismo, perpendicularismo. Áreas e volumes.		CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Introdução à Geometria Espacial**. Rio de Janeiro, SBM. DOLCE, Osvaldo; POMPEU, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**: geometria espacial. São Paulo: Editora Atual, 2008. LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática no Ensino Médio**.

				Volume 2. Rio de Janeiro, SBM, 2006.
Tópicos em Geometria Espacial (optativa)	30 h	Axiomas da Geometria Euclidiana. Paralelismo, Perpendicularismo. Projeções. Áreas e volumes.		CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Introdução à Geometria Espacial**. Rio de Janeiro, SBM. DOLCE, Osvaldo; POMPEU, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar:** geometria espacial. São Paulo: Editora Atual, 2008. LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática no Ensino Médio**. Volume 2. Rio de Janeiro, SBM, 2006.
Introdução à Geometria Diferencial (optativa)	60 h	Curvas no espaço: definição e exemplos. Comprimento de arco. Superfícies regulares: conceito e propriedades. Funções diferenciáveis em superfícies. Plano tangente. Superfícies orientáveis. A primeira forma quadrática. Aplicação normal de Gauss.		DO CARMO, Manfredo Perdigão. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro, SBM, 2006. OPREA, John. **Differential geometry and its applications**. Washington, D.C., Mathematical Association of America, 2007. TENEMBLAT, Keti. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2ª edição, Editora Blucher, 2008.
Introdução à Geometria Projetiva (optativa)	60 h	Espaços projetivos. Dualidade. Hipersuperfícies. Variedades Projetivas. Álgebra Multilinear, Grassmanianas, Variedades de Segre e Veronese.		BARROS, A. A., ANDRADE P. **Introdução à Geometria Projetiva**. HARRISs, J. **Algebraic Geometry:** A First Course. Berlin, New York, 1995. HITCHIN, Nigel. **Projective Geometry** - Lecture notes of Oxford. Capítulos 1, 2 e 3.

Fonte: PPC da instituição

A instituição F do Estado de Pernambuco possui três campi ofertando a Licenciatura em Matemática. Em um deles não poderemos discutir sobre as disciplinas obrigatórias e optativas e as referências utilizadas, pois não encontramos nem o fluxograma do curso nem as ementas das disciplinas ofertadas. Quanto ao segundo campus da instituição, não conseguimos encontrar as ementas das disciplinas, pois não estavam disponíveis para *download*, destacamos apenas que o curso de Licenciatura em Matemática desse campus possui como disciplinas obrigatórias *Geometria Analítica* e *Geometria Euclidiana* e como optativas, as de *Geometria Descritiva* e *Geometria Diferencial*.

No terceiro campus dessa instituição F (Quadro 6), encontramos como disciplinas obrigatórias *Geometria Experimental e Gráfica*, *Matemática Básica II*, *Geometria Espacial* e *Geometria Analítica*. Na primeira disciplina obrigatória, há um trabalho com assuntos da Geometria Euclidiana Plana, sendo abordado os aspectos epistemológicos dos conteúdos, planejamento do ensino e metodologia e recursos didático-pedagógicos, adotando-se como livros básicos o de Dolce e Pompeo da Coleção Fundamentos de Matemática Elementar e o de Castrucci sobre Lições de Geometria Plana. Na segunda, há um trabalho com Trigonometria, sendo feito possivelmente por meio de revisão a partir dos conhecimentos trazidos dos licenciados e adotando-se o livro de Iezzi da Coleção Fundamentos de Matemática Elementar e o de Moyer sobre Teoria a Problemas de Trigonometria. Nas outras duas disciplinas obrigatórias adota-se como livros básicos o de Antar Neto sobre Geometria e Geometria Analítica e o de Iezzi da Coleção Fundamentos de Matemática Elementar.

Nas ementas dessas disciplinas obrigatórias percebemos a presença de conteúdos geométricos vistos nos Ensinos Fundamental e Médio, porém inferimos que agora seja trabalhado com mais profundidade e rigor matemático, sendo explorado e desenvolvido a escrita matemática e as demonstrações. Nesse campus da instituição F há como disciplinas optativas *Geometria Vetorial*, *Geometria Analítica e Álgebra Vetorial*, *Geometria Descritiva* e *Tópicos de Geometria*. Não podemos comentar sobre as referências adotadas por essas disciplinas, uma vez que não encontramos as suas ementas.

Quadro 6 – Síntese das disciplinas de Geometria da instituição F

Campus Garanhus				
Disciplina	**Carga horária**	**Ementa**	**Objetivos**	**Referências**
Campus Mata Norte				
Disciplina	**Carga horária**	**Ementa**	**Objetivos**	**Referências**
Geometria Euclidiana (obrigatória)	60 h 1º período			
Geometria Analítica (obrigatória)	60 h 2º período			
Geometria Descritiva (eletiva)	45 h			

Disciplina	Carga horária	Ementa	Objetivos	Referências
Geometria Diferencial (eletiva)	45 h			
Campus Petrolina				
Disciplina	**Carga horária**	**Ementa**	**Objetivos**	**Referências**
Geometria Experimental e Gráfica (obrigatória)	60 h 1º período	Geometria gráfica plana: construções fundamentais; noções básicas; segmento de reta; ângulos; triângulos; paralelismo; perpendicularismo; polígonos; teorema de Tales; semelhança de triângulos; circunferência e círculo; cônicas; lugares geométricos; poliedros. Enfoque epistemológico dos conteúdos. Planejamento do ensino. Metodologia e recursos didáticos pedagógicos. Avaliação de competências.		DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da matemática elementar**. 6ª ed. S. Paulo: Atual. 1985. V 9. E.E. MOISE; F.L. DOWNS. **Geometria moderna.** São Paulo: Edgard Blücher, 1971. A.V. POGORELOV. **Geometria elementar.** Moscou: Mir. 1974. RAMALHO, R. **Construções geométricas com régua e compasso**. UFPe, CECINE, 1984. CASTRUCCI, Benedito. **Lições de geometria plana**. 6ª ed. São Paulo: Nobel. 1976. J. PETERSEN. **Construções geométricas.** 4ª ed. São Paulo: Nobel. 1971.
Matemática Básica II (obrigatória)	60 h 2º período	Trigonometria: Ângulos e Aplicações, Funções trigonométricas de um ângulo qualquer, Funções trigonométricas de um ângulo agudo, Resolução de Triângulos retângulos e Aplicações, Redução a função de ângulo agudo positivo, Relações básicas e identidades, Funções trigonométricas de dois ângulos agudos, Soma, diferença e produto de funções trigonométricas, Triângulos oblíquos, Área de Triângulos, Funções trigonométricas Inversas, Equações e Inequações trigonométricas.		MOYER, Robert E, **Teoria a Problemas de Trigonometria,** 3ª Ed., Bookman, 2003. IEZZI, Gelson... *et al*. **Fundamentos de matemática elementar.** 9ª Ed, v. 3. São Paulo: Atual, 2004 GUELLI, Cid A.; IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. **Trigonometria.** São Paulo, Moderna. KENNEDY, Edward S., **Trigonometria- Topicos de História da Matemática,** Ed Atual, 1999.
Geometria Espacial (obrigatória)	60 h 2º período	Geometria euclidiana no espaço; noções básicas e axiomas;		ANTAR NETO, AREF. **Geometria**. São Paulo. Moderna.

		paralelismo e perpendicularismo; poliedros; Áreas e volumes de sólidos espaciais e corpos de revolução; inscrição e circunscrição de sólidos geométricos.		IEZZI, GELSON. **Fundamentos de matemática elementar**. V. 9 e 10. São Paulo. Atual, 2004.
Geometria Analítica (obrigatória)	60 h 3º período	Estudo analítico do ponto; reta; circunferência; problemas de tangência; estudo das cônicas (elipse, parábola, hipérbole); lugares geométricos.		IEZZI, GELSON. **Fundamentos de matemática elementar**. V.7. Geometria analítica. São Paulo. Atual, 2004. ANTAR NETO, AREF. **Geometria analítica**. V.6. São Paulo. Moderna.
Geometria Vetorial (eletiva)	60 h			
Geometria Analítica e Álgebra Vetorial (eletiva)	60 h			
Geometria Descritiva (eletiva)	60 h			
Tópicos de Geometria (eletiva)	30 h			

Fonte: PPC da instituição

Percebemos que nessas três instituições há um trabalho muito forte com Geometria Analítica, Geometria Euclidiana Plana e Geometria Espacial, embora em algumas instituições a última disciplina seja optativa/eletiva. Há a presença de algumas disciplinas de Geometria não-Euclidiana nas instituições D e E, porém elas são optativas. Além disso, as ementas não deixam claro como seria o trabalho com esses conteúdos geométricos, contudo inferimos que, como se trata de curso de graduação, o trabalho com provas e demonstrações será bem mais forte e presente, fazendo uso das terminologias adequadas na Matemática.

Destacamos também que, a partir das ementas pesquisadas, percebemos que há a presença de alguns conteúdos geométricos estudados nos Ensinos Fundamental e Médio, porém agora eles devem ser vistos com mais profundidade e rigor matemáticos, sendo necessário a utilização da escrita matemática e das demonstrações. Além disso, percebemos que em cada instituição há referências próprias, como também há algumas semelhanças tais como o livro de Reis e Silva para a Geometria Analítica, o de João Lucas M. Barbosa para a Geometria Euclidiana Plana, o de Paulo César P. Carvalho para a Introdução à Geometria Espacial e a Coleção Fundamentos de Matemática Elementar de Gelson Iezzi e colaboradores.

Concluímos então que na maioria das disciplinas de Geometria ministradas nas seis instituições há uma forte presença de conteúdos geométricos já estudados nos Ensinos

Fundamental e Médio associados a Geometria Euclidiana, apenas três instituições possuem uma disciplina associada à Geometria não-Euclidiana, contudo a sua oferta é de forma optativa. Além disso, podemos inferir que, possivelmente, há um forte trabalho com as demonstrações em Geometria, a partir das disposições dos conteúdos nas ementas. Além disso, pode-se supor que o trabalho desenvolvido nessas disciplinas seja apenas formalista, em que os professores apresentam os teoremas e propriedades aos licenciandos e esperam que eles aprendam por reprodução. Entretanto ressalta-se que para se ter certeza de que o que está na ementa é realmente o que está sendo adotado pelo professor, faz-se necessário uma conversa com alguns dos responsáveis por essas disciplinas, o que não nos vem ao caso.

Além disso, muitas vezes os professores não levam em conta que seus alunos aprenderam pouco (ou quase nada) de Geometria nos anos anteriores e que é preciso suprir essas lacunas (CRESCENTI, 2008). Como esses alunos têm dificuldades nos conceitos geométricos, nos cursos de graduação em Matemática eles apresentam dificuldades no desenvolvimento do pensamento abstrato e em sistematizar o pensamento dentro da própria Geometria Euclidiana. Ou seja, eles terminam a Licenciatura em Matemática apresentando ainda um baixo nível de desenvolvimento do pensamento geométrico e com dificuldades na construção e elaboração de uma demonstração, pois não foram estimulados a raciocinar, pensar e refletir acerca dos teoremas e propriedades matemáticas, pois a apresentação das demonstrações se dá de forma reprodutiva tal qual está nos livros.

Portanto, com a busca pelas disciplinas e ementas ministradas nas instituições públicas dos estados da Paraíba e Pernambuco, afirmamos que nosso trabalho foi desenvolvido a partir de conteúdos da Geometria Euclidiana Plana, pois é uma disciplina que é obrigatória em todas essas instituições, assim como possui conteúdos vistos nos Ensinos Fundamental e Médio e sendo aprofundado no Ensino Superior, o que nos permite trabalhar com os mais variados tipos de provas matemáticas. Além disso, enfatizamos que nossa pesquisa se deu na instituição pública B do Estado da Paraíba.

No próximo capítulo, com o intuito de modificarmos o cenário apresentado nesse capítulo, buscaremos discutir sobre uma proposta muito importante para se trabalhar o desenvolvimento do pensamento geométrico, tanto com alunos da Educação Básica, como com licenciandos, o modelo de van Hiele. Nele, abordaremos aspectos sobre os conceitos propostos por van Hiele, os níveis, as fases de aprendizagem e as críticas recebidas.

CAPÍTULO 2 – O MODELO DE VAN HIELE

Neste capítulo, discorremos brevemente acerca das bases epistemológicas de van Hiele, que o auxiliou a refletir e desenvolver sua tese sobre a aquisição da compreensão em Geometria. Além disso, abordaremos também alguns conceitos gerais do modelo de van Hiele, sobre a aquisição da compreensão, os meios que auxiliam a desenvolvê-la e os meios que podem dificultá-la, refletindo assim sobre o ensino e aprendizagem da Geometria.

Também explanaremos sobre o seu modelo, explicitando o motivo do seu desenvolvimento, os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico e as fases de instrução para auxiliar nessa progressão. Além disso, como toda proposta que já está há mais de 60 anos publicada, abordaremos algumas críticas recebidas ao longo desse tempo, que ajudam a refletir e a tentar melhorar as pesquisas na área e ao ensino e aprendizagem de conceitos geométricos.

2.1 BASES EPISTEMOLÓGICAS DE VAN HIELE

Para discutir um pouco sobre o modelo de van Hiele, buscamos uma versão em espanhol[2] de sua tese, defendida em 1957 e intitulada *De Problematiek van het inzicht. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof.* Os tradutores de sua tese para o espanhol afirmam que embora no contexto do modelo de van Hiele a palavra "inzicht", ou *insight* em inglês, não tenha uma tradução unanimemente aceita em espanhol, eles optaram por traduzi-la como "compreensão". Assim, o único significado de "compreensão" adotado é o que se desprende da própria tese de van Hiele.

Pierre van Hiele dividiu sua tese em dezessete capítulos, trabalhando de forma geral sobre o que seria compreensão, como ela se desenvolve, as contribuições das psicologias da aprendizagem e do desenvolvimento na pesquisa sobre compreensão, as contribuições de algumas psicologias na didática da Geometria, fundamentos experimentais do estudo da compreensão em Geometria e o lugar que a compreensão ocupa no pensamento racional. O pesquisador introduz sua tese afirmando que "inzicht" ou *insight* (em inglês) é um conceito que pode se manifestar de diferentes formas e o significado dos diferentes aspectos irá variar de

[2] Tradução feita por R. Corberán *et al*. da tese de doutorado de van Hiele para o espanhol realizada em 1990 para o projeto de investigação *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría em Enseñanza Media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele* (diretor Angel Gutiérrez) do Concurso Nacional de Projetos de Investigação Educativa do C.I.D.E (1989-91).

acordo com o contexto em que se está estudando a compreensão. Para ele, o significado de *compreensão* em Matemática é tão fundamental que sua didática pode ser estruturada em grande medida por meio de sua análise.

Van Hiele (1957) afirma que, ao analisar esse fenômeno tal como se conhece no Ensino Superior e Secundário da Holanda, um aluno tem compreensão em um determinado campo da Geometria quando, a partir de dados e relações geométricas que lhe são fornecidos, é capaz de chegar a uma conclusão em uma situação na qual nunca teria enfrentado antes.

Ao refletir sobre esse conceito e as psicologias do pensamento e da aprendizagem, van Hiele (1957) afirma que às vezes ouvimos dizer que a compreensão existe quando o sujeito extrai suas conclusões se baseando em uma estrutura de pensamento que se formou nela, porém essa afirmação, originada da psicologia Gestalt, é um tanto imprecisa para ele. Contudo, o pesquisador ainda reconhece nessa afirmação a sua característica funcional do conceito de compreensão, uma vez que a existência de tal estrutura de pensamento será necessariamente verificada pelo sucesso ou fracasso do sujeito ao chegar à conclusão que o condutor da prova ainda lhe está escondendo.

Para estudar o conceito da compreensão, van Hiele (1957) refletiu e discutiu sobre o lugar que ela ocupa nas principais psicologias da aprendizagem e do pensamento, trazendo algumas discussões teóricas da Psicologia da Gestalt, do processo mental racional de Selz e da contradição e da colaboração entre o pensamento intencional de Van Parreren. Aqui, traremos algumas dessas discussões apresentadas pelo próprio pesquisador em sua tese, assim como traremos algumas discussões sobre a Teoria do Desenvolvimento Cognitivo de Piaget, apresentando as diferenças entre essas duas ideias.

Inicialmente, van Hiele (1957) afirma que a psicologia do pensamento de Selz oferece uma abordagem que incentiva a aprendizagem com compreensão, embora, em última análise, ela não tenha uma base experimental. A psicologia de Selz aborda sobre esquemas de antecipação, mandato, objetivo e solução, contribuindo assim para entender o desenvolvimento dos processos mentais, sendo esses últimos compostos por uma cadeia exclusiva de esquemas de antecipação. Além disso, Selz considera, em sua psicologia, o sistema de complementações de complexos, que é o princípio básico do pensamento, sendo para ele o modo mais racional para solucionar problemas dentro da Geometria.

Van Hiele (1957) se ocupa, de modo especial, com a psicologia da Gestalt, já que ela oferece de modo particular uma aprendizagem com aquisição de compreensão. O autor afirma que a teoria da apercepção da Gestalt já é muito atrativa quando se leva em conta a estruturação na percepção e indica que as quatro leis da teoria da apercepção são: *lei da analogia*, da *proximidade*, da *oclusão* e da *continuação correta*. A primeira está relacionada às figuras e transformações análogas que geralmente são percebidas como uma unidade. A segunda, as partes que se encontram próximas se percebem mais facilmente como unidades. A terceira diz respeito às figuras fechadas, que se percebem mais facilmente que as figuras abertas e, por conta disso, a percepção tende a fechar as figuras que se encontram abertas. A última lei afirma que na percepção se tende a completar uma figura sem alterar sua estrutura.

Van Hiele (1957) afirma que a essência da psicologia da Gestalt está nas leis da apercepção serem tomadas como leis válidas para o pensar com compreensão. Não devemos esquecer que, nesse caso, a maioria das figuras e estruturas deve ser interpretada de forma figurativa. A hipótese não estipula que o pensar com compreensão está unicamente relacionado ao contemplar. Para o autor, os psicólogos da Gestalt estabeleceram uma série de leis para a compreensão e que algumas delas se ajustam perfeitamente à regra que ele indicou para o reconhecimento da compreensão. Van Hiele (1957) também afirma que há outra lei da psicologia da Gestalt que se ajusta bem nas suas regras de reconhecimento baseadas na prática, que diz que a compreensão, uma vez que tenha aparecido, pode ser aplicada em novas situações.

Além disso, o conceito da Gestalt mais importante para o estudo da aprendizagem é o *insight*, que diz respeito à súbita percepção de relações entre elementos de uma determinada situação problemática. Quando uma aprendizagem ocorre de maneira súbita, é acompanhada da sensação de que agora sim o assunto foi realmente compreendido, então dizemos que essa aprendizagem envolveu *insight*. O aprendiz que teve um *insight* começa a ver a situação de uma maneira nova, que inclui compreensão de relações lógicas ou a percepção das conexões entre meios e fins (MARQUES, 2015).

Van Hiele (1957) também afirma que devemos nos concentrar na autonomia do processo de aprendizagem como fez Van Parreren, afirmando que aprender não é a mesma coisa que adquirir compreensão e chamando de autônomo um processo quando não apresenta uma relação de dependência direta com uma intenção atual. Van Parreren (1951 apud VAN HIELE, 1957) afirma que se aceitamos que a autonomia existe, certamente nos encontramos com uma situação que responde a certas leis que encontramos na prática. Além disso, Van Parreren introduz o conceito de valência e este é um conceito funcional; mesmo quando o sujeito não está mais ciente de tal valência, a sua presença é deduzida do fato de que o sujeito vai diretamente para o cômodo correspondente. Ou seja, a aprendizagem autônoma manifesta-se assim na formação de valências.

Em sua tese, van Hiele (1957) faz poucas referências a Piaget e quando aparece é justamente para dizer que sua teoria é inadequada para aplicar em sala de aula. Contudo, conseguimos perceber que van Hiele foi inspirado pelas ideias da teoria epistemológica genética de Piaget e que, a partir das discussões de Piaget quanto à evolução da inteligência, van Hiele descreveu a existência de diferentes níveis de raciocínio quanto aos conceitos geométricos. Enquanto Piaget estabeleceu idades aproximadas para cada período de desenvolvimento cognitivo, van Hiele afirmou que os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico são mais influenciados pela educação e incentivo adotados do que pela maturação e idade dos sujeitos.

Mateya (2008), em sua dissertação, aborda a relação existente entre o modelo de van Hiele e a teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget, apresentando as similaridades e as diferenças entre eles. As similaridades estão relacionadas às ideias de que os alunos devem passar por níveis mais baixos de pensamento geométrico antes de alcançar os níveis mais altos e que essa passagem leva uma quantidade considerável de tempo. Outra similaridade diz respeito ao papel dos alunos em construir ativamente seu próprio conhecimento, bem como o desenvolvimento não-verbal de conhecimento organizado em sistemas complexos, enfatizando assim a importância de os alunos passarem por todos os níveis de pensamento.

Quanto às diferenças, Mateya (2008) afirma que o modelo de van Hiele é diferente do de Piaget quanto ao movimento entre níveis ou estágios, ou seja, a teoria de Piaget sugere que o movimento entre os estágios depende da atividade, enquanto que o de van Hiele sugere que esse movimento dependa da linguagem. Além disso, o modelo de van Hiele busca ajudar os professores a melhorar os métodos de instrução da Geometria, descrevendo os níveis de pensamento dos sujeitos, enquanto que a teoria de Piaget se concentra em descrições da progressão e maturidade do pensamento.

Battista e Clements (1995) afirmam que o modelo de van Hiele diria que o desenvolvimento do pensamento dos alunos sobre o raciocínio e a prova é uma evolução que depende da crescente compreensão do conhecimento geométrico. Já a teoria de Piaget sugere que as operações lógicas se desenvolvam em alunos independentemente do conteúdo ao qual são aplicadas. Essa diferença indica que o modelo de van Hiele afirmaria que um aluno só estará pronto para provar alguma coisa se a compreensão do conteúdo estiver em um nível apropriado, por exemplo, o da dedução formal, tendo-se aliado o material e a linguagem adequada para esse nível. Enquanto a de Piaget argumentaria que o conteúdo compreensivo não está relacionado com a prontidão da criança para o formalismo argumentativo.

Portanto, percebemos que van Hiele (1957) se utilizou de vários outros pesquisadores para conseguir elaborar uma proposta coerente, que desperte no aluno a vontade de aprender, tornando-se responsável por sua aprendizagem, e motive o professor a buscar atividades novas que possam estimular o raciocínio e pensamento de seus alunos. Para isso, van Hiele (1957) espera que os materiais e a linguagem adotados sejam utilizados de acordo com os níveis dos alunos, ou seja, que a linguagem e o material sejam adequados e os alunos consigam compreender aquilo que está sendo ensinado.

2.2 CONCEITOS E TERMINOLOGIAS INICIAIS DE VAN HIELE

Van Hiele (1957) afirma que para que o aluno consiga ser capaz de operar um assunto em um determinado campo é preciso que ele tenha alguma compreensão e então a tarefa do professor deve ser a de encontrar meios para desenvolver essa compreensão no aluno, permitindo que ele lide com o assunto em diferentes campos.

Ao discutir sobre o valor formativo de um conteúdo e a compreensão, van Hiele (1957) apresenta as ideias de Castiello (1934), afirmando que não há nada tão prejudicial para a educação como a forma mecânica de se ensinar e que a experiência tem mostrado que o nível da educação vai depender do método pedagógico que o professor adota. Os pesquisadores afirmam que o grau formativo do aluno vai depender se ele adquiriu ou não a compreensão dos métodos seguidos pelo professor. Para van Hiele (1957), se estamos trabalhando em uma escola e os alunos se contentam apenas em aprender fatos e métodos sem compreensão, de forma mecânica, então há algo nessa educação que está funcionando mal. É fundamental averiguar as causas dessa situação indesejada e assim buscar meios para alterar esse cenário, pois a aprendizagem deve ser adquirida com compreensão.

Van Hiele (1957) apresenta dois pontos chaves da compreensão: atuar de forma adequada e a novidade da situação. Quanto ao primeiro ponto chave, o pesquisador aponta que pode haver alguns problemas na hora de verificar a compreensão dos alunos, uma vez que pode ocorrer que a resposta dada não seja a adequada e nesse caso não se descobre a compreensão que deveria existir para um observador objetivo. Há também outro problema que pode ocorrer, tanto o professor como o aluno podem possuir uma solução adequada para a prova, porém o professor não considera a do aluno como correta, pois somente a sua é a correta. Então, van Hiele (1957) afirma que somente atuar de maneira adequada em uma situação nova não é suficiente para se adquirir compreensão.

Quanto ao segundo ponto chave, van Hiele (1957) também afirma que poderá ocorrer problemas na hora de verificar a existência da compreensão e que só poderemos saber se haverá ou não compreensão, se estivermos seguros de que a situação que colocaremos para o aluno será suficientemente nova para ele. Contudo, na prática da educação é diferente, pois em muitos casos geralmente se supõe que o aluno tenta esconder ao máximo sua ignorância ou falta de entendimento e aprende a memorizar as respostas para certas questões que lhe podem ser feitas, fazendo com que ele tenha dificuldade em enfrentar uma nova situação, pois memorizou coisas que possivelmente não apareceram. Assim, para van Hiele (1957), a tarefa do professor é fazer perguntas que o aluno não estava esperando e que sejam características do entendimento que se pretende obter dele. Essas questões são conhecidas por perguntas-compreensão.

Ao fazer essas perguntas-compreensão, de acordo com van Hiele (1957), nem sempre a resposta correta é em si uma garantia de que o aluno adquiriu compreensão. Alguns pesquisadores opinam que somente se pode falar em compreensão se o aluno já tinha como objetivo chegar a essa solução e não que a encontrou por acaso, reconhecendo-a como tal quando a encontrou. Para o pesquisador, se quisermos determinar se efetivamente o aluno adquiriu tal compreensão, então deveremos apresentar outro problema com uma apresentação diferente da anterior, porém seguindo a mesma estrutura. A maneira como o aluno se porta frente ao novo problema será decisiva para determinar se há ou não compreensão, ou seja, a compreensão será reconhecida quando o sujeito atua de forma adequada e intencionalmente diante de uma nova situação.

Van Hiele (1957) observa que as dificuldades dos alunos encontradas a partir das leituras de suas avaliações são de diferentes tipos e que esses alunos são incapazes de ativar a compreensão correta em um período de tempo determinado e de averiguar que tipos de compreensão devem utilizar em um determinado caso. Para ele estudar para uma avaliação necessita-se apenas que ele comprove que tipos de compreensão tem da matéria e tente evitar novas situações nas quais será obrigado a manifestar compreensão. Nesses casos, ou o aluno encontrou as soluções por si mesmo e reproduz esses resultados em uma avaliação a partir de uma compreensão anterior, ou o aluno reproduz o trabalho dos outros.

O professor sabendo dessas duas hipóteses, convence-se de que não pode esperar de seus alunos a compreensão para resolver problemas novos em um curto período, mesmo que esses problemas sejam baseados em uma compreensão já adquirida durante sua aprendizagem. Dessa forma, os problemas acabam sendo reduzidos, quase sempre, à aplicação de regras conhecidas em casos reconhecíveis, carecendo-se assim do aspecto de novidade (VAN HIELE, 1957).

Percebemos que van Hiele espera que para que os alunos adquiram efetivamente a compreensão em Geometria, necessita-se que o professor trabalhe com problemas novos ou situações novas, atuem de forma adequada, elaborem perguntas-compreensão e, acima de tudo, que os problemas trabalhados não sejam mecânicos e de simples aplicação de fatos e regras já construídos no aluno. Ou seja, é preciso instigar o raciocínio do aluno, de forma que ele seja levado a questionar, interpretar, raciocinar, conjecturar, argumentar, verificar e provar o que está sendo pedido.

Van Hiele (1957) afirma que o processo de formação da compreensão em Geometria se dá em quatro momentos. No primeiro momento, se produz uma estruturação do campo perceptivo. No segundo momento, a estruturação do campo perceptivo está ligada a diferentes palavras. No terceiro, o processo mental acerca das palavras vai se desenvolvendo cada vez mais no terreno verbal, ou seja, a estruturação perceptiva vai se transformando, paulatinamente, em estruturação linguística. Por fim, no quarto momento se cria certa autonomia na estruturação linguística, em que certas agrupações de premissas levam, automaticamente, a determinadas conclusões, ou vice-versa.

Aqui podemos perceber claramente uma influência da teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget, quando ele descreve os estágios de desenvolvimento, apresentando o que acontece com as ações desenvolvidas pela criança, que se inicia pelas percepções sensoriais, passando para a formação de esquemas com função simbólica e linguagem oral, gerando o pensamento lógico e objetivo e construindo, por fim, a capacidade de raciocinar com hipóteses verbais e não apenas com objetos concretos.

A partir desses quatro momentos propostos por van Hiele (1957), se o aluno realizar os três primeiros momentos, diz-se que ele adquiriu compreensão. Quando ele realiza o quarto, então tem-se chegado ao momento de alcançar uma estruturação maior, a uma compreensão maior. Mesmo em Matemática, essa estruturação final normalmente só será lógica quando o professor direcionar intencionalmente o aluno nessa direção. Por isso, ao formar-se a compreensão geométrica nos encontramos com três estruturações: a estrutura perceptiva, a linguística e a lógica. Sendo, portanto, necessário levar em consideração a linguagem como parte integrante do material.

Van Hiele (1957) apresenta algumas condições práticas que hão de ajudar na formação da compreensão. O primeiro fator é o interesse do aluno por um determinado tema, pois a falta de interesse seria um obstáculo para alcançar a compreensão. O pesquisador alerta que se deve ter o cuidado com esse primeiro fator, pois um método didático não é unicamente bom porque os alunos se divertem, já que pode ocorrer que um método não consiga gerar a compreensão, mesmo que esses alunos se sintam confortáveis com ele. Entretanto não basta somente o interesse, para van Hiele (1957) faz-se necessário também a recapacitação, uma vez que quem quer alcançar compreensão em um assunto deve se aprofundar nele.

Além desses dois fatores, van Hiele (1957) argumenta que se deve analisar outras questões como por exemplo a utilização do material didático, pois muitas vezes os alunos terão que praticar com ele, que são meios auxiliares podendo ser abstratos e concretos, e deve-se lembrar que cada material envolve sua própria estruturação. Assim, o processo de aprendizagem é influenciado de forma característica, pois o material deve atender a requisitos elevados, porém não pode ser tão complicado que desvie a atenção do problema real, nem pode ser tão esquemático que mostre uma articulação insuficiente do problema.

Outro ponto importante mencionado por van Hiele (1957) diz respeito a ocorrência da compreensão por meio do contato pessoal com os outros alunos, pois um aluno que já tenha alcançado a compreensão em determinado conteúdo poderá ajudar os outros a adquiri-la. Van Hiele (1957) alerta que a compreensão não é diretamente transferível de uma pessoa para outra, uma vez que só podemos falar de compreensão quando um aluno consegue encontrar uma solução em uma nova situação, ou seja, uma solução que não foi fornecida por outros, mas que ele próprio encontrou. Sabendo disso, devemos então estimular os alunos a quererem alcança-la, sendo uma predisposição real e não consequência de uma resistência vencida. Quando estivermos seguros da cooperação do aluno nesse processo de aprendizagem, então poderemos ajuda-lo a desenvolvê-la por meio das ideias apresentadas acima.

Um outro meio para que os alunos alcancem a compreensão é por meio de mecanismos de controle que indiquem que nível de progresso os alunos já alcançaram. Podendo, primeiramente, fazer perguntas a fim de verificar se o aluno é capaz de chegar a solução de um problema sem a ajuda do professor ou dos colegas, considerando que essas perguntas só serão efetivas se tiverem certa profundidade. Outro meio de controle é apresentar a leitura da matéria de maneira distinta de como o aluno aprendeu e então verificar se ele é capaz de entender essa nova leitura. Caso ele não entenda o texto, é possível continuar estimulando para que ele prossiga pensando e racionando sobre o mesmo (VAN HIELE, 1957)

Em sua tese, van Hiele (1957) novamente alerta que não se produz aprendizagem sem a vontade do aluno em aprender, ou seja, se esse aluno tem uma atitude passiva demais, ele irá exercer um controle insuficiente sobre os seus processos intelectuais, levando à formação fraca de um sistema de valências, pois como não houve estruturação para elas, logo desaparecerão. Além disso, o pesquisador argumenta que se queremos entender a Matemática, devemos saber que seu ensino deverá se ocupar da análise dos objetos e da busca de estruturas derivadas dessa análise. Além disso, é interessante observar as possibilidades de aplicação da Matemática, porque somente depois de uma análise prévia e de uma abstração a partir dos objetos é que é possível retornar desde o campo estruturado até os objetos.

Se o professor não motiva seus alunos na análise de objetos, se sempre ele próprio a faz ou se deixa de fazer, esse professor estará formando alunos que somente têm a sua disposição estruturas globais, ou seja, estruturas que somente se podem ampliar, mas que os alunos por si mesmos não sabem relacionar umas com as outras, pois foi o professor quem fez tudo pelo aluno ou quem não fez nada (VAN HIELE, 1957). Isto quer dizer que é preciso deixar que os alunos raciocinem matematicamente, de modo que criem valências fortes, que não desaparecerão, conseguindo analisar os objetos por meio de sua aparência e propriedades, assim como conseguindo relacioná-los a partir de suas propriedades.

Portanto, a partir desses conceitos gerais apresentados acima, van Hiele (1957) percebeu que os problemas e tarefas apresentadas às crianças na Holanda possuíam vocabulário, conceitos ou conhecimentos de propriedades além do nível de pensamento deles e por isso seu trabalho é tão importante, pois apresenta uma alarmante falta de harmonia entre o ensino e a aprendizagem da Geometria.

2.3 SOBRE O MODELO

O modelo de van Hiele diz respeito a uma proposta de ensino e aprendizagem de Geometria elaborado por Dina van Hiele-Geldof e Pierre Marie van Hiele. Teve sua origem em 1957 a partir das teses de doutorado do casal na Universidade de Utrecht, Holanda. Infelizmente, Dina veio a falecer logo após concluir sua tese e foi Pierre quem mais tarde desenvolveu e disseminou o modelo em publicações posteriores (DE VILLIERS, 2010). Nasser (1991) afirma que, em 1957, Pierre van Hiele apresentou seu artigo intitulado *O pensamento da criança e a geometria* em um congresso de Educação Matemática, descrevendo esse modelo para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria, baseado em cinco níveis e em cinco fases de instrução. Ou seja, o modelo proposto por van Hiele consegue dar conta tanto dos processos de ensino, orientando a prática pedagógica do professor por meio das fases de instrução, como de aprendizagem da Geometria, buscando descrever os níveis de pensamento geométrico.

Foi a partir de sua divulgação, que o modelo de van Hiele começou a despertar o interesse de educadores da União Soviética, que reformularam seu currículo de Geometria na década de 60 baseado em sua proposta e mais tarde houve interesse também dos americanos e europeus, que têm desenvolvido vários projetos dentro dessa perspectiva (NASSER, 1991; KALEFF *et al*., 1994).

Como o modelo surgiu a partir das teses de doutorado de Pierre van Hiele e Dina, De Villiers (2010) argumenta que enquanto a tese de Pierre era explicativa e descritiva, pois tentava explicar por que os alunos tinham problemas ao aprender Geometria, a tese de Dina referia-se a um experimento educacional, ou seja, sua tese era mais prescritiva com relação à ordenação do conteúdo de Geometria e atividades de aprendizado dos alunos. Kaleff *et al*. (1994) afirmam que Pierre van Hiele, em sua pesquisa, conseguiu identificar que os problemas e tarefas apresentadas às crianças frequentemente requerem um vocabulário, conceitos ou conhecimentos de propriedades além do seu nível do pensamento. Para esses autores, os trabalhos do casal van Hiele revelam uma alarmante falta de harmonia entre o ensino e aprendizagem em Geometria.

Ao estudarmos as ideias apresentadas pelo casal van Hiele, percebemos que seus estudos foram baseados em três elementos: uma forte base estruturalista, na qual as estruturas estão presentes em toda sua visão de mundo e na sua visão de organização da cognição; a influência da psicologia da Gestalt, que fornece uma base para a análise da percepção e interpretação cognitiva dessas estruturas; e a preocupação com a didática da Matemática, especialmente no desenvolvimento do *insight* em sala de aula (LUJAN, 1997).

De acordo com Hamazaki (2004), van Hiele buscou traçar um modelo baseado na valorização da aprendizagem da Geometria em uma evolução gradual, global e construtiva. Quanto à evolução gradual, ele pondera que a linguagem geométrica, raciocínio e intuição são adquiridos de forma gradativa. Quanto à evolução global, as propriedades e figuras se inter-relacionam presumindo vários níveis que conduzem a significados distintos; e a construtiva, subentende-se que o próprio aluno tem que construir os seus conceitos.

Van Hiele (1957) afirma que é importante o conceito de nível que se observa na prática do ensino de Geometria. Ele tem o caráter de uma compreensão, porém as dificuldades que aparecem em uma compreensão normal são nele muito mais pronunciadas. É como se o aluno, depois de alcançar um nível, se põe a pensar de maneira totalmente diferente. Assim, uma das principais características do modelo de van Hiele é a distinção entre os cinco níveis de pensamento com relação ao desenvolvimento da compreensão dos alunos em Geometria. Em resumo, esses níveis são atingidos em sequência e, por meio de uma instrução adequada, o aluno vivencia cinco fases ao progredir de um nível para outro superior.

No primeiro nível, denominado de *visualização* ou *reconhecimento*, os alunos reconhecem as figuras por sua aparência global, mas não conseguem identificar explicitamente suas propriedades. Ou seja, nesse nível os alunos podem aprender o vocabulário geométrico, identificam figuras geométricas, reproduzem uma figura dada, associam o nome à figura, reconhecem nos elementos do meio ambiente figuras geométricas, porém eles não conseguem reconhecer as figuras por suas propriedades e não enxergam as características de uma figura em outra da mesma classe. Por exemplo, o aluno identifica a figura de um quadrado e, ao ser perguntado por que, a resposta é do tipo: “porque parece com um quadrado”, não identificando a figura por suas propriedades (VAN HIELE, 1957; DE VILLIERS, 2010; NASSER, 1991; KALEFF *et al*., 1994; DALL’ALBA, 2015).

Díaz, Gutiérrez e Jaime (2016) afirmam que no nível 1 os alunos percebem as figuras geométricas em sua totalidade, focalizando suas descrições na aparência das figuras. Além disso, eles percebem as figuras como objetos individuais e não são capazes de generalizar características de uma figura para outra. Jaime e Gutiérrez (1994) discutem os quatro primeiros níveis de pensamento geométrico do modelo de van Hiele destacando quatro principais processos-chave: *identificação* da família a que um objeto geométrico pertence; *definição* de um conceito; *classificação* de objetos geométricos em diferentes famílias; e *prova* de propriedades ou declarações.

Para Jaime e Gutiérrez (1994), no nível 1 os alunos são capazes de reconhecer as figuras com base em características físicas globais, tais como aspecto, tamanho dos elementos, posição, etc. Eles não são capazes de ler uma definição matemática, uma vez que consideram somente atributos que se referem a objetos físicos de maneira global. Ao declararem uma definição, os alunos referem-se a esses mesmos tipos de atributos. Além disso, eles usam o mesmo tipo de propriedades das figuras que nos processos anteriores e não aceitam qualquer relação entre duas famílias diferentes nem, muitas vezes, entre dois elementos da mesma família com aspecto físico bastante diferente. Nesse nível, os alunos não compreendem o significado de uma prova e de uma demonstração.

No segundo nível, chamado *análise*, o aluno conhece e analisa as propriedades das figuras geométricas, mas não relaciona explicitamente as diversas figuras ou propriedades entre si. Isto quer dizer que ele começa a discernir características das figuras geométricas, estabelecendo propriedades que são utilizadas para conceituarem classes e formas, porém ele ainda não explicita inter-relações entre figuras e propriedades. Por exemplo, o aluno sabe que o quadrado tem quatro lados iguais e quatro ângulos retos, mas não consegue relacionar as propriedades do retângulo, do paralelogramo, do trapézio e do losango dentro do grupo dos quadriláteros (VAN HIELE, 1957; DE VILLIERS, 2010; NASSER, 1991; KALEFF *et al*., 1994; DALL’ALBA, 2015).

Díaz, Gutiérrez e Jaime (2016) também afirmam que no nível 2 os alunos reconhecem que as figuras geométricas são dotadas de propriedades matemáticas e podem deduzir e provar novas propriedades empiricamente. Além disso, Jaime e Gutiérrez (1994) argumentam que nesse nível os alunos reconhecem as figuras geométricas com base em suas propriedades matemáticas, mas ao ler ou declarar definições, podem ter problemas com algumas partículas lógicas, como "pelo menos". Ao indicar uma definição, às vezes os alunos omitem uma propriedade necessária, que estão usando implicitamente e outras vezes fornecem uma lista com mais propriedades do que as necessárias, mesmo quando a dependência entre elas é fácil de realizar.

Jaime e Gutiérrez (1994) também afirmam que nesse nível a classificação de determinado objeto é exclusiva, ou seja, os alunos não relacionam as famílias com base nos atributos fornecidos nas definições. Por isso, quando recebem uma nova definição de determinado conceito, diferente da que já conheciam, os alunos não admitem a nova definição. Uma prova típica nesse nível consiste em verificar a verdade da propriedade a ser provada em um ou alguns exemplos.

No terceiro nível, denominado *dedução informal* ou *ordenação*, os alunos relacionam as figuras entre si de acordo com suas propriedades, mas não dominam o processo dedutivo. Eles conseguem formar definições abstratas, estabelecendo inter-relações das propriedades nas figuras e entre figuras. Podem também distinguir entre a necessidade e as suficiências de um conjunto de propriedades no estabelecimento de um conceito geométrico, assim como conseguem acompanhar e formular argumentos e provas informais, porém não compreendem o significado de uma dedução como um todo, nem tem condições de elaborar argumentos e provas formais. Por exemplo, o aluno sabe que todo quadrado é um retângulo e que todo retângulo é um paralelogramo, mas não consegue desenvolver esse pensamento em um processo dedutivo, formulando apenas argumentos informais (VAN HIELE, 1957; DE VILLIERS, 2010; NASSER, 1991; KALEFF *et al*., 1994; DALL'ALBA, 2015).

Díaz, Gutiérrez e Jaime (2016) afirmam que no nível 3 os alunos começam a desenvolver a capacidade de raciocínio dedutivo abstrato, sendo capazes de realizar provas informais. Podem também classificar famílias de figuras independentemente da complexidade de suas propriedades e entender os requisitos de uma definição correta. Jaime e Gutiérrez (1994) também ressaltam que nesse nível os alunos já são capazes de interpretar e declarar definições matemáticas, estando conscientes de que um conjunto necessário e suficiente de propriedades é necessário e que adicionar mais propriedades à definição não resulta em uma melhor.

Além disso, Jaime e Gutiérrez (1994) destacam que os alunos podem fazer classificações inclusivas, com base nas propriedades declaradas nas definições dadas dos conceitos e já são capazes de mudar de ideia quando novas definições de conceitos são dadas, mesmo quando há uma mudança de exclusiva para inclusiva, ou vice-versa. No nível 3, os alunos podem verificar a propriedade a ser provada por meio de exemplos, mas também procuram por alguma explicação informal baseada em propriedades, ou os exemplos são bem selecionados.

No quarto nível, chamado *dedução formal*, o aluno compreende o processo dedutivo, a recíproca de um teorema, mas não tem necessidade de usar rigor matemático. Além disso, nesse nível ele pode construir provas e não somente memoriza-las, como também percebe a possibilidade de desenvolver uma prova de mais de uma maneira. Por exemplo, ele entende por que o postulado das paralelas implica que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º, mas não sente a necessidade de utilizar o rigor matemático (VAN HIELE, 1957; DE VILLIERS, 2010; NASSER, 1991; KALEFF *et al*., 1994; DALL'ALBA, 2015).

Díaz, Gutiérrez e Jaime (2016) argumentam que no nível 4 os alunos já podem entender e realizar provas dedutivas formais e entendem a sua necessidade como um meio de verificar a verdade de uma afirmação. Os alunos também podem entender a estrutura axiomática da Matemática e aceitam a existência de provas alternativas do mesmo teorema e definições equivalentes do mesmo conceito. Jaime e Gutiérrez (1994) também argumentam que nesse nível os alunos já possuem um melhor entendimento das definições e na capacidade de provar a equivalência de diferentes definições de um mesmo conceito.

Além disso, os pesquisadores ressaltam que os alunos são capazes de fazer provas matemáticas formais e que as figuras específicas são utilizadas apenas algumas vezes para ajudar a escolher as propriedades adequadas para a prova, uma vez que eles já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário fazer uma sequência de implicações com base em propriedades já provadas. Nesse nível, os alunos já têm a capacidade de escrever provas formais e já sabem diferenciar entre as várias declarações relacionadas (direta, inversa, etc.), como também em escrever os diferentes tipos usuais de provas (direta, contraposição, por absurdo, etc.)[3].

Por fim, no quinto e último nível, denominado *rigor*, o aluno compreende a importância do rigor nas demonstrações e é capaz de analisar outras geometrias. Além disso, nesse último nível o aluno desenvolve um olhar abstrato do campo geométrico e é treinado para analisar o grau de rigor de vários sistemas dedutivos e compará-los entre si (VAN HIELE, 1957;

[3] **Direta:** considerando uma sentença $p \rightarrow q$, deve-se assumir que o antecedente p é verdade e deduzir a conclusão (ou consequente) q;
Contraposição: considerando uma sentença $p \rightarrow q$, deve-se mostrar que a sua contrapositiva $\neg q \rightarrow \neg p$ é verdadeira;
Por absurdo: para provar p, assume-se $\neg p$ e mostra que isso leva a uma contraposição. Como $\neg p \rightarrow \boldsymbol{F}$ é verdadeira, conclui-se que $\neg p$ é falsa e portanto que p é verdadeira.

DE VILLIERS, 2010; NASSER, 1991; KALEFF *et al*., 1994; DALL'ALBA, 2015; VARGAS e ARAYA, 2013).

Vargas e Araya (2013) afirmam que o aluno pode apreciar a consistência, independência e integridade dos axiomas dos fundamentos da Geometria e captura a Geometria de forma abstrata. De acordo com os pesquisadores, devido ao seu alto grau de abstração, o nível 5 deve ser considerado em uma categoria separada, como sugerido por estudos sobre o assunto, tais como Alsina, Fortuny e Pérez (1997) e Gutiérrez e Jaime (1991), que argumentam que o nível 5 só se desenvolve em alunos de Universidade com boa capacidade e preparo em Geometria.

Usiskin (1982) também afirma que nesse nível o aluno entende a necessidade de rigor, é capaz de fazer deduções abstratas e a Geometria não-Euclidiana pode ser entendida por alunos desse nível. Além disso, Jaime (1993) discute que há a possibilidade de trabalhar em sistemas axiomáticos diferentes do habitual, de comparar diferentes sistemas axiomáticos e decidir sobre sua equivalência e em compreender a importância da precisão ao lidar com os fundamentos e relações entre estruturas matemáticas.

Ainda sobre os cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, Ontário (2006) em seu *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année - Géométrie et sens de l'espace* (*Guia de ensino eficaz para a Matemática nas séries 4ª a 6ª – Geometria e senso de espaço),* descreve o modelo de van Hiele, apresentando uma breve descrição desses cinco níveis (Quadro 7), como também exemplificando os comportamentos observáveis para cada um deles:

Quadro 7 – Níveis do pensamento geométrico de van Hiele

Descrição	Comportamentos observáveis
Nível 0 – Visualização Percepção e classificação de figuras geométricas de acordo com sua aparência.	**O aluno:** - utiliza vocabulário geométrico; - reconhece, nomeia, compara e reproduz figuras geométricas de acordo com sua aparência global; - tem dificuldade em obter uma representação mental de uma figura geométrica (as figuras são observadas, mas não são conceituadas). Cada uma é percebida globalmente, como uma entidade; - as classes ou grupos de figuras geométricas são iguais. **Exemplo de afirmação:** "É um quadrado, podemos ver bem... seus lados são todos iguais e isso é certo".
Nível 1 - Análise Início da análise de figura geométrica para descobrir as propriedades.	**O aluno:** - reconhece certas propriedades comuns e distintas das figuras geométricas; - nomeia propriedades de figuras geométricas, mas não vê as subclasses dentro de uma família de polígonos; - generaliza as propriedades de uma figura geométrica para todas as figuras geométricas da mesma família;

	- classifica as figuras geométricas de acordo com suas propriedades. **Exemplo de afirmação:** “Esta figura é um quadrado porque tem quatro vértices, quatro ângulos retos, quadro lados iguais e dois pares de lados paralelos”.
Nível 2 – Dedução informal Estabelecimento de ligações entre as figuras geométricas e entre as propriedades de uma dada figura geométrica.	**O aluno:** - deduz algumas das propriedades de uma figura geométrica; - reconhece e estabelece subclasses de figuras geométricas; - elabora e verifica certas hipóteses; - compreende e utiliza as relações de inclusão e exclusão; - desenvolve listas de propriedades que são necessárias e suficientes para descrever uma figura geométrica qualquer; - formula argumentos matemáticos claros e suficientes usando o vocabulário de causalidade (por exemplo, por que, porque, assim) e consequência lógica (por exemplo, se... então..., desde que..., então...). **Exemplo de afirmação:** “É um quadrado, mas também é um trapézio, porque a propriedade que descreve o trapézio é que pelo menos dois dos lados opostos são paralelos. Então eu acho que o quadrado é uma espécie de trapézio”.
Nível 3 - Dedução Estudo das definições, das provas, dos teoremas, axiomas e postulados.	**O aluno:** - apresenta uma prova, não se limitando a memorização; - prova uma declaração de diferentes maneiras; - inclui subclasses de figuras geométricas e suas relações. **Exemplo de afirmação:** “Um paralelogramo que tem dois lados adjacentes congruentes deve ser um losango”.
Nível 4 - Rigor Estudo da Geometria de maneira abstrata.	**O aluno:** - utiliza sistemas dedutivos abstratos; - trabalha com Geometria não-Euclidiana; - faz ligações entre os conceitos e desenvolve, às vezes, novos postulados.

Fonte: ONTÁRIO (2006, p. 13-14) [tradução nossa]

Dall’Alba (2015) ressalta que no texto original de van Hiele, os níveis de pensamento geométrico foram numerados de 0 a 4, porém, em 1986, quando ele publica o livro *Structure and Insight* (Estrutura e *Insight*), há uma modificação do texto original, passando a enumerar os níveis de 1 a 5, pois ele foi criticado por pesquisadores americanos a respeito da importância do nível zero, principalmente porque naquela época a maioria dos alunos que ingressava no Ensino Médio se enquadrava nesse nível. Assim, para nossa pesquisa, adotamos a nova numeração proposta por van Hiele em seu livro, como também fazem os pesquisadores como De Villiers (2010), Nasser e Sant’Anna (2010), Dall’Alba (2015), Kaleff *et al.* (1994), entre outros.

Ainda no tocante aos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, Nasser (1992) e Andrade e Nacarato (2004) afirmam que um aluno pode apresentar características de dois níveis diferentes em tópicos distintos da Geometria, sendo possível transitar entre um nível e outro imediatamente anterior ou posterior a resolução de uma mesma atividade. Além disso, Nasser e Sant'Anna (2010) argumentam que o aluno também pode raciocinar em um nível sem ter atingido completamente o nível anterior.

Dall'Alba (2015) também argumenta que para a pesquisa de van Hiele o último nível (nível 5) não foi tão importante, porém como esse modelo também pode ser aplicado a outras áreas do conhecimento, como por exemplo Química e Economia, ou a outras áreas da própria Matemática, esse nível *rigor* passa a ter maior aplicabilidade. Dall'Alba (2015) também observa que, a partir das leituras de artigos, as pesquisas em Educação Matemática que utilizam o modelo de van Hiele para investigar os níveis de pensamento geométrico dos alunos não ultrapassam o terceiro nível. Já Jaime e Gutiérrez (1994) utilizam os quatro primeiros níveis com a justificativa de que sua pesquisa é direcionada a alunos do Ensino Fundamental e Médio.

Concordamos com a posição apresentada por Vargas e Araya (2013) acerca do desenvolvimento do nível 5 de van Hiele ocorrer apenas em alunos de Universidade que possuem boa capacidade e preparo em Geometria, contudo ressaltamos, a partir de discussões de Nasser e Tinoco (2003), Jahnke (2008), Oliveira (2012), Senk (1989), Usiskin (1982), entre outros, que atingir o nível 5 de van Hiele é muito raro entre os alunos, inclusive os universitários, como também há pouca chance de encontrarmos alunos que tenham atingido esse nível, o que indica que há pouca evidência que venha a sustentar a sua existência e essa afirmação. Além disso, Neves, Baccarin e Silva (2013) encontraram resultados decepcionantes em sua pesquisa com concluintes de um curso de Licenciatura em Matemática, os quais sugerem que os alunos têm dificuldades relacionadas à argumentação e à distinção entre definições e teorema; a reconhecer as hipóteses e conclusão de uma propriedade; a organizar a prova e redação da demonstração; etc.

Por acreditarmos que há poucas chances de encontrarmos alunos raciocinando no nível 5 de van Hiele, justificando-se a partir dos resultados encontrados por Nasser e Tinoco (2003), Jahnke (2008), Oliveira (2012), Usiskin (1982), entre outros, como também o próprio van Hiele já desmentiu a crença nesse último nível, argumentando que acha que esse nível possui apenas um valor teórico, em nossa pesquisa estamos interessados nos quatro primeiros níveis, que são os mais possíveis de serem encontrados.

Ainda com relação aos níveis, Dall'Alba (2015) apresenta uma síntese das habilidades que podem ser esperadas dos alunos nos diferentes níveis de seu desenvolvimento geométrico (Quadro 8), proposta por Hoffer (1981). Nessa síntese, o pesquisador indica em cada nível, as distintas habilidades desejáveis: visual, verbal, desenho ou gráfica, lógica e aplicação:

Quadro 8 – Níveis do pensamento geométrico de van Hiele e Habilidades

Habilidades	**Níveis**				
	Nível 1	***Nível 2***	***Nível 3***	***Nível 4***	***Nível 5***
Visual	Reconhecer figuras geométricas em um desenho; reconhecer informações encontradas em uma figura.	Perceber uma figura como parte de outra maior; identificar propriedades de uma figura.	Reconhecer inter-relações e propriedades comuns entre figuras distintas.	A partir de informações de uma figura deduzir outras informações.	Identificar, utilizando figuras, suposições injustificadas; perceber figuras pertinentes a diversos sistemas dedutivos.
Verbal	Dada uma figura, associar a esta o nome correto; compreender expressões que descrevem figuras.	Detalhar formalmente as diversas propriedades de uma figura.	Definir, correta e precisamente, as palavras; elaborar expressões apresentando inter-relação entre as figuras.	Perceber as diferenciações entre definições, axiomas e teoremas; identificar o que é apresentado e o que é solicitado para fazer numa atividade.	Detalhar diversos sistemas dedutivos; elaborar expressões de resultados presumidos.
Desenho ou Gráfica	Criar esquemas de figuras e identificar corretamente as partes dadas.	Transpor para um desenho as comunicações expressas verbalmente; a partir de propriedades dadas esboçar o desenho de uma figura.	A partir de certas figuras dadas ser capaz de construir outras figuras pertinentes as primeiras.	Desenhar ou construir uma figura específica a partir de informações dadas; diferenciar quando é necessária a utilização de elementos auxiliares em uma determinada figura.	Conceber as limitações e oportunidades das diversas reproduções gráficas; descrever graficamente, em diferentes sistemas dedutivos, conceitos não formalizados.
Lógica	Entender as diferenças e semelhanças que existem entre as figuras; perceber a preservação da forma de uma figura independente de sua posição.	Perceber que existem diferentes tipos de classificações de figuras; verificar que é possível distinguir uma figura pelas suas propriedades.	Determinar se uma classe de figuras está contida em outra por meio de suas propriedades; entender o quão importante é uma boa definição.	Desenvolver demonstrações utilizando regras de lógica; a partir de informações dadas inferirem consequências.	Entender as limitações e oportunidades dos axiomas ou teses; distinguir quando um sistema de axiomas é independente, consistente e categórico.
Aplicação	Reconhecer, nos elementos do meio ambiente, figuras geométricas.	Nos elementos do meio ambiente perceber propriedades geométricas; em um modelo ou no papel reproduzir fenômenos físicos.	Compreender o conceito de um modelo matemático que retrata relações entre objetos.	A partir de informações concedidas ou adquiridas conseguir inferir propriedades de objetos; solucionar problemas que associam objetos.	Retratar sistemas abstratos utilizando modelos matemáticos; criar padrões matemáticos para representar fenômenos

					físicos, sociais e naturais.

Fonte: adaptado de Hoffer (1981 apud DALL'ALBA, 2015, p. 52).

A partir das leituras dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, conseguimos perceber que é essencial que os professores saibam combinar aprendizagem com o nível de pensamento do aluno, tomando consciência de adaptar as atividades para cada nível do pensamento geométrico, de modo a auxiliar no desenvolvimento de um nível para outro. Para que haja esse desenvolvimento do pensamento geométrico, é necessário que as atividades no ensino da Geometria não sejam reduzidas a memorizações e aplicações de fórmulas e regras, pois não pode haver diminuição da linguagem e dos exercícios de determinado conteúdo nos níveis de pensamento.

Van Hiele (1957) afirma que a análise cada vez mais minuciosa das dificuldades que tem os alunos no ensino da Geometria nos indicará com uma precisão cada vez maior que estrutura que falta. A melhor maneira de garantir a presença de estruturas fundamentais é elegendo o material que as faça funcionar, como também buscando desenvolver nos alunos as habilidades visual, verbal, desenho ou gráfica, lógica e aplicação.

Segundo Lujan (1997), o modelo de van Hiele apresenta algumas recomendações para o ensino de Geometria nas escolas: as atividades geométricas não devem reduzir o nível do conteúdo geométrico, o material adotado deve preparar para uma aprendizagem posterior e a linguagem é importante no desenvolvimento e na avaliação da compreensão geométrica. Dessa forma, as principais características de seu modelo fazem-se significativas para orientar a prática docente, a saber:

> - *Hierarquia:* os níveis obedecem a uma sequência, isto é, para atingir certo nível o indivíduo deve passar antes pelos níveis inferiores;
> - *Linguística:* cada nível tem sua própria linguagem, conjunto de símbolos e sistema de relações;
> - *Intrínseco e extrínseco:* o que está implícito num nível torna-se explícito no próximo nível;
> - *Avanço:* o progresso entre os níveis depende mais de instrução do que da idade ou maturidade dos alunos;
> - *Desnível ou combinação inadequada:* não há entendimento entre duas pessoas que estão raciocinando em níveis diferentes ou se a instrução é dada num nível mais avançado que o atingido pelo aluno (NASSER, 1991, p. 33).

Por isso que é tão importante que o professor, primeiro, identifique o nível de seus alunos para, em seguida, utilizar a linguagem e a instrução adequadas. Conseguindo associar essa linguagem e instrução, o aluno será capaz de progredir de nível se passar pelas experiências adequadas e para que ele progrida de um nível para outro superior, é necessário que ele vivencie cinco fases de aprendizagem, que devem ser vivenciadas em cada nível subsequente. São elas:

> - *Fase 1 – questionamento ou informação*: professor e alunos estabelecem um diálogo versando sobre o material de estudo deste nível. Neste diálogo são feitas observações, questões são levantadas e o vocabulário específico do nível é introduzido. Nesta fase, o professor percebe quais os conhecimentos anteriores que os alunos têm do assunto e estes percebem qual direção os estudos tomarão;
> - *Fase 2 – orientação direta*: os alunos devem explorar o assunto de estudo através de materiais cuidadosamente selecionados pelo professor que os levarão gradualmente a se familiarizarem com as estruturas características deste nível. As atividades, em sua maioria, são tarefas de uma só etapa, que possibilitam respostas específicas e objetivas;
> - *Fase 3 – explicitação*: com base nas experiências anteriores, os alunos refinam o uso de seu vocabulário, expressando verbalmente suas opiniões emergentes sobre as estruturas que observam. O papel do professor, nesta fase, deve ser mínimo, deixando o aluno independente na busca da formação do sistema de relações em estudo;
> - *Fase 4 – orientação livre*: nesta fase, as tarefas apresentadas ao aluno devem ser de múltiplas etapas, tarefas que possibilitam várias maneiras de ser completadas ou tarefas em aberto. É fundamental que o aluno ganhe experiência na busca de sua forma individual de resolver as tarefas, buscando sua própria orientação no caminho da descoberta de seus objetivos;
> - *Fase 5 – integração*: esta fase é de revisão e síntese do que foi estudado, visando uma integração global entre os objetos e relações com a consequente unificação e internalização num novo domínio de pensamento. O papel do professor nesta fase é o de auxiliar no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem, todavia, introduzir ideias novas ou discordantes (KALEFF *et al*., 1994, p. 28).

Ao término da quinta fase de instrução, os alunos passam para um novo nível de pensamento geométrico e então o antigo nível de raciocínio é substituído por um novo nível e assim os alunos estão aptos a refazerem as fases de instrução no próximo nível. Além disso, Nasser e Sant’Anna (2010) ressaltam que essas fases de instrução descritas acima podem ocorrer concomitantemente e em diferentes ordens, porém a última fase só deve se dar após as anteriores terem sido desenvolvidas, uma vez que as anteriores irão fornecer a estrutura necessária para que a aprendizagem ocorra.

À vista disso, a linguagem e os materiais adotados devem ser escolhidos de forma criteriosa, pois desempenham um importante papel no desenvolvimento do raciocínio geométrico. Lujan (1997) afirma que a organização do curso, o método, o conteúdo e o material a ser utilizado em sala de aula são preocupações pedagógicas que estão refletidas no trabalho de van Hiele e que por isso essas cinco fases de aprendizagem fornecem orientações quanto à sequência e a distribuição das atividades de Geometria dentro de um nível de pensamento.

Portanto, percebemos o quanto o modelo de van Hiele é importante tanto para o ensino como para a aprendizagem da Geometria, garantindo as características dos cinco níveis de pensamento geométrico dos alunos e as fases de aprendizagem para que o professor possa trabalhar de forma adequada com os seus alunos, utilizando o material e a linguagem adequados para cada nível. Ressaltamos que as discussões trazidas aqui pelos diferentes pesquisadores, abordando aspectos importantes do modelo de van Hiele nos auxiliaram na elaboração das atividades e na análise dos dados coletados.

2.4 CRÍTICAS AO MODELO DE VAN HIELE

O modelo de van Hiele é bastante importante para o ensino e aprendizagem da Geometria, tanto é que está sendo discutido e utilizado até hoje a fim de buscarmos o desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos da Educação Básica ou do Ensino Superior, como também a fim de verificar em qual nível alunos e professores se encontram. Como esse modelo vem sendo utilizado e discutido há bastante tempo, espera-se que ele receba críticas e opiniões, com o intuito de torna-lo mais consistente e coeso. Essas críticas são mencionadas por Oliveira (2012) em sua dissertação, ao discutir que o modelo de van Hiele vem atraindo, ao longo dos anos, vários comentários e críticas de pesquisadores em todo o mundo. A pesquisadora separa essas críticas em quatro tópicos.

O primeiro, sobre a *(des)continuidade dos níveis*, diz respeito a algumas evidências encontradas em pesquisas (USISKIN, 1982; FUYS *et al*., 1985) que atestam sobre o caráter hierárquico dos níveis de van Hiele, pois há dúvidas quanto à sua descontinuidade. Oliveira (2012) destaca que a pesquisa feita por Burger e Shaughnessy (1986), apontou que, embora van Hiele tenha apresentado os níveis como estruturas discretas, o seu estudo não detectou isso, pois alguns alunos chegaram a oscilar de um nível para outro na mesma atividade.

Jaime e Gutiérrez (1990) afirmam que há certa verdade no discurso de van Hiele ao argumentar que a passagem de um aluno de um nível de raciocínio para o próximo ocorre de forma abrupta, como um salto. Contudo, eles acreditam que, com essa interpretação, as coisas estão sendo simplificadas demais, pois em primeiro lugar não devemos confundir o entendimento da solução de um problema específico com ter adquirido habilidade em lidar com o novo tipo de raciocínio necessário para resolver esse problema. E em segundo, cada nível de van Hiele é caracterizado por várias habilidades importantes de raciocínio e não é de todo razoável pensar que uma pessoa adquira o domínio de diferentes habilidades automática e simultaneamente. Para eles, além de não ser razoável, a experiência indica que isso também não é real.

Esses pesquisadores ressaltam que em várias experiências realizadas nos últimos anos, tais como a de Fuys *et al*. (1985) e uma investigação desenvolvida por eles em um início letivo aplicando testes a várias crianças entre os anos 1988 e 1989, foi observado que, frequentemente, há alunos que, durante a resolução de um problema, utilizam simultaneamente tipos de raciocínio típicos de dois níveis consecutivos e, outras vezes, um aluno resolve vários problemas que foram apresentados raciocinando uniformemente ao longo de cada problema, mas usando em alguns problemas um nível de raciocínio superior ao utilizado em outros que deveriam ter sido resolvidos também pelo mesmo nível superior.

Nasser (1992) e Andrade e Nacarato (2004) também confirmaram essa oscilação entre os níveis nos resultados de suas pesquisas, ao afirmarem que um aluno pode apresentar características de dois níveis diferentes em tópicos distintos da Geometria, sendo possível transitar entre um nível e outro imediatamente anterior ou posterior a resolução de uma mesma atividade. Além disso, Nasser e Sant'Anna (2010) argumentam que um aluno também pode raciocinar em um nível sem ter atingido completamente o nível anterior.

O segundo tópico, os *critérios de enquadramento*, afirma que os níveis de van Hiele dependem do critério adotado para o enquadramento. Para discutir esse tópico, Oliveira (2012) traz as ideias de Usiskin (1982), afirmando que ao utilizar dois critérios diferentes de enquadramento, encontrou que um aluno pode ser enquadrado em níveis diferentes, executando as mesmas tarefas, dependendo do critério usado. Para o pesquisador, esse é um ponto que denota fragilidade no modelo de van Hiele, pois se o modelo é assumido, então um aluno deveria estar em apenas um nível.

O terceiro tópico, sobre a *(não) existência do nível 5*, aponta que há controvérsias na literatura quanto à existência ou não desse último nível, uma vez que na maioria dos estudos já realizados foi constatado que há pouca chance de encontrar alunos que tenham atingido esse nível 5, indicando que há pouca evidência para sustentar a sua existência. Oliveira (2012) apresenta as ideias corroboradas por Usiskin (1982), ao afirmar que esse último nível é de testabilidade questionável, como também até o próprio van Hiele já desmentiu a crença nesse último nível, argumentando que acha que ele possui apenas um valor teórico e que se sentia infeliz, pois muitas investigações estão sendo realizadas na tentativa de provar a existência do quinto nível ou outros mais elevados, fundamentadas nos seus níveis de pensamento.

E o último tópico, a *(in)adequação do calendário escolar*, reflete sobre a ideia de que o processo de desenvolvimento do pensamento geométrico não ocorre de forma a nos atender quanto ao calendário escolar. Para corroborar essa ideia, Oliveira (2012) traz os argumentos de Jaime e Gutiérrez (1990), ao afirmarem que a aquisição dos níveis superiores, particularmente dos níveis 3 e 4, normalmente é um processo de vários anos e é por isso que acabamos encontrando alunos, ao final do período letivo, no mesmo nível em que estavam no início, porém com a possibilidade bem maior de alcançar um nível superior. Dina van Hiele-Geldof relatou em sua tese que conseguiu elevar o nível de seus alunos do 1 para o 2 em 20 aulas e do 2 para o 3 em 50 aulas, o que indica que o processo de passagem de um nível para o próximo leva mais tempo do que pode durar uma hora ou até uma pequena unidade de ensino (USISKIN, 1982; OLIVEIRA, 2012).

Ao analisarmos as críticas apresentadas por Oliveira (2012) e os resultados encontrados por Nasser (1992), Andrade e Nacarato (2004), Nasser e Sant'Anna (2010), entre outros, percebemos a coerência entre eles e concordamos com essas colocações, uma vez que o calendário escolar e universitário não nos possibilita desenvolver um trabalho mais exaustivo para o desenvolvimento do pensamento geométrico, pois o tempo é curto e temos que dar conta de uma enorme grade curricular. Concordamos também com o fato de que a passagem de um nível para o próximo se dá de forma lenta e contínua, uma vez que essa passagem não acontece de forma abrupta como van Hiele esperava. Ademais, há pesquisas que nos alertam para as poucas evidências de encontrarmos alunos no nível 5 de van Hiele, sendo desenvolvido apenas em alunos de Universidade que possuem boa capacidade e preparo em Geometria (NASSER e TINOCO, 2003; JAHNKE, 2008; OLIVEIRA, 2012; SENK, 1989; USISKIN, 1982; VARGAS e ARAYA, 2013).

Esse modelo vem a ser importante em nossa pesquisa no sentido de nos auxiliar a identificar os conceitos geométricos construídos por licenciandos em Matemática e qual nível de pensamento eles se encontram, compreendendo quais as dificuldades e deficiências ainda presentes nos cursos de Licenciatura em Matemática e na formação do professor de Matemática. Além disso, por percebermos que existe uma estreita ligação entre esses níveis e o processo de justificativa e prova, a partir das discussões de pesquisadores como Usiskin (1982), Senk (1985, 1989), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), Battista e Clements (1995), Pietropaolo (2005), entre outros, nos motivou a estabelecermos uma articulação mais específica, teórica e experimentalmente, entre os níveis e os tipos de prova propostos por Balacheff (2000).

No próximo capítulo buscaremos discutir sobre as terminologias adotadas na Matemática e na Educação Matemática quanto aos termos *prova* e *demonstração*, como também apresentaremos alguns aspectos interessantes quanto às demonstrações na Geometria. Nele, abordaremos a base epistemológica de Balacheff, os conceitos e terminologias adotadas por este pesquisador, como também os tipos de prova propostos por ele e as funções da demonstração discutidas por De Villiers.

CAPÍTULO 3 – PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Neste capítulo, discorremos acerca das terminologias envolvendo as palavras *prova* e *demonstração*, a partir das visões de pesquisadores da Matemática Pura e da Educação Matemática, ressaltando quais terminologias utilizaremos em nossa pesquisa. Abordaremos também aspectos sobre as demonstrações em Geometria, a perspectiva histórica, as dificuldades de licenciandos em demonstrar e o que se propõe para melhorar esse trabalho.

Além disso, discutiremos sucintamente a base epistemológica de Balacheff, que diz respeito ao método das provas e refutações de Imre Lakatos. Como também abordaremos alguns conceitos e terminologias gerais das ideias defendidas por Balacheff sobre raciocínio, explicação, prova e demonstração, assim como a utilização do método de Lakatos em sua pesquisa com alunos na França. Por fim, explanaremos sobre os tipos de prova propostos por Balacheff a partir de suas pesquisas, como também traremos as funções da demonstração discutidas por De Villiers em seus estudos.

3.1 TERMINOLOGIAS ENVOLVENDO *PROVA* E *DEMONSTRAÇÃO* NA MATEMÁTICA E NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

As demonstrações têm um papel muito importante na Matemática, pois é a partir delas que confirmamos se algo é válido ou não. Ou seja, é a partir delas que as leis da Matemática se fundamentam, tendo assim uma natureza totalmente diferente e peculiar, já que essas leis não se fundamentam em experiências. Além disso, os conhecimentos matemáticos são cumulativos, isto é, um matemático nunca se desfaz das obras corretas de outros, mas sim as amplia, generaliza, expande e aprimora (GARBI, 2010).

Ordem e Almouloud (2017) ao fazerem uma revisão de literatura sobre provas e demonstrações observaram que Rav (1999) via as demonstrações como o coração da Matemática, já Goetting (1995) pontuava que é necessário deixar claro, para os futuros professores, que as generalizações baseadas em evidências empíricas não são demonstrações, sendo, por isso, importante os alunos terem uma compreensão adequada sobre o que é demonstração em Matemática e buscarem aprimorar as técnicas para sua produção.

Trazemos aqui duas palavras *prova* e *demonstração,* que para os matemáticos são consideradas sinônimas, como afirma Garnica (1996), uma vez que atestam a veracidade ou autenticidade de uma afirmação matemática, em que a dedução mantém a verdade de sua conclusão, apoiando-se em premissas admitidas como verdadeiras. Assim, para a comunidade matemática, não há muita diferença entre demonstrar, provar ou justificar uma determinada afirmação, pois ambos os termos significam deduzir sua validade por meio de raciocínios logicamente válidos (ORDEM, 2015).

Garbi (2010) considera que a prova, a demonstração ou a justificativa lógica é a essência da verdadeira marca registrada da Matemática, considerando-as como sinônimas. Ele salienta que, mesmo a Matemática não sendo uma ciência experimental, as primeiras verdades matemáticas foram *percebidas* pelos homens primitivos por meio daquilo que eles experimentavam ao trabalhar na prática com números ou figuras geométricas e que isso foi mudando ao longo do tempo, tendo hoje as demonstrações para comprovar as verdades matemáticas.

Segundo Morais Filho (2010, p. 69), quando estamos estudando Matemática, percebemos que ela é repleta de teoremas e que muitas vezes já os utilizamos ou os demonstramos sem saber. Do ponto de vista puramente matemático, um teorema "é uma sentença condicional 'se P, então Q', cuja validade é garantida por uma demonstração. Nesse caso, a sentença P chama-se *hipótese* e a sentença Q chama-se *tese*". Didaticamente, para trabalharmos com as demonstrações, é mais fácil separarmos e destacarmos a hipótese e a tese de um teorema. Além disso, um teorema sempre deve ter um enunciado claro e preciso, no qual podemos identificar claramente a hipótese e a tese.

Ainda do ponto de vista puramente matemático, segundo Morais Filho (2010), para não abusarmos da palavra *teorema*, na Matemática alguns teoremas recebem outros nomes, a saber:

> - chamamos *corolário* a um teorema obtido como consequência de outro recém provado. Nesse caso, o segundo teorema é chamado *corolário do teorema* provado;
> - já um teorema usado para provar outro que lhe sucede é chamado *lema*; podemos dizer que um lema é um teorema auxiliar ou preparatório, que será usado na demonstração de outro teorema;
> - em algumas ocasiões, chama-se *proposição* a um teorema que não é central no contexto e tem importância limitada (MORAIS FILHO, 2010, p. 79).

Garbi (2010) observa que o questionamento de que as afirmações feitas na Matemática devem ser provadas há limitações, pois nem tudo na Matemática pode ser demonstrado, uma vez que é preciso que nós consideremos algumas afirmações sem prova, para que o processo demonstrativo possa ter início. Essas afirmações consideradas verdadeiras, que admitimos sem uma demonstração, são denominadas de *postulados* ou *axiomas*, considerado por ele como sinônimos. Além disso, o pesquisador comenta que, na segunda metade do século XIX, quando se foi revisado em profundidade os fundamentos da Matemática, concluiu-se que alguns poucos entes matemáticos são indefiníveis, ou seja, a nossa mente consegue vislumbrá-los independentemente de qualquer descrição por meio de palavras. Esses entes são chamados de *conceitos primitivos*.

Outro ponto importante a ser comentado é a *definição matemática*. As definições matemáticas são importantes, pois evitam longas e desnecessárias repetições e juntamente com as notações são mais um aliado na ajuda com a economia da linguagem (MORAIS FILHO, 2010). Garbi (2010) também comenta que as definições matemáticas necessitam ser rigorosas, para não haver dubiedades que venham a comprometer a qualidade das provas. Para se tentar demonstrar um resultado matemático é preciso conhecer o objeto com os quais iremos trabalhar e saber precisamente suas propriedades. Ou seja, "*definir* é dar nomes a objetos matemáticos, mediante determinadas propriedades interessantes que possuam e que os caracterizem" (MORAIS FILHO, 2010, p. 83).

As demonstrações compõem, segundo Morais Filho (2010, p. 113), parte da estrutura lógica essencial do que é constituída a Matemática e da maneira como a Matemática funciona. Nesse sentido, uma *demonstração*, matematicamente falando, "de que uma proposição T é deduzida de outra proposição H é uma cadeia de argumentações lógicas, válidas, que usam H para concluir os resultados apresentados em T. Nesse processo, H chama-se *hipótese* e T chama-se *tese*". Bicudo (2002) entende por demonstração, considerando em termos da lógica, um sistema formal que é a parte sintática de um sistema axiomático, composto pela linguagem e seus símbolos, expressões e fórmulas, pelos axiomas e pelas regras de inferência. Já Domingues e Iezzi (2003) definem uma demonstração como uma sucessão articulada de raciocínios lógicos, permitindo mostrar que um resultado proposto é consequência de princípios previamente fixados e de proposições já estabelecidas.

Garbi (2010) afirma que a demonstração de uma afirmação referente a um ou mais entes matemáticos é um processo pelo qual, a partir de definições, conceitos primitivos, postulados e teoremas já demonstrados anteriormente, evidencia a veracidade (ou não) de uma afirmação por meio de uma sequência de conclusões (inferências) lógicas válidas. O pesquisador argumenta que a intuição e o bom senso são ótimos aliados para se fazer conjecturas e imaginar caminhos e que as figuras também ajudam bastante a entender uma questão e orientar nosso raciocínio, porém, as provas ou demonstrações só podem se fundamentar nos conceitos matemáticos explicados acima.

Morais Filho (2010) argumenta que cada passo de uma demonstração deve ser provado utilizando argumentações válidas, usando hipóteses, axiomas, definições e outros resultados anteriormente provados, formando assim uma cadeia dedutiva de raciocínio. Ou seja:

> demonstrar é um ato de persuasão, de convencimento, baseado em argumentações lógico-dedutivas, por isso é tão importante (também) saber redigi-las. Ninguém deve acreditar em um fato matemático, mas deve ser convencido por meio de uma demonstração que ele é válido. Muitas vezes esse convencimento é para você mesmo, mas na maioria das vezes, a demonstração é para convencer outra pessoa da validade de algum fato (MORAIS FILHO, 2010, p. 115).

Percebe-se então que a demonstração é considerada como um ato de convencer o outro ou a si mesmo sobre a veracidade ou não de determinada afirmação matemática. Porém, há também outras funções das demonstrações que são importantes tanto para o matemático como para o aluno, e que também devem ser consideradas no processo de construção do seu raciocínio lógico-dedutivo. Veremos mais à frente.

Quanto às terminologias adotadas, Morais Filho (2010) nos informa que os verbos *mostrar, demonstrar* e *provar* são sinônimos e têm o mesmo significado. Além disso, as palavras *encontrar, exibir, construir, obter, etc.*, só são possíveis de serem realizadas ou justificadas por meio de uma demonstração matemática. Observa-se, a partir de Garnica (1996), Morais Filho (2010), Ordem (2015) e Garbi (2010), que para os matemáticos os verbos justificar, mostrar, provar ou demonstrar indicam a mesma ação, quer no contexto puramente matemático, quer no de ensino e por conta disso certos autores utilizam indistintamente os termos prova, justificação e demonstração com o mesmo significado.

Todavia, Balacheff (2000) sinaliza que isso provoca um obstáculo à pesquisa e defende que deve haver uma distinção entre as noções de prova e demonstração, particularmente no contexto da pesquisa (ORDEM, 2015). Balacheff (2004) também destaca a importância de que em toda pesquisa esteja clara a concepção de prova adotada e que deve haver unidade a respeito de seu significado, para que se possam compartilhar de forma mais significativa os resultados dos trabalhos desenvolvidos sobre esse tema.

Ferreira (2016) por exemplo afirma que, embora no âmbito da Matemática a demonstração seja a única forma de validação e que os termos prova e demonstração são utilizados como sinônimos, na Educação Matemática há alguns pesquisadores que fazem a distinção entre esses termos, ampliando o conceito de prova de modo que não só a validação por meio de um encadeamento de argumentos lógicos seja aceita, mas também que outras formas de provas possam ser produzidas pelos alunos ao validar suas afirmações. O que se espera é que os alunos partam das provas experimentais e consigam desenvolver provas conceituais, porém isso não acontece tão facilmente, pois atingir o nível de rigor exigido pela Matemática é muito raro entre os alunos, inclusive os universitários (NASSER e TINOCO, 2003; JAHNKE, 2008).

Stylianides (2007) enfatiza que o ato de provar pode envolver uma multiplicidade de processos ou atividades auxiliares, tais como trabalhar com exemplos para gerar conjecturas ou desenvolver uma visão sobre o desenvolvimento de uma prova, ou ainda usando meios retóricos para convencer os outros de que uma determinada declaração é verdadeira ou falsa. Stylianides e Stylianides (2017) consideram o termo prova como um argumento matemático a favor ou contra uma afirmação matemática que seja matematicamente sólida e conceitualmente acessível aos membros da comunidade local em que o argumento foi oferecido e com isso eles reconhecem que existem várias perspectivas viáveis para o significado da prova que podem servir a diferentes propósitos na pesquisa em Educação Matemática.

Monroy e Astudillo (2016) afirmam que a demonstração matemática é um meio para justificar e comunicar, de maneira convincente, as ideias, os fenômenos, os feitos, entre outros. Para as autoras, a demonstração é uma relação semântica entre proposições, em que é decidida a verdade ou não de um determinado argumento. Isto quer dizer que a validade de uma demonstração não admite níveis, como se pode ter para uma prova. Monroy e Astudillo (2016) ressaltam que alguns pesquisadores, como Harel e Sowder (1998) e Ibañes (2001), têm realizado alguns trabalhos, nos quais foram identificados diferentes níveis de prova que podem fazer sentido em determinados contextos institucionais, para os quais é importante identificar a quem eles serão encaminhados. Esses níveis irão aproximar os alunos das demonstrações (MONROY e ASTUDILLO, 2016, tradução nossa). Percebemos, então, que as pesquisadoras não consideram as palavras prova e demonstração como sinônimas, pois afirmam que os níveis de prova vêm a colaborar futuramente com a escrita da demonstração. Ou seja, a distinção desses termos implica, a depender do contexto, outras produções dos alunos para estabelecer a validade de uma afirmação.

Balacheff (2000) afirma que os verbos explicar, provar e demonstrar são considerados como sinônimos na prática do ensino de Matemática, porém para o autor é necessário distingui-los, uma vez que essas palavras podem se constituir em um obstáculo à pesquisa sobre o assunto e levam a amalgamar diferentes níveis de atividade do aluno. Para o pesquisador, a partir da perspectiva de Piaget, diríamos que a *explicação*, no campo das ciências dedutivas, é antes de tudo esclarecer os motivos que respondem à questão do por que. Porém, do ponto de vista da prática da própria Matemática, a explicação é dar as justificativas de um teorema, explica-lo e demonstrá-lo apontando os diferentes requisitos.

Balacheff (2000) considera que a explicação se situa no nível do sujeito locutor. Para esse sujeito a explicação estabelece e garante a validade de uma proposição, que está enraizada de seus conhecimentos e no que constitui sua racionalidade. No momento em que a explicação é expressa em um discurso, esta procura fazer com que os expectadores compreendam a verdade da proposição já adquirida pelo falante. Ou seja, a explicação não é necessariamente reduzida a uma cadeia dedutiva, uma vez que a sua base é essencialmente a linguagem natural.

Quando a explicação é reconhecida e aceita, convém buscar outro termo que permita marcar sua distinção do sujeito locutor. Na Matemática é claro que o termo "demonstração" não é o mais conveniente, já que seu significado é muito específico. Então Balacheff (2000) chama esse novo termo de "*prova*". A passagem da explicação para a prova diz respeito a um processo social pelo qual um discurso que garante a validade de uma proposição muda sua posição e é aceito por uma comunidade. Porém, essa posição não é definitiva, pois com o tempo pode evoluir simultaneamente com o avanço do conhecimento em que está ancorado. Além disso, uma prova pode ser aceita por uma comunidade, como também pode ser rejeitada por outra (BALACHEFF, 2000).

Para Balacheff (2000), o tipo de prova dominante na Matemática tem uma forma particular. Essa prova se trata de uma série de enunciados que se organizam seguindo um conjunto bem definido de regras. Chamaremos esses tipos de prova de "*demonstração*". O que caracteriza as demonstrações como gênero de discurso é a sua forma estritamente codificada. Infere-se, a partir das ideias de Balacheff (2000), que uma demonstração pode ser uma prova, mas nem toda prova é considerada uma demonstração e por isso pode e se deve considera-las com significados diferentes, já que o termo prova é tido em um sentido mais diverso do da demonstração, que é mais específico, podendo ser feita por meio de exemplos, casos particulares, desenhos ou gráficos e a demonstração é apresentada a partir de um discurso matemático, com rigor e formalismo necessários à sua construção.

Sales e Pais (2010) afirmam que, no âmbito da Matemática, o ato de demonstrar é uma ação bem delimitada, embora uma definição de demonstração não seja uma tarefa simples e parece não ser preocupação para os estudiosos. Contudo, suas características são bem conhecidas daqueles que se propõem utilizá-la em um contexto científico, compreendendo que a demonstração é desenvolvida conforme regras pré-estabelecidas e utilizando proposições aceitas como verdadeiras. Já a prova, além de ter um valor temporário, produz o seu efeito em um contexto social menos exigente ou de um nível de escolaridade em que um tratamento rigoroso da questão não seja compatível, supondo que o convencimento dos interlocutores ocorre como resultado da compreensão do que está sendo proposto.

Isto quer dizer que, segundo Sales e Pais (2010), a demonstração é um termo bem mais específico do que a prova, pois demonstrar é convencer utilizando recursos racionais compreensíveis aos interlocutores e que tornam a afirmação inquestionável. Além disso, uma demonstração possui um rigor característico que consiste no ordenamento das ideias segundo as regras da Lógica, um simbolismo apropriado e uma terminologia matemática coerente. Infere-se então que esses pesquisadores compreendem prova e demonstração como palavras *não sinônimas*, pois entendem a prova como algo diverso, a nosso ver como exemplos, desenhos ou redações rudimentares, já a demonstração é algo mais específico, em que se utiliza uma escrita adequada, com rigor e formalismo característicos.

Grinkraut (2009) também considerou, em sua pesquisa, que prova e demonstração não são palavras sinônimas, tomando prova em um significado mais amplo, podendo ser entendida como um discurso para estabelecer a validade de uma afirmação, não sendo necessariamente aceita no domínio matemático, ou seja, a pesquisadora considerou as justificativas encontradas nas produções dos alunos dentro do seu contexto escolar, em termos do raciocínio envolvido, mesmo sabendo que muitas vezes eles não iriam conseguir atingir a formalização necessária. Já a demonstração foi considerada como um tipo de prova aceita pela comunidade dos matemáticos, baseada em um conjunto de axiomas e de outras propriedades já demonstradas, devendo ser obtida por meio de um processo hipotético-dedutivo.

Portanto, por entender o significado atribuído pelos matemáticos e pelos educadores matemáticos, assim como por entender que nossa pesquisa se deu a partir das produções de licenciandos em Matemática, estamos considerando que as provas e demonstrações não são palavras sinônimas, assim como Balacheff (2000), Monroy e Astudillo (2016), Sales e Pais (2010) e Grinkraut (2009), uma vez que, dependendo do nível de pensamento geométrico dos licenciandos, esses podem provar uma determinada afirmação por meio de casos particulares e figuras, elaborar provas rudimentares ou podem chegar a produzir provas formais, utilizando conceitos teóricos e raciocínio lógico formal. Além disso, adotamos também as diferenças de terminologias propostas por Balacheff (2000), que dizem respeito à explicação, prova e demonstração, tendo significados diferentes.

3.2 DEMONSTRAÇÕES EM GEOMETRIA

Sabemos que a Matemática não é uma ciência experimental, pois para comprovar os resultados e as afirmações matemáticas é necessário utilizar as demonstrações, fazendo uso de definições, postulados, axiomas e teoremas já demonstrados anteriormente em um processo lógico-dedutivo, em que permeia o rigor e formalismo matemáticos necessários para a comprovação ou não da afirmação. Com isso, nos perguntamos quando e onde surgiu a demonstração em Matemática.

A partir da História da Matemática, Arsac (1988) percebeu que a noção de demonstração viveu três momentos diferentes. O primeiro diz respeito à gênese adotada pelos gregos no século V a.C., que consideravam a demonstração como a ordem da convicção. O segundo momento, quando houve a primeira modificação no século XVII, considerando a demonstração com o objetivo de esclarecer antes de convencer e os métodos de descoberta assumiram papel central. E o último momento, quando ocorreu a segunda modificação no século XIX, retornando ao rigor e o surgimento do formalismo. Percebe-se então que a história do desenvolvimento da demonstração matemática deixa claro que, ao longo dos séculos, o seu conceito esteve sempre associado à ideia de verdade.

Fernandes Balieiro Filho (2016) ressalta que pesquisas recentes e aprofundadas sobre a Matemática dos povos anteriores (egípcios, babilônios, chineses e indianos) aos gregos mostram um desenvolvimento considerável de procedimentos, métodos e fórmulas aproximadas ou exatas no estudo da Aritmética, Geometria, Álgebra e Astronomia. Sobre a Matemática egípcia, o pesquisador discute que as conclusões das demonstrações não eram necessárias, apenas eram confirmadas e que devemos aceitar o fato de que os egípcios não pensaram nem raciocinaram como os gregos e por isso não é apropriado que no século XXI comparemos criticamente os seus métodos com os dos gregos ou com qualquer outra nação posterior, pois em cada época os homens pensavam e raciocinavam diferentes, assim como hoje a demonstração é totalmente diferente da dos gregos.

Garbi (2010) ressalta que a matemática empírica dos egípcios e mesopotâmios interessava-se apenas em saber o que fazer e não por que fazer. Ele argumenta que esse tipo de Matemática nascida em meados do terceiro milênio antes de Cristo, perdurou sem evoluir significativamente até o século VII a.C. Nessa época, os gregos criaram contatos com a civilização egípcia e aprenderam o que ali era feito em Aritmética e Geometria e começaram a introduzir um conceito que revolucionou a Matemática, concluindo que as afirmações feitas nessa área deveriam ser provadas, ou seja, justificando todo o processo de construção, diferentemente do que faziam os egípcios e mesopotâmios.

Fernandes Balieiro Filho (2016) corrobora ao afirmar que as demonstrações tiveram sua origem na Grécia Antiga, pois nessa região havia um ambiente que preconizava, praticava e valorizava a forma de argumentação dialética em debates públicos. A formulação da parte teórica contida na Matemática originou-se nas escolas científicas e filosóficas da Grécia antiga, tais como a jônica, a pitagórica, a socrática, a platônica e a aristotélica. Com isso, os filósofos-geômetras gregos:

> ao proporem as primeiras teorias matemáticas que foram abstraídas de problemas concretos, proporcionaram os requisitos imprescindíveis e aceitáveis para o reconhecimento de autonomia, especificidade, organização, sistematização e generalização do corpo de conhecimento da Matemática grega. Essa característica presente na formulação hipotético-dedutiva daquelas teorias conduziram esses geômetras à propensão de sistematizar os conhecimentos matemáticos, adquiridos pelos vários processos de raciocínio, com o intuito de apresentar de maneira lógica seus fundamentos (FERNANDES BALIEIRO FILHO, 2016, p. 930).

Consequentemente, essa metodologia foi estruturada e organizada de modo que esses princípios de construção dessa ciência dedutiva conseguiram atingir o seu patamar de procedimento axiomático na obra *Os Elementos*, de Euclides de Alexandria (FERNANDES BALIEIRO FILHO, 2016). Esse pesquisador também ressalta que ao analisarmos a História da Matemática percebe-se que as proposições matemáticas não foram descobertas simplesmente utilizando um procedimento puramente axiomático, ou seja, o processo de construção de uma demonstração matemática não deve ser concebida (como na maioria das vezes ela é) como algo pronto e acabado, pois em sua composição também estão presentes os vários processos heurísticos argumentativos, tais como intuição, analogia, indução, análise, síntese, refutação, dedução, entre outros, que contribuem para que se obtenha ao final desse processo uma construção de uma demonstração organizada, lógica e rigorosa.

Courant e Robbins (2000) corroboram a ideia de não menosprezar a fase inicial de elaboração de uma demonstração, afirmando que essa ênfase exagerada sobre o caráter postulacional dedutivo da Matemática acaba excluindo o elemento de invenção construtiva, de direcionar e motivar a intuição dos alunos, considerando apenas a realização matemática nos campos mais abstratos. Os pesquisadores ressaltam que a intuição e o processo de construção da forma dedutiva de uma demonstração são as forças propulsoras para que o aluno consiga realizar o seu intento.

Davis e Hersh (1989) afirmam que a Geometria Euclidiana é o primeiro exemplo de um sistema dedutivo formalizado e tornou-se o modelo para todos os exemplos posteriores. Por isso, pode-se dizer que a Geometria tem um campo de treinamento para o pensamento lógico e o seu estudo tem sido considerado como aquele que fornece meios para o aluno desenvolver o seu raciocínio, ressaltando assim que não há uma maneira garantida de se chegar a uma demonstração.

Além disso, Garbi (2010) sinaliza que não se sabe como Tales teria provado as propriedades geométricas, pois nenhum de seus trabalhos sobreviveu e chegou até nós, porém alguns historiadores acreditam que as provas realizadas por Tales de Mileto foram rudimentares e quase certamente não iria atender aos padrões atuais de rigor e formalismo matemáticos. O que vem a corroborar a ideia apresentada por Fernandes Balieiro Filho (2016) de que aquilo que satisfazia a Tales como prova, não iria satisfazer aos matemáticos de hoje, pois o conceito de demonstração evoluiu e tornou-se bastante rigoroso e formal.

Garbi (2010) também acrescenta o fato de que nenhum texto produzido pelos pitagóricos sobreviveu em sua forma original, tendo somente menções feitas por autores posteriores de um grande número de importantes descobertas feitas por eles na Geometria e na Aritmética. Alguns historiadores também acreditam que, embora Tales tenha sido o criador do conceito de demonstração em Matemática, as primeiras demonstrações razoavelmente rigorosas foram efetuadas pelos pitagóricos (GARBI, 2010).

Sabe-se que os gregos e os pitagóricos ao procurarem fazer demonstrações matemáticas, se depararam com algumas dificuldades básicas. Para vencê-las, eles então concluíram que seria necessário fazer essa prova de maneira ordenada, ou seja, começando pelas mais simples e sucessivamente, a partir delas, ir tentando demonstrar as demais, assim como fez Euclides, em Os Elementos. Seguindo essa sequência demonstrativa, eles conseguiram perceber que os resultados obtidos anteriormente serviriam de base para as novas demonstrações (GARBI, 2010). Segundo Dias (2009), esse modelo de discurso lógico do livro Os Elementos de Euclides determinou o formato das demonstrações em Matemática e foi adotado pelos matemáticos em geral, tendo sido espalhado no ensino de demonstrações nas escolas, tanto da Educação Básica como de cursos universitários.

Esse modelo inspirou o ensino de demonstrações nas escolas, sendo apresentada como uma organização formal utilizada pelos matemáticos. Ou seja, a demonstração foi ensinada como um conjunto de argumentações (teoremas, axiomas e definições) encadeadas logicamente com o propósito de verificar se uma determinada afirmação é ou não verdadeira (DIAS, 2009). Contudo, muitos professores esquecem de evidenciar o processo de construção e elaboração da demonstração e a tratam de forma acrítica, como um produto pronto e acabado, porém Dias (2009) alerta que esse processo é muito mais rico e útil para a construção do conhecimento matemático do que a demonstração propriamente dita, pois é nessa fase que irá surgir novas conjecturas que podem ser ou não verdadeiras, desencadeando um outro processo de demonstração e mais uma vez surgir outras conjecturas, tornando-se um processo contínuo de construção e elaboração.

Quanto ao ensino de demonstrações, Balacheff (1987) afirma que o seu fracasso na França se deve ao fato de a prática da demonstração exigir uma racionalidade e um estado específico de conhecimentos que o aluno ainda não possui. Para o pesquisador, essas exigências só são possíveis após o seu desenvolvimento cognitivo e isso requer um tempo que não é contemplado pelos programas escolares e currículos extensos. Assim, para Balacheff (1987), o tempo cronológico não corresponde necessariamente ao tempo cognitivo. Por isso, esse pesquisador, assim como Hanna (1990), defende o trabalho com argumentações, provas e demonstrações desde os anos iniciais, trabalhando-se inicialmente com argumentações e justificativas, até evoluir para as demonstrações ao longo da escolaridade. A ideia defendida é que no Ensino Médio os alunos consigam fazer demonstrações matemáticas.

Para que isso aconteça na Educação Básica, é necessário que o professor de Matemática saiba trabalhar com argumentações, justificativas, os tipos de provas, assim como saiba demonstrar e compreenda as funções de uma demonstração, para então conseguir organizar e gerir situações de ensino e aprendizagem que envolvam atividades desse tipo. Todavia o que é percebido, a partir de pesquisas realizadas aqui no Brasil, tais como Pietropaolo (2005), Serralheiro (2007), Nasser e Tinoco (2003), Dias (2009), Lima (2015), entre outros, é a insignificante presença da atividade de natureza dedutiva nas aulas de Matemática, assim como um despreparo notório dos professores para trabalhar com tais atividades.

Dias (2009) ressalta que o licenciando em Matemática ou o próprio licenciado, seja na formação inicial ou continuada, deve compreender o papel e o uso das demonstrações tanto na Matemática como Ciência, quanto no ensino e aprendizagem da Matemática como disciplina escolar, incluindo a contribuição para a constituição do raciocínio dedutivo do aluno da Escola Básica, visando o seu desenvolvimento cognitivo. Assim, faz-se necessário uma discussão sobre essa importância e sobre as formas de trabalho com as provas e demonstrações na Formação Inicial e/ou Continuada dos professores de Matemática. Contudo, não tem sido efetivo essa discussão sobre o uso e o papel da demonstração nos cursos de Licenciatura em Matemática.

De acordo com Dias (2009), nos cursos de Bacharelado em Matemática não há dúvidas sobre abordar ou não as demonstrações, pois isso já faz parte do trabalho dos matemáticos puros. Porém, nos cursos de Licenciatura, o ensino e a aprendizagem das demonstrações diferem de instituição para instituição. A pesquisadora afirma que há licenciaturas que ainda adotam o modelo “3+1” e possuem ênfase excessiva no estudo das demonstrações, assim como há licenciaturas onde o ensino das demonstrações restringe-se apenas a alguns teoremas demonstrados em disciplinas específicas. Não há uma reflexão sobre a pertinência do trabalho desta atividade matemática na Educação Básica, nem discussão sobre o trabalho com argumentações e os tipos de provas, quais as funções de uma demonstração, etc. e quais as melhores práticas pedagógicas para abordar as demonstrações nesse segmento.

O que se percebe, segundo Dias (2009), é que os cursos de graduação possuem uma quantidade considerável de conteúdos matemáticos, que são geralmente apresentados de forma separada, sem uma abordagem voltada para as aplicações em cada área específica, fazendo com que a Matemática seja vista como uma área separada de conhecimentos, sem haver ligações entre seus próprios conteúdos. Ao apresentar esses conteúdos, alguns professores se utilizam de demonstrações, mas elas acabam sendo apresentadas como algo pronto e acabado, reforçando então a visão de muitos alunos sobre a Matemática como um conhecimento pronto e organizado, acessível a poucos.

Ramassoti (2015) também alerta para a existência de Licenciaturas em Matemática que nem sequer trabalham com a Geometria Axiomática, ficando assim ausente do processo de construção de conhecimento dos licenciandos e eles acabam saindo do curso sem saberem demonstrar formalmente. Muitas vezes, de acordo com o pesquisador, a Geometria Euclidiana se resume apenas em passar fórmulas para o cálculo de áreas, perímetros e volumes, ou então como se reconhece e nomeia as figuras e os sólidos geométricos.

Sobre o trabalho com as provas e demonstrações, Garbi (2010) também alerta para o fato de que submeter os licenciandos a áridas demonstrações sobre temas excessivamente abstratos, utilizando uma linguagem peculiar e pedante como se fazia no passado, acaba produzindo efeitos traumáticos, ocasionando assim uma aversão a Matemática, em que os alunos se julgam incapazes de aprendê-la e se afastam dela exatamente por isso. Percebemos isso em algumas licenciaturas, onde os professores do primeiro período do curso utilizam teoremas e demonstrações com o intuito de "assustar" os alunos, pois para eles é preciso que no primeiro período saía os alunos que ainda têm dúvidas e que não serão capazes de prosseguir o curso. Esses alunos, que nunca viram ou trabalharam com demonstrações, são levados a estudarem elas já prontas e acabadas, tendo que decorá-las para prosseguir no curso, pois o professor não é capaz de auxiliá-lo e motivá-lo a raciocinar e a desenvolver a elaboração e construção de uma demonstração.

Busquini e Santos (2011) corroboram essa ideia e alertam que geralmente os licenciandos aceitam as demonstrações contidas em alguns livros-texto, complementando o seu estudo com a exposição/fala dos professores. Há um aceite quanto ao autoritarismo herdado da prática científica da Matemática, em que o aluno se torna cúmplice e reprodutor, admitindo que uma verdade matemática é absoluta, pronta e acabada. Assim, esses pesquisadores afirmam que essas abordagens para a demonstração matemática, que se tornaram quase um ritual, estão ainda presentes no dia a dia das salas de aula, imperando com isso a reprodução de algo que seja aceito somente quando satisfaz o "modelo" conhecido do professor e a repetição desse esquema é uma das características de alguns cursos universitários e em algumas salas de Matemática do Ensino Médio.

Precisamos modificar esse cenário, colocando nossos alunos para serem os responsáveis por sua aprendizagem e estimulando-os a desenvolverem o raciocínio matemático a partir da resolução de problemas, das provas, demonstrações, entre outros. Sabemos que essas modificações não acontecem de um dia para outro, nem tampouco com um ou dois professores executando. Por isso que concordamos com Balacheff (1987) e Hanna (1990) ao afirmarem que esse trabalho deve ser iniciado desde os anos iniciais, pois percebemos que nossos alunos não estão sendo motivados a raciocinar, a pensar e a deduzir as afirmações e isso prejudica muito o trabalho com resoluções de problema, com provas e demonstrações matemáticas, assim como com situações-problema de outras áreas específicas. Necessitamos estimular nossos alunos a irem além do que está escrito, a aguçarem o raciocínio e a desenvolvê-lo por meio de atividades que permitam esse trabalho.

Neves, Baccarin e Silva (2013) também observaram que a palavra demonstração gera certa inquietude entre os alunos, seja da Educação Básica ou do curso de Licenciatura em Matemática e que muitos deles relatam que o incômodo gerado diz respeito às dificuldades relacionadas ao ato de demonstrar, pois é exigido uma alta capacidade de argumentação e de linguagem própria que eles ainda não possuem.

Esses pesquisadores também relataram que na Licenciatura em Matemática há três entendimentos com relação à presença de demonstrações nas aulas de Geometria: docentes que utilizam as demonstrações da mesma forma que as utilizam no Bacharelado; docentes que utilizam as demonstrações a partir de simplificações ou reformulações, com a justificativa de que se trata de um curso de Licenciatura; e docentes que não utilizam as demonstrações, pois avaliam que elas não são pertinentes à Licenciatura, argumentando que elas são mais propícias aos profissionais que a utilizarão como objeto de trabalho e não para aqueles que trabalharão na Educação Básica. Ainda encontramos nas Licenciaturas em Matemática um trabalho com a Geometria centrado na explanação de conceitos e fórmulas e por isso temos que a maioria dos licenciandos ainda é mero receptor de demonstrações apresentadas tal qual estão nos livros-texto, tendo como apêndice a explicação dos professores, assumindo assim uma postura de reprodução acrítica do conhecimento matemático.

Nasser e Tinoco (2003) observaram que a grande maioria dos licenciandos não domina as habilidades de demonstrar determinada afirmação durante o curso, nem quando se formam e nem durante os primeiros anos de docência. Argumentam também que é preciso auxiliar os alunos a desenvolverem o raciocínio lógico-dedutivo e a habilidade de argumentar e para isso as pesquisadoras defendem que a prática da demonstração deve ser considerada pelos alunos e pelos professores a partir de dois pontos: como elemento fundamental para entender a produção de conhecimento em Matemática e/ou como um caminho para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo. Por isso, Garnica (2002) garante que a demonstração deve sim ter seu lugar nos cursos de Licenciatura em Matemática, mas que não deve assumir um caráter técnico e sim uma abordagem crítica que venha a possibilitar a análise dos modos de produção do conhecimento em Matemática.

Neves, Baccarin e Silva (2013) realizaram uma pesquisa com concluintes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição privada brasileira a partir da replicação de duas questões do Exame Nacional do Ensino Superior (ENADE). Os resultados encontrados sugerem que os alunos têm dificuldades relacionadas à argumentação e à distinção entre definições e teoremas; a reconhecer as hipóteses e conclusão de uma propriedade; ao entendimento dos conceitos de desenho e figura geométrica; a decidir se utilizavam a linguagem natural ou matemática; e a organizar a prova e redação da demonstração. Os pesquisadores perceberam que esses alunos não estão habituados a justificar suas afirmações, nem tampouco demonstrar teoremas e por conta disso eles argumentam que aprender a demonstrar é totalmente diferente do discurso adotado pelos acadêmicos, já que requer domínio de um conjunto de conceitos, a compreensão de determinada figura geométrica e tudo que esteja relacionado a ela, as hipóteses (dados do problema) e a conclusão (ou tese), saber utilizar as representações e se apropriar do raciocínio lógico-dedutivo.

Pietropaolo e Mateus (2013) realizaram uma pesquisa sobre as concepções de um grupo de alunos do último ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade federal brasileira, a respeito do processo de ensino e de aprendizagem de demonstrações na Educação Básica. A partir dos depoimentos dos licenciandos, os pesquisadores observaram que eles valorizaram sobremaneira o uso da linguagem algébrica, mesmo quando consideraram os procedimentos utilizados para demonstrar inadequados. Constataram também que os alunos estavam pouco preocupados com a questão pedagógica e mais preocupados em fazer uma análise técnica das provas e isso pode ser reflexo do curso em que eles estão inseridos, nos quais possivelmente não há espaço para discussão sobre o processo de construção de uma demonstração. Verificaram também que alguns licenciandos pesquisados não tinham o conhecimento específico do conteúdo, tais como a definição de ângulo externo de um triângulo e a ideia de ângulo como mudança de direção.

Essa visão totalmente técnica e essa valorização excessiva no uso da linguagem algébrica associa-se ao fato de os alunos verem a demonstração de forma técnica e abstrata, em um ambiente que requer rigor e formalidade excessivos. Isto quer dizer que os alunos conhecem a palavra demonstração a partir da reprodução desta no quadro, desenvolvida pelo professor, onde muitos não explicam a seus alunos o que ela significa e qual a sua importância na Matemática. Além disso, eles somente enfatizam a função de verificação ou explicação de uma demonstração, não abordando outros aspectos de sua utilização, como também como se deu e como pode ser feito o processo de construção de uma demonstração.

Ferreira (2016) realizou uma pesquisa com alunos de Licenciatura em Matemática de uma universidade localizada no estado da Bahia, com o intuito de analisar as concepções desses licenciandos a respeito de provas e demonstrações geométricas. Os resultados encontrados pela pesquisadora sugerem que a maioria dos licenciandos atribui a prova e a demonstração o mesmo significado, apresenta fragilidade no desenvolvimento de demonstrações e mostra deficiências em articular propriedades e conceitos geométricos. Esses licenciandos conseguem reconhecer a importância da demonstração, mas não se sentem preparados para ensinar esse recurso matemático a seus futuros alunos.

Ferreira (2016) também inferiu que os licenciandos não foram envolvidos em tarefas que os permitissem construir demonstrações, o que pode indicar que a abordagem da demonstração vivenciada por eles foi apenas de reprodução tal qual está no livro-texto e que eles não foram capazes de definir o que é um método dedutivo. Além disso, observou que as produções apresentadas pelos licenciandos apontam dificuldades em utilizar argumentos válidos, em manipular as hipóteses e teses do problema, a organizar logicamente os argumentos e a concluir um raciocínio corretamente.

À vista dessas dificuldades, Caldato, Utsumi e Nasser (2017) argumentam que, aparentemente, a demonstração nas Licenciaturas em Matemática não consiste em um objeto de estudo, se limitando apenas a uma mera ferramenta para os licenciandos, isto quando ela aparece em uma disciplina de conteúdo específico, sendo demonstrado algum resultado pelo professor. Caso contrário, ela nem aparece. No sentido oposto ao que é observado na prática, encontramos pesquisas que abordam o uso da demonstração nos cursos de Matemática sob uma perspectiva mais ampla, como é o caso de Pietropaolo (2005). O pesquisador admite que as demonstrações não devem ser utilizadas apenas para a compreensão da Matemática, mas sim para refletir a evolução do pensamento matemático por meio de uma perspectiva didática, curricular e histórica.

Para Pietropaolo (2005), a demonstração viria a ser um rico recurso para o ensino e aprendizagem da Matemática, caso os professores e alunos não a reproduzisse tal qual está nos livros-texto. A ideia do pesquisador é utilizá-la de modo a propiciar aos alunos o *fazer matemática*, envolvendo experimentações, conjecturas, refutações, argumentações, justificações, provas e, por fim, a demonstração. A ideia de se trabalhar com as argumentações, provas e demonstrações, tanto na Educação Básica como nas Licenciaturas em Matemática, é que os alunos sejam levados, a partir de procedimentos empíricos ou não, a refletir e conjecturar por intuição, observação, analogias, experimentação, entre outros. Ou seja:

> [...] não é suficiente o futuro professor conhecer teoricamente, ou a partir da didática da matemática, como podem ser e funcionar as demonstrações em um ambiente exploratório-investigativo com a matemática. É preciso que ele possa experienciar o processo de exploração e investigação nas disciplinas matemáticas da licenciatura, tais como: teoria dos números, cálculo diferencial e integral, álgebra, análise, geometria, fractais, teoria dos grafos etc (FIORENTINI e OLIVEIRA, 2013, p. 925).

Por isso é preciso que os licenciandos em Matemática conheçam e saibam trabalhar com os axiomas, teoremas, definições e demonstrações de forma eficiente, em que ele seja levado a construir e a vivenciar o processo de levantamento de hipóteses, teste, refinamento e refutações de conjecturas, verificação e por fim conseguindo chegar a uma demonstração. Para isso é necessário, assim como afirma Pietropaolo (2005), que a abordagem da demonstração seja vista como um processo de questionamento, de conjecturas, de contraexemplos, de refutação, de aplicação e de comunicação durante todas as disciplinas do curso, abandonando assim o sentido formalista que a caracterizou nos currículos praticados por graduações “3+1” e que muitas vezes ainda persiste nos currículos atuais das Licenciaturas em Matemática.

Para que esse trabalho seja feito é preciso que os professores reconheçam a importância das produções dos alunos, tanto da Educação Básica como do Ensino Superior, em diferentes níveis, ressaltando para eles que os exemplos não garantem a validade de um caso geral e que a demonstração é realmente necessária para a generalização de uma afirmação matemática. Por isso, o professor deve estar consciente da ampliação do conceito de prova, como também deve estar apto a elaborar situações que levem o aluno a no momento oportuno realizar demonstrações. Só que para que isso seja feito é necessário que na formação inicial os professores formadores considerem a prova e a demonstração com significados distintos, pois somente assim o futuro professor estará preparado para, na Educação Básica, trabalhar com as provas e demonstrações considerando o nível de escolaridade do aluno (FERREIRA, 2016).

Além disso, Pires (2005) afirma que o conhecimento e o trabalho com teoremas, axiomas, definições e demonstrações tal como se apresentam nos livros-texto da Licenciatura não são suficientes para dotar o professor em formação de habilidades para a resolução de problemas, ocasionando assim um obstáculo para a sua utilização em sala de aula. A fim de modificar essa situação, é preciso que os licenciandos sejam formados em ambientes que o façam questionar afirmações já prontas, que sejam motivados a investigar situações matemáticas e a elaborar conjecturas, assim como que as discussões sobre a necessidade da demonstração e a sua produção estejam sempre presentes em um ambiente motivador a investigação matemática.

Todas essas indicações ressaltam as orientações da SBEM (2003), recomendando que é fundamental que o professor em formação seja levado a explorar situações-problema, a procurar regularidades, a fazer conjecturas, a fazer generalizações, a pensar de maneira lógica e a comunicar-se matematicamente utilizando diferentes linguagens. Além disso, é importante que ele conceba que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação, que ele compreenda as noções de conjectura, de teorema, de demonstração, sabendo examinar as consequências do uso de diferentes definições. Também é necessário que o licenciando analise erros cometidos e ensaie estratégias alternativas para superar esses erros, que ele tenha confiança pessoal em desenvolver atividades dentro da Matemática e saiba apreciar a estrutura abstrata que está presente na Matemática e sua função social.

Portanto, percebemos o quão necessário é, ao introduzirmos os conteúdos, estimularmos o raciocínio dos alunos e os deixarmos sendo responsáveis por sua própria aprendizagem, para que consigam gerar confiança em si mesmos e que criem a vontade de conhecer e de descobrir coisas novas. Destarte, concordamos com a afirmação de Garbi (2010) de que uma das maiores recompensas da Matemática é tornar uma pessoa capaz de pensar logicamente, adquirindo confiança em sua capacidade e buscando descobrir coisas novas e tendo vontade de aprender cada vez mais, pesquisando e estudando por conta própria, sem a obrigatoriedade de um professor para auxiliá-la.

3.3 BASE EPISTEMOLÓGICA DE BALACHEFF

Herbst (2000) ao revisitar o livro de Balacheff (2000) percebe três bases intelectuais importantes em seus estudos. A primeira diz respeito a uma *base epistemológica* com as obras de Imre Lakatos, de quem Balacheff obteve a noção fundamental de que provas e refutações estão necessariamente ligadas às concepções dos objetos matemáticos, nas quais as provas servem para a construção de objetos matemáticos e, portanto, são irredutíveis para a lógica formal. A segunda, há uma *base antropológica* com a obra de Bourdieu, que permitiu a Balacheff (2000) estabelecer uma relação fundamental entre a prova e as práticas matemáticas dos alunos, nas quais as provas se adaptam às necessidades da gestão dos objetos matemáticos dentro de certa prática dos conhecimentos (ou uma racionalidade). E, a terceira, há, fundamentalmente, uma *base didática* com a obra de Brousseau, de quem Balacheff (2000) tomou a noção de situação de validação como modelo para pensar em situações nas quais a produção de provas e refutações constitua o sentido da demonstração matemática. Aqui traremos algumas discussões sobre a obra de Lakatos, utilizada por Balacheff (2000) em sua pesquisa com alunos na França.

Lakatos (1978), em sua obra clássica intitulada *A Lógica do Descobrimento Matemático: provas e refutações*, apresenta inicialmente algumas ideias sobre o formalismo, afirmando que a escola “formalista” é uma escola de filosofia matemática que tende a identificar a Matemática com sua abstração axiomática formal. Para o autor, o formalismo não apresenta a parte histórica, a construção da experimentação de determinada teoria matemática, ele o oculta, apresentando somente a finalização da demonstração puramente formal.

Lakatos (1978) apresenta, em seguida, um diálogo entre professor e alunos, em uma sala de aula imaginária, caracterizada por Garnica (1996) como uma amostra da construção do conhecimento matemático tal como ele acontece, apresentando as trajetórias de idas e vindas. A busca da turma fictícia de Lakatos (1978) diz respeito ao interesse em resolver o seguinte problema: existe alguma relação entre o número de vértices V, o número de arestas A e o número de faces F dos poliedros – sobretudo para os poliedros regulares? Os participantes desse diálogo, após muitas tentativas e erros, percebem que, para todos os poliedros regulares, vale a fórmula observada por Euler ($V – A + F = 2$). Um dos alunos se aventura no palpite de que isso pode ser aplicado a qualquer poliedro. Outros alunos tentam falsear essa conjectura, propondo provas de modos diferentes, com resultados satisfatórios. Os resultados corroboram com a conjectura e sugerem que ela pode ser provada.

Uma primeira prova é dada pelo professor, supondo um poliedro oco que, pela exclusão de uma de suas faces, pode ser planificado. Surgem, assim, os passos que se constituirão nos lemas para a demonstração da conjectura, transformando-a em teorema. A partir da prova para a afirmação, a classe questiona a veracidade dos passos-lemas e com esses questionamentos, a turma consegue elaborar contraexemplos que forçam uma reformulação dos lemas. Como consequência desse processo das refutações, faz-se necessário modificar também a definição de poliedro considerada inicialmente, pois surgiram contraexemplos que poderiam ser tomados como poliedros, mas que não satisfaziam à eulerianidade (GARNICA, 1996).

Diante desses monstros (os contraexemplos), os envolvidos no diálogo fazem as modificações nas definições e iniciam o caminho das reformulações da prova, contando com o auxílio dos *contraexemplos locais*, que dizem respeito às refutações dos lemas envolvidos, são críticas da prova e não da conjectura; e dos *globais*, que refutam, de modo definitivo, o todo da conjectura, exigindo a sua reformulação; então, o trabalho desses envolvidos passa a ser a procura por detectar métodos que refinem tanto a conjectura quanto sua prova. O processo de reformulação da prova é repleto de artifícios puramente linguísticos, pois a utilização de conceitos cada vez mais refinados exige um cuidado crescente na explicitação dos conceitos, uma vez que as refutações dependem muito dos significados dos termos neles envolvidos (GARNICA, 1996).

Foi percebido então um longo processo de construção de uma demonstração, que é ocultado quando se finaliza e quando se apresenta aos alunos. Lakatos (1978) considera esse processo essencial, pois é a partir dele que os alunos levantam hipóteses, conjecturam, refutam, exibem contraexemplos locais ou globais, reexaminam as conjecturas, criam novas ideias, até conseguirem chegar a uma demonstração. E todo esse processo está de acordo com o que Balacheff (2000) propõe, ao afirmar que devemos estimular o desenvolvimento cognitivo dos alunos, levando em consideração a sua racionalidade.

Lakatos (1978) também discute a construção do conhecimento matemático apresentando o método das provas e refutações como possibilidade e engrenagem motora do desenvolvimento matemático. Em seu texto, o autor afirma que não apenas as refutações atuam como fermentos para análise da prova, como também a análise da prova pode agir como agente fermentador para as refutações. Além disso, o pesquisador destaca que para a análise de provas não existe limitações quanto aos instrumentos, ou seja, em seu método o autor admite a utilização de procedimentos incomuns a apresentações feitas em provas matemáticas.

Ao final de seu texto, Lakatos (1978) discorre sobre os aspectos do enfoque dedutivista versus o enfoque heurístico. O autor afirma que o estilo dedutivista diz respeito à metodologia euclidiana e que esse estilo começa com uma lista laboriosa feita de axiomas, lemas e/ou definições. Após ser feita essa lista de axiomas e definições, os teoremas são cuidadosamente redigidos e estão carregados de pesadas condições. O teorema é seguido da prova. Nesse estilo, a Matemática é apresentada como uma série sempre crescente de verdades imutáveis e eternas, escondendo a luta e a aventura de se chegar a determinados resultados. O pesquisador afirma que esse estilo é o pior inimigo do pensamento independente e crítico, pois discrimina o contexto da descoberta e da justificação.

Para Lakatos (1978), enquanto o estilo dedutivista rompe as definições geradas pela prova dos antepassados, apresentando-as no vazio, de forma artificial e autoritária, ocultando os contraexemplos globais que levaram ao seu descobrimento, o estilo heurístico acentua esses fatores. No enfoque heurístico há uma acentuação da lógica que deu nascimento ao novo conceito, se interessando pela dialética autônoma da Matemática, e não por sua história, embora ela só possa estudar seu assunto por meio do estudo da história e da reconstrução racional da história. Ou seja, o enfoque heurístico apresenta a Matemática como uma ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

Ao adotarmos o enfoque heurístico, de acordo com Trevisan (2013), poderemos contribuir para esclarecer as visões errôneas acerca do *fazer matemática*, uma vez que esse fazer vai além da aplicação e substituição de teoremas e teorias por valores numéricos. Assim, o modelo proposto por Lakatos, de provas e refutações, traz uma importante contribuição para a discussão sobre a formação dos conceitos matemáticos, possibilitando aos alunos terem a oportunidade de refazerem por suas mãos a Matemática.

Por isso o professor deve proporcionar meios para os quais o aluno faça matemática, no sentido de que ele se envolva efetivamente com o conteúdo, se responsabilizando por sua aprendizagem, buscando assim expandir sua autonomia e raciocínio. Isso é um dos motivos para os quais vários educadores matemáticos, tais como Balacheff, Almouloud, Hanna, Healy, Nasser, De Villiers, Pietropaolo, entre outros, apoiam a utilização das provas e demonstrações nos currículos de Matemática da Educação Básica e, consequentemente, devem estar presentes nas Licenciaturas em Matemática:

> os motivos pelos quais as provas, rigorosas ou não, deveriam estar presentes nos currículos dessa área do conhecimento em qualquer nível de escolarização não se resumem apenas ao fato de que uma demonstração é o – ou está no – ‘coração da matemática’. É fundamental olhar a relação prova-Educação Matemática sob outras perspectivas, não exclusivas, tais como: cognição, práticas argumentativas, ambientes informatizados (PIETROPAOLO, 2005, p. 246-247).

O trabalho com as provas e demonstrações deve ter uma perspectiva mais heurística, sendo possível trabalhar o raciocínio, o teste de conjecturas, a experimentação, a argumentação, a comunicação e a escrita. Ou seja, ao aceitarmos o método proposto por Lakatos, haveria uma melhor aplicação dessa abordagem nos ambientes educacionais, pois haveria o desprendimento do rigor matemático, que muitas vezes é um dos empecilhos para a utilização das provas e demonstrações na sala de aula (TREVISAN, 2013).

Portanto, percebemos que Lakatos (1978) considera todo o processo de experimentação, justificação, elaboração e testes de conjecturas até se chegar à demonstração propriamente dita, argumentando que o estilo dedutivista não contribui para o pensamento crítico e criativo dos alunos. Então, as ideias apresentadas por Balacheff (2000) estão estritamente relacionadas com as de Lakatos (1978), uma vez que ele também incentiva a construção heurística do processo de demonstração, àquela parte inicial que muitas vezes fica escondida e não é apresentada aos alunos.

3.4 CONCEITOS E TERMINOLOGIAS INICIAIS DE BALACHEFF

Balacheff (2004, n.p.) entende racionalidade como “o sistema de critérios ou regras mobilizadas quando é necessário fazer escolhas, tomas decisões ou executar julgamentos”. Para ele, a racionalidade nos permite raciocinar e decidir e é por isso fundamento de qualquer processo de provar. Dessa forma, provar depende do conteúdo e do contexto, ou seja, uma prova matemática provém de pontos de vistas do ensino e aprendizagem. Isto quer dizer que o sentido que escolhemos para responder determinadas questões, conscientemente ou não, fala sobre a nossa epistemologia de prova e da nossa própria racionalidade.

Nagafuchi e Batista (2008) argumentam que Balacheff entende epistemologia como a identificação de um objeto e a rede de relações que se estabelece em volta de outros objetos, tal como problemas, tarefas e outras possíveis atividades que a envolvem. Balacheff (2004) enumera as diferentes visões epistemológicas acerca da prova e argumenta que cada visão é essencial para determinar a escolha de programas de pesquisa e para compreender as diferentes provas que os alunos podem produzir.

As cinco visões distintas acerca da prova propostas por Balacheff (2004) são: a prova matemática como um tipo exemplar e universal de prova; a prova e a sua visão idiossincrática; a prova como núcleo da Matemática; a prova como uma ferramenta necessária à Matemática; e a prova como uma especificidade da Matemática, como um campo autônomo. Além disso, o autor afirma que nós não conseguimos separar de nosso trabalho a nossa própria epistemologia de prova matemática, como também da nossa própria epistemologia da Matemática.

Balacheff (2000) afirma que na Matemática, como em qualquer ramo do conhecimento, é necessário ter em mente que a demonstração não pode ser ensinada do mesmo modo em uma sala de aula que em um ambiente puramente científico. Por isso, é importante recordar os dois aspectos principais de uma demonstração com relação à comunidade científica: a demonstração é uma ferramenta essencial de prova, uma vez que ela conduz a um exercício prático, possibilitando ao mesmo tempo a comunicação e avaliação; como também é um objeto de estudo dos que trabalham com a Lógica, pois a demonstração tem uma definição precisa dentro do quadro das teorias formalizadas. Em particular, ela é introduzida como atividade de prova na atividade científica do matemático.

Balacheff (2000) questiona como se ensina a demonstração e afirma que geralmente o professor apresenta as demonstrações para os alunos e logo pedem para eles fazerem o mesmo, sem saberem que tipo de dificuldades os alunos terão. Esse pesquisador recomenda que é preciso ter em mente a racionalidade dos alunos, que antes do advento da demonstração, dispõe dos meios para “*fazer matemática*”. Corroborando assim as ideias de Lakatos (1978) e

Pietropaolo (2005) de que é necessário, antes de "jogar" as demonstrações prontas e acabadas aos alunos, incentivá-los a fazerem experimentações, conjecturas, refutações, argumentações, justificações e provas, contribuindo assim para destacar a importância da parte heurística desse processo.

Para que isso aconteça é necessário apresentar a demonstração aos alunos como uma ferramenta eficaz e confiável que estabelece a validade de uma proposição. Sendo então necessário descobrir e levar em consideração a racionalidade que eles têm inicialmente, como ela funciona e como ela pode evoluir, uma vez que é a partir dessa racionalidade, que os alunos irão construir o significado de uma demonstração. Conseguindo isso, segundo Balacheff (2000), o próximo passo será a construção de situações que garantem a transferência da responsabilidade pela verdade para os alunos.

Balacheff (2000) utiliza a palavra "*raciocínio*" para designar a atividade intelectual não completamente explícita que lida com a manipulação de informações dadas ou adquiridas, para produzir novas informações. Utilizaremos o termo *processos de validação* a esta mesma atividade quando se pretende garantir a validade de uma proposição e eventualmente produzir uma explicação, uma prova ou uma demonstração. Assim, em uma determinada situação, o nível de validação a ser observado deve estar relacionado ao contexto em que o aluno opera, antes de propor uma avaliação. Esse nível será limitado, em primeiro lugar, pela natureza do conhecimento do sujeito; no entanto, a atribuição de uma racionalidade ao aluno só poderá ser feita sob a reserva de sua identificação em um contexto que exige um compromisso eficiente (BALACHEFF, 2000).

Ao observarmos a história da Matemática, percebemos que a demonstração é posta em evidência como uma ferramenta de prova reconhecida e que o problema da verdade se apresenta nos procedimentos científicos. Porém isto não implica que os matemáticos podem provar seu saber apoiando-se em provas desta natureza. Isto quer dizer que, antes da existência do modelo euclidiano, os antigos matemáticos usaram meios de prova para estabelecer o caráter necessário de uma proposição ou resultado e, portanto, a atividade matemática reconhecida como tal antecede a "invenção" da demonstração feita pelos gregos (BALACHEFF, 2000).

Balacheff (2000) então supõe que exista a possibilidade de que os alunos construam, antes de dominar as demonstrações, provas dos enunciados matemáticos que eles próprios produzam. Assim, em sua pesquisa, Balacheff (2000) está interessado em saber qual a natureza dessas provas, se é possível elucidar uma hierarquia da gênese da demonstração e quais são os meios de provocar sua eventual evolução. Na próxima seção, apresentamos a sua análise da natureza e hierarquia das provas.

Para Balacheff (2000), a elaboração de provas é apenas um dos aspectos do procedimento de validação. Outro desses aspectos é a análise crítica das provas, ou seja, a exploração de objetos matemáticos, cuja verdadeira natureza é sempre questionada. Como a história mostra claramente a diferenciação entre esses dois aspectos, a generalização dos conceitos matemáticos não se terminará de fazer nunca. Para o autor, a dinâmica do desenvolvimento da Matemática põe em evidência um processo fundamental: a dialética das provas e as refutações. Em se tratando desse tema, Balacheff (2000) traz a perspectiva de Lakatos (1978), ao argumentar que a matemática não-formal, quase empírica, não é desenvolvida por um aumento contínuo do número de teoremas indubitavelmente estabelecidos, mas pela melhoria contínua das conjecturas, graças à especulação e à crítica, à lógica de evidências e refutações.

Balacheff (2000) admite então em seu trabalho a validade do modelo de Lakatos, conseguindo aplica-lo com atividades para os alunos. O autor afirma que Lakatos concentra sua atenção naqueles que estão interessados na gênese do conhecimento matemático e com isso usa o seu modelo para analisar os processos de prova realizados por alunos e sua evolução no curso da construção de seus conhecimentos matemáticos, especialmente no transcurso da solução de um problema. Balacheff (2000) também argumenta que o modelo proposto por Lakatos é coerente com as teorias desenvolvidas pela escola de Genebra quanto à gênese das estruturas cognitivas, para as quais Piaget apontou o papel central desempenhado pela contradição, fonte geradora de desequilíbrios que uma vez superados, dão origem a construções novas.

Balacheff (2000) considera que uma decisão sobre a validade de uma declaração é legítima quando for confirmada como *necessária* em oposição a outros enunciados que são somente possíveis, mesmo que isso não apareça explicitamente. Assim, o processo de validação, independentemente de estar ou não em conformidade com a explicação de uma prova, baseia-se na análise do pró e contra, ou seja, das possíveis contradições. Esse processo será essencialmente *dialético*. Esse fato é ainda mais evidente em um contexto de debate, no jogo das provas e refutações. Por outro lado, fora do contexto social, a elaboração de uma prova passa por uma análise crítica e é proveniente da dialética: uma prova rigorosa e definitiva é uma prova que não será refutada; inclusive para alguns, uma prova que não seria refutável (BALACHEFF, 2000).

Ao realizar o trabalho com as contradições na sala de aula, Balacheff (2000) afirma que, no funcionamento didático, a existência de um saber matemático de referência, seja científico ou escolar, dá ao professor o poder de decidir acerca do caráter contraditório de uma situação. A tarefa do professor consiste, então, em facilitar ao aluno a possibilidade de reconhecer esse caráter contraditório das situações. O autor apresenta mais uma vez a ideia de Piaget, na qual a tomada de consciência no aluno não se produz senão quando ele alcança o nível em que é capaz de fazer tal superação. Por isso que, para o pesquisador, devemos sim trabalhar com a problemática das contradições em sala de aula, auxiliando o aluno a tomar consciência de seu papel e função na construção de uma demonstração.

Balacheff (2000) também argumenta que, nas aulas de Matemática, o contraexemplo é geralmente percebido como uma catástrofe, cuja consequência é o abandono puro e simples de posições conquistadas durante a solução do problema. O universo das aulas de Matemática se revela, desse ponto de vista, mais maniqueísta que dialético. A análise da atividade do matemático ou da comunidade matemática, como nos apresenta Lakatos, revela um funcionamento bem diferente e seguramente menos radical. Por isso, não podemos rechaçar o contraexemplo, pois é a partir dele que os alunos revisitam a conjectura e reexaminam a prova, estimulando assim o desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

Balacheff (2000) também argumenta que os matemáticos que Lakatos considera em seu estudo parecem estar baseados no mesmo princípio de racionalidade, porém este não é o caso dos alunos: o empirismo ingênuo ou a experiência crucial, tipos de provas propostos pelo autor, podem fornecer provas e constituem as raízes legítimas de uma convicção. O pesquisador questiona que se o professor apresenta um contraexemplo ao seu aluno, como ele evita que o aluno declare que se trata de um caso particular, já que sua conjectura está baseada em um empirismo ingênuo. Esta problemática é de grande importância nos níveis mais avançados de escolaridade, nos quais o aluno discutirá acerca da legitimidade de um contraexemplo, porém, para Balacheff (2000), o que está em questão é a concepção que o aluno tem do conhecimento em jogo. Ou seja, podemos perceber que é preciso explicitar aos alunos, desde o início, que os exemplos não garantem a validade de um caso geral e que a demonstração é realmente necessária, como afirma Ferreira (2016), mas isso também depende do conhecimento e da maturidade dos alunos, por isso o alerta de Balacheff (2000) quanto a essas questões.

Finalmente, Balacheff (2000) afirma que a análise de Lakatos nos leva a esperar que, como consequência de uma refutação, será obtida uma das seguintes decisões: um retorno à conjectura quer pela modificação ou pela rejeição global; um retorno à resolução do problema ou a prova que já foi explicitado, principalmente com o objetivo de encontrar o lema oculto que seria então integrado na conjectura sob a forma de uma condição. Essa rejeição também pode levar à rejeição da própria conjectura, ou a evidenciar a presença de equívocos. Sendo assim, essa análise dos fundamentos da conjectura pode levar à identificação da contradição ou erro fundamental da qual a refutação é meramente uma consequência; um retorno ao conhecimento subjacente ao problema em estudo ou a base racional da conjectura; e, finalmente, a discussão do contraexemplo com o objetivo de removê-lo ou mesmo negar seu status de contraexemplo.

Portanto, percebe-se que o trabalho de Balacheff (2000) foi verificar a aplicabilidade das ideias apresentadas por Lakatos (1978) sobre prova e refutações, confirmando assim que esse trabalho pode ser desenvolvido nas aulas de Matemática, tanto da Educação Básica quanto do Ensino Superior, levando em consideração o conhecimento e a maturidade dos alunos, retirando a ideia de uma Matemática pronta e acabada e apresentando-a de forma quase-empírica, mostrando que, antes da demonstração propriamente dita, há um processo heurístico pela busca de conjecturas, contra-exemplos, refinamentos, refutações, procedimentos empíricos, até se chegar a demonstração tal qual encontramos nos livros. Devemos retirar essa ideia de que a Matemática é um bicho de sete cabeças e que é apenas para os superdotados, e para isso faz-se necessário levar os alunos ao *fazer matemática*, a serem também responsáveis por sua aprendizagem e a estimulá-los a desenvolverem o raciocínio matemático.

3.5 TIPOS DE PROVAS

Ao distinguir as palavras explicar, provar e demonstrar, Balacheff (2000) supõe que exista a possibilidade de os alunos construírem, antes de dominar as demonstrações, provas de enunciados matemáticos e, por conta disso, ele está interessado em saber qual a natureza dessas provas, se é possível elucidar uma hierarquia da gênese da demonstração e quais são os meios de provocar sua eventual evolução. Assim, ele buscou analisar a natureza e a hierarquia das provas.

Balacheff (2000) conseguiu identificar dois tipos básicos de provas: as *provas pragmáticas* e as *provas intelectuais*. As primeiras são provas que recorrem à ação e a manifestação de algo, já as segundas, separadas da ação, se apoiam em formulações das propriedades em jogo e de suas relações. Ou seja, as provas pragmáticas são aquelas em que os sujeitos recorrem a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar determinado resultado. Enquanto que as provas intelectuais são aquelas em que o discurso a ser utilizado pelo aluno é teórico, não necessitando tomar observações experimentais como argumentos para validar uma conjectura.

Para o pesquisador, o desenvolvimento no terreno das provas intelectuais exige uma troca de posição, uma vez que o conhecimento que antes era tratado apenas na ação, exposição e observação, converte-se agora em um objeto de reflexões, discursos e debates. Contudo, é preciso mais do que isso para que o aluno seja capaz de elaborar provas formais e até demonstrações, pois a elaboração de uma demonstração necessita de um nível maior de conhecimentos, uma vez que ela deve se constituir em uma verdadeira teoria reconhecida como tal. Isto quer dizer que a demonstração na Matemática se fundamenta sobre um corpo de conhecimentos fortemente institucionalizado, sobre um conjunto de definições, de teoremas e de regras de dedução, cuja validade é aceita socialmente. Assim, esse princípio é um dos fundamentos do rigor matemático (BALACHEFF, 2000).

A transição de provas pragmáticas a provas intelectuais, especialmente a demonstração, se apoia também em três polos que interagem fortemente: o polo dos conhecimentos, o polo linguístico ou da formulação e o polo da validação ou dos tipos de racionalidade que sustentam as provas produzidas (BALACHEFF, 2000).

A partir de seus primeiros trabalhos de investigação, Balacheff (2000) conseguiu distinguir quatro tipos principais de provas pragmáticas e intelectuais que terão um lugar privilegiado na gênese cognitiva da demonstração: o *empirismo ingênuo*, a *experiência crucial*, o *exemplo genérico* e a *experiência mental*. O autor considera uma hierarquia hipotética desses níveis de prova, evidenciada pela ordem em que será apresentada. A posição de cada tipo de prova dentro dessa hierarquia é determinada pelo seu nível de exigência de generalidade e por seu nível de conceituação dos conhecimentos que exige.

De acordo com Balacheff (2000), o *empirismo ingênuo* consiste em assegurar a validade de um enunciado depois de tê-lo verificado em alguns casos. Esse modo de validação é rudimentar e insuficiente, como também é uma das primeiras formas do processo de generalização. O autor considera que o empirismo ingênuo constitui uma forma resistente de generalização. O pesquisador utiliza a expressão “experiência crucial” de Francis Bacon, que designa uma experimentação cujo resultado permite escolher entre duas hipóteses, sendo verdadeira somente uma delas.

A *experiência crucial* consiste em verificar uma proposição de um caso para o qual não é assumido que “se funciona agora, então funcionará sempre”. Isto é, o aluno afirmará a validade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar, como também realizará experiências e começará a tomar consciência de que busca por um resultado geral. A experiência crucial difere do empirismo ingênuo no sentido de que o indivíduo coloca explicitamente o problema da generalização e o resolve, aventurando-se na execução de um caso que reconhece tão pouco quanto possível (BALACHEFF, 2000).

Para Balacheff (2000), o *exemplo genérico* consiste na explicação das razões de validade de uma afirmação para a validação de operações ou transformações de um objeto como representante de uma determinada classe. A formulação libera as propriedades, características e estruturas de uma classe, sempre ligada à sua categoria e à exibição de um de seus representantes. Ou seja, o aluno busca uma generalização ainda baseada em exemplos, mas procura justifica-la com a teoria relacionada a esta proposição. Desse modo, o aluno justifica a partir de um exemplo, o que ele poderia ter feito teoricamente, utilizando incógnitas ou variáveis.

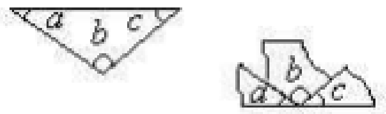
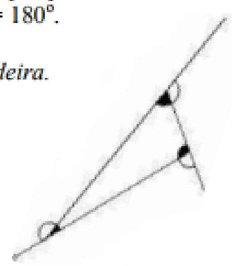
Balacheff (2000) afirma que a *experiência mental* se centra na ação, interiorizando-a e separando-a de sua execução sobre um representante em particular. O aluno afirma a validade de uma proposição de forma genérica e não faz mais referência ao caso particular, uma vez que a afirmação é elaborada para uma classe de objetos e a validação é sustentada pela teoria. Para o autor, quando se recorre à *experiência mental*, significa a marca verdadeira da transição das *provas pragmáticas* às *provas intelectuais*, na medida em que as provas passam de ações efetivas a ações interiorizadas (no sentido de Piaget) postas em prática.

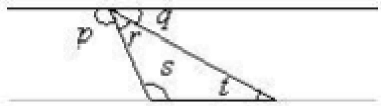
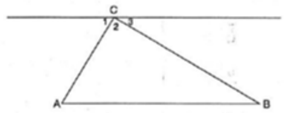
As ações interiorizadas se encontram na gênese das operações que serão necessárias para a elaboração de provas de um nível mais alto. Já as provas baseadas no *exemplo genérico* constituem um estado intermediário, na medida em que a decisão da natureza genérica do exemplo não pode ser feita exceto em virtude do uso feito do exemplo (BALACHEFF, 2000). Para o autor, esse uso do exemplo admite duas possibilidades: pode ser a esfera da execução das operações efetivas que asseguram a validade de um enunciado ou o meio para mostra-los, e, portanto, consideramos a categoria das *provas pragmáticas*; ou também pode proporcionar ao falante um meio para expressar sua prova e, então, a considerarmos a partir da categoria das *provas intelectuais*.

Aguilar Jr e Nasser (2012) compreendem que o empirismo ingênuo e a *experiência crucial* fazem parte do tipo de *prova pragmática*, uma vez que são construídos a partir de exemplos, casos particulares gerais e/ou desenhos. Já a *experiência mental* reside no tipo de *prova intelectual*, já que se concentra mais no discurso teórico, não necessitando mais o uso de exemplos para justificar a afirmação. Para os pesquisadores, o *exemplo genérico* transita entre os dois tipos básicos de prova, uma vez que o aluno está começando a generalizar uma proposição por meio de exemplos, assim como Balacheff (2000) sinalizou acima.

Sendo assim, para entendermos melhor esses quatro tipos de provas propostos por Balacheff (2000), consideremos o quadro abaixo (Quadro 9) composto pelas definições de cada tipo de prova e exemplos retirados da questão G1 do questionário sobre prova do projeto AProvaME (SILVA FILHO, 2007, p. 36), que diz respeito às possíveis provas para a seguinte afirmação: *Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º*:

Quadro 9 - Os tipos de prova propostos por Balacheff, suas descrições e exemplos

Tipos de Provas (Balacheff, 2000)	**Descrição (Balacheff, 2000)**	**Exemplo (Silva Filho, 2007, p. 36)**
Empirismo ingênuo	Consiste em afirmar a validade de uma conjectura após a observação de um pequeno número de casos. Esse tipo de prova é o mais rudimentar e uma das primeiras formas do processo de generalização.	Resposta de Dario Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela. a b c total 110 34 36 180 95 43 42 180 35 72 73 180 10 27 143 180 Em todos eles a soma foi de 180°. *Então Dario diz que a afirmação é verdadeira*
Experiência crucial	Consiste em afirmar a validade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar. Aqui, o aluno realiza experiências e toma consciência de que busca por um resultado geral, ou seja, o aluno começa a levantar a generalização do problema de modo explícito.	*Resposta de Amanda* Eu recorto os ângulos e junto os três.  Eu obtenho uma linha reta que é 180°. Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece. *Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.*
Exemplo genérico	Aqui, o aluno trabalha sobre um objeto particular, mas tem em mente a classe de objetos do qual o primeiro é um representante. Ou seja, o aluno busca uma generalização baseada em exemplos, mas procura justificá-la com a teoria relacionada a esta proposição.	Resposta de Edu Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360°. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540°. 540° – 360° = 180°. *Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.* 

Experiência mental	Consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica, porém baseada no estudo de alguns casos específicos. Aqui, o aluno não faz mais referência ao caso particular, a afirmação é elaborada para uma classe de objetos e a validação é inteiramente sustentada pela teoria.	Resposta de Cíntia Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:  Afirmações — Justificativa $p = s$.......................... Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais. $q = t$.......................... Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais. $p + q + r = 180^o$.......... Ângulos numa linha reta. $\therefore s + t + r = 180^o$ *Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.*
Demonstração	Trata-se de uma série de enunciados que se organizam seguindo um conjunto bem definido de regras. O que caracteriza as demonstrações como gênero de discurso é a sua forma estritamente codificada.	Hipótese — Tese ΔABC é um triângulo $\Rightarrow$ $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ Consideremos o triângulo ΔABC. Pelo vértice C, tracemos uma reta paralela ao lado AB. Numeremos os ângulos formados com o vértice C, como indicado na figura abaixo.  Temos que $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180°$, pois trata-se de ângulos suplementares. Como AC é transversal às duas paralelas, então $\hat{1} = \hat{A}$, uma vez que são ângulos alternos internos. Analogamente, temos que BC é transversal às duas paralelas e por isso podemos afirmar que $\hat{3} = \hat{B}$. Logo, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{1} + \hat{3} + \hat{2} = 180°$. ■

Fonte: autoria própria

Balacheff (2000) argumenta que, na transição da *experiência mental* para a *demonstração*, devem ser reconhecidos diferentes tipos de *provas intelectuais* que diferem tanto em seus níveis de descontextualização, atemporalidade e despersonalização, como em seu nível de formalismo. O autor afirma que ainda falta fazer uma análise dessas provas e sua tipologia. Do ponto de vista da *demonstração*, entendida como estrutura do discurso, o nível de formalização dos conhecimentos que coloca em prática é um ponto crucial. Assim, ainda é preciso mais estudos para verificar o que acontece durante esse processo de construção das provas e demonstrações e se realmente há outros tipos de provas entre a *experiência mental* e a *demonstração*.

A partir das pesquisas de Balacheff (2000), percebe-se que há várias possibilidades e tipos de provas que podem e devem ser trabalhadas, tanto no Ensino Superior quanto na Educação Básica. Faz-se necessário promover essa hierarquia proposta por Balacheff (2000), desde os anos iniciais, de modo que facilite o desenvolvimento cognitivo dos alunos e o seu raciocínio matemático, propondo atividades de argumentação, justificação, provas e demonstração. Para que isso aconteça, é preciso que os professores e futuros professores tenham conhecimento dessa hierarquia e dessa proposta para o aprendizado de provas e demonstrações, alertando que eles levem sempre em consideração o grau de maturidade de seus alunos e os conhecimentos que eles possuem da Matemática.

Vale ressaltar também que é necessário que os professores e futuros professores percebam que o desenvolvimento cognitivo de seus alunos quanto às provas deve ser apresentado em formas potencialmente compreensíveis por eles, ou seja, cada aluno irá apresentar uma justificativa ou uma prova para determinada afirmação de acordo com o seu desenvolvimento cognitivo. Isto quer dizer que cada aluno irá produzir justificativas ou provas diferenciadas, por isso o professor não pode considerar somente a dele ou somente a do livro-texto como corretas, pois cada qual estará fazendo corretamente dentro da sua maturidade e de seus conhecimentos matemáticos.

Essas ideias são fundamentais para o que pretendemos investigar, uma vez que Balacheff (2000) argumenta que os tipos de prova e a transição entre eles se apoiam em três polos que interagem fortemente: o polo dos conhecimentos, o polo linguístico e o polo da validação. Ou seja, a partir do nível do pensamento dos alunos, poderemos verificar e encontrar diferentes construções de provas produzidas por eles, o que nos possibilita estabelecer uma articulação entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff. Além disso, é por conta dessas orientações que o pesquisador está sempre enfatizando a importância de se conhecer inicialmente a racionalidade dos alunos e as dificuldades que possuem, para somente após isso buscar incentivá-los a fazer experimentações, levantar conjecturas, refutá-las, argumentar com os pares, construir provas, dispondo assim dos meios para se *fazer matemática*.

Portanto, não devemos restringir que a forma válida de uma prova seja somente a formal, pois o grau de conhecimento varia de aluno para aluno e por isso se faz tão importante o conhecimento desses tipos de provas, pois auxiliará na seleção das atividades e na correção das produções desses alunos. Precisamos também, mesmo compreendendo a sua maturidade e os seus conhecimentos, deixar claro para eles que os exemplos não constituem efetivamente uma justificativa para uma afirmação, pois pode haver um contraexemplo que virá a falsear a sua prova. Por isso é importante trabalhar, inicialmente, com esses tipos de prova para, em seguida, ir elevando os níveis das atividades e da linguagem adotada, a fim de que os alunos comecem a perceber a necessidade da generalização e consigam construir uma demonstração.

3.6 AS FUNÇÕES DA DEMONSTRAÇÃO

Sabemos que a demonstração é o coração do pensamento matemático, do argumento dedutivo, tendo sua base teórica baseada no processo de provar, diferenciando assim a Matemática das Ciências Empíricas. É necessário que os alunos tomem conhecimento de sua importância, levando os professores a propiciar situações de aprendizagem que instiguem isso nos alunos, estimulando-os a buscar uma justificativa ou uma prova.

Para isso, os futuros professores devem ter a clareza, o motivo e a necessidade dessa pertinência, pois para os alunos não é necessário construir uma prova formal para convencê-los da veracidade de uma afirmação, já que alguns exemplos bastam para comprová-la. Por isso é tão fundamental que os professores e futuros professores conheçam os tipos de provas propostos por Balacheff (2000), como também conheçam atividades condizentes com esses tipos e saibam trabalhar e estimular o raciocínio de seus alunos, de modo a propiciar o *fazer matemática* na sala de aula.

De Villiers (2001) argumenta que os alunos, muitas das vezes, perguntam o porquê de terem que demonstrar determinada afirmação, uma vez que eles não reconhecem a necessidade de uma demonstração lógica dos teoremas da Geometria, especialmente quando essas demonstrações poderiam ser feitas por exemplos ou vistas visualmente por terem um caráter óbvio, podendo assim ser feitas empiricamente. O pesquisador afirma que Freudenthal (1958) enfatiza que a dificuldade dos alunos com a demonstração não deve ser vista apenas por falta de desenvolvimento cognitivo, mas também ao fato de eles não compreenderem a função (significado, objetivo e utilidade) de uma demonstração.

Isso se deve ao fato de, tradicionalmente, utilizarmos a demonstração apenas como verificação da correção das afirmações matemáticas, sendo usada principalmente para remover a dúvida pessoal ou a de cépticos (DE VILLIERS, 2001). A função de verificação também está relacionada ao fato do rigor dedutivo sofrer mudanças e tornar-se mais sofisticada com a passagem do tempo. O pesquisador argumenta que o progresso do rigor acontece a partir da dúvida do rigor em que ele acredita naquele momento, enfatizando que sem essa dúvida não teria nada que levasse outras pessoas a prescrever para si próprias, novos critérios de rigor.

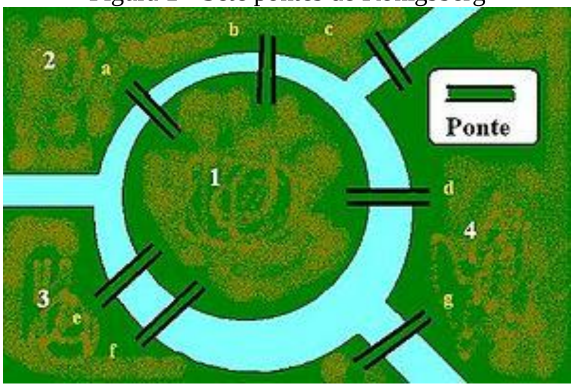
Todavia, De Villiers (2001) argumenta que a função de verificação/convencimento não deve ser tida como a principal função da demonstração, pois a convicção em Matemática é muitas vezes inteiramente obtida por meios que não consistem em seguir uma demonstração lógica. Por conta disso, a partir de suas pesquisas e estudos, o pesquisador propõe seis tipos de funções da demonstração, sem que a ordem signifique ordem de importância, a saber: *verificação*, *explicação*, *sistematização*, *descoberta*, *comunicação* e *desafio intelectual*.

A demonstração como processo de *verificação/convencimento* diz respeito à verdade de uma afirmação, ou seja, o aluno busca convencer a si próprio e aos outros por meio da veracidade de uma afirmação. Esta é a função mais evidente da demonstração e a mais utilizada no ensino da Matemática. Quanto a essa função, De Villiers (2001) argumenta que, com raras exceções, os professores de Matemática parecem acreditar que a demonstração é o único meio que fornece a certeza, sendo a única autoridade para estabelecer a validade de uma conjectura. Entretanto, esse pesquisador afirma que a demonstração não é um requisito necessário para a convicção, pois essa é frequentemente um pré-requisito para a procura da demonstração.

Além disso, De Villiers (2001) discute que na investigação matemática real, a convicção pessoal depende geralmente de uma combinação de intuição, de verificação quase-empírica e da existência de uma demonstração lógica, não necessariamente rigorosa. Assim como propõe o modelo falibilista de Lakatos (1978), o pesquisador acrescenta que, normalmente, os matemáticos, ao investigarem a validade de uma nova conjectura, não observam apenas as demonstrações, mas buscam também encontrar contraexemplos por processos quase-empíricos que venham a revelar contradições, erros ou hipóteses não assumidas. Esses contraexemplos criados obrigam os matemáticos a reconstruírem as demonstrações anteriores ou a construírem novas demonstrações.

A nosso ver, podemos perceber uma utilização da função de verificação para o caso das sete pontes de Königsberg, um famoso problema histórico da Matemática e que foi resolvido por Leonhard Euler em 1736, cuja solução negativa ajudou a originar a Teoria dos Grafos. O problema é baseado na cidade de Königsberg, cortada pelo Rio Prególia, onde há duas grandes ilhas que, juntas, formam um complexo que na época continha sete pontes (Figura 1). Atualmente, apenas duas pontes são da época de Euler.

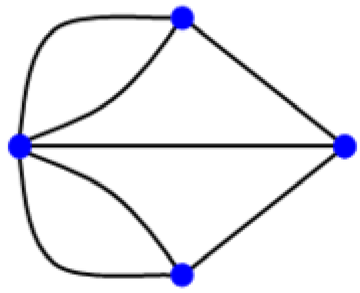
Figura 1 - Sete pontes de Königsberg



Fonte: Wikipedia

Em sua época, muito se discutia nas ruas da cidade sobre a possibilidade de atravessar todas as pontes sem repetir nenhuma. Havia, inclusive, se tornado uma lenda popular a possibilidade de tal especulação quando, em 1736, Euler provou que não existia caminho que possibilitasse tais restrições. Inferimos que Euler tenha se utilizado, para provar a impossibilidade da afirmação, de experiências quase-empíricas e pela convicção de que essa afirmação não seria válida, utilizando contraexemplos e demonstração. Para isso, resumidamente, Euler transformou os caminhos em linhas e suas intersecções em pontos, criando possivelmente o primeiro grafo da história (Figura 2), percebendo assim que só seria possível atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponte se houvesse exatamente zero ou dois pontos de onde saísse um número ímpar de caminhos.

Figura 2 - Grafo estilizado das pontes



Fonte: Wikipedia

A demonstração como processo de *explicação* diz respeito ao fornecimento de explicações quanto ao fato de uma afirmação ser verdadeira, ou seja, a compreensão de o porquê essa afirmação é verdadeira, proporcionando assim o entendimento dos motivos da validade da afirmação. Quanto a essa função, De Villiers (2001) afirma que embora as verificações quase-empíricas forneçam meios para se atingir o alto nível de confiança na validade de uma conjectura, esses processos muitas vezes não fornecem uma explicação satisfatória da razão pela qual ela pode ser verdadeira. Ou seja, essas verificações apenas confirmam que a demonstração é verdadeira, aumentando a nossa confiança, mas não proporciona a sensação psicológica de esclarecimento.

Para essa função da demonstração, De Villiers (2001) exemplifica com dois casos parecidos no transcorrer das descobertas matemáticas e físicas. O pesquisador argumenta que as demonstrações que vieram após as descobertas experimentais de Feigenbaum em Geometria Fractal teriam como função a de explicação e não, de modo algum, de verificação; assim como Newton estava tentando ir além da validação das descobertas de Kepler sobre as órbitas dos planetas. Tanto os matemáticos posteriores a Feigenbaum como Newton, estavam buscando além da validade dos resultados, a explicação para tais fatos. Para De Villiers (2001), há um mundo de diferença entre validação e explicação.

A demonstração como processo de *descoberta* diz respeito à possibilidade de evidenciar novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura, ou seja, a busca de uma demonstração não consiste apenas em um meio de verificar um resultado que já foi descoberto, mas também pode ser visto como um processo que implique em uma atividade investigativa e de criatividade, possibilitando ao aluno a exploração, a análise, a descoberta, a criação e a invenção de novos resultados (GRINKRAUT, 2009).

Além disso, De Villiers (2001) argumenta que frequentemente os teoremas são na maior parte das vezes descobertos a partir da intuição e de métodos quase-empíricos, antes de serem verificados por meio de demonstrações. Entretanto, há inúmeros exemplos na história da Matemática de novos resultados que foram descobertos ou inventados por processos puramente dedutivos. Para o pesquisador, em um contexto de processos dedutivos formais, como por exemplo a axiomatização ou a criação de novas definições, a demonstração pode sim levar a novos resultados. Para os matemáticos profissionais, a demonstração não é apenas um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas também um processo de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados.

Para essa função da demonstração, De Villiers (2001) explicita o teorema de Ceva (1678), descoberto provavelmente em um processo dedutivo semelhante a partir da generalização da demonstração da concorrência das medianas de um triângulo, e não por meio de construções e medições concretas. Além desse exemplo, conseguimos também perceber essa função da demonstração no processo dedutivo gerado ao se tentar comprovar a validade do Axioma das Paralelas, ou Quinto Postulado de Euclides, no qual não conseguiram comprovar a validade da afirmação feita por Euclides e com a sua negação originou-se as Geometrias não-Euclidianas, baseadas em um sistema axiomático distinto da Euclidiana.

A demonstração como processo de *sistematização* diz respeito à organização dos vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas. De Villiers (2001) comenta que a demonstração é uma ferramenta indispensável para transformar em um sistema dedutivo de axiomas, definições e teoremas, formando assim um conjunto de resultados conhecidos. Além disso, o pesquisador argumenta que uma sistematização dedutiva ajuda a identificar inconsistências, argumentos circulares e hipóteses escondidas; unifica e simplifica as teorias matemáticas, pois integra e liga entre si afirmações, teoremas e conceitos que não estão relacionados; fornece uma perspectiva global ou vista de conjunto de um tópico;

constitui uma ajuda para as aplicações tanto dentro como fora da Matemática; e conduz muitas vezes a sistemas dedutivos alternativos que fornecem novas perspectivas.

De Villiers (2001) argumenta que dentro dessas possibilidades nessa função da prova, há também elementos de verificação, porém o principal objetivo não é verificar se certas afirmações são realmente verdadeiras, mas sim organizar afirmações isoladas e não relacionadas logicamente, que já se sabe ser verdadeiras, em um todo unificado e coerente. A partir dessas discussões sobre a função de sistematização de uma demonstração, podemos percebê-la no método de provas e refutações de Lakatos (1978), que permite, a partir de testes quase-empíricos ou a intuição, elaborar conjecturas, refutá-las, procurar contraexemplos, a fim de refinar e construir uma demonstração mais sólida e consistente.

A demonstração como meio de *comunicação* diz respeito à aquisição do conhecimento matemático, ou seja, a demonstração possibilita a interação ou a comunicação entre todos os envolvidos, promovendo uma negociação do significado entre os matemáticos, os professores e os alunos. De Villiers (2001) contribui com essa função de demonstração afirmando que a demonstração é uma forma de discurso, proporcionando um meio de comunicação entre pessoas que fazem matemática. Isto quer dizer que um dos valores concretos da demonstração é a criação de um fórum para um debate crítico, sendo um modo único de comunicar resultados matemáticos entre os matemáticos profissionais, entre professores e alunos, ou entre os próprios alunos.

De Villiers (2001) também argumenta que ao colocar a demonstração como forma de interação social, auxilia na comunicação e disseminação do conhecimento matemático na sociedade. A filtragem social de uma demonstração por meio dessas várias comunicações contribui para o seu refinamento e a identificação de erros, bem como por vezes para a sua rejeição devido à descoberta de um contraexemplo. Assim, conseguimos perceber a contribuição dessa função da demonstração na própria comunidade matemática ao receberem demonstrações de vários teoremas que, por vezes, ainda não foram demonstrados. Um exemplo desse longo processo de refinamento por meio dos matemáticos e da comunidade matemática diz respeito ao Último Teorema de Fermat, conjecturado por Pierre de Fermat, em 1637, tratando-se de uma generalização do famoso Teorema de Pitágoras, em que Fermat substituiu o expoente 2 na fórmula de Pitágoras por um número qualquer maior do que 2 ($x^n + y^n = z^n$) e afirmou que, nesse caso, a equação não tem solução, se n for um inteiro maior do que 2 e x, y, z naturais.

Fermat relatou ter desenvolvido um teorema para provar essa hipótese, porém ele nunca o publicou. Essa conjectura ficou por demonstrar e constituiu um verdadeiro desafio para os matemáticos ao longo dos tempos, apesar de parecer simples e o enunciado ser fácil de entender. Em 1665, Fermat esboçou uma demonstração para o caso de $n = 4$. Em 1753, Euler demonstrou o caso para $n = 3$. Em 1825, Adrien-Marie Legendre demonstrou para o caso $n = 5$ e em 1832 Dirichlet demonstrou o caso para $n = 14$. Em 1843, Ernst Kummer afirmou ter provado o teorema, porém Dirichlet encontrou um erro. Em 1980, o americano Wagstaff demonstrou que o teorema é válido para todo o n até 125 000. Em 1988, o japonês Yoichi Miyaoka apresentou uma solução para o problema, porém com alguns erros. Em 1993, o britânico Andrew Wiles publica uma demonstração do teorema, porém ainda com alguns erros. Somente em 1995, Andrew Wiles, com a colaboração de Richard Taylor, finalmente publica a demonstração definitiva do teorema.

Percebemos então a contribuição da comunidade matemática para verificar a coerência da demonstração, como meio de comunicação entre os matemáticos profissionais. Após 358 anos da formulação do Último Teorema de Fermat, Andrew Wiles conseguiu, enfim, demonstrá-lo e por isso o teorema passou a ser chamado Teorema de Fermat-Wiles. Além da possibilidade de comunicação entre os matemáticos, a busca pela solução desse teorema propiciou a criação da Teoria Algébrica dos Números, no século XIX, e do Teorema de Shimura-Taniyama-Weil no século XX. Além da função da comunicação, percebemos a participação da função da descoberta, já que a partir da busca pela demonstração do Último Teorema de Fermat, possibilitou a descoberta de uma teoria e de um teorema.

Por fim, a demonstração como *desafio intelectual* diz respeito à realização pessoal e a gratificação resultante da construção de uma demonstração, ou seja, há o desafio de demonstrar alguma afirmação que se sabe que existe e que é verdade, porém essa função da demonstração enfatiza o caminho a ser percorrido, valorizando como o processo e a argumentação ao invés do resultado final (GRINKRAUT, 2009). De Villiers (2001) argumenta que fazer demonstrações pode ser comparado com o desafio físico de completar uma maratona ou o triatlo, pois nos dois casos gera satisfação e realização pessoal.

A demonstração então cumpre uma função gratificante e de realização própria, sendo por isso um campo de teste para a energia intelectual e engenho do matemático. Sabemos que o processo de construção de uma demonstração gera um desafio intelectual para quem a pratica, porém podemos tomar como exemplo desse processo de desafio intelectual para os matemáticos profissionais ao longo dos anos, o Quinto Postulado (ou Axioma das Paralelas) de Euclides e o Último Teorema de Fermat, que demoraram muitos anos para serem demonstrados e proporcionaram um desafio intelectual para os que tentaram, assim como proporcionaram uma comunicação entre esses matemáticos que buscaram ou não demonstrá-los e a descoberta de novas teorias que revolucionaram o conhecimento matemático da época.

De Villiers (2001) ressalta que, embora ele apresente essas seis funções da demonstração separadamente, mostrando as características que as distinguem, muitas das vezes essas funções estão todas misturadas em casos específicos. Em alguns casos, algumas funções predominam mais sobre as outras, enquanto que em outros casos certas funções não estarão presentes. Conseguimos perceber essa afirmação do pesquisador nos exemplos apresentados para cada uma dessas funções, nos quais, além de fazerem parte da referida função, também percebemos outros tipos de funções, sendo por isso impossível fragmentá-las. Além disso, De Villiers (2001) argumenta que, de modo algum, essa lista de funções está completa, apresentando que também poderíamos juntar, dentro dessa lista de funções, uma função estética ou uma de memorização, ou ainda de desenvolvimento algorítmico.

Portanto, por meio dessas discussões, percebemos o quão importante é conhecermos essas funções da demonstração, não apenas a de verificação, mas todas as outras e, a partir delas, trabalhar as provas e demonstrações com nossos alunos, apresentando o seu processo de construção, a explicação de cada passo dado, as possíveis descobertas intrínsecas a esse processo, a verificação das conjecturas e dos teoremas levantados, os desafios que foram enfrentados, a sistematização de todo esse processo e a possibilidade de comunicação entre os matemáticos profissionais ou entre os professores e alunos.

Esses conhecimentos são importantes em nossa pesquisa no sentido de nos auxiliar a escolher adequadamente as atividades a serem aplicadas aos licenciandos, com o intuito de ir além da possibilidade da verificação das afirmações matemáticas. Além disso, possibilitar uma visão mais ampla e profunda acerca da utilização das provas e demonstrações na Educação Básica e no Ensino Superior, como também nos proporcionar uma importante discussão, a partir das respostas dos licenciandos aos questionários, acerca da relevância de se trabalhar com as provas e demonstrações de teoremas matemáticos na Educação Básica.

No próximo capítulo, discutiremos as possíveis articulações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff.

CAPÍTULO 4 – POSSÍVEIS ARTICULAÇÕES ENTRE OS NÍVEIS DE PENSAMENTO DE VAN HIELE E OS TIPOS DE PROVA DE BALACHEFF

Antes de fazermos as possíveis articulações de forma mais específica entre os níveis de pensamento de van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff, trazemos algumas discussões pertinentes acerca de a relação desses níveis e o processo de justificar em Matemática, a fim de embasar as articulações que apresentaremos mais à frente.

Battista e Clements (1995), em seu artigo, apresentam uma relação entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e o processo de justificativa e prova, abordada por Van Dormolen (1977). Esse pesquisador considera que no nível 1 de van Hiele, os casos únicos são justificados e as conclusões são restritas ao exemplo específico para o qual a justificação é dada. No nível 2, as justificativas e as conclusões podem ser feitas para casos específicos, mas referem-se a coleções de objetos semelhantes. Somente após o nível 3 é que os alunos podem justificar as declarações com base em argumentos que estejam em conformidade com as normas aceitas, ou seja, após o nível 3, os alunos já são capazes de construir provas formais.

Isto quer dizer que antes desse nível, é possível trabalhar processos de argumentações, justificações e provas empíricas com os alunos, a partir de atividades que desenvolvam seu raciocínio matemático. Aliados a isso, Pietropaolo (2005) afirma que o modelo de van Hiele possui estreita ligação com a habilidade de justificar em Matemática; Nasser e Tinoco (2003) argumentam que nos dois primeiros níveis, os alunos não duvidam da validade de suas observações empíricas e por isso não percebem que a demonstração é necessária; e Senk (1989) acrescenta que a demonstração deve ser desenvolvida apenas em salas de aula cujos alunos estejam pelo menos no nível 3, pois antes disso os alunos não conseguirão acompanhar o professor e poderão não perceber a importância da demonstração na Matemática.

Outro pesquisador que discute um pouco sobre os níveis de van Hiele e o raciocínio dedutivo e a prova é De Villiers (1987). Para ele, o raciocínio dedutivo ocorre apenas no nível 3, pois é quando a rede de relações/implicações lógicas entre propriedades é estabelecida, enquanto que o significado de dedutivo formal e demonstração só é entendido no nível seguinte (o quarto). Os alunos que estão nos níveis 1 e 2 em relação a um tópico específico não irão entender instruções direcionadas às atividades e significados dos níveis mais altos. Como eles não possuem essa rede de implicações lógicas, acabam experimentando uma determinada prova como uma tentativa de verificação do resultado. No entanto, como ele não duvida da validade de suas observações empíricas, então experimenta tal prova como sem sentido, pois está provando o que já lhe é óbvio.

Todos os pesquisadores apresentados anteriormente discutem a mesma questão, indicando que as provas formais só devem ser trabalhadas a partir do nível 3. Encontramos nos artigos dos pesquisadores espanhóis Gutiérrez e Jaime aportes que norteiam a nossa articulação entre os níveis de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff, uma vez que eles trabalham com quatro processos-chave dentro dos quatro primeiros níveis de van Hiele, em que um deles diz respeito à *prova* de propriedades ou declarações, com o intuito de convencer alguém da veracidade de uma declaração, nos permitindo com isso estabelecer uma articulação mais específica entre os níveis de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff.

Jaime e Gutiérrez (1990) descrevem os quatro primeiros níveis de pensamento geométrico de van Hiele, pois seu trabalho foi realizado com alunos dos Ensinos Fundamental e Médio. No nível 1, os alunos percebem as figuras geométricas em sua totalidade, compreendendo-as como objetos individuais, não sendo capazes de generalizar as características que reconhecem em uma figura para outras de sua mesma classe. Aqui eles se limitam a descrever a aparência física das figuras e os reconhecimentos, diferenciações ou classificações de figuras são baseados em similaridades ou diferenças físicas globais entre eles. Geralmente os alunos não reconhecem explicitamente as partes das quais as figuras são compostas ou suas propriedades matemáticas.

No nível 2, segundo Jaime e Gutiérrez (1990), os alunos percebem que as figuras geométricas são formadas por partes ou elementos e que são dotadas de propriedades matemáticas, podendo então descrever as partes que compõem uma figura e declarar suas propriedades, porém de maneira informal. Além de reconhecer as propriedades matemáticas observando as figuras e seus elementos, os alunos podem deduzir outras propriedades, generalizando-as a partir da experimentação. No entanto, eles ainda não são capazes de relacionar algumas propriedades a outras, de modo que não podem fazer classificações lógicas de figuras com base em seus elementos ou propriedades.

Os pesquisadores apresentam duas diferenças importantes do nível 2 para o 1, uma é que os alunos mudaram sua maneira de olhar as figuras geométricas, pois já estão conscientes de que elas são formadas por elementos e portadoras de certas propriedades; e a outra está no desenvolvimento dos alunos da capacidade de reconhecer que as figuras concretas que estão manipulando são (ou podem ser) representantes de algumas famílias. Assim, o nível 2 é o primeiro nível que oferece um raciocínio que Jaime e Gutiérrez (1990) chamam de “matemático”, pois é o primeiro em que os alunos são capazes de descobrir e generalizar, necessariamente por meio da observação e manipulação, propriedades que eles ainda não conheciam. No entanto, essa capacidade de raciocínio ainda é um pouco limitada.

No nível 3, Jaime e Gutiérrez (1990) abordam que a capacidade de raciocínio formal (matemático) dos alunos começa a ser desenvolvida, uma vez que eles já são capazes de reconhecer que algumas propriedades são deduzidas de outras e descobre essas implicações, conseguindo classificar logicamente as diferentes famílias de figuras a partir de suas propriedades ou relações já conhecidas. Contudo, seu raciocínio lógico ainda continua apoiado pela manipulação. Nesse nível, os alunos podem fornecer definições matematicamente corretas e entendem o papel das definições e os requisitos de uma definição correta. Eles podem entender uma demonstração explicada pelo professor ou desenvolvida no livro, mas ainda não são capazes de construí-la sozinhos e por isso ainda não entendem a estrutura axiomática da Matemática. Como a capacidade de raciocínio já está superior com relação ao nível 2, então eles já adquiriram a habilidade de conectar propriedades logicamente diversas das mesmas ou de diferentes figuras, como também já são capazes de classificar de forma inclusiva as figuras geométricas e podem dar definições matematicamente conectadas, sem redundâncias.

Jaime e Gutiérrez (1990) afirmam que embora esse avanço seja importante, é apenas um passo intermediário na estrada que leva a uma compreensão completa dos sistemas axiomáticos formais que sustentam a Matemática, o que será alcançado no nível 4. Assim, no nível 3, a capacidade dos alunos se limitará a fazer pequenas deduções, ou seja, simples implicações, não podendo por exemplo realizar a técnica seguida para fazer a demonstração completa de um teorema. Ao lado dessa incapacidade dos alunos de compreender as manifestações, tem-se um sentimento de que as demonstrações não são necessárias, pois para eles é suficiente que o teorema em questão seja provado em um número razoavelmente grande de casos. Os pesquisadores abordam que uma reação típica dos alunos do nível 3 ou abaixo é que, a pedido do professor para mostrar algumas propriedades, eles o repreendem questionando o porquê de se provar isso, uma vez que eles já sabem que é verdade.

No nível 4, de acordo com Jaime e Gutiérrez (1990), os alunos podem entender e executar o raciocínio lógico formal e as provas formais já têm significado para eles e sentem sua necessidade como um dos meios de verificar a validade de uma afirmação de forma genérica. Além disso, eles já entendem a estrutura axiomática da Matemática, compreendendo o significado e a utilidade de termos indefinidos, axiomas e teoremas, como também aceitam a possibilidade de alcançar o mesmo resultado a partir de premissas diferentes, ou seja, a existência de provas alternativas do mesmo teorema, como também a existência de definições equivalentes do mesmo conceito. Nesse nível, os alunos poderão desenvolver provas formais das propriedades que anteriormente faziam de maneira informal, bem como descobrir e provar novas propriedades mais complexas. Além disso, serão capazes de reconhecer que as diferentes partes da Geometria que eles conhecem, tanto planas quanto espaciais, são na verdade partes de um único sistema formal baseado nos postulados de Euclides.

Essa descrição proposta por Jaime e Gutiérrez (1990) corrobora as discussões anteriores e confirma a ideia de que as provas formais são possíveis somente após o nível 3 de van Hiele. A partir de uma das características do modelo de van Hiele, Jaime e Gutiérrez (1990) descrevem a relação existente entre seus níveis e linguagem, pois para eles as diferentes habilidades de raciocínio associadas aos seus quatro primeiros níveis não refletem apenas na maneira de os alunos resolverem problemas propostos, mas também no modo como eles expressam as suas ideias e no significado dado a determinado vocabulário. Jaime (1993) também discute sobre essa relação, argumentando que cada nível tem sua linguagem própria, significando não apenas as palavras ou construções gramaticais usadas, mas também o significado dado a elas. Para a pesquisadora, essa característica explica o mal-entendido entre duas pessoas que usam "idiomas" de diferentes níveis e isso é um fenômeno que ocorre frequentemente nas salas de aula da Educação Básica ou do Ensino Superior entre professor e aluno, quando o professor coloca um problema do qual ele espera uma resposta correspondente ao quarto nível, mas o aluno ainda está no segundo ou terceiro nível de raciocínio e resolve o problema por meio de um exemplo ou de um raciocínio intuitivo.

Dentro dessa perspectiva, Jaime e Gutiérrez (1990) afirmam que a palavra "demonstração" tem diferentes significados para as pessoas que raciocinam em diferentes níveis. No nível 1 de van Hiele, a palavra demonstração não tem significado matemático, o que geralmente é traduzido no raciocínio mais disparatado. Para um aluno de nível 2, demonstrar consiste simplesmente em verificar que a afirmação é verdadeira em alguns casos, mesmo em apenas um, fazendo as medidas apropriadas com alguma ferramenta, sendo então suficiente para aceitar a verdade da afirmação. No nível 3, essa palavra já tem um significado próximo ao dado pelos matemáticos: as demonstrações são formadas pelo raciocínio lógico, embora seus argumentos ainda sejam informais, baseados na observação de exemplos concretos. Por fim, no nível 4, a palavra demonstração já tem o significado usual entre os matemáticos, conseguindo construir provas formais que levem em consideração a teoria subjacente às afirmações. Ou seja, provavelmente um aluno do nível 4 fará a mesma demonstração do nível 3, seguindo os mesmos passos, mas agora ele justificará as igualdades baseadas em outras propriedades matemáticas já conhecidas (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990).

Além de comprovarmos mais uma vez a ligação entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e o processo de justificativa e prova, infere-se que Jaime e Gutiérrez (1990) consideram as palavras *prova* e *demonstração* como sinônimas e que quando eles abordam sobre *prova* diz respeito ao processo de provar propriedades ou declarações com o intuito de convencer alguém da veracidade de uma declaração. Ou seja, utilizando apenas a função de *verificação* ou *convencimento* proposta por De Villiers (2010). Por isso, aqui ao trazermos as indicações e comentários desses pesquisadores estaremos considerando essas palavras conforme o entendimento deles, uma vez que estamos discutindo as suas ideias.

Ainda sobre esse trabalho de descrição dos níveis de pensamento geométrico de van Hiele, Jaime e Gutiérrez (1994) descrevem quatro principais processos-chave dentro dos quatro primeiros níveis, não considerando o nível 5, pois sua pesquisa foi realizada com alunos dos Ensinos Fundamental e Médio. Os pesquisadores descrevem esses processos-chave da seguinte maneira: *identificação* da família a que um objeto geométrico pertence; *definição* de um conceito, entendido como a utilização de determinadas situações e a formulação de uma classe de objetos geométricos; *classificação* de objetos geométricos em diferentes famílias; e *prova* de propriedades ou declarações, com o intuito de convencer alguém da veracidade de uma declaração. Esses processos-chave identificados pelos pesquisadores contribuem ainda mais para uma classificação adequada do nível de pensamento geométrico do aluno.

De acordo com Jaime e Gutiérrez (1994), no nível 1 a identificação das figuras é feita a partir de suas características físicas globais, tais como aspecto, tamanho dos elementos, posição, etc. Como esses alunos levam em consideração somente os atributos a objetos físicos de maneira global ou a propriedades não-matemáticas, então eles não são capazes de ler uma definição matemática, pois para eles o conceito já é a própria definição. Para classificar, os alunos utilizam o mesmo tipo de propriedades das figuras que nos processos anteriores, pois não são capazes de aceitar quaisquer relações entre duas famílias diferentes nem, muitas vezes, entre dois elementos da mesma família com aspecto físico bastante diferente. Nesse nível não há indícios de prova.

No nível 2, segundo Jaime e Gutiérrez (1994), os alunos já conseguem identificar as figuras geométricas com base em suas propriedades matemáticas. Embora já prestem atenção às propriedades matemáticas, esses alunos podem ter problemas com algumas partículas lógicas ao ler ou declarar definições. Por isso, algumas vezes eles podem omitir uma propriedade necessária, que estão usando implicitamente e outras vezes acabam fornecendo uma lista com mais propriedades do que as necessárias. A classificação nesse nível é exclusiva, ou seja, os alunos não relacionam as famílias com base nos atributos fornecidos nas definições e quando recebem uma nova definição de determinado conceito, diferente da que já conheciam, eles não admitem a nova definição, pois estavam habituados a usar definições exclusivas e receberam as inclusivas. Os alunos desse nível provam a veracidade de determinada propriedade por meio de um ou alguns exemplos.

Jaime e Gutiérrez (1994) afirmam que no nível 3 os alunos já são capazes de interpretar e declarar definições, estando conscientes de que um conjunto necessário e suficiente de propriedades é importante e que adicionar mais propriedades à definição não resultará em uma melhor, ou seja, ao fornecer uma definição, os alunos tentam não ser redundantes. Eles já fazem classificações inclusivas com base nas propriedades declaradas nas definições dadas dos conceitos e são capazes de mudar de ideia quando novas definições são dadas, mesmo quando há uma mudança de exclusiva para inclusiva, ou vice-versa. Nesse nível, os alunos podem verificar a propriedade a partir de alguns exemplos, mas eles também procuram por alguma explicação informal baseada em propriedades matemáticas, ou os exemplos são selecionados.

Por fim, Jaime e Gutiérrez (1994) afirmam que no nível 4 os alunos já têm um melhor entendimento das definições e na capacidade de provar a equivalência de diferentes definições do mesmo conceito. Aqui eles já são capazes de fazer provas matemáticas formais e as figuras específicas são utilizadas apenas algumas vezes para ajudar a escolher as propriedades adequadas para a prova, mas eles já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário fazer uma sequência de implicações com base em propriedades já provadas.

Concordamos com as declarações feitas por Jaime e Gutiérrez (1994) e percebemos a conexão com as discussões trazidas anteriormente por Battista e Clements (1995), Pietropaolo (2005), Nasser e Tinoco (2003), Senk (1989) e Jaime e Gutiérrez (1990), confirmando que as provas formais só poderão ser trabalhadas e ensinadas a partir do nível 3 de van Hiele, embora nesse nível ainda seja feita informalmente, mas eles conseguem acompanhar o desenvolvimento delas pelo professor. A partir do nível 2, de acordo com Jaime e Gutiérrez (1990), o aluno começa a desenvolver seu raciocínio matemático, uma vez que ele busca provar a veracidade de afirmações por meio de um ou mais exemplos. E esse raciocínio continua a ser desenvolvido nos níveis anteriores, a partir do momento em que os alunos começam a estabelecer relações entre figuras e classes de famílias, a compreender as propriedades inclusivas de figuras geométricas e a perceber que busca por algo geral e não mais por meio de exemplos.

No que diz respeito ao processo-chave *reconhecimento/identificação*, Gutiérrez e Jaime (1998) argumentam que os alunos do nível 1 fazem atribuições físicas globais das figuras, pois eles às vezes usam o vocabulário geométrico, mas esses termos têm um significado mais visual do que matemático. Já os alunos do nível 2 ou superior são capazes de usar e reconhecer propriedades matemáticas. A capacidade de reconhecimento não discrimina entre os alunos nos níveis 2, 3 ou 4.

No segundo processo-chave definido por Gutiérrez e Jaime (1998), *definição*, os alunos do nível 1 não são capazes de usar determinadas definições matemáticas. As únicas definições que eles podem formular consistem em descrições de atributos físicos da figura que eles observam e talvez alguma propriedade matemática básica. Já os alunos no nível 2, quando recebem uma definição matemática e conhecem todas as propriedades contidas na definição, podem utilizá-la, porém esses alunos podem ter dificuldades ao usar algumas expressões lógicas, como *"e"*, *"ou"* ou *"pelo menos"*. Os alunos desse nível não entendem a estrutura lógica das definições, ou seja, os conjuntos de propriedades necessárias e suficientes do conceito definido e por isso quando são solicitados por uma definição que tenha sido aprendida por rotina, eles geralmente fornecem uma longa lista de propriedades, desconhecendo as redundâncias. Os alunos do nível 3 podem estabelecer relações lógicas entre propriedades matemáticas, são capazes de usar e formular definições e ao formular tentam não ser redundantes, embora possam aparecer redundâncias quando as relações entre as propriedades não consistem em implicações de um passo. O progresso dos alunos no nível 4 em relação aos do nível 3 consiste em uma melhor compreensão da estrutura lógica da Matemática, de modo que os primeiros admitem a existência de várias definições do mesmo conceito e podem comprovar sua equivalência.

No terceiro processo-chave, *classificação*, Gutiérrez e Jaime (1998) argumentam que os alunos no nível 1 podem entender apenas classificações exclusivas, pois eles não aceitam nem reconhecem qualquer tipo de relação lógica entre classes nem, muitas vezes, entre dois elementos da mesma classe com aparência física bastante diferente. Já os alunos do nível 2 sentem dificuldade em estabelecer conexões lógicas entre propriedades e por isso as classificações ainda são exclusivas. Além disso, os alunos desse nível quando recebem uma definição diferente da que aprenderam anteriormente, geralmente não aceitam a nova definição e continuam usando sua própria definição. No nível 3, os alunos já têm a capacidade de fazer classificações inclusivas das famílias. Uma diferença mais precisa entre os alunos nos níveis 2 ou 3 é baseada na capacidade de aceitar e identificar definições não equivalentes do mesmo conceito e em mudar de opinião sobre o tipo de classificação (exclusiva ou inclusiva), quando as definições são alteradas. Os alunos do nível 3 alcançaram o grau máximo de habilidade de classificação, de modo que não se dá para diferenciá-los nos níveis 3 ou 4.

No último e quarto processo-chave, *prova*, Gutiérrez e Jaime (1998) enfatizam que os alunos no nível 1 não entendem o conceito de prova. Para os alunos do nível 2, uma prova consiste em alguma verificação experimental da verdade da propriedade em um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, os alunos podem ser convencidos apenas com um exemplo especial ou podem precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Os alunos do nível 3 são capazes de fazer deduções e provas informais, como também são capazes de dar razões informais para a verdade das propriedades. Finalmente, os alunos do nível 4 de van Hiele podem entender e escrever provas formais. Algumas vezes eles podem utilizar figuras específicas apenas para ajudar a selecionar as propriedades adequadas para a prova, mas esses alunos já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário desenvolver uma sequência de implicações com base em propriedades já estabelecidas. Isto quer dizer que eles já sabem diferenciar entre as várias declarações relacionadas (direta, inversa, etc.), como também em escrever os diferentes tipos usuais de provas (direta, contraposição, por absurdo, etc).

A partir dessas descrições feitas por Gutiérrez e Jaime (1998), como também por Jaime e Gutiérrez (1994), os primeiros resumiram no quadro abaixo (Quadro 10) as principais características de cada processo-chave utilizado para distinguir entre os alunos nos diferentes níveis de van Hiele:

Quadro 10 - Atributos distintivos dos processos de raciocínio em cada nível de van Hiele

	Nível 1	**Nível 2**	**Nível 3**	**Nível 4**
Reconhecimento	Atributos físicos	Propriedades matemáticas	---	---
Uso de definições	---	Somente definições com estruturas simples	Qualquer definição	Aceita várias definições equivalentes
Formulação de definições	Lista de propriedades físicas	Lista de propriedades matemáticas	Conjunto de propriedades necessárias e suficientes	Pode comprovar a equivalência de definições
Classificação	Exclusiva, baseada nos atributos físicos	Exclusiva, baseada nos atributos matemáticos	Pode mover-se entre os inclusivos e os exclusivos	---
Prova	---	Verificação com exemplos	Provas lógicas informais	Provas matemáticas formais

Fonte: Gutiérrez e Jaime (1998, p. 32) [tradução nossa]

Sobre as células tracejadas (---) no Quadro acima, os pesquisadores afirmam que elas correspondem a processos matemáticos que não possuem características específicas nesses níveis. Isto quer dizer que uma tarefa de reconhecimento e descrição de propriedades de um objeto requer apenas o raciocínio dos níveis 1 ou 2, já as características do nível 1 significam que os alunos não são capazes de utilizar determinadas definições matemáticas ou de entender o conceito de prova.

Gutiérrez e Jaime (1998) observaram, em sua pesquisa, que a maioria dos alunos da amostra teve uma aquisição alta ou completa do primeiro nível e já estavam progredindo na aquisição do nível 2. Outra consequência é que quanto maior o curso de Geometria, melhor a aquisição dos níveis. Eles também observaram um fato interessante, muitos alunos da sexta e segunda séries não completaram a aquisição do nível 1, mas estavam progredindo para a aquisição do nível 2. Esse mesmo comportamento foi observado com os alunos do terceiro e do quarto ano do Ensino Médio entre os níveis 2 e 3. Esses comportamentos encontrados em sua pesquisa contradizem a estrutura hierárquica dos níveis de van Hiele, que também foi abordada nesta tese no Capítulo 2 na seção das críticas recebidas ao modelo, onde discutimos sobre a (des)continuidade dos níveis apresentada por Oliveira (2012), duvidando-se do caráter hierárquico dos níveis de van Hiele, pois de acordo com este último para se estar em um nível superior é necessário ter passado por todos os processos do nível anterior.

Além disso, as observações trazidas por Gutiérrez e Jaime (1998) mostram características básicas de uma interpretação revisada dos níveis de raciocínio de van Hiele, uma vez que por muitos anos esses níveis foram considerados como tendo algumas propriedades globais que diferenciavam cada nível dos demais. Segundo Gutiérrez e Jaime (1998), apenas recentemente pesquisadores mostraram que os níveis de raciocínio deveriam ser considerados com a adição de alguns processos de raciocínio mais simples que compartilham características básicas. Por exemplo, os alunos que raciocinam no nível 2 *reconhecem* figuras, usam e *definem* conceitos, *classificam* famílias, *deduzem* e comprovam propriedades, as quatro habilidades têm em comum que a atividade do aluno é baseada em propriedades matemáticas e que os alunos não conseguem estabelecer relações lógicas entre essas propriedades. Por isso, os pesquisadores trazem uma forma diferente de se classificar e alcançar os níveis de pensamento pelos alunos, não atribuindo ou rotulando os alunos em um determinado nível, mas observando que eles podem ter uma aquisição maior ou menor das diferentes habilidades que caracterizam um determinado nível e, portanto, faz-se necessário estabelecer uma escala para medir a qualidade do raciocínio desse aluno.

Há outros dois pesquisadores, Senk e Usiskin, também importantes que discutem de forma geral a relação existente entre os níveis de van Hiele e o processo de justificar em Matemática. Senk (1989) buscou observar quais as relações entre os níveis de van Hiele, a elaboração de uma prova em Geometria e a realização de testes objetivos de conteúdo de Geometria padrão que não envolviam provas. Para isso, a pesquisadora utiliza os cinco níveis de van Hiele para a observação, enfatizando que de acordo com o modelo, somente se o aluno atingir o nível 4, nível em que o pensamento está preocupado com conceitos como axiomas, o inverso de um teorema e condições necessárias e suficientes, ele será capaz de escrever e produzir provas formais. Senk (1989) traz uma observação importante de Wirszup (1976), afirmando que um típico curso de Geometria do Ensino Médio nos Estados Unidos é ministrado no nível 4 e o aluno entra no nível 1 e por isso o modelo de van Hiele explicaria tão bem o porquê de muitos alunos acharem que fazer demonstrações é uma tarefa tão difícil.

Senk (1989) observou que os alunos que entraram no curso de Geometria com os níveis 3 ou 4 de van Hiele fizeram significativamente melhor as provas do que aqueles que entraram no nível 1 ou 2. Além disso, os alunos que estavam no nível 1, ao final do ano letivo, tiveram desempenho muito ruim na escrita de provas. Ou seja, os dados encontrados pela pesquisadora mostraram que quanto maior o nível de pensamento do aluno ao final do ano letivo, maior a probabilidade de ele ter dominado a redação de provas e menos provável que ele tenha falhado ao aprender a escrever provas.

A pesquisa de Senk (1989) mostra que a conquista de alunos do Ensino Médio na escrita de provas de Geometria está positivamente relacionada com os níveis de pensamento de van Hiele e com o alcance do conteúdo de Geometria. Assim, um aluno que inicia um curso de Geometria do Ensino Médio capaz de reconhecer figuras geométricas comuns, mas incapaz de descrever as propriedades dessas figuras (nível 1), provavelmente será capaz de fazer algumas provas simples de Geometria até o final do ano, mas esse tal aluno tem menos de uma chance em três de dominar a redação de provas. Em contraste, um aluno que é capaz de reconhecer figuras geométricas à vista e descrever suas propriedades (nível 2) tem pelo menos 50% de chance de dominar a redação de provas até o final do ano. Já um aluno que também pode raciocinar a partir de definições e reconhecer instâncias de inclusão de classe (nível 3) tem uma chance ainda maior de dominar a redação de provas. As conclusões encontradas por Senk (1989) sustentam a ideia de que é importante levar em consideração o conhecimento que o aluno tem e que adquire ao longo do curso de Geometria no Ensino Médio, pois isso o ajudará na escrita de provas. Além disso, embora não exista um nível individual de van Hiele que garanta o sucesso futuro na redação de provas, o nível 3 parece ser o nível crítico de entrada.

Por fim, Senk (1989) comenta que, de acordo com van Hiele, os alunos abaixo do nível 3 não conseguem fazer provas a não ser por memorização. Já os alunos do nível 3 podem fazer provas curtas baseadas em premissas derivadas empiricamente, enquanto que os alunos dos níveis 4 ou 5 escrevem provas formais consistentes. Essas previsões são apoiadas e confirmadas pelos resultados encontrados na pesquisa de Senk (1989), como também pelas ideias apresentadas por Jaime e Guitérrez (1990, 1994), Gutiérrez e Jaime (1998), entre outros pesquisadores citados anteriormente.

Em outro artigo, Senk (1985) afirma que, ao longo da história da educação americana, aprender a escrever provas tem sido um objetivo importante do currículo de Geometria para alunos universitários. Porém, ao lado disso, tem-se que a prova tem sido percebida como um dos tópicos mais difíceis para os alunos aprenderem. A pesquisadora observa que cerca de 30% dos alunos dos cursos de Geometria que ensinam prova (durante todo ano letivo) chega a 75% de domínio de prova.

Os dados coletados por Senk (1985) mostram um nível de realização bastante baixo na escrita de provas. Segundo a pesquisadora, infelizmente outras pesquisas relacionadas sugerem que o sucesso dos alunos ao escrever provas de Geometria não deve melhorar acima dos níveis relatados por ela, confirmando que devemos prestar atenção especial ao iniciar o ensino do raciocínio dedutivo para os alunos. Senk (1985) também confirma que quanto maior o nível inicial de van Hiele do aluno, maior a chance de sucesso do aluno em provas ao final do ano e menor a probabilidade de fracasso.

A pesquisadora registra que apenas cerca de 30% dos alunos em cursos que ensinam a prova dominam esse objetivo. Como também, apenas cerca de 50% dos graduados do Ensino Médio finalizam um ano completo de Geometria do Ensino Médio e alguns deles fazem cursos com pouca ou nenhuma prova, então menos de 15% dos formandos nos Estados Unidos dominam a escrita da prova. Assim, para a pesquisadora, dado o currículo atual, as práticas instrucionais típicas e os padrões atuais de matrícula, pode-se concluir que cerca de 85% dos formandos do Ensino Médio não dominam uma habilidade subjacente à estrutura de um curso padrão de Geometria. Registrando assim a deficiência que os alunos estão tendo ao finalizar o Ensino Médio, não só de escrita matemática, como também de conhecimento dos conteúdos estudados.

Usiskin (1982) também apresenta contribuições importantes para a relação entre níveis de van Hiele e o processo de justificar em Matemática. Em sua pesquisa, ele encontra resultados bastante deprimentes, pois a maioria dos alunos não entende o raciocínio ou a operação de um sistema matemático. O pesquisador afirma que cerca de 70% dos alunos podem fazer provas simples, exigindo apenas uma dedução além daquelas feitas a partir do dado. Apenas cerca de metade dos alunos podem fazer mais do que simples provas e entre essa metade, existe uma ampla gama de realizações de redação de provas.

Usiskin (1982) percebe que os alunos acima do nível 3 de van Hiele têm um provável sucesso na escrita de provas. Abaixo desse nível, a falha é tão provável quanto. Mesma observação feita por Senk (1989). Usiskin (1982) também observou que nas aulas de Geometria que estudam provas, os níveis de van Hiele da maioria dos alunos até o final do ano letivo são muito baixos para permitir uma alta probabilidade de sucesso na escrita de provas. Mais de 30% dos alunos da amostra e mais da metade daqueles com níveis de van Hiele estão nos níveis 1 ou 2, e um grande número de alunos tem uma alta probabilidade de não terem sucesso na escrita de provas.

Usiskin (1982) observa que poucos alunos estão nos níveis 4 ou 5, níveis em que, de acordo com o modelo de van Hiele, são capazes de compreender e escrever provas. Além disso, o pesquisador argumenta que estar no nível 4 aponta uma boa chance de ser bem-sucedido na escrita de provas. Como as porcentagens são notavelmente consistentes, o pesquisador conclui que Wirszup e Hoffer estavam corretos: os níveis de van Hiele são sim um indicador muito bom quando se trata de prever o sucesso na escrita de provas. Corroborando as ideias apresentadas por Senk (1989), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), Gutiérrez e Jaime (1998), entre outros.

Usiskin (1982) também argumenta que o baixo desempenho de muitos alunos, seja no teste de conteúdo de Geometria ou na redação de provas, está fortemente associado a estar nos níveis mais baixos de van Hiele, confirmando o uso do modelo para explicar por que muitos alunos têm dificuldade em aprender e se apresentar na sala de aula de Geometria. Ademais, o pesquisador adverte que o curso de Geometria não está funcionando para um grande número de alunos, pois eles chegam ao final do ano sem possuir informações triviais sobre a terminologia e a medição da Geometria. Metade dos alunos que se inscrevem em um curso orientado para provas, experimentam muito pouco ou nenhum sucesso com a escrita de provas e a principal causa parece ser a falta de conhecimento no início do ano.

Outro artigo importante que traz uma discussão sobre os níveis de van Hiele é o de Vargas e Araya (2013). Os pesquisadores argumentam que no primeiro nível, o aluno reconhece as figuras geométricas por sua forma como um todo, não conseguindo diferenciar as partes ou os componentes da figura. Além disso, não são capazes de reconhecer ou explicar as propriedades determinantes das figuras, as descrições são principalmente visuais e não há linguagem geométrica básica para se referir a figuras geométricas por nomes. Já no nível 2, o aluno reconhece e analisa as partes e as propriedades particulares de figuras geométricas, mas ainda não consegue estabelecer relações ou classificações entre propriedades de diferentes famílias de figuras. O aluno também estabelece as propriedades das figuras empiricamente, por meio da experimentação e manipulação, ou seja, aqui ele ainda não consegue criar definições.

Vargas e Araya (2013) argumentam que no nível 3 o aluno determina as figuras por suas propriedades e reconhece como algumas propriedades são derivadas de outras, construindo assim inter-relações nas figuras e entre as famílias delas. Consegue estabelecer as condições necessárias e suficientes que as figuras geométricas devem preencher, de modo que as definições adquirem significado, porém seu raciocínio ainda continua baseado na manipulação. Então, nesse nível, o aluno já consegue seguir uma demonstração, mas ainda não a compreende em sua totalidade, de modo que não é possível organizar uma sequência de raciocínio lógico que justifique suas observações. Assim, ele ainda é incapaz de realizar o raciocínio lógico formal, como também não sente essa necessidade, pois ainda não entende o sistema axiomático da Matemática.

No nível 4, de acordo com os pesquisadores, o aluno já consegue fazer deduções e provas lógicas e formais, reconhecendo a necessidade de justificar as proposições propostas. Para que ele entenda a natureza axiomática da Matemática, ele busca compreender e gerenciar as relações entre propriedades e formalizar sistemas axiomáticos. O aluno também já compreende que pode alcançar os mesmos resultados com base em diferentes proposições ou premissas, o que permite que ele entenda que diferentes demonstrações podem ser realizadas para se obter o mesmo resultado. Para se estar nesse nível, é preciso que o aluno tenha uma visão global da Matemática. Além disso, o aluno já pode desenvolver sequências de proposições para deduzir uma propriedade de outra, percebe a possibilidade de uma prova, mas não reconhece a necessidade do rigor no raciocínio.

Por fim, no quinto nível, Vargas e Araya (2013) argumentam que o aluno é treinado para analisar o grau de rigor de vários sistemas dedutivos e compará-los entre si. Ele consegue apreciar a consistência, a independência e a integridade dos axiomas dos fundamentos da Geometria e captura a Geometria de forma abstrata. Além disso, nesse último nível, devido ao seu alto grau de abstração, deve ser considerado em uma categoria separada. Os pesquisadores trazem Alsina, Fortuny e Pérez (1997) e Gutiérrez e Jaime (1991) justificando que o nível 5 só se desenvolve em alunos da Universidade que possuem boa capacidade e preparo em Geometria. Concordamos com essa posição apresentada por Vargas e Araya (2013), contudo ressaltamos que, de acordo com Nasser e Tinoco (2003), Jahnke (2008), Oliveira (2012), Senk (1989), Usiskin (1982), entre outros, o quinto nível de van Hiele é muito raro entre os alunos, inclusive os universitários, uma vez que há pouca chance de encontrarmos alunos que tenham atingido esse nível, o que indica que há pouca evidência que venha a sustentar a sua existência e essa afirmação.

Uma outra pesquisa importante é a de Díaz, Gutiérrez e Jaime (2016), realizada com alunos do 2º ano do Ensino Médio de escolas públicas da região de Maule, Chile. Contaram com 625 alunos, dos quais 315 estavam no grupo de controle (GC) e 310 no grupo experimental

(GE). Os pesquisadores observaram que dos 13,9% dos sujeitos do GC que se encontravam no nível 2, 81% desses possuem um baixo grau de aquisição, denotando processos de prova muito incompletos. Já os alunos do GE que se localizaram no nível 2, cerca de 29% deram uma resposta que mostra um grau de aquisição média alto nesse nível, ou seja, as respostas foram bastante completas com processos de prova consistentes, argumentando por meio de exemplos ou utilizando definições e propriedades matemáticas. Garantindo assim as discussões feitas por Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), sobre os processos de prova dentro de cada nível.

Outra observação encontrada por Díaz, Gutiérrez e Jaime (2016) é que os alunos que localizaram sua resposta no nível 3, os resultados do GC são estatisticamente insignificantes (4,6%) comparados a 21,3% dos alunos de GE que responderam nesse nível. Cerca de 29% dos alunos do GE que localizaram sua resposta no nível 3, mostraram um grau de aquisição nesse nível, uma vez que suas provas eram dedutivas informais razoavelmente completas, embora eles geralmente não atingissem completamente devido a “saltos” no processo ou devido à falta de argumentos.

Díaz, Gutiérrez e Jaime (2016) perceberam uma clara diferença entre os alunos do GE e os do GC, uma vez que todos estavam com os níveis de pensamento geométrico equivalentes, mas o GE mostrou um avanço significativamente superior ao GC. Os pesquisadores concluem que os alunos do GE fizeram mais progressos no raciocínio de nível 2 do que o GC, pois os alunos já reconheciam valores geométricos dotados de propriedades matemáticas, usavam definições e executavam processos de prova empíricos, enquanto que os do GC mantiveram-se no nível 1, reconhecendo apenas os atributos físicos das figuras geométricas.

Além disso, Díaz, Gutiérrez e Jaime (2016) observaram que um pequeno número de alunos do GE conseguiu raciocinar no nível 3, embora, em geral, seu grau de aquisição fosse baixo, pois eles tiveram dificuldades para usar e formular definições e para lidar com processos de demonstração dedutiva. Dos alunos pesquisados, nenhum apresentou uma aquisição mínima de raciocínio de nível 4. Um dos maiores pontos fortes no GE que os pesquisadores encontraram foi que eles alcançaram, por meio da sequência de aprendizado baseada nos níveis e nas fases de van Hiele, a descrição de propriedades geométricas e o uso de definições.

Contudo, os pesquisadores também observaram, em ambos os grupos, dificuldades em fazer referência à associação entre figuras geométricas e suas propriedades, como também para visualizar figuras a partir de informação escrita e a falta de capacidade de argumentar ou de utilizar contraexemplos. Quanto à conjectura, generalização e demonstração, há diferenças consideráveis entre o GE e o GC, pois há uma alta porcentagem de alunos do GE que conseguiu enfrentar esses processos, seja empírica ou informalmente. Com isso, Díaz, Gutiérrez e Jaime (2016) concluem que a maioria dos alunos do GE raciocinou no nível 2, mas ainda era difícil para eles começar a utilizar significativamente o raciocínio de nível 3.

Percebemos o quão todas essas pesquisas apresentadas acima possuem inter-relações, de modo que todas elas evidenciam a necessidade de se trabalhar com os alunos as argumentações, justificações, provas e demonstrações, dependendo do grau de maturidade e de conhecimentos geométricos deles, ou seja, sabendo em que nível de pensamento geométrico eles se encontram, é possível trabalhar com as provas e demonstrações adaptando as atividades para cada nível e utilizando a linguagem e material didático adequados, com o intuito de desenvolver o raciocínio matemático da melhor forma possível.

Além disso, toda essa discussão nos fez perceber a conexão entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e o processo de justificação e prova na Matemática. Pesquisadores como Battista e Clements (1995), Nasser e Tinoco (2003), Senk (1985, 1989), De Villiers (1987), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), Gutiérrez e Jaime (1998), Usiskin (1982), Vargas e Araya (2013), Díaz, Gutiérrez e Jaime (2016), entre outros, perceberam essa relação, apresentando de forma geral uma ligação existente entre os níveis de van Hiele, a linguagem adotada e o entendimento da palavra demonstração dentro de cada nível. Ou seja, esses pesquisadores concluíram que no nível 1 os alunos ainda não são capazes de realizar provas; no nível 2 eles começam a provar a validade de determinada afirmação de maneira empírica, por meio de um ou mais exemplos; no nível 3 os alunos utilizam alguns exemplos, mas já procuram por alguma explicação informal baseada em propriedades matemáticas, ou os exemplos são bem selecionados; no nível 4 eles já são capazes de realizar provas formais; e no nível 5 o aluno é treinado para analisar o grau de rigor de vários sistemas dedutivos e compará-los entre si, pois já capturam a Geometria de forma estritamente abstrata.

A partir dessas colocações, em nossa pesquisa buscamos estabelecer uma articulação mais específica entre os níveis de pensamento geométrico e o processo de justificar em Matemática, ou seja, diferencia-se no sentido de que exploramos uma articulação entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff. Mesmo tendo apresentado esses conceitos nos Capítulos 2 e 3, respectivamente, trazemos abaixo um pequeno resumo dos tipos de prova de Balacheff (2000), já as discussões dos níveis de pensamento geométrico de van Hiele tomaremos o que foi abordado neste Capítulo, a partir das colocações dos pesquisadores Battista e Clements (1995), Nasser e Tinoco (2003), Senk (1985, 1989), De Villiers (1987), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), Gutiérrez e Jaime (1998), Usiskin (1982), entre outros, uma vez que foram os resultados das suas pesquisas que nos ajudaram a refinar as nossas articulações, propondo algo mais específico dentro do campo da justificação e prova matemática.

Balacheff (2000) identifica dois grupos básicos de provas: as *provas pragmáticas*, nas quais os alunos recorrem a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar determinado resultado; e as *provas intelectuais*, nas quais o discurso utilizado pelo aluno é teórico, não necessitando observações experimentais para argumentar a validade da conjectura. Para o pesquisador, a elaboração de uma demonstração necessita de um nível maior de conhecimento, pois ela deve constituir-se em uma verdadeira teoria matemática, com isso, um de seus fundamentos é o rigor matemático. Além disso, a passagem das *provas pragmáticas* para as *intelectuais* se apoia em três polos: o dos conhecimentos, o linguístico ou da formulação e o da validação ou dos tipos de racionalidade que sustentam as provas produzidas.

A partir das investigações realizadas, Balacheff (2000) conseguiu distinguir quatro tipos principais de *provas pragmáticas* e *intelectuais*: *empirismo ingênuo*, *experiência crucial*, *exemplo genérico* e *experiência mental*. O pesquisador considera uma hierarquia hipotética desses níveis e a posição de cada tipo de prova dentro dessa hierarquia é determinada pelo seu nível de exigência de generalidade e por seu nível de conceituação dos conhecimentos que exige. Além disso, o *empirismo ingênuo* e a *experiência crucial* fazem parte do primeiro tipo básico de prova (*provas pragmáticas*) e a *experiência mental* faz parte do segundo tipo básico (*provas intelectuais*), já o *exemplo genérico* caracteriza-se como a transição do primeiro para o segundo tipo básico de prova.

Considerando as descrições dos níveis de van Hiele feitas por Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), utilizando os processos-chave (reconhecimento/identificação, definição, classificação e prova) para facilitar a identificação desses níveis, conseguimos enxergar uma articulação bastante específica entre esses níveis e os tipos de prova propostos por Balacheff (2000).

No *nível 1 (visualização)* de van Hiele, o aluno *não entende o conceito de prova e de demonstração*, por isso nesse nível os alunos não produzem nenhum tipo de construção empírica ou dedutiva, pois eles só reconhecem as figuras por sua aparência global, identificando apenas o aspecto, o tamanho dos elementos, a posição, etc. Também não são capazes de ler uma definição matemática, pois para eles o conceito é a própria definição. E por isso não são capazes de aceitar qualquer relação entre duas famílias diferentes, nem entre dois elementos da mesma família com aspecto físico bastante diferente.

No *nível 2 (análise)* de van Hiele, o aluno já busca uma verificação experimental da verdade da propriedade, utilizando um ou alguns exemplos. Então, dependendo do grau de aquisição dessas habilidades pelos alunos, a verificação pode ser feita por meio de um ou mais exemplos específicos, ou de um exemplo especial ou por meio de um conjunto de exemplos mais elaborado. Com isso, conseguimos relacionar dois tipos específicos de provas (dentro das *pragmáticas*) de Balacheff (2000) que podem ser produzidos por alunos que estejam nesse nível, a saber: *empirismo ingênuo*, consistindo em assegurar a validade de um enunciado depois de tê-lo verificado em alguns casos particulares; e *experiência crucial*, buscando verificar para um caso especial, geralmente não familiar, como também realizando experiências e começando a tomar consciência de que busca por um resultado geral. Os alunos nesse nível já conseguem escrever provas empíricas pois já reconhecem as figuras geométricas com base em suas propriedades, mas ainda não entendem a estrutura lógica das definições e por isso só são capazes de fornecer provas por meio de exemplos e casos particulares.

No *nível 3 (dedução informal)* de van Hiele, os alunos podem verificar a propriedade a ser provada em alguns exemplos, mas eles também procuram por alguma explicação informal baseada em propriedades matemáticas ou os exemplos são bem selecionados. Além disso, sabemos que nesse nível o aluno ainda não compreende as provas formais em sua totalidade e por isso ele não consegue organizar uma sequência de raciocínio lógico que justifique suas observações. Com isso, conseguimos relacionar um único tipo específico de prova proposto por Balacheff (2000) que pode ser produzido por alunos que estejam nesse nível, a saber: *exemplo genérico*, que se encontra na transição entre as *provas pragmáticas* e as *intelectuais*, pois o aluno busca uma generalização ainda baseada em exemplos, porém procurando justifica-la com a teoria relacionada a esta proposição, ou seja, o aluno justifica a partir de um exemplo, o que ele poderia ter feito teoricamente, utilizando incógnitas ou variáveis. Os alunos nesse nível constroem provas ainda baseadas na experimentação porque não sentem a necessidade de utilizar o raciocínio lógico-formal, como também ainda não entendem o sistema axiomático da Matemática. Por conta disso, eles acabam produzindo provas informais, ainda baseadas em exemplos, contudo procuram relacioná-la com a teoria.

No *nível 4 (dedução formal)* de van Hiele, os alunos já são capazes de fazer provas matemáticas formais e as figuras específicas são utilizadas apenas algumas vezes para ajudar a escolher as propriedades adequadas para uma prova, pois eles já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário fazer implicações com base em definições, axiomas e teoremas já demonstrados. Com isso, conseguimos relacionar um único tipo específico de prova (dentro das *intelectuais*) proposto por Balacheff (2000) que pode ser produzido por alunos que estejam nesse nível, a saber: *experiência mental*, buscando verificar a validade de uma proposição de forma genérica e não fazem mais referência a casos particulares, pois a validação é sustentada pela teoria. Sendo isso possível, porque os alunos já têm um melhor entendimento das definições e na capacidade de provar a equivalência de diferentes definições do mesmo conceito, uma vez que já entendem e executam o raciocínio lógico formal e as provas formais têm significado para eles e sentem sua necessidade como um dos meios de verificar a validade de uma afirmação de forma genérica. Ou seja, nesse nível, eles já podem entender a estrutura axiomática da Matemática, mas ainda não sentem a necessidade do rigor.

Resumidamente, apresentamos o quadro abaixo (Quadro 11) com o intuito de simplificar as articulações realizadas acima entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele, discutidos por Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), e os tipos de prova propostos por Balacheff (2000).

Quadro 11 – Possíveis articulações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff

Níveis de pensamento geométrico	**Tipo(s) de prova**
Nível 1 O aluno *não entende o conceito de prova ou de demonstração* e por isso nesse nível ele não produz nenhum tipo de construção empírica ou dedutiva.	---
Nível 2 O aluno já busca uma verificação experimental da verdade da propriedade, utilizando um ou alguns exemplos. Dependendo do grau de aquisição dessas habilidades pelos alunos, a verificação pode ser feita por meio de um ou mais exemplos específicos, ou de um exemplo especial ou por meio de um conjunto de exemplos mais elaborado.	*Empirismo ingênuo* (Prova pragmática) O aluno busca assegurar a validade de um enunciado depois de tê-lo verificado em alguns casos particulares.
	Experiência crucial (Prova pragmática) O aluno busca verificar para um caso especial, geralmente não familiar, como também realiza experiências e começa a tomar consciência de que busca por um resultado geral.
Nível 3 Os alunos podem verificar a propriedade a ser provada em alguns exemplos, mas eles também procuram por alguma explicação informal baseada em propriedades matemáticas, ou os exemplos são bem selecionados. Além disso, eles ainda não compreendem as provas formais em sua totalidade e por isso não conseguem organizar uma sequência de raciocínio lógico que justifique suas observações.	*Exemplo genérico* (Está na transição entre as provas pragmáticas e as intelectuais) O aluno busca uma generalização ainda baseada em exemplos, porém procurando justifica-la com a teoria relacionada a esta proposição, ou seja, o aluno justifica a partir de um exemplo, o que ele poderia ter feito teoricamente, utilizando incógnitas ou variáveis.
Nível 4	

Os alunos já são capazes de fazer provas matemáticas formais e as figuras específicas são utilizadas apenas algumas vezes para ajudar a escolher as propriedades adequadas para uma prova. Além disso, os alunos já sabem diferenciar entre as várias declarações relacionadas (direta, inversa, etc), como também em escrever os diferentes tipos usuais de provas (direta, contraposição, por absurdo, etc.).	*Experiência mental* (Prova intelectual) Os alunos afirmam a validade de uma proposição de forma genérica e não fazem mais referência a casos particulares, uma vez que a afirmação é elaborada para uma classe e a validação é sustentada pela teoria.

Fonte: autoria própria

Balacheff (2000) distingue quatro tipos principais de prova, que já foram discutidos dentro dos quatro primeiros níveis de van Hiele. A palavra *demonstração* é entendida pelo pesquisador como uma série de enunciados que se organizam seguindo um conjunto bem definido de regras, caracterizando assim a demonstração como um gênero de discurso estritamente codificado. Por isso, acreditamos que Balacheff (2000) não entende a *experiência mental* como a *demonstração* em si, pois para ele existem outros tipos de *provas intelectuais* na transição da *experiência mental* para a *demonstração*, diferindo em seus níveis de descontextualização, atemporalidade e despersonalização[4], como também em seu nível de formalismo. Contudo, o pesquisador afirma que ainda falta fazer uma análise desses tipos de provas e sua tipologia. Do ponto de vista da demonstração, entendida como estrutura do discurso, o nível de formalização dos conhecimentos que coloca em prática é um ponto crucial e, portanto, faz-se necessário mais estudos para verificar o que realmente acontece durante esse processo de construção das provas e demonstrações e se realmente há outros tipos de provas entre a *experiência mental* e a *demonstração* (BALACHEFF, 2000).

Por conta dessa discussão trazida por Balacheff (2000), acreditamos que o *nível 5 (rigor)* de van Hiele está além do tipo de prova *experiência mental*, pois nesse nível os alunos já compreendem a importância do rigor nas demonstrações e são capazes de analisar outras Geometrias, trabalhando com sistemas dedutivos abstratos e com a Geometria não-Euclidiana, conseguindo assim fazer ligações entre os conceitos e desenvolvendo, às vezes, novos postulados. Devido ao seu alto grau de abstração, os alunos já são treinados para analisar o grau de rigor de vários sistemas dedutivos e compará-los entre si, podendo apreciar a consistência, a independência e a integridade dos axiomas dos fundamentos da Geometria. Além disso, os alunos desse nível já têm a capacidade de compreender a importância da precisão ao lidar com os fundamentos e relações entre estruturas matemáticas.

[4] O desenvolvimento da linguagem, como uma ferramenta para o cálculo lógico e não apenas um meio de comunicação, requer em particular: "uma **descontextualização** ou renúncia ao objeto atual como um meio eficaz de executar as ações, para acessar a categoria de objetos, independentemente das circunstâncias associadas ou anedóticas de sua aparência; uma **despersonalização**, separando a ação de quem foi seu ator e da qual ela deve ser independente; uma **atemporalidade**, liberando as operações a partir da data em que foram realizadas e sua duração anedótica. Esse processo marca a transição do universo de ações para o de relacionamentos e operações" (BALACHEFF, 2000, p. 23). [tradução nossa]

Compreendendo o nível 5 com esse significado e conceito, e sendo ainda pouco discutido por pesquisadores, tais como Usiskin (1982), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), Jaime (1993), Gutiérrez e Jaime (1998), Dias (2009), Oliveira (2012), entre outros e pelo próprio van Hiele (1957), como também compreendendo a discussão trazida por Balacheff (2000) acerca do conceito de *demonstração*, inferimos que esse *nível 5 (rigor)* de van Hiele está associado com as *demonstrações*, que consistem em uma teoria matemática, fundamentando-se em um corpo de conhecimento fortemente institucionalizado sobre um conjunto de definições, de teoremas e de regras de dedução, cuja validade é aceita matemática e socialmente tendo como um dos fundamentos o rigor matemático.

Por acreditarmos que há poucas chances de encontrarmos alunos raciocinando no nível 5 de van Hiele, justificando-se a partir dos resultados encontrados nas pesquisas de Nasser e Tinoco (2003), Jahnke (2008), Oliveira (2012), Usiskin (1982), entre outros, ao afirmarem que atingir o nível de rigor exigido pela Matemática é muito raro entre os alunos, inclusive os universitários, como também a maioria dos estudos já realizados constata que há pouca chance de encontrar alunos que tenham atingido esse nível, indicando que há pouca evidência para sustentar a sua existência. Em nossa pesquisa, estamos interessados nos quatro primeiros níveis, que são os mais possíveis de serem encontrados, onde buscamos justificar as nossas possíveis articulações entre eles e os tipos de provas propostos por Balacheff. Portanto, buscamos identificar, com as atividades aplicadas aos licenciandos, se essas articulações estão corretamente relacionadas, porém ressaltamos que essa confirmação se dará a partir da nossa amostra, sendo preciso verificar se em outras amostras, elas continuarão válidas.

No próximo capítulo, discutiremos a metodologia e os procedimentos adotados em nossa pesquisa, o tipo de pesquisa, os instrumentos utilizados para coleta dos dados, os sujeitos envolvidos, entre outros aspectos.

CAPÍTULO 5 – ABORDAGEM METODOLÓGICA

Neste capítulo, discorremos acerca do delineamento metodológico traçado para o desenvolvimento da nossa pesquisa. Para isso, iniciaremos abordando a questão e os objetivos de pesquisa e, em seguida, a caracterizaremos. Logo após, apresentaremos os sujeitos participantes e o campo da pesquisa, abordando as características da instituição a qual os licenciandos fazem parte. Por fim, apresentamos as etapas do estudo, informando os instrumentos para coleta de dados e a sua análise.

5.1 QUESTÃO E OBJETIVOS DE PESQUISA

De acordo com Lüdke e André (1986, p. 1), "para se realizar uma pesquisa é preciso promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado a respeito dele". Uma pesquisa é feita a partir do estudo de um problema, que ao mesmo tempo desperta o interesse e a inquietação do pesquisador e limita sua atividade de pesquisa a uma determinada porção do saber, a qual ele se compromete a construir naquele momento (LÜDKE e ANDRÉ, 1986).

Nosso objeto de estudo está na busca de uma relação entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff. Com isso, estamos interessados em responder o seguinte questionamento:

- *Que articulações podemos identificar entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff quando analisarmos as argumentações/justificações produzidas por licenciandos em Matemática?*

Orientados por essa questão, objetivamos estabelecer articulações entre os níveis de pensamento geométrico discutidos por van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff, o que nos possibilita levantar a hipótese de que com o pensamento geométrico desenvolvido pode-se trabalhar com os variados tipos de prova e as demonstrações. Por fim, temos como objetivos específicos:

1 – Analisar o significado de prova e demonstração que possuem os licenciandos em Matemática, bem como as suas vivências com esse trabalho na Educação Básica e no Ensino Superior;

2 – Estudar as argumentações, justificações e estratégias utilizadas pelos licenciandos ao responderem atividades que exigem provas de afirmações matemáticas;

3 – Analisar os tipos de prova elaborados pelos licenciandos e o nível de pensamento geométrico em que eles se encontram;

4 – Verificar o que os licenciandos entendem por casos particulares e casos genéricos ao analisarem argumentações, justificativas e provas de afirmações matemáticas.

Entendemos que essa questão e esses objetivos são pertinentes para a pesquisa porque estudos mostram que existe uma estreita ligação entre o modelo de van Hiele e o processo de justificar em Matemática, como também se percebe a insignificante presença da atividade de natureza dedutiva nas aulas de Matemática, assim como um despreparo notório dos professores para trabalhar com tais atividades. Isso se deve ao fato de que muitos licenciandos possuem dificuldades relacionadas à argumentação e à distinção entre definições e teoremas, não reconhecem as hipóteses e conclusões de uma propriedade, não entendem a diferença entre desenho e figura geométrica, não conseguem decidir se utilizam a linguagem natural ou matemática e não conseguem organizar uma prova e uma redação da demonstração (DE VILLIERS, 2010; BATTISTA e CLEMENTS, 1995; PIETROPAOLO, 2005; SENK, 1985, 1989; NEVES, BACCARIN e SILVA, 2013).

A forma como trabalhamos as demonstrações na Licenciatura em Matemática diz muito como os alunos as veem, pois muitas vezes eles se julgam incapazes de aprendê-la e se afastam dela exatamente pela forma como é apresentada, de forma pronta e acabada, sem a apresentação do passo a passo para se chegar na efetivação da demonstração. Garbi (2010) alerta para esse fato, enfatizando que submeter os licenciandos a áridas demonstrações sobre temas excessivamente abstratos, utilizando uma linguagem peculiar e pedante, como se fazia no passado, acaba produzindo efeitos traumáticos, ocasionando assim uma aversão à Matemática. E isso é percebido em resultados de pesquisas como Neves, Baccarin e Silva (2013), Ferreira (2016), Busquini e Santos (2011), entre outros.

Para que essa visão se modifique é necessário que o licenciando em Matemática compreenda o papel e o uso das demonstrações tanto na Matemática como Ciência, quanto no ensino e aprendizagem da Matemática como disciplina escolar, pois sua utilização pode contribuir para a construção do raciocínio dedutivo do aluno da Escola Básica. Para isso, faz-se necessário que nas Formações Inicial e/ou Continuada de professores de Matemática tenham uma discussão e reflexão acerca da pertinência ou não do trabalho com as provas e demonstrações na Educação Básica, como também sobre o trabalho com argumentações, tipos de prova, funções da demonstração e quais as melhores práticas pedagógicas, uma vez que se percebe a insignificante presença da atividade de natureza dedutiva nas aulas de Matemática, como também um despreparo notório dos professores para trabalhar com tais atividades (DIAS, 2009; PIETROPAOLO, 2005; SERRALHEIRO, 2007; NASSER e TINOCO, 2003).

O estudo de possíveis articulações entre os níveis de pensamento geométrico e os tipos de prova pode vir a ser pertinente na medida em que, identificadas essas relações, poderia-se trabalhar com as provas e demonstrações de forma adequada no ensino e aprendizagem da Matemática, tanto na Educação Básica como na Licenciatura em Matemática, buscando estimular o raciocínio matemático dos alunos por meio de atividades que mobilizem a argumentação, a justificação, as provas empíricas, as provas formais e as demonstrações. Contudo, para que esse trabalho aconteça, é preciso conhecer os níveis de pensamento geométrico dos alunos, uma vez que eles nos auxiliarão a utilizar a linguagem adequada para cada nível e, consequentemente, trabalhar com as provas e demonstrações de forma correta, sem exigir uma racionalidade que o aluno ainda não possui.

Vários pesquisadores ressaltam a relação existente entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e o processo de justificar em Matemática (BATTISTA e CLEMENTS, 1995; DE VILLIERS, 1987; JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994; NASSER e TINOCO, 2003; PIETROPAOLO, 2005). Usiskin (1982), por exemplo, percebeu que os alunos acima do nível 3 de van Hiele têm um provável sucesso na escrita de provas e que, abaixo desse nível, a falha é tão provável quanto. Além disso, o pesquisador concluiu que Wirszup e Hoffer estavam corretos ao afirmarem que os níveis de van Hiele são sim um bom indicador quando se trata de prever o sucesso na escrita de provas.

Senk (1985) também confirma que quanto maior o nível inicial de van Hiele, maior a chance de sucesso do aluno construir provas ao final do ano letivo. A pesquisadora sustenta a ideia de que é importante considerar o conhecimento que o aluno possui e que adquire ao longo do curso de Geometria no Ensino Médio, pois isso auxiliará na escrita de provas. Para ela, embora não exista um nível individual de van Hiele que garanta o sucesso futuro da redação de provas, o nível 3 parece ser o nível crítico de entrada. Confirmando então a possibilidade de estabelecer, de forma mais específica, uma articulação entre os níveis de pensamento geométrico e os tipos de prova de Balacheff, como também garantindo o nosso argumento de que o nível de pensamento geométrico dos alunos ajuda no trabalho com os variados tipos de prova e as demonstrações matemáticas.

5.2 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Nossa pesquisa configura-se em um enfoque quali-quantitativo, uma vez que os instrumentos de coleta de dados nos permitem observar estatisticamente as opiniões/resoluções dos licenciandos, como também nos permitem a análise descritiva de suas opiniões/resoluções. Essa modalidade de pesquisa se configura por interpretar “as informações quantitativas por meio de símbolos numéricos e dados qualitativos mediante a observação, a interação participativa e a interpretação do discurso dos sujeitos” (KNECHTEL, 2014, p. 106). Além disso, embora sejam diferentes, elas não se excluem. Ou seja, em nossa pesquisa tratamos alguns dados de forma quantitativa, como também fazemos especulações acerca das causas desses resultados.

Creswell e Clark (2007) afirmam que a junção das abordagens quanti e quali possibilita analisar a pesquisa por dois olhares diferentes, possibilitando uma visualização ampla do problema pesquisado. Além disso, vale ressaltar que não há contradição ou continuidade entre essas duas formas de pesquisa, ou seja:

> a relação entre quantitativo e qualitativo, entre objetividade e subjetividade não se reduz a um continuum, ela não pode ser pensada como oposição contraditória. Pelo contrário, é de se desejar que as relações sociais possam ser analisadas em seus aspectos mais ‘ecológicos’ e ‘concretos’ e aprofundadas em seus significados mais essenciais. Assim, o estudo quantitativo pode gerar questões para serem aprofundadas qualitativamente, e vice-versa (MINAYO e SANCHES, 1993, p. 247).

Sobre a abordagem qualitativa, Ordem (2015) afirma que é um tipo de pesquisa utilizada como meio para explorar e para entender o significado que os indivíduos ou grupos atribuem a um problema social ou humano. D’Ambrósio (2004), por outro lado, afirma que atualmente as pesquisas são, em linhas gerais, classificadas em duas grandes vertentes: a pesquisa quantitativa e a pesquisa qualitativa. Com relação à primeira vertente de pesquisa, ela lida com grande número de indivíduos, recorrendo aos métodos estatísticos para a análise de dados coletados de diversas maneiras. Nesse sentido, podemos também chamá-la de pesquisa estatística ou pesquisa positivista. Já a segunda vertente, a pesquisa qualitativa ou pesquisa naturalística, tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos de participantes. Ou seja, a pesquisa qualitativa depende da relação observador-observado e sua metodologia repousa sobre a interpretação e várias técnicas de análise de discurso.

Stake (2011) também define que uma pesquisa científica é dita quantitativa quando seu raciocínio se baseia fortemente em atributos lineares, medições e análises estatísticas. Para o autor, a pesquisa científica também apresenta um lado qualitativo, em que a experiência pessoal, a intuição e o ceticismo trabalham juntos para ajudar a aperfeiçoar as teorias e os experimentos. Para Stake (2011), uma pesquisa científica é dita qualitativa quando seu raciocínio se baseia principalmente na percepção e na compreensão humana. O pensamento qualitativo é muito mais e está bastante misturado com todas as etapas do trabalho científico. Por isso ele ousa dizer que o pensamento qualitativo oferece um fundamento ou uma disposição para o pensamento quantitativo, afirmando que todo o pensamento científico é uma mescla dos pensamentos quali e quantitativos.

Stake (2011) também argumenta que pesquisa é investigação, é um estudo deliberado, uma busca pela compreensão. Na pesquisa qualitativa o próprio pesquisador é um instrumento ao observar ações e contextos e ao desempenhar uma função subjetiva no estudo, uma vez que ele se utiliza da sua experiência pessoal em fazer interpretações. Sobre a essência da abordagem qualitativa, o pesquisador afirma que:

> não existe uma única forma de pensamento qualitativo, mas uma enorme coleção de formas: ele é interpretativo, baseado em experiências, situacional e humanístico. Cada pesquisador fará isso de maneira diferente, mas quase todos trabalharão muito na interpretação. Eles tentarão transformar parte da história em termos experienciais. Eles mostrarão a complexidade do histórico e tratarão os indivíduos como únicos, mesmo que de modos parecidos com outros indivíduos (STAKE, 2011, p. 41).

Portanto, optamos pela pesquisa quali-quantitativa, pois acreditamos que nosso trabalho se deu dentro desta perspectiva, uma vez que utilizamos dados estatísticos, a fim de nos auxiliar a elaborar a análise dos dados provenientes do questionário dos sujeitos participantes. Além disso, nos enquadramos na abordagem qualitativa porque participamos de todo o processo de coleta de dados estando presente no local de estudo dos sujeitos investigados; os dados foram recolhidos de forma descritiva; e a nossa análise se deu de forma indutiva, ou seja, os dados recolhidos não terão como objetivo a confirmação de hipóteses construídas anteriormente, uma vez que as abstrações serão construídas à medida que os dados recolhidos forem sendo agrupados (BOGDAN e BIKLEN, 2003).

Por outro lado, dentro dessa abordagem, nosso trabalho trata de uma pesquisa exploratória, uma vez que esse tipo de pesquisa tem como objetivo principal desenvolver, esclarecer e modificar ideias na tentativa de adquirir maior familiaridade com o problema, podendo envolver desde o levantamento bibliográfico até a aplicação de questionários e/ou entrevistas com os participantes da pesquisa (GIL, 2002). No nosso caso, a partir de discussões trazidas por Battista e Clements (1995), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), Senk (1989), Usiskin (1982), entre outros, buscamos estabelecer articulações mais específicas entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff. A partir das atividades aplicadas e das entrevistas realizadas com os sujeitos participantes, embasamos essas articulações, confirmando ou não o argumento de que tendo o nível de pensamento geométrico desenvolvido, é possível trabalhar com os variados tipos de prova e as demonstrações.

É possível caracterizar essa pesquisa como um estudo de caso, cuja unidade de estudo é o conjunto formado por cinco duplas e um licenciando. Segundo Bogdan e Biklen (2003), o estudo de caso consiste na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico. Julgamos nossa pesquisa dentro dessa modalidade, pois ela foi desenvolvida com onze licenciandos de Matemática de uma universidade pública do estado da Paraíba, com a aplicação de um questionário, de atividades que exploravam provas matemáticas e entrevistas semiestruturadas realizadas a partir das respostas encontradas nas atividades.

De acordo com Gil (2002), o estudo de caso consiste no estudo profundo e exaustivo de um ou poucos objetos, permitindo assim seu amplo e detalhado conhecimento. Para Yin (2001), um estudo de caso é uma investigação empírica, na qual investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos. Além disso:

> a investigação de estudo de caso enfrenta uma situação tecnicamente única em que haverá muito mais variáveis de interesse do que pontos de dados, e, como resultado, baseia-se em várias fontes de evidências, com os dados precisando convergir em um formato de triângulo, e, como outro resultado, beneficia-se do desenvolvimento prévio de proposições teóricas para conduzir a coleta e a análise de dados (YIN, 2001, pp. 32-33).

Assim, o estudo de caso como estratégia de pesquisa compreende um método que abrange tudo, desde a lógica de planejamento incorporando abordagens específicas até a coleta e a análise de dados. Segundo o pesquisador, o estudo de caso não é nem uma tática para coleta de dados nem meramente uma característica de planejamento, mas sim uma estratégia de pesquisa abrangente. Além disso, Yin (2001) discute que os estudos de caso podem sim incluir as - e mesmo ser limitados às - evidências quantitativas. Para ele, o contraste entre evidências quantitativas e qualitativas não diferencia as várias estratégias de pesquisa. Confirmando assim a configuração de nossa pesquisa em quali-quantitativa.

Yin (2001) também discute alguns preconceitos tradicionais em relação a estratégia de estudo de caso. A segunda preocupação nos chamou mais atenção no sentido de que muitos não tomam esse tipo de pesquisa, pois ela fornece pouca base para se fazer uma generalização científica. O pesquisador compara a generalização a partir de um caso único com a generalização a partir de um único experimento e ressalta que fatos científicos raramente se baseiam em experimentos únicos, uma vez que, em geral, eles são baseados em um conjunto múltiplo de experimentos, que repetiu o mesmo fenômeno sob condições diferentes. Assim, para Yin (2001), os estudos de caso, da mesma forma que os experimentos, são generalizáveis a proposições teóricas, e não a populações ou universos. Ou seja, o estudo de caso não representa uma "amostragem" e o objetivo do pesquisador é expandir e generalizar teorias (generalização analítica) e não enumerar frequências (generalização estatística). Portanto, o objetivo é fazer uma análise "generalizante" e não "particularizante". Para nosso estudo, pretendemos fazer uma generalização das articulações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff, a partir dos dados recolhidos pelos onze sujeitos participantes.

Por conta disso, ressaltamos que não estamos buscando um estudo de âmbito nacional, mas sim circunscrito a um grupo de licenciandos em Matemática de uma instituição pública do Estado da Paraíba. Estando preocupados em observar, a partir de suas produções, as articulações que podemos estabelecer entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff. Dessa forma, percebemos que os resultados desse estudo não serão generalizáveis a todos os alunos de Licenciatura em Matemática da instituição pesquisada, nem das outras do Estado, mas sim que é válido somente a esse grupo de licenciandos. Contudo, entendemos que nosso estudo vem a provocar reflexões acerca da instituição pesquisada como um todo, como também do ensino de Geometria nas Licenciaturas em Matemática, o que provoca uma reflexão sobre a formação de nossos licenciandos a respeito do trabalho com as provas e demonstrações no curso de Matemática.

Portanto, compreendemos que nosso estudo diz respeito a uma pesquisa quali-quantitativa, imersa em uma pesquisa exploratória. Dentro desta perspectiva, ela se mostra como estudo de caso.

5.3 SUJEITOS PARTICIPANTES E CAMPO DA PESQUISA

A partir da nossa questão central e do objetivo pretendido com esta pesquisa, escolhemos licenciandos em Matemática com o intuito de investigarmos a relação existente entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff, principalmente porque esses sujeitos já vivenciaram o trabalho com as demonstrações na Licenciatura em Matemática. Além do fato de termos várias pesquisas atuais que mostram ainda a resistência ao ensino e aprendizagem de Geometria, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, assim como das dificuldades encontradas pelos alunos ao resolverem atividades envolvendo conceitos da Geometria e habilidades em argumentar, justificar, provar e demonstrar determinados resultados geométricos. Essas dificuldades estão presentes tanto com alunos da Educação Básica, como com licenciandos em Matemática (LIMA, 2015; MARTINS, SILVA e PUGGIAN, 2013; FERREIRA *et al*., 2013; ALMOULOUD *et al*., 2004; PAVANELLO, 2007; NEVES, BACCARIN e SILVA, 2013; CRESCENTI, 2008).

Além disso, os resultados do ENADE (2014) contribuem para corroborar as ideias apresentadas por esses educadores matemáticos quanto à situação do ensino e aprendizagem da Matemática e das habilidades em argumentar, justificar, provar e demonstrar resultados pelos licenciandos. Nas questões discursivas, os relatores observaram que os alunos possuem muita dificuldade em expressar seus pensamentos ou ideias. Nas de conhecimento específico, os licenciandos deixaram muitas questões em branco, principalmente as que envolviam Álgebra Linear e Geometria. Foi percebido também que os alunos não costumam perceber os passos de uma construção geométrica sem o apoio de figuras, tiveram dificuldades em trabalhar com cálculos que envolviam radicais e frações, possuíam um improvável desconhecimento do Teorema de Pitágoras e tiveram dificuldades de encaminhar uma reflexão mais profunda acerca da resolução de problemas. Por isso, faz-se necessário pesquisar e investigar licenciandos em Matemática com o intuito de estabelecer articulações, a partir das argumentações/justificações produzidas por eles, entre os níveis de pensamento geométrico e os tipos de prova, uma vez que possibilita uma discussão importante acerca da forma como ainda são apresentadas as demonstrações na Licenciatura e como pode ser feito esse trabalho com licenciandos, com o intuito de desenvolver o raciocínio e o pensamento geométrico deles.

O campo de pesquisa de nosso estudo contou com a presença de onze licenciandos em Matemática, escolhidos por conhecimento da pesquisadora, por terem sido seus alunos na instituição pública B do Estado da Paraíba. Utilizaremos essa notação para preservar a identidade da referida instituição e também porque a utilizamos no Capítulo 1, na subseção 1.3.1, em que descrevemos sobre as disciplinas de Geometria ministradas em universidades públicas do Estado da Paraíba e de Pernambuco. Portanto, a escolha da instituição B para a coleta de dados se deu porque a pesquisadora trabalhou nessa instituição e foi professora desses licenciandos em disciplinas obrigatórias do curso de Licenciatura em Matemática.

O Curso de Licenciatura em Matemática da instituição B tem como objetivo geral oferecer à nossa sociedade, licenciados com uma sólida formação matemática e com conhecimentos sobre os aspectos culturais, sociais, político e econômico da educação, tendo como objetivos específicos: oferecer uma sólida formação teórica, desenvolvendo a capacidade de compreender a Matemática como Ciência Exata e aplicar adequadamente o raciocínio lógico-matemático de forma criativa na resolução de problemas; fortalecer o domínio dos conteúdos matemáticos básicos relacionados à atividade docente; formar profissionais com senso crítico, raciocínio lógico e capacidade de desenvolver atividades relacionadas ao ensino-aprendizagem em Matemática; entre outros.

Esses objetivos nos auxiliarão a perceber se realmente está sendo atingido o que se espera do Curso, confirmando se os licenciandos sairão com os conhecimentos matemáticos solidificados para o exercício do magistério nas escolas. Além disso, quanto ao perfil de egresso, o Curso da referida instituição desenvolve em seus alunos: a capacidade de resolver e formular problemas, modelar, argumentar e validar soluções; o domínio do raciocínio lógico-dedutivo na área de Álgebra, de Geometria e de Combinatória; o conhecimento e o domínio dos conteúdos básicos relacionados às áreas/disciplinas de conhecimento, objeto da atividade docente, adequando-as às necessidades escolares próprias das diferentes etapas e modalidade da Educação Básica; a capacidade de comunicar-se matematicamente por meio de diferentes linguagens; entre outros.

Inferimos que, a partir desses pontos para o perfil de egresso, os licenciandos dessa instituição saem com conhecimento matemático adequado para a prática docente, tendo a capacidade de formular, modelar, argumentar e validar as soluções de situações-problema variadas. Assim, compreendemos que, possivelmente, eles saibam trabalhar com as argumentações, justificativas, provas e demonstrações matemáticas, uma vez que há a afirmação de que o curso desenvolve nos alunos a capacidade de comunicar-se matematicamente, assim como o domínio do raciocínio lógico-dedutivo na área de Geometria, em especial.

Resumidamente, na instituição B há quatro disciplinas que trabalham ou são referentes à Geometria: Tópicos Especiais em Matemática Básica, Vetores e Geometria Analítica, Tópicos de Geometria I e II. Todas essas disciplinas são obrigatórias, diferenciando-se do período de oferta durante o curso. A primeira disciplina visa revisar conteúdos estudados na Educação Básica, com o intuito de diminuir as dificuldades que por ventura surgiriam nos períodos posteriores. As três últimas disciplinas trabalham especificamente conteúdos da Geometria, porém de forma mais aprofundada, com a possibilidade de existir um trabalho maior com as demonstrações e deduções das fórmulas da Geometria.

Os onze licenciandos em Matemática dessa instituição foram escolhidos justamente por já terem cursado todas essas disciplinas, estando por isso entre o 6º e 10º período do curso.

Ou seja, são alunos que já vivenciaram a revisão de conteúdos geométricos e possuem um aprofundamento maior dos conteúdos da Geometria, com a possibilidade de terem trabalhado argumentações, justificações, provas e demonstrações nessas disciplinas. Isto quer dizer que são licenciandos que já possuem uma bagagem maior de conhecimentos geométricos e do trabalho com a escrita matemática, o rigor e a formalidade inerentes a área.

A idade média dos sujeitos participantes é 23,9 anos e são, em sua maioria, oriundos de escola pública (91%). Quatro dos onze licenciandos terminaram o Ensino Médio no ano de 2013, um em 2005, dois em 2009, dois em 2012, um em 2014 e um em 2015. Considerando os meses de aplicação do questionário, quatro licenciandos estavam cursando o 6º período do curso de Matemática (36,4%); quatro estavam no 8º período do curso (36,4%); dois estavam no 9º período (18,2%); e um estava no 10º período do curso (9,1%).

Verificamos que sete licenciandos já tiveram ou têm alguma experiência no magistério (63,6%) e os outros quatro (36,4%) não possuem essa experiência, ou seja, ainda não ministraram aulas na Educação Básica. Dos sete licenciandos que possuem experiência no magistério, quatro trabalham (ou trabalharam) de forma geral com a disciplina Matemática (36,4%), um leciona (ou lecionou) apenas aulas de Álgebra (9,1%) e dois lecionam (ou lecionaram) apenas aulas de Geometria (18,2%), no caso quando as escolas separam as aulas de Matemática a partir dessas duas áreas (Álgebra e Geometria). Além disso, essa experiência centra-se, em sua maioria, no Ensino Fundamental II com cinco sujeitos pesquisados (45,4%) e dois atuando no Ensino Fundamental I (18,2%).

Verificamos também que oito licenciandos trabalham atualmente (72,7%) e os outros três não trabalham, se dedicando apenas aos estudos universitários (27,3%). Dos que trabalham atualmente, apenas quatro exercem a profissão de professor (36,4%), enquanto que os outros trabalham em áreas não relacionadas ao magistério, tais como agente comunitário de saúde, costureira, operador de loja de supermercado e estofador.

Por fim, destacamos que na análise dos dados, a fim de preservarmos a identidade dos participantes, houve consentimento em participar da pesquisa e cada licenciando recebeu um código, formado por uma letra e dois números. Escolhemos a letra *L*, em referência à palavra *licenciando*, já os números variaram entre *01* e *11*, que corresponde à quantidade de participantes da pesquisa. Ou seja, a pesquisa contou com a presença de *L01*, *L02*, *L03*, ..., *L11*. Além disso, as atividades desenvolvidas em dupla foram nomeadas em Dupla 01 a Dupla 05 e o licenciando que fez sozinho recebeu o código acima.

5.4 O PROCESSO DE COLETA DOS DADOS E SOBRE SUA ANÁLISE

Segundo Marconi e Lakatos (2008, p. 167), a coleta dos dados é uma “etapa da pesquisa em que se inicia a aplicação dos instrumentos elaborados e das técnicas selecionadas, a fim de se efetuar a coleta dos dados previstos”. É na coleta dos dados que obtemos as informações necessárias e que será alvo de análise posteriormente.

Para a coleta dos dados, utilizamos os seguintes instrumentos: questionário, atividades com provas matemáticas, notas de campo, observação participante, filmagens (ou videogravações), gravações em áudio e entrevista semiestruturada.

Dos vários licenciandos que estudaram com a pesquisadora, selecionamos uma faixa de vinte e cinco alunos, justamente por sabermos que eles já tinham cursado as disciplinas de Geometria. Esses vinte e cinco alunos receberam um convite por *e-mail* para participarem da pesquisa, contendo uma breve explicação dos momentos de coleta dos dados, dos dias possíveis da pesquisadora para os encontros, como também questionamentos se eles poderiam participar da pesquisa, quais dias da semana seriam melhores e se já podiam participar do primeiro momento de coleta de dados. Além disso, ressaltamos o anonimato a fim de preservar a identidade deles e por isso seus nomes não seriam revelados.

Como foi um convite e não forçamos a participação deles, estando livres para confirmaram ou não a presença, pois o aceite dependia dos seus horários e das suas atividades naquele semeste, tivemos a confirmação de onze dos vinte e cinco selecionados, que participaram voluntariamente de todos os momentos da coleta.

A partir da confirmação dos onze licenciandos, decidimos alguns dias para nos encontrarmos, tendo como preferência horários livres ou opostos aos de suas aulas, para não os prejudicar. Assim, o *primeiro momento da coleta* se deu a partir da aplicação do questionário (Figura 3 e Apêndice A), de forma individual, aos onze licenciandos em Matemática. A aplicação ocorreu nos horários livres de cada licenciando, nos dias 27 e 31 de maio e 04 de junho de 2019, tendo duração média de uma hora.

Figura 3 - Questionário aplicado aos licenciandos

Questionário[1]

Licenciando: ____

Data: _____/______/_______

- **Parte I**

1) Qual é a sua idade?

2) Na Educação Básica, você estudou em escola pública ou particular?

3) Em que ano você terminou o Ensino Médio?

4) Você tem experiência no magistério? Se sim, em que série (ano)? As aulas eram referentes a Álgebra ou Geometria?

5) Você trabalha atualmente? Se sim, em qual função?

- **Parte II**

1) Para você, o que são provas e demonstrações matemáticas?

2) Para você, o que são hipótese(s) e tese de um teorema?

3) O que é um teorema?

4) O que é um corolário?

5) Na Educação Básica, seu professor de Matemática trabalhava com provas e demonstrações? Se sim, descreva sua experiência enquanto aluno e como era a forma trabalhada pelo professor.

6) Na Licenciatura em Matemática, sabemos que os docentes trabalham muito, nas disciplinas específicas, com as demonstrações de teoremas de várias áreas da Matemática. Assim, descreva sua experiência com as provas e demonstrações durante o curso.

7) Você demonstraria algum teorema para seus alunos da Educação Básica? Se sim, qual(is)? Justifique sua resposta.

8) Dos vários teoremas vistos durante a Educação Básica, quais você considera mais importantes para que um aluno egresso desse segmento saiba a sua demonstração? Justifique.

9) Caso você julgue que não é necessário demonstrar teoremas na Educação Básica, justifique.

Fonte: acervo pessoal

[1] [1]Adaptado de MATEUS (2015)

Esse questionário é composto de duas partes: a primeira com cinco questões para auxiliar a traçar o perfil dos licenciandos; e a segunda com nove questões, que versam sobre o conhecimento específico de alguns termos matemáticos, o que eles entendem por provas e demonstrações, suas vivências com provas e demonstrações na Educação Básica e na Licenciatura e o trabalho pedagógico dessas na Educação Básica. Todas as questões são abertas em que os sujeitos pesquisados tinham que desenvolver suas ideias a respeito de cada uma.

Sobre o questionário, Marconi e Lakatos (2008) argumentam que ele é considerado um instrumento de coleta dos dados e é constituído por questões que seguem uma ordem e que devem ser respondidas por escrito. Já Freixo (2011) afirma que o questionário é constituído por um conjunto de enunciados ou de questões que permitem avaliar as atitudes e opiniões dos sujeitos, ou colher qualquer outra informação junto deles. A partir do questionário, conseguimos traçar um perfil dos licenciandos e sabermos o que eles entendem por provas e demonstrações, como também o que compreendem sobre o trabalho com elas na Educação Básica e como foi esse trabalho durante a graduação. Para essa parte utilizamos dados estatísticos (porcentagens) a fim de facilitar a análise dos dados encontrados, buscando relacionar com os resultados de pesquisas já realizadas na área em questão e que foram discutidas nos Capítulos 1, 2 e 3.

O *segundo momento da coleta* ocorreu com a aplicação das atividades envolvendo provas matemáticas (Apêndice B), em dupla, aos licenciandos em Matemática da instituição B. Essa atividade tinha como objetivo estimular o raciocínio e a escrita matemática, buscando também investigar o nível de pensamento geométrico dos sujeitos participantes e o tipo de prova elaborada por eles. Como contamos com a participação de onze licenciandos, dividimos em cinco duplas e um licenciando, com o intuito de haver discussões acerca da resolução das atividades e na elaboração das provas matemáticas, facilitando a identificação do nível de pensamento deles. Além disso, de acordo com van Hiele (1957), o trabalho em duplas facilita a aquisição da compreensão do conhecimento geométrico e um aluno pode ajudar o outro a adquiri-lo.

Ressaltamos que a escolha das duplas se deu de forma voluntária, ou seja, os licenciandos se agruparam de acordo com a afinidade e/ou por já terem estudado juntos. Salientamos também que o licenciando ficou sozinho, pois no dia da aplicação das atividades o outro licenciando que faria dupla com ele não pôde se fazer presente, uma vez que não havia ônibus na sua cidade para o levar a instituição, já que os alunos da sua cidade já tinham finalizado as disciplinas. Devido a isso, ele fez sozinho, pois já havia se comprometido e já estava na instituição, e o que não pôde ir acabou fazendo dupla com outro licenciando.

Acrescentamos que, nesse segundo momento, também tivemos como objetivo a verificação, a partir das produções dos licenciandos, das articulações que estabelecemos no Capítulo 4, entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de propostos por Balacheff. Na seção 6.2 do Capítulo 6 trazemos com mais detalhes a análise *a priori* das atividades, como também os resultados encontrados.

A aplicação dessas atividades ocorreu nos horários livres de cada licenciando, nos dias 27 e 28 de junho e 01 e 03 de julho de 2019, tendo duração média de duas horas. Esse segundo momento ocorreu no período de finais e reposições da instituição B, antes das férias, pois foram os horários disponíveis por eles e pela pesquisadora, como também gostaríamos de aplica-las nesse período para podermos analisar com calma durante as férias.

As atividades exploravam a justificativa e/ou a prova de conteúdos da Geometria Plana, a saber: teorema de Pitágoras, soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e de um quadrilátero, tipos de quadriláteros, ângulos opostos pelo vértice, base média de um triângulo, triângulo inscrito em uma circunferência, ângulo inscrito em uma circunferência e relações entre ângulos de um triângulo. Elegemos a Geometria Plana, pois na instituição B, onde fizemos essa pesquisa, há uma disciplina específica de Geometria Plana (Tópicos de Geometria I) e outra que revisa alguns desses conteúdos no primeiro semestre (Tópicos Especiais em Matemática Básica). Escolhemos esses conteúdos pois eles são estudados nas disciplinas ministradas nessa instituição, como também são conteúdos que os sujeitos ensinarão na Educação Básica.

Algumas atividades foram elaboradas por nós e outras foram adaptadas ou extraídas de trabalhos de educadores matemáticos que também pesquisam sobre as provas e demonstrações matemáticas, a saber: Ferreira Filho (2007), Equipe Provas e Demonstrações Matemáticas – Projeto CAPES/OBEDUC/UFMS/UEPB/UFAL Edital 2012 (LIMA, 2015), Aguilar Jr e Nasser (2013), Pinto e Esquincalha (2016), Busquini e Santos (2011) e Ordem (2015).

Ressaltamos que, como os horários livres dos licenciandos eram limitados e também por conta dos horários de saída dos seus ônibus, eles não conseguiram finalizar as dez atividades propostas. A partir disso, pedimos para que eles fizessem até a atividade 7, uma vez que essas sete primeiras atividades cumpriam o tempo destinado por eles para resolução e não os prejudicavam.

Com as atividades em mãos, analisamos as resoluções dos licenciandos e anotamos as nossas dúvidas. O *terceiro e último momento* se deu a partir de uma entrevista semiestruturada com as cinco duplas e o licenciando, com o intuito de dá-los a oportunidade de explicarem, oralmente, aquilo que não ficou claro na resolução, nos auxiliando assim na compreensão correta do tipo de prova utilizado e do nível de pensamento geométrico em que eles se encontram. Esse terceiro momento ocorreu após as férias, também nos horários livres e disponíveis dos licenciandos, nos dias 23 e 24 de agosto de 2019, com duração média de trinta minutos. Levamos as atividades respondidas por eles e realizamos a entrevista.

Sobre a entrevista, Ludke e André (1986) afirmam que é um dos principais itens da coleta de dados de uma pesquisa, pois auxilia na captação imediata e corrente da informação desejada, permitindo o aprofundamento de pontos levantados. A entrevista semiestruturada é constituída de uma série de perguntas abertas feitas oralmente em uma ordem prevista, mas na qual o entrevistador tem a possibilidade de acrescentar questões de esclarecimento, a partir das respostas apresentadas pelos sujeitos entrevistados (LAVILLE e DIONNE, 1999). Além disso, Martin e Harel (1989) defendem que as entrevistas precisam ser realizadas com o intuito de determinar a verdadeira compreensão dos alunos.

Além desses instrumentos, utilizamos, no segundo momento de coleta dos dados, a observação participante, com o intuito de colhermos informações sobre as discussões realizadas durante a realização das atividades, como também de nos auxiliar a identificar com mais clareza o nível de pensamento geométrico dos participantes. As notas de campo foram utilizadas nos segundo e terceiro momentos da coleta, nos auxiliando a registrar aquilo que foi visto, ouvido ou observado durante todo o processo de coleta dos dados.

Sobre a observação, Marconi e Lakatos (2008) afirmam que é uma técnica de coleta de dados utilizada para conseguir informações e que o pesquisador se utiliza de seus sentidos para a obtenção de determinados aspectos da realidade. Para essas pesquisadoras, a observação "não consiste apenas em ver e ouvir, mas também em examinar fatos ou fenômenos que se desejam estudar" (idem, 2008, p. 192).

Dentro dos variados tipos de observação, optamos pela observação participante, a qual "consiste na participação real do pesquisador com a comunidade ou grupo. Ele se incorpora ao grupo, confunde-se com ele. Fica tão próximo quanto um membro do grupo que está estudando e participa das atividades normais deste" (MARCONI e LAKATOS, 2008, p. 196). Além disso, a observação participante é uma tentativa de colocar o observador e o observado do mesmo lado. Essa observação participante foi feita de forma artificial, ou seja, o observador integrouse ao grupo com a finalidade de obter informações (MARCONI e LAKATOS, 2008). Ressaltamos que não demos as respostas ou induzimos os licenciandos a resposta correta, mas as vezes em que fomos procurados buscamos auxiliar o raciocínio e pensamento dos sujeitos, de modo a estimulá-los a refletir sobre os passos dados durante a construção da justificativa e/ou da prova.

Quanto às notas de campo, as utilizamos para registrarmos o envolvimento e as dificuldades das duplas e as nossas observações e impressões com relação aos diálogos realizados pelos licenciandos durante a resolução das atividades. Além do fato de termos uma descrição fidedigna das atividades, conversas, acontecimentos, problemas e dificuldades encontradas no decorrer da coleta. De acordo com Bogdan e Biklen (2003), nas notas de campo escrevemos a descrição das pessoas, lugares, acontecimentos, atividades e conversas. Além disso, registramos ideias, estratégias, reflexões e palpites. Ou seja, as notas de campo são um "relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e reflectindo sobre os dados de um estudo qualitativo" (BOGDAN e BIKLEN, 2003, p. 150).

No segundo momento também utilizamos como instrumento para coleta de dados a filmagem (ou videogravação), a fim de registrar todo o momento de resolução das duplas, podendo acompanhar tanto a linguagem verbal como a não verbal dos sujeitos. Esse instrumento nos auxiliou a observar as argumentações utilizadas pelos licenciandos durante a resolução das atividades, como também para embasarmos o nível de pensamento geométrico em que eles se encontram. É importante ressaltar que uma das duplas de licenciandos não quis a filmagem, por conta disso, tentamos recorrer a gravação em áudio no momento da resolução das atividades, mas a dupla também não aceitou. Respeitando essa decisão, só tivemos como instrumentos, para essa dupla, as resoluções das atividades e as notas de campo.

De acordo com Belei *et al*. (2008), a evolução dos recursos tecnológicos permitiu uma melhoria no processo de observação. As pesquisadoras passaram a aprofundar a coleta de dados por meio da videogravação (ou filmagem). Com esse instrumento é possível captar sons e imagens que reduzem muitos aspectos que podem interferir na fidedignidade da coleta dos dados observados. Ou seja, segundo as pesquisadoras, o uso do vídeo permite um certo grau de exatidão na coleta de informações, uma comprovação frente aos tradicionais questionamentos da subjetividade da pesquisa qualitativa.

Além disso, para Belei *et al*. (2008) a videogravação (ou filmagem) é um dos métodos que pode auxiliar na visualização acurada dos dados e facilitar o olhar do pesquisador. A filmagem possibilita um exame aprofundado do processo analisado, uma vez que ela permite ver quantas vezes forem necessárias, o que não acontece somente com a observação. E essa observação por meio da filmagem não é somente para ver os fatos e os gestos dos sujeitos, mas também sublinhar a imagem, analisar com o cenário, com o ambiente de pesquisa e com o referencial teórico.

No terceiro momento optamos por fazer o registro da entrevista apenas por gravação em áudio, com o intuito de ficarmos mais presentes durante a entrevista, como também em tirarmos as nossas dúvidas quanto às argumentações e/ou justificativas utilizadas nas resoluções das atividades. Nesse contexto, Lüdke e André (1986, p. 37) afirmam que as gravações "tem a vantagem de registrar todas as expressões orais, imediatamente, deixando o entrevistador livre para prestar toda a sua atenção ao entrevistado". Ao final da entrevista, registramos a partir das notas de campo algumas das nossas observações acerca dos licenciandos, que pode nos auxiliar a identificar o nível de pensamento geométrico deles e o tipo de prova utilizado.

Ao finalizar-se a fase da coleta de dados, inicia-se a análise propriamente dita. Para muitos pesquisadores é o momento em que estamos "namorando" os dados obtidos durante o processo de coleta. Assim, quando encerramos a coleta, temos todo o material bruto a ser organizado, onde colocamos em ordem e separamos de acordo com os instrumentos utilizados. O próximo passo será a leitura e releitura do material completo para selecionarmos os pontos relevantes e iniciarmos o processo de construção das categorias descritivas.

A fase da análise de dados se inicia a partir da organização de todos os dados, onde o pesquisador, além de organizar esses dados, começa a refletir sobre seu objetivo e questão de pesquisa, podendo gerar novos questionamentos e possibilitando, futuramente, uma busca de novos dados mais específicos. Diante disso:

> a análise de dados consiste em examinar, categorizar, classificar em tabelas ou, do contrário, recombinar as evidências tendo em vista proposições iniciais de um estudo. Analisar as evidências de um estudo de caso é uma atividade particularmente difícil, pois as estratégias e as técnicas não foram muito bem definidas no passado. Ainda assim, cada pesquisador deve começar seu trabalho com uma estratégia analítica geral – estabelecendo prioridades do que deve ser analisado e por que (YIN, 2001, p. 131).

Nesse contexto, faz parte do protocolo de dados o questionário e as atividades respondidas pelos licenciandos, como também as filmagens, as gravações em áudio e as notas de campo das observações feitas pela pesquisadora. Todos esses dados nos auxiliarão a responder à questão proposta e, consequentemente, à atingirmos os objetivos elencados na seção 5.1 desse Capítulo.

A estrutura utilizada para a apresentação da análise dos dados foi extraída de Lins (2003), que propõe uma organização para a análise dos dados de pesquisas envolvendo estudo de caso, tomando como base a convergência de evidências para a triangulação de dados proposta por Yin (2001). Dessa forma, a análise foi realizada tomando inicialmente os dados relativos ao primeiro momento da coleta, os quais versam sobre as respostas dadas ao questionário aplicado, a fim de traçarmos o perfil dos sujeitos pesquisados, finalizando com comentários gerais acerca dos resultados encontrados e comparando com os resultados de pesquisas discutidos nos Capítulos 1, 2 e 3. Ressaltamos que a Parte I do questionário já foi discutida nesse Capítulo, na seção 5.3 que trata dos sujeitos participantes da pesquisa.

Posteriormente, analisamos os dados colhidos no segundo momento, a partir das produções dos licenciandos nas atividades aplicadas, as filmagens e as notas de campo, a fim de auxiliar na identificação dos tipos de prova construídos e do nível de pensamento geométrico desses sujeitos, como também averiguar as articulações estabelecidas por nós entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff no Capítulo 4. Os dados recolhidos no terceiro momento, os áudios das entrevistas semiestruturadas, também foram utilizadas nesse momento da análise, finalizando com comentários gerais acerca dos resultados encontrados e comparando com resultados de outras pesquisas na área, discutidas nos Capítulos 1, 2 e 3. Por fim, fizemos uma discussão final, buscando responder à questão de pesquisa, como também de fazer um fechamento do estudo de caso.

Analisamos os dados do questionário a partir da Análise Textual Discursiva (MORAES e GALIAZZI, 2016), com a qual buscamos relacionar, quanti e qualitativamente, os dados e as informações concedidas pelos sujeitos envolvidos, o referencial teórico estudado e a nossa percepção de pesquisadores. De acordo com Moraes e Galiazzi (2016), a análise textual discursiva é uma abordagem de análise de dados que transita entre duas formas de análise de pesquisa qualitativa, que são a análise de conteúdo e a análise de discurso.

Segundo Moraes e Galiazzi (2016), a análise textual discursiva apresenta três características. A primeira etapa desse tipo de análise é caracterizada pela leitura cuidadosa e aprofundada dos dados em um movimento de separação das unidades significativas. Nessa fase, uma condição necessária é o estabelecimento de uma relação íntima e aprofundada do pesquisador com seus dados, onde ele consegue olhar de várias maneiras, descrevendo-os incessantemente, construindo várias interpretações para um mesmo registro escrito e, a partir desses procedimentos, surgem as unidades de significados.

Com relação à segunda fase, as pesquisadoras afirmam que é caracterizada por um processo de comparação constante entre as unidades definidas no processo inicial de análise, levando ao agrupamento de elementos semelhantes. Além disso, de acordo com algum critério estabelecido pelo pesquisador, em razão dos objetivos do trabalho, é construído categorias por meio desses elementos semelhantes, sendo que a todo momento elas podem ser modificadas e reorganizadas em um processo em espiral.

A terceira e última fase da análise textual discursiva, de acordo com Moraes e Galiazzi (2016), diz respeito à captação do novo emergente, ou seja, a construção de um meta-texto pelo pesquisador tecendo considerações sobre as categorias que ele construiu. Assim, esses meta-textos são constituídos de descrição e interpretação, representando o conjunto de um modo de compreensão e teorização dos fenômenos investigados. Para as pesquisadoras, a qualidade dos textos resultantes das análises não depende apenas de sua validade e confiabilidade, mas também é consequência do pesquisador assumir-se como autor de seus argumentos, esforçando-se em expressar suas intuições e seus novos entendimentos a partir da rigorosa e ostensiva análise dos dados.

Adaptando essas três características para a nossa pesquisa, realizamos na primeira etapa uma leitura cuidadosa e aprofundada dos dados coletados com o questionário, com o intuito de definirmos as unidades significativas. Na segunda etapa, comparamos as unidades definidas com o processo inicial de análise, possibilitando construir as categorias por meio dos elementos semelhantes. E, por fim, na terceira etapa elaboramos a descrição e a interpretação dos dados do questionário, organizados em categorias, estabelecendo ligação com as discussões teóricas presentes em artigos, dissertações e teses da área, como também nos esforçamos em expressar nossas intuições e nossos novos entendimentos a partir da análise feita.

Os dados referentes às atividades com provas matemáticas aplicadas aos licenciandos foram analisados à luz das discussões trazidas por Balacheff (2000), van Hiele (1957), Nasser (1991), Kaleff *et al*. (1994), Dall'Alba (2015), Ontário (2006), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), Senk (1989), Usiskin (1982), entre outros, assim como confrontamos ou corroboramos os nossos resultados com os resultados de outros educadores matemáticos e com os documentos oficiais (PCN, BNCC, Diretrizes Curriculares para os Cursos de Matemática, SBEM, PPC do Curso da instituição B, etc.) e resultados do ENADE 2014, discutidos nos capítulos anteriores.

Destacamos que, com os dados recolhidos a partir dos instrumentos, fizemos a sua checagem a partir da triangulação de dados e de método. Para Araújo e Borba (2006), em uma pesquisa qualitativa, a triangulação consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para a obtenção dos dados. Além disso, a técnica de triangulação "pode nos dar mais confiança de que determinamos corretamente o significado ou pode nos dar mais confiança de que precisamos analisar as diferenças para enxergar significados múltiplos e importantes” (STAKE, 2011, p. 139).

Segundo Yin (2011), a triangulação pode ser de quatro tipos: de fontes de dados (triangulação de dados), entre avaliadores diferentes (triangulação de pesquisadores), de perspectivas sobre o mesmo conjunto de dados (triangulação da teoria) e de métodos (triangulação metodológica). De acordo com Azevedo *et al*. (2013), a triangulação de dados consiste na coleta de dados em diferentes períodos e de fontes distintas de modo a obter uma descrição mais rica e detalhada dos fenômenos. Já a triangulação metodológica diz respeito ao uso de múltiplos métodos para obter os dados mais completos e detalhados possíveis sobre o fenômeno. A triangulação do investigador diz respeito ao uso de pesquisadores diversos para estudar a mesma questão de pesquisa ou a mesma estrutura, com o intuito de que pesquisadores diferentes irão trazer perspectivas, reflexões e análises diferentes. Por fim, a triangulação teórica refere-se à possibilidade de o investigador recorrer a múltiplas teorias para interpretar um mesmo conjunto de dados.

Nesse contexto, triangulação significa olhar para o mesmo fenômeno, ou questão de pesquisa, a partir de mais de uma fonte de dados, nas quais contêm informações advindas de diferentes ângulos que podem ser utilizadas para corroborar, elaborar ou iluminar o problema de pesquisa. Esse aspecto nos reporta à fidedignidade, em que não se espera que os observadores cheguem as mesmas representações dos mesmos eventos, mas que haja alguma concordância, de forma que essa representação da realidade seja aceitável, mesmo que existam outras igualmente aceitáveis (LÜDKE e ANDRÉ, 1986).

Portanto, em nossa pesquisa, focamos na triangulação de fontes de dados (triangulação de dados), uma vez que exploramos diferentes fontes a fim de obter uma descrição mais rica e detalhada do nosso objeto de estudo, como também na triangulação de método, que nos auxiliou a checar os dados que obtivemos nas atividades aplicadas e nas filmagens por meio de uma entrevista semiestruturada sobre as respostas produzidas nessas atividades.

No próximo capítulo, traçaremos o perfil dos licenciandos a partir da análise das respostas encontradas nos questionários, como também faremos uma análise *a priori* das atividades aplicadas aos licenciandos e discutiremos os resultados encontrados a partir das resoluções dessas atividades e das entrevistas semiestruturadas, buscando averiguar as articulações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff estabelecidas no Capítulo 4.

CAPÍTULO 6 – ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo descrevemos a análise dos dados encontrados em nossa pesquisa, que está dividida em três seções. A primeira seção diz respeito ao perfil dos licenciandos, discutido e gerado a partir dos dados do questionário, aplicado no primeiro momento da pesquisa, e das observações da pesquisadora durante a aplicação. A segunda seção corresponde a análise didática *a priori* e *a posteriori* das atividades com provas matemáticas, aplicadas no segundo momento da pesquisa. Para cada atividade fazemos uma introdução dos objetivos, dos conhecimentos necessários e as possíveis estratégias que os alunos poderiam apresentar para resolvê-la, além da análise de dificuldades que os licenciandos poderiam apresentar. Para essa segunda seção, também utilizamos para a análise dos resultados, as notas de campo, as videogravações feitas durante a aplicação das atividades e as gravações em áudio obtidas a partir das entrevistas semiestruturadas realizadas após a resolução das atividades, terceiro momento da pesquisa, a fim de sanar nossas dúvidas quanto às estratégias utilizadas para provar o que era solicitado.

Por fim, finalizamos este capítulo com a terceira seção, trazendo uma discussão final do estudo de caso como um todo.

6.1 PERFIL DOS LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA DA INSTITUIÇÃO B

Várias pesquisas em andamento ou finalizadas no Brasil mostram que as provas e demonstrações ainda são assuntos pouco abordados nas aulas de Matemática da Educação Básica (ALMOULOUD, 2007; NASSER e TINOCO, 2003; LIMA, 2015; LIMA, LINS e PEREIRA, 2018; PIETROPAOLO, 2005). De acordo com esses pesquisadores, os professores de Matemática da Educação Básica não abordam esse conteúdo devido à pouca importância que é dado ao ensino das provas e demonstrações, diferentemente do que acontece, por exemplo, nos Estados Unidos e em alguns países da Europa que incentivam esse trabalho desde os anos iniciais (HANNA, 1990; PIETROPAOLO, 2005).

Além disso, a carência dos alunos em argumentar matematicamente acaba acarretando em um baixo nível de conhecimento, ficando evidente quando são submetidos a situações em que precisam fundamentar os seus procedimentos. Quando isso acontece, os alunos recorrem a técnicas operacionais, fórmulas e procedimentos, sem que haja uma compreensão do que realmente estão fazendo (AGUILAR JR e NASSER, 2012). Outro aspecto importante é que as aulas de Matemática ainda são desenvolvidas obedecendo um aspecto estruturalista, em que o foco principal é a mecanização dos processos matemáticos, ficando para segundo plano atividades que venham a desenvolver o potencial argumentativo dos alunos (AGUILAR JR e NASSER, 2013).

Para que esse cenário da Educação Básica mude, é preciso modificar também o cenário presente nos cursos de Licenciatura em Matemática, onde, segundo Dias (2009), ainda existem cursos que adotam o modelo “3+1”, tendo uma ênfase excessiva no estudo de demonstrações, como também há casos em que o ensino de demonstrações se restringe apenas a alguns teoremas demonstrados em disciplinas específicas. Quanto a isso, Busquini e Santos (2011) também alertam que ainda existe um aceite quanto ao autoritarismo herdado da prática científica da Matemática, em que o aluno se torna cúmplice e reprodutor, admitindo que uma verdade matemática é absoluta, pronta e acabada.

À vista dessa discussão, buscamos analisar o que os licenciandos entendem por alguns termos matemáticos e por provas e demonstrações, quais as suas vivências com elas na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática e se concordam com o trabalho pedagógico delas na Educação Básica. Para isso, aplicamos um questionário a onze licenciandos em Matemática de um campus de uma universidade pública (Instituição B) do estado da Paraíba, a fim de fornecer respostas ao nosso primeiro objetivo específico: “Analisar o significado de prova e demonstração que possuem os licenciandos em Matemática, bem como as suas vivências com esse trabalho na Educação Básica e no Ensino Superior”. Ressaltamos que as referências aos sujeitos dessa pesquisa foram feitas por L01, L02, ..., L11, a fim de salvaguardar a identidade dos mesmos.

Portanto, nesta seção temos como objetivo traçar o perfil desses licenciandos em relação a aspectos das provas e demonstrações matemáticas, buscando destacar os pontos que mais nos chamaram a atenção em suas escritas. Na primeira subseção apresentamos alguns resultados acerca de o conhecimento específico dos licenciandos sobre alguns termos matemáticos. Na segunda, destacamos alguns resultados acerca de as vivências dos licenciandos com provas e demonstrações na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática e o trabalho pedagógico delas na Educação Básica. Por fim, na terceira subseção fazemos comentários acerca das discussões feitas nas subseções anteriores.

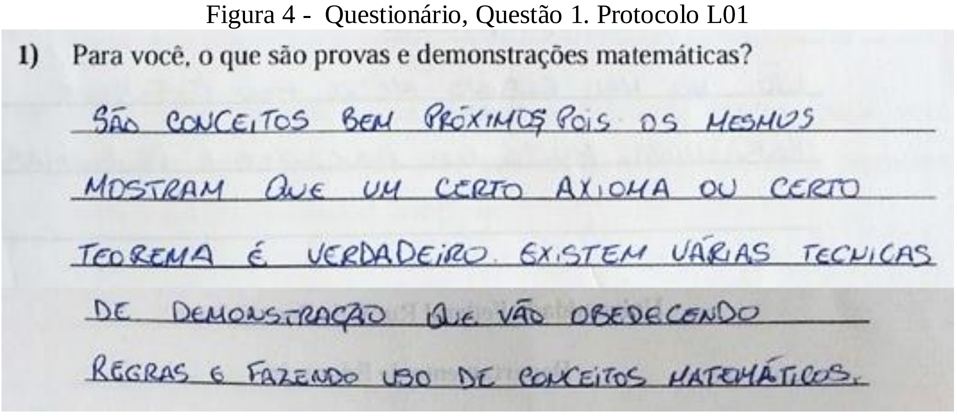
6.1.1 O conhecimento específico dos licenciandos acerca de alguns termos matemáticos

O questionário aplicado aos licenciandos continha quatro perguntas específicas (1ª a 4ª da Parte II) sobre alguns termos matemáticos, pois gostaríamos de verificar o conhecimento específico desses termos por parte dos sujeitos pesquisados.

Na questão 1 solicitamos que os licenciandos dissessem o que são, para eles, provas e demonstrações matemáticas. Verificamos que nove sujeitos pesquisados fizeram uma só definição para as duas palavras (81,8%), o que nos permite inferir que eles consideram provas e demonstrações como sinônimas. Além disso, um licenciando definiu apenas demonstração matemática (9,1%) e apenas um definiu separadamente provas e demonstrações (9,1%).

Na escrita de L01 (Figura 4), percebemos que ele considera que provas e demonstrações são conceitos bem próximos e acaba escrevendo somente uma definição para as duas, como também acrescenta afirmando que existem várias técnicas de demonstração que obedecem certas regras e faz uso de conceitos matemáticos. Um problema detectado diz respeito ao axioma. Na Matemática, axioma é uma afirmação que consideramos verdadeira e ela não precisa (e não pode) ser demonstrada (MORAIS FILHO, 2010; GARBI,2010).

Figura 4 - Questionário, Questão 1. Protocolo L01


1) Para você, o que são provas e demonstrações matemáticas?

SÃO CONCEITOS BEM PRÓXIMOS POIS OS MESMOS MOSTRAM QUE UM CERTO AXIOMA OU CERTO TEOREMA É VERDADEIRO. EXISTEM VÁRIAS TECNICAS DE DEMONSTRAÇÃO QUE VÃO OBEDECENDO REGRAS E FAZENDO USO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS.

Fonte: dados da pesquisa

Encontramos também outros tipos de respostas tais como: explicações detalhadas e fundamentadas para provar que algo existe; a forma que se prova que tal fato matemático é verdadeiro ou falso; uma maneira de mostrar que determinada sentença é verdadeira; os procedimentos encontrados pelos estudiosos para justificar os teoremas e fórmulas; meio de mostrar a veracidade de determinado enunciado; e, a análise que consiste em demonstrar se tal fato é verídico. Todas essas respostas estão considerando provas e demonstrações como sinônimas, não havendo separação entre elas.

O que corrobora as discussões trazidas por Ferreira (2016) ao afirmar que no âmbito da Matemática, a demonstração é considerada a única forma de validação e que os termos prova e demonstração são utilizados como sinônimos. Além disso, Ordem (2015) também ressalta que, para a comunidade matemática, não existe muita diferença entre demonstrar, provar ou justificar, já que esses termos significam deduzir a validade de uma afirmação por meio de raciocínios logicamente válidos.

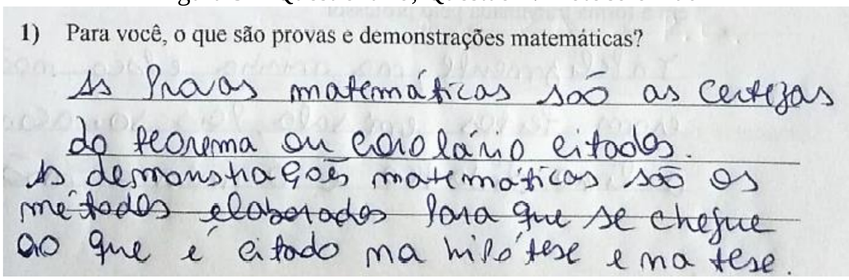
Destacamos outros três tipos de respostas que também consideram como palavras sinônimas, porém utilizam conceitos diferentes.

> *São formas de concretizar o que está sendo mostrado nas aulas. (L07)*
> *São coisas que precisam ser feitas para um melhor entendimento de como foram feitas determinadas fórmulas, e o que foi usado para cria-las. E os passos usados para chegarmos nas mesmas. (L08)*
> *São a afirmação, aliás o porquê, tais coisas acontecem na matemática. Por exemplo, o teorema de Pitágoras, a demonstração dele é a prova de que qualquer triângulo a hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos catetos ao quadrado. Ou seja, entendo como se fosse o "DNA" das coisas na matemática. (L11)*

Percebemos que L07 considera a demonstração como a concretização dos conteúdos matemáticos que são ministrados em sala de aula, já para L08 é a forma de entender melhor como foram feitas determinadas fórmulas e quais foram os passos utilizados para se chegar nelas. Enquanto que L11 considera as provas e demonstrações como a explicação do porquê as coisas acontecem na Matemática, como também as entende como o "DNA" das coisas na Matemática. O que corrobora a discussão de De Villiers (2001) ao afirmar que, tradicionalmente, utilizamos as demonstrações apenas como verificação da correção das afirmações matemáticas, sendo usada principalmente para remover a dúvida pessoal ou a de cépticos. Percebemos na escrita de L11 um equívoco ao escrever o teorema de Pitágoras, que diz respeito à afirmação de que em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos comprimentos dos catetos. A forma como o licenciando 11 escreveu está incorreta.

Destacamos também a escrita de L06 (Figura 5) que diferencia as provas das demonstrações matemáticas. Para o licenciando, as provas matemáticas são as certezas do teorema, enquanto que as demonstrações são os métodos elaborados para que se chegue ao que é citado na hipótese e na tese. Percebe-se que o licenciando não conhece o que significa cada um desses termos e isso deixa a sua escrita um pouco confusa, uma vez que, conforme Grinkraut (2009) e Monroy e Astudillo (2016), provas matemáticas possuem um significado mais amplo, podendo ser entendida como um discurso para estabelecer a validade de uma afirmação, não necessariamente aceita no domínio matemático. Ou seja, as justificativas encontradas nas produções dos alunos são aceitas dentro do seu contexto escolar, em termos do raciocínio envolvido, mesmo sabendo que muitas vezes eles podem não conseguir atingir a formalização necessária. Já a demonstração é uma relação semântica entre proposições, em que é decidida a verdade ou não de um determinado argumento, baseando-se em um conjunto de axiomas e de outras propriedades já demonstradas, devendo ser obtida por meio de um processo hipotético-dedutivo.

Figura 5 - Questionário, Questão 1. Protocolo L06



1) Para você, o que são provas e demonstrações matemáticas?

As Provas matemáticas são as certezas do teorema ou corolário citados.
As demonstrações matemáticas são os métodos elaborados para que se chegue ao que é citado na hipótese e na tese.

Fonte: dados da pesquisa

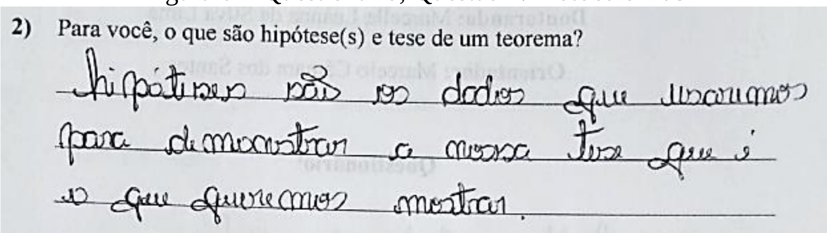
Para Sales e Pais (2010), uma demonstração é mais do que uma prova, uma vez que demonstrar é convencer utilizando recursos racionais compreensíveis aos interlocutores e que tornam a afirmação inquestionável. Já a prova tem um valor temporário, produzindo o seu efeito em um contexto social menos exigente ou de um nível de escolaridade em que um tratamento rigoroso da questão não seja compatível. Ou seja, o ato de provar pode envolver uma multiplicidade de processos ou atividades auxiliares, tais como trabalhar com exemplos para gerar conjecturas ou desenvolver uma visão sobre o desenvolvimento de uma prova, ou ainda usando meios retóricos para convencer os outros de que uma determinada declaração é verdadeira ou falsa (STYLIANIDES, 2007).

Percebemos, portanto, na escrita de nove dos onze sujeitos pesquisados que não há distinção entre provas e demonstrações matemáticas (81,8%), como também não há uma definição clara do que é uma demonstração. Eles estão convencidos de que são palavras semelhantes e que é um método utilizado para provar que algo é verdadeiro ou falso. Esses resultados corroboram as discussões apresentadas em Neves, Baccarin e Silva (2013) e Ferreira (2016).

Na 2ª questão solicitamos que os licenciandos dissessem o que são, para eles, hipótese(s) e tese de um teorema. Apenas cinco sujeitos souberam explicar corretamente, utilizando as suas próprias palavras (45,4%); três não souberam explicar (27,3%); dois definiram apenas hipótese (18,2%); e um disse que hipótese e tese são a mesma coisa (9,1%). Isto quer dizer que mais de 50% dos sujeitos pesquisados tiveram dificuldades em reconhecer o que são hipótese(s) e tese de um teorema, o que corrobora as discussões e resultados das pesquisas de Neves, Baccarin e Silva (2013) e de Ferreira (2016).

Para L08 (Figura 6), as hipóteses são dados que utilizamos para chegar na tese, que é o que queremos mostrar. Consideramos essa definição correta, pois, de acordo com Morais Filho (2010), utilizamos as hipóteses para concluir os resultados apresentados na tese, ou seja, a hipótese é um conjunto de proposições que admitimos verificadas e a tese é o que se pretende concluir como consequência da hipótese.

Figura 6 - Questionário, Questão 2. Protocolo L08



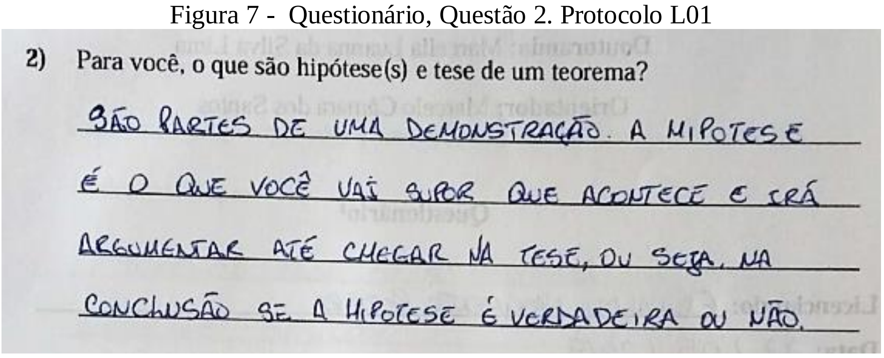
2) Para você, o que são hipótese(s) e tese de um teorema?

hipóteses são os dados que usaremos para demonstrar a nossa tese que é o que queremos mostrar.

Fonte: dados da pesquisa

Encontramos também na resposta de L01 (Figura 7) algumas definições corretas, porém ao final de sua escrita o sujeito pesquisado afirma que a tese seria a conclusão de que a hipótese é verdadeira ou não. Todavia, conforme mencionado acima, compreendemos que a hipótese é um conjunto de raciocínios feitos para concluir a tese, isto quer dizer que já admitimos a hipótese verificada e que pretendemos concluir se a tese é ou não verdade.

Figura 7 - Questionário, Questão 2. Protocolo L01



2) Para você, o que são hipótese(s) e tese de um teorema?

SÃO PARTES DE UMA DEMONSTRAÇÃO. A HIPOTESE É O QUE VOCÊ VAI SUPOR QUE ACONTECE E IRÁ ARGUMENTAR ATÉ CHEGAR NA TESE, OU SEJA, NA CONCLUSÃO SE A HIPOTESE É VERDADEIRA OU NÃO.

Fonte: dados da pesquisa

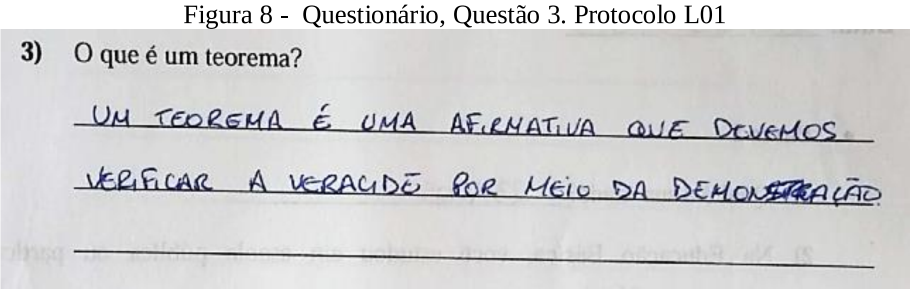
Destacamos também as respostas de outros dois sujeitos pesquisados. Na escrita de L11 encontramos algumas confusões nas definições, apresentando hipótese como um “se” e a tese como o “se, e somente se”. Já na escrita de L02 percebemos que ele considera hipótese e tese como iguais, ou seja, tanto hipótese como tese são pontos de partida para provar um teorema. Percebe-se que esses sujeitos desconhecem as definições de hipótese e tese de um teorema e por conta disso suas escritas estão confusas e incorretas.

> *Hipótese é algo que eu assumo como verdade para concluir outras coisas, um "se". Tese seria o "enunciado" o que o teorema mostra, ou seja, o "se, e somente se". (L11)*
>
> *A hipótese é o ponto de partida para provar um teorema. A tese na minha opinião segue o mesmo sentido da hipótese, ou seja, também é um ponto de partida. (L02)*

Na questão 3 solicitamos que os licenciandos dissessem o que é um teorema. Apenas cinco souberam definir corretamente, utilizando as suas próprias palavras (45,4%); quatro não souberam definir e utilizaram definições como verdade absoluta, leis das demonstrações e/ou provas, lei que dá base para desenvolver fórmulas e que é algo já demonstrado (36,4%); um definiu que são fórmulas mais importantes e que precisam ser demonstradas (9,1%); e outro definiu que é um fato matemático complexo (de médio a alto) e que precisa ser provado (9,1%). Isto quer dizer que mais de 50% dos licenciandos tiveram dificuldades em definir o que é um teorema, corroborando as discussões de Neves, Baccarin e Silva (2013) e de Ferreira (2016).

Para L01 (Figura 8), o teorema é uma afirmativa que devemos verificar a sua verdade por meio da demonstração. Consideramos essa definição correta, uma vez que, de acordo com Morais Filho (2010), do ponto de vista puramente matemático, um teorema é uma sentença condicional "se P, então Q", cuja validade é garantida por uma demonstração.

Figura 8 - Questionário, Questão 3. Protocolo L01

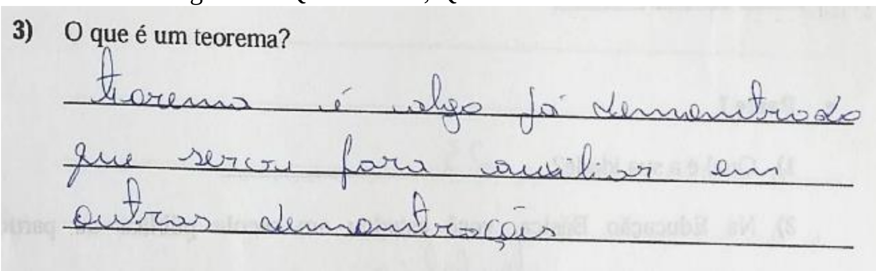

3) O que é um teorema?

UM TEOREMA É UMA AFIRMATIVA QUE DEVEMOS VERIFICAR A VERACIDE POR MEIO DA DEMONSTRAÇÃO

Fonte: dados da pesquisa

Encontramos na resposta de L10 (Figura 9) uma confusão entre as definições de lema e teorema, pois o licenciando considera que teorema é algo já demonstrado que vai servir para demonstrar outros resultados. Essa definição não faz parte, de modo geral, da definição de teorema, mas sim de um caso especial chamado lema. De acordo com Morais Filho (2010), um teorema que é utilizado para provar outro que lhe sucede é chamado de lema. Para o pesquisador, lema é um teorema auxiliar ou preparatório, que será usado na demonstração de outro teorema.

Figura 9 - Questionário, Questão 3. Protocolo L10



3) O que é um teorema?

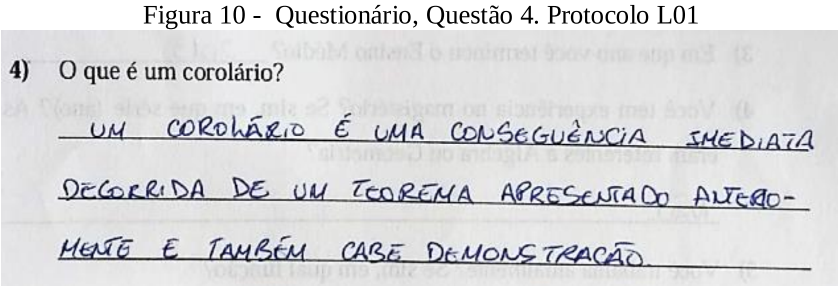
teorema é algo já demonstrado que serve para auxiliar em outras demonstrações

Fonte: dados da pesquisa

Por fim, na 4ª questão solicitamos que os licenciandos definissem o que é um corolário. Verificamos que seis souberam definir corolário, utilizando as suas próprias palavras (54,5%); três não souberam definir e utilizaram definições como é algo que admitimos e que já está pronto, que são leis complementares de um teorema que fazem parte de axiomas e que é meio que um axioma (27,3%); um deixou em branco (9,1%); e outro definiu que é um fato matemático de complexidade menor que o teorema (9,1%.) Embora tenhamos mais de 50% dos licenciandos que souberam definir corolário, percebemos muitas dificuldades por parte desses sujeitos no momento da escrita dessas definições, o que corrobora as discussões encontradas em Neves, Baccarin e Silva (2013), em Ferreira (2016) e nos resultados do ENADE 2014.

Para L01 (Figura 10), o corolário é consequência imediata de um teorema demonstrado e que também cabe demonstração. Consideramos essa definição em partes correta, pois sabemos que quando um teorema é consequência imediata de outro teorema mais complexo recém provado, aquele recebe o nome de corolário (MORAIS FILHO, 2010). Contudo, como a prova do corolário é por definição muito simples, frequentemente ela é omitida. Todavia, deve-se ter cautela quanto a essa decisão, pois devemos levar em conta o público ao qual ele é apresentado e não somente o teorema em si. Às vezes o que é óbvio para alguns, pode não o ser para outros. Percebemos que não necessariamente cabe uma demonstração, vai depender do público em que estaremos apresentando o corolário.

Figura 10 - Questionário, Questão 4. Protocolo L01



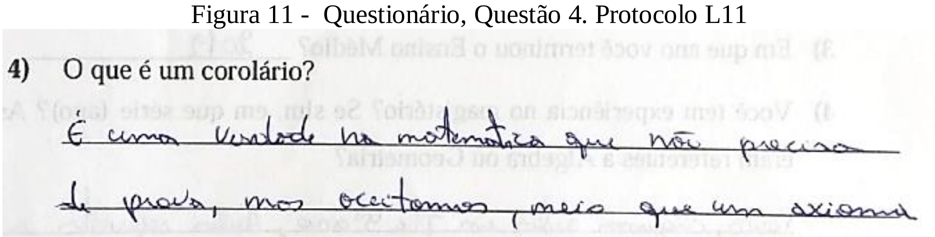
4) O que é um corolário?

UM COROLÁRIO É UMA CONSEQUÊNCIA IMEDIATA DECORRIDA DE UM TEOREMA APRESENTADO ANTERO-MENTE E TAMBÉM CABE DEMONSTRAÇÃO.

Fonte: dados da pesquisa

Encontramos na resposta de L11 (Figura 11) uma confusão entre as definições de corolário e axioma, uma vez que o licenciando considera que o corolário é uma verdade que não precisa de prova, como um axioma. Essa definição não está correta, pois um corolário é um teorema obtido como consequência de outro recém provado, enquanto axioma é uma afirmativa matemática que não precisa (e não pode) ser provada (MORAIS FILHO, 2010). Além disso, discutimos acima que o corolário pode ou não ser demonstrado, a depender do público alvo.

Figura 11 - Questionário, Questão 4. Protocolo L11



4) O que é um corolário?

É uma verdade na matemática que não precisa de prova, mas aceitamos, meio que um axioma

Fonte: dados da pesquisa

De modo geral, percebemos que mais de 50% dos sujeitos participantes dessa pesquisa tiveram dificuldades em definir e diferenciar provas e demonstrações matemáticas e hipótese(s) e tese de um teorema, como também em definir um teorema e um corolário. Muitos apresentaram problemas e dificuldades na escrita, como também tiveram dificuldades em lembrar desses conceitos, uns porque faziam tempo que tinham visto e outros tinham acabado de ver no semestre passado ou nesse, mas não lembravam. Todos esses resultados corroboram as discussões presentes nas pesquisas de Neves, Baccarin e Silva (2013), de Ferreira (2016) e nos resultados do ENADE (2014).

Por se tratar de licenciandos que já passaram da metade do curso de Licenciatura em Matemática, pois 54,5% se encontram entre o 8º e 10º período, esperávamos que eles não tivessem problemas quanto ao reconhecimento de hipóteses e tese de um teorema, assim como as diferenciações entre teorema, corolário, lema, axioma, entre outros termos, uma vez que esses licenciandos já vivenciaram durante o curso situações que envolvam essas terminologias. Contudo o observado foi o oposto. Balacheff (2004) ressalta que prova e linguagem estão rigorosamente relacionados, ou seja, para se utilizar bem as provas e demonstrações é necessário sabermos que estas consistem na utilização da linguagem matemática. Por isso é tão importante conhece-la e saber diferenciar os seus elementos constitutivos, para que possamos utilizá-los da maneira correta durante o processo de construção de uma demonstração.

6.1.2 As vivências dos licenciandos com provas e demonstrações na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática e o trabalho pedagógico dessas na Educação Básica

O questionário aplicado aos licenciandos continha perguntas (5ª a 9ª questão da Parte II) que buscavam conhecer as vivências desses sujeitos com as provas e demonstrações tanto na Educação Básica quanto no curso de Licenciatura em Matemática. Além disso, queríamos saber o que eles pensavam sobre o trabalho pedagógico das provas e demonstrações na Educação Básica.

Na 5ª questão solicitamos que os licenciandos nos dissessem se os seus professores de Matemática da Educação Básica trabalhavam com provas e demonstrações. Caso a resposta fosse positiva, que eles descrevessem essa experiência. Verificamos que todos os licenciandos afirmaram que seus professores de Matemática da Educação Básica não trabalharam com provas e demonstrações (100%). Destacamos a escrita de alguns licenciandos que falaram muito mais que um não em suas respostas.

> *Não. No meu Ensino Médio, meu professor trabalhava muito com conceitos e problemas. (L01)*
>
> *Não, meu estudo na Educação Básica sempre foi muito geral. (L02)*
>
> *Não, nunca tive no ensino básico essa experiência. (L03)*
>
> *Infelizmente, na minha época não eram feitos em sala, pois só acompanhava o livro didático e o mesmo não continha demonstrações. (L06)*
>
> *Não. Infelizmente não, apenas mostrava o resultado e dizia que valia. (L11)*

Percebemos nas suas escritas que não houve o trabalho com as provas e demonstrações nas aulas de Matemática. As aulas ministradas por seus professores da Educação Básica eram permeadas pela presença do livro didático, apresentando os conteúdos de forma geral sem a utilização de outras alternativas metodológicas. Além disso, percebe-se que esses professores apresentavam os resultados e diziam que era verdadeiro, fazendo com que os alunos não questionassem nem desenvolvessem o raciocínio matemático. Esses mesmos resultados também foram encontrados nas pesquisas de Pietropaolo (2005), Serralheiro (2007), Nasser e Tinoco (2003), Dias (2009), Neves, Baccarin e Silva (2013), Ferreira (2016), Lima (2015), entre outros, confirmando que há um despreparo notório dos professores para trabalhar com as provas e demonstrações na Educação Básica.

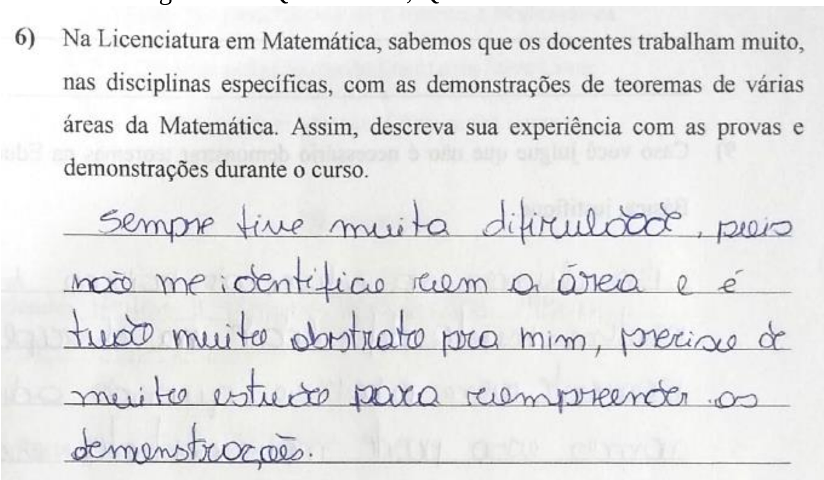
Embora seja um trabalho recomendado nos PCN (BRASIL, 1998), em que o currículo de Matemática deveria contemplar experiências e atividades que possibilitem aos alunos o desenvolvimento e a comunicação de argumentos matematicamente válidos, nota-se que ainda não há um trabalho nas escolas que venha a despertar o interesse dos alunos pela Matemática nem que venha a desenvolver a argumentação e justificação nas aulas. Além disso, percebe-se que não há uma reflexão nos cursos de Licenciatura em Matemática acerca da pertinência ou não do trabalho com as provas e demonstrações na Educação Básica, nem uma discussão sobre o trabalho com argumentações, tipos de prova, funções da demonstração e quais as melhores práticas para abordar as demonstrações nesse segmento de ensino.

Como a grande maioria dos licenciandos não domina as habilidades de demonstrar determinada afirmação durante o curso, nem quando se formam e nem durante os primeiros anos de docência, eles chegam como professores na Educação Básica sem terem a noção de como poderiam fazer esse trabalho pedagógico com os seus alunos. Além disso, como eles não foram incentivados a *fazer matemática*, a refletir e a questionar sobre os resultados encontrados, acabam sem desenvolver essa perspectiva na sala de aula, tornando-se um *círculo vicioso* (NASSER e TINOCO, 2003; LORENZATO, 1995).

Na questão 6 solicitamos que os licenciandos descrevessem sua experiência com as provas e demonstrações durante o curso de Licenciatura em Matemática, pois já estávamos considerando que há esse trabalho. Verificamos que cinco licenciandos descrevem que não foi uma experiência muito boa (45,4%), pois era algo muito abstrato e tiveram e ainda têm muita dificuldade em entender o porquê delas, porém hoje conseguem perceber a sua importância para a área, tendo se adaptado a elas e compreendendo alguns dos principais passos usados nas demonstrações. Além disso, um desses licenciandos argumenta que a didática do professor às vezes ajudava na compreensão das demonstrações, mas que nem sempre era assim. Isso vem a corroborar os resultados encontrados por Neves, Baccarin e Silva (2013), Ferreira (2016), Dias (2009), Nasser e Tinoco (2003), Pietropaolo (2005), entre outros.

Destacamos o relato de L03 (Figura 12) que sente muita dificuldade, pois não se identifica com a área e que precisa de muito estudo para tal. Seu relato é igual ao da maioria dos licenciandos do curso de Matemática, uma vez que possui muitas dificuldades e que não se identifica, pois é muito abstrato para eles. Essas ideias estão presentes nas discussões de Dias (2009), Ramassoti (2015), Neves, Baccarin e Silva (2013), Nasser e Tinoco (2003), Ferreira (2016), entre outros, alertando para o fato de que nossos licenciandos não estão habituados a demonstrar matematicamente, uma vez que os docentes ainda estão com a ideia de apresentar as demonstrações tal qual estão nos livros-texto esperando que seus alunos façam do mesmo jeito, caso esse licenciando modifique uma palavra ou uma vírgula, a demonstração é considerada errada.

Figura 12 - Questionário, Questão 6. Protocolo L03



6) Na Licenciatura em Matemática, sabemos que os docentes trabalham muito, nas disciplinas específicas, com as demonstrações de teoremas de várias áreas da Matemática. Assim, descreva sua experiência com as provas e demonstrações durante o curso.

sempre tive muita dificuldade, pois não me identifico com a área e é tudo muito abstrato pra mim, preciso de muito estudo para compreender as demonstrações.

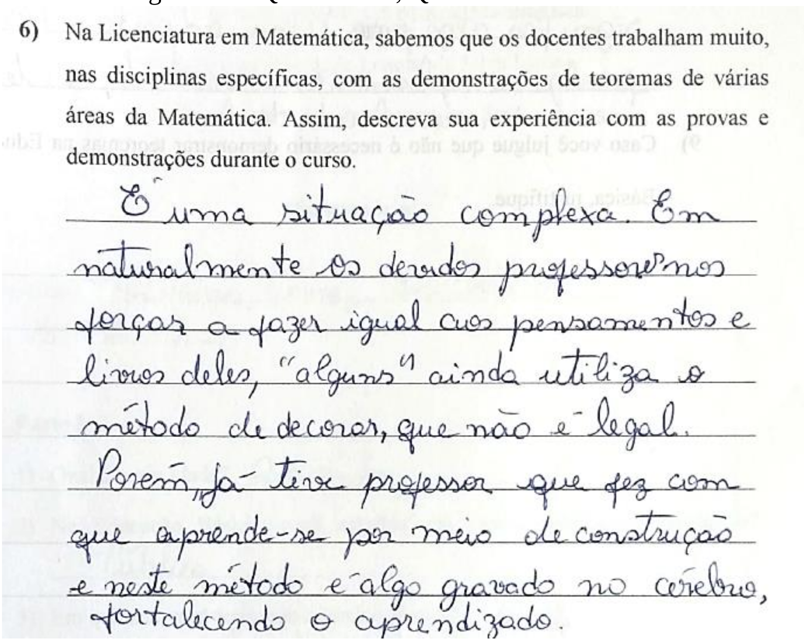
Fonte: dados da pesquisa

Isso acaba gerando uma aversão a esse trabalho com as provas e demonstrações, pois os licenciandos consideram que não são capazes de construir uma demonstração como o professor espera. Seria mais interessante propiciar aos licenciandos o *fazer matemática*, motivando para que eles possam experimentar, conjecturar, refutar, argumentar, justificar, provar e demonstrar (PIETROPAOLO, 2005). Além disso, esse *fazer matemática* ajudaria o licenciando a perceber a importância da demonstração na Matemática e compreender que ela não é algo pronto e acabado, que é preciso construção, reflexão e questionamento durante todo o processo de elaboração.

Três licenciandos destacaram a didática do professor nesse trabalho com as demonstrações (27,3%), um deles enfatizou que foi complicado de entender quando esse trabalho era feito por um professor mais rígido e menos explicativo, enquanto o outro afirmou que é uma parte da Matemática que nos desperta interesse, principalmente quando o professor tem uma boa didática para nos auxiliar nesse entendimento. O que enfatiza o alerta dado por Busquini e Santos (2011) ao afirmarem que geralmente os licenciandos aceitam as demonstrações contidas em alguns livros-texto sem questionarem, como também ainda há um aceite quanto ao autoritarismo herdado da prática científica da Matemática, do qual o aluno se torna cúmplice e reprodutor, admitindo que uma verdade matemática é absoluta, pronta e acabada. Isso acaba ocasionando uma aversão a Matemática, pois os licenciandos se julgam incapazes de aprendê-la e se afastam dela exatamente por isso (GARBI, 2010).

Destacamos a escrita do terceiro licenciando, L09, ao afirmar que a vivência na Licenciatura em Matemática com as demonstrações foi uma situação complexa, principalmente porque há professores que querem força-los a fazerem igual a eles ou igual aos livros, utilizando ainda o método de decorar (Figura 13). Além disso, esse licenciando destaca que também teve a experiência com um professor que construiu a demonstração com eles e isso fortaleceu o seu aprendizado.

Figura 13 - Questionário, Questão 6. Protocolo L09


6) Na Licenciatura em Matemática, sabemos que os docentes trabalham muito, nas disciplinas específicas, com as demonstrações de teoremas de várias áreas da Matemática. Assim, descreva sua experiência com as provas e demonstrações durante o curso.

É uma situação complexa. Em naturalmente os devidos professores nos forçar a fazer igual aos pensamentos e livros deles, "alguns" ainda utiliza o método de decorar, que não é legal. Porém, já tive professor que fez com que aprende-se por meio de construção e neste método é algo gravado no cérebro, fortalecendo o aprendizado.

Fonte: dados da pesquisa

As ideias de L09 corrobora as discussões trazidas por Garnica (2002) ao ressaltar que os cursos de Licenciatura em Matemática não devem assumir um caráter técnico e sim uma abordagem crítica que venha a possibilitar a análise dos modos de produção do conhecimento em Matemática. Vem a corroborar também as ideias de Pietropaolo (2005) que admite que as demonstrações não devem ser utilizadas apenas para a compreensão da Matemática, mas sim para refletir a evolução do pensamento matemático por meio de uma perspectiva didática, curricular e histórica.

Verificamos também que outros dois licenciandos não responderam o que estava sendo pedido na questão (18,2%), ou seja, não dissertaram sobre as suas experiências na Licenciatura em Matemática com as provas e demonstrações e acabaram falando apenas as suas opiniões acerca desse trabalho. Contudo, gostaríamos de destacar a escrita L04 ao argumentar que por meio do trabalho com as demonstrações é possível desenvolver conhecimentos e assim não é necessário a memorização de fórmulas ou do assunto. O que corrobora as recomendações da SBEM (2003) ao criticar o ensino de disciplinas matemáticas nos cursos de Licenciatura que acabam priorizando os aspectos algorítmicos e não refletem sobre as suas construções, uma vez que esse ensino apenas repassa tal como está nos livros os teoremas e demonstrações. A SBEM (2003) considera que o aspecto formal, referente a axiomas, definições, teoremas e provas são componentes ativos para os processos de raciocínio e devem ser inventados ou ensinados, organizados, verificados e usados ativamente pelos licenciandos.

Um licenciando relatou a sua experiência com as demonstrações nas disciplinas do curso (9,1%). L01 informou que o seu contato inicial com as provas e demonstrações foi na disciplina de Lógica Matemática e que teve mais facilidade e maior contato com elas na disciplina de Tópicos em Geometria I. O licenciando ainda sente certa dificuldade, embora hoje já consiga fazer algumas demonstrações. Podemos inferir que essa dificuldade se deve ao fato de como é feito o trabalho com as demonstrações na Licenciatura, sendo apresentada de forma pronta e acabada, esperando que os licenciandos reproduzam tal qual o professor fez em sala.

Na 7ª questão solicitamos que os licenciandos dissessem se demonstrariam algum teorema na Educação Básica. Caso a afirmativa fosse positiva, qual demonstraria. Ressaltamos que a questão não deixa claro qual tipo de trabalho poderia ser feito nas escolas, o que pode levar os licenciandos a acreditarem que eles apenas demonstrariam teoremas, tal como é feito na Licenciatura, contudo a ideia que estamos desenvolvendo nesta tese é de que eles deveriam levar os alunos, a partir de argumentações, justificações e casos particulares, a demonstrar afirmações matemáticas, uma vez que somente a apresentação de demonstrações de teoremas pode tornar a Matemática desinteressante.

A partir do que foi questionado, verificamos que nove licenciandos afirmaram que demonstrariam sim algum teorema para seus alunos da Educação Básica (81,8%). Dentre as possibilidades, eles citaram o teorema de Pitágoras, alguns na área de Trigonometria e funções, o teorema do ponto médio e da semelhança de triângulos, a fórmula de Bhaskara, a soma e o produto das raízes, os teoremas que envolvem P.A. e P.G., os critérios de divisibilidade, os números primos, o teorema de Tales, as construções de sólidos geométricos, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e algo relacionado a números pares e ímpares. Os outros dois licenciandos afirmaram que não demonstrariam (18,2%), pois os alunos da Educação Básica têm geralmente um nível muito baixo e não se interessam em descobrir de onde vêm as fórmulas.

Destacamos algumas respostas dos sujeitos participantes da pesquisa para essa questão ao concordarem com o trabalho da prova e demonstração na Educação Básica:

> *Sim. Demonstraria a "Fórmula de Bhaskara", soma e produtos das raízes, teorema de Pitágoras, entre outros, para chamar a atenção dos alunos a visualizarem que aquilo não surgiu do nada. (L05)*
>
> *Sim, desde que observei o uso do teorema em minha licenciatura, pude ver que se muitos vistos na licenciatura, podemos utilizar na Educação Básica. Posso citar vários, mas aqui cito os teoremas que envolve P.A. e P.G. (L06)*

Sim. Eu utilizo alguns. Existem demonstrações que são necessárias, onde eles perguntam de onde vem ou para onde vai. Gosto sempre de fazer: critérios de divisibilidade, números primos, teorema de Pitágoras, teorema de Tales, construções de sólidos geométricos. (L09)

Percebemos que a resposta afirmativa de que utilizariam a demonstração é mais para que os seus alunos saibam de onde vêm as fórmulas. Nenhum desses 81,8% dos licenciandos citaram que servem para motivá-los a *fazer matemática* ou para desenvolver e estimular o raciocínio matemático, possivelmente porque a pergunta não levaria a essa resposta. Todavia, encontramos a importância de se trabalhar com as provas e demonstrações de alguns teoremas para que os alunos percebam que a Matemática não é algo pronto e acabado, mas que veio crescendo e se desenvolvendo ao longo do tempo, com a ajuda de muitos matemáticos. As ideias apresentadas pelos licenciandos são também defendidas por pesquisadores como Dias (2009), Garbi (2010), Nasser e Tinoco (2003), Pietropaolo (2005), entre outros, como também pelos PCN (BRASIL, 1998, 2000) e pela BNCC (BRASIL, 2017, 2018).

Nos chamaram a atenção também as respostas negativas a essa questão. Apenas dois licenciandos afirmaram que não demonstrariam teoremas na Educação Básica.

Não, pois os alunos na educação pública, geralmente, têm um nível muito baixo e têm dificuldade até mesmo no básico do conteúdo. Dependendo do meu alunado eu poderia fazer uma ou outra, mas de maneira simplificada. (L03)

Não. Pois eles não têm muito interesse de descobrir de onde vêm as fórmulas usadas, no entanto eles só aceitam. (L07)

Em suas justificativas, percebemos que é a dificuldade que muitos pesquisadores relatam nos resultados de suas pesquisas, uma vez que os alunos não são motivados a pensar e raciocinar quando se estuda Matemática, por conta disso eles não têm muito interesse em descobrir como surgiram as fórmulas e os teoremas na Matemática, pois não são estimulados para isso (NASSER e TINOCO, 2003; AGUILAR JR e NASSER, 2012; DIAS, 2009; BALACHEFF, 1987; GRINKRAUT, 2009).

Outra justificativa da não utilização das provas e demonstrações na Educação Básica é justamente porque eles possuem um nível muito baixo de conhecimento e isso se deve ao fato da não estimulação do pensar e comunicar as suas ideias. Dias (2009) ressalta que o processo de construção e elaboração de uma demonstração é muito mais rico e útil para a construção do conhecimento matemático dos alunos do que a demonstração propriamente dita, pois nesse processo haverá a busca por conjecturas, as refutações, as modificações na escrita e nas conjecturas, o teste de regularidades, tornando-se um processo contínuo de construção e elaboração. Por isso quando os professores apenas demonstram para seus alunos, esse processo deixa de existir, uma vez que eles apresentam/reproduzem as demonstrações tal qual estão nos livros. É importante que ao se trabalhar com as provas e demonstrações matemáticas nas escolas, o professor enfatize mais o processo de construção e elaboração delas do que elas já prontas e acabadas, pois é nesse processo que surge toda a parte heurística como a elaboração de hipóteses e de conjecturas, o refinamento de ideias, os contra-exemplos, as refutações, etc.

Na questão 8 solicitamos que os licenciandos escrevessem quais os teoremas vistos durante a Educação Básica, eles consideravam mais importantes para que um aluno egresso desse segmento saiba a sua demonstração, justificando a sua resposta. Verificamos que nove licenciandos (81,8%) citaram algumas demonstrações de áreas de figuras planas, o teorema de Pitágoras, do triângulo retângulo, da semelhança de triângulos, do polígono regular, os teoremas relacionados as funções afim e quadrática, teorema de Tales, relação fundamental da Trigonometria, fórmula de "Bhaskara", polígonos inscritos e circunscritos, as demonstrações básicas de trigonometria, critérios de divisibilidade, números primos e construções de sólidos geométricos.

Desses nove licenciandos que indicaram quais teoremas são mais importantes para que um aluno egresso do ensino básico saiba sua demonstração, três não justificaram as suas escolhas, citando apenas os teoremas e assuntos (27,3%). Contudo, dos que justificaram, algumas dessas escritas nos chamaram a atenção. Para L11, algumas demonstrações de áreas de figuras planas são importantes, pois muitas dessas demonstrações levam você a procurar padrões. Para L08, o teorema de Pitágoras é o mais importante da Matemática, pois sem ele não teríamos cerca de 90% das coisas que temos na Matemática. Para L02, os teoremas relacionados as funções afim e quadrática, pois é o primeiro impacto que o aluno pode sofrer ao ingressar na área de Matemática. L01 afirmou que o teorema de Pitágoras é um importantíssimo teorema e que no caso dele foi levado a decorar sem ao menos entender o que era um teorema, que é o que geralmente acontece nas aulas de Matemática. Percebe-se, dessas escritas destacadas, que a maioria associa o trabalho com as provas e demonstrações apenas com a área da Geometria.

Para L09, a demonstração de alguns teoremas tem uma importância no aprendizado e que significa algo para levar adiante. Esse licenciando também observa que a demonstração é importante, pois os alunos podem ver que não foi algo simplesmente inventado, que existe e que merece ser reconhecido. Percebemos então uma preocupação da maioria quanto ao trabalho pedagógico com provas e demonstrações no sentido de fazer com que o aluno perceba que a Matemática não foi inventada do nada, que foi algo construído ao longo dos anos e que merece sim ser apresentado e discutido com seus alunos. Além disso, essas justificativas apresentam a Matemática como uma ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

Destacamos a resposta de L07 ao afirmar que os teoremas de Pitágoras e de Tales são de suma importância na Geometria, pois esse licenciando foi um dos que responderam, na questão 7, que não demonstraria para seus alunos da Educação Básica, uma vez que eles não têm interesse em descobrir de onde vêm as fórmulas utilizadas na Matemática, pois eles somente aceitam o que o professor diz. Esse licenciando ao responder à questão 8 evidencia uma contradição entre as suas ideias, pois na questão anterior ele afirma que não demonstraria e nessa ele cita dois teoremas importantes para que um aluno egresso do ensino básico saiba a sua demonstração.

Dois licenciandos deixaram a questão 8 em branco (18,2%). Um deles foi o outro licenciando (L03) que afirmou, na questão 7, que não demonstraria teoremas para seus alunos na Educação Básica, pois geralmente eles têm um nível muito baixo e têm dificuldades até mesmo no básico do conteúdo, evidenciando assim uma coerência na apresentação das suas ideias, já que ele não faria esse trabalho com as provas e demonstrações na Educação Básica, então não destacaria teoremas importantes para que um egresso desse segmento saiba a sua demonstração. O outro licenciando (L10) que deixou essa questão em branco, apenas respondeu “sim” na questão 7, ou seja, não citou exemplos de teoremas que demonstraria na Educação Básica e nem justificou a sua resposta afirmativa.

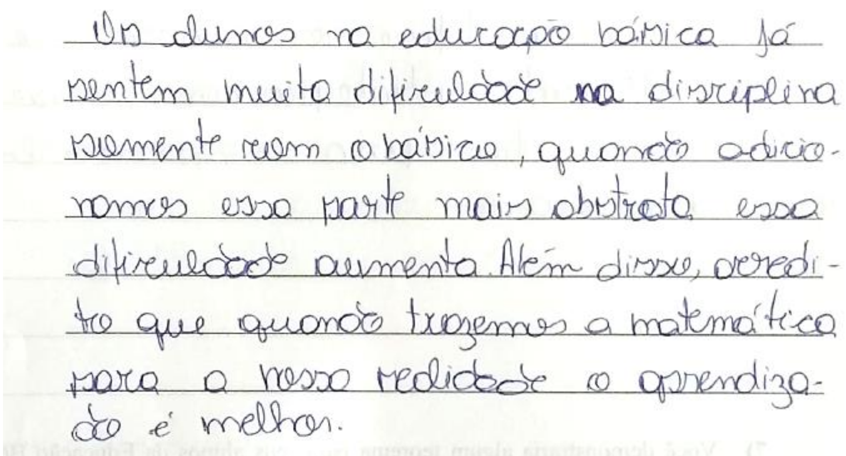
Na última questão do questionário (9ª), solicitamos aos licenciandos que, caso julgassem que não é necessário o trabalho com as provas e demonstrações na Educação Básica, que eles justificassem o motivo. Verificamos que quatro licenciandos deixaram a questão em branco (36,4%), pois, ao relacionarmos essa questão com a questão 7, esses licenciandos afirmaram positivamente para o trabalho com as provas e demonstrações de teoremas na Educação Básica, ou seja, julgam necessário o trabalho delas na Educação Básica. Entretanto, mesmo a questão pedindo para relatar o motivo de não julgar necessário esse trabalho, seis licenciandos escreveram que acreditam que seja necessário e importante esse trabalho (54,5%).

Desses que julgam importante, destacamos a justificativa de dois licenciandos. Para L07, existem casos que são necessários a demonstração, desde que os alunos consigam acompanhar o raciocínio. Esse licenciando continua se contradizendo ao compararmos essas ideias com a que foi apresentada na questão 7, pois ele afirmou que não faria o trabalho com as provas e demonstrações na Educação Básica, uma vez que os alunos não têm interesse em descobrir de onde vêm as fórmulas, contudo na questão 8 destaca dois teoremas importantes para que um aluno egresso desse segmento saiba a demonstração. Ou seja, L07 não apresenta coerência entre as suas ideias nas questões 7, 8 e 9. Já L11 afirma que não se deve demonstrar tudo, mas muitas vezes sabendo de onde veio as coisas algumas pessoas aprendem melhor, apresentando uma coerência entre suas ideias, pois esse licenciando nas questões 7 e 8 ressalta a importância dos alunos da Educação Básica saberem de onde vem as fórmulas e que muitas demonstrações levam o aluno a procurar padrões e a raciocinar mais rápido.

As ideias apresentadas por esses licenciandos estão de acordo com as ideias de Balacheff (1987), Hanna (1990), Nasser e Tinoco (2003), Aguilar Jr e Nasser (2012), entre outros, que alertam que esse trabalho deve levar em conta a faixa etária dos alunos e seus conhecimentos matemáticos adquiridos até a fase escolar em que se encontram. Não se deve exigir uma racionalidade e um estado específico de conhecimento que o aluno ainda não possui, ou seja, esse trabalho só será possível após o desenvolvimento cognitivo dos alunos e isso requer um tempo que às vezes não é contemplado nas escolas, por conta dos programas escolares e currículos extensos.

O outro licenciando (L03) que na questão 7 afirmou que não faria o trabalho com as provas e demonstrações na Educação Básica, nessa questão 9 foi o único que respondeu que julga não ser necessário demonstrar teoremas na Educação Básica (9,1%). Para L03 (Figura 14), os alunos da Educação Básica já sentem muita dificuldade nos conteúdos básicos da Matemática e quando se acrescenta essa parte mais abstrata, essa dificuldade iria aumentar. Para ele, o aprendizado é melhor quando trazemos a Matemática para a nossa realidade.

Figura 14 - Questionário, Questão 9. Protocolo L03


Os alunos na educação básica já sentem muita dificuldade na disciplina somente com o básico, quando adicionamos essa parte mais abstrata essa dificuldade aumenta. Além disso, acredito que quando trazemos a matemática para a nossa realidade o aprendizado é melhor.

Fonte: dados da pesquisa

O que não deixa de ser importante, mas é necessário ressaltar que o trabalho com demonstrações não deve ser o primeiro, mas sim deve-se iniciar esse trabalho com argumentações e justificativas, estimulando o raciocinar e comunicar as ideias dos alunos, até evoluir para as demonstrações. A ideia é de que os alunos do Ensino Médio consigam fazer algumas demonstrações de teoremas básicos, tais como o de Pitágoras.

Percebemos assim que, embora os sujeitos pesquisados não conheçam a diferença entre as palavras provas e demonstrações, a maioria concorda que esse trabalho deve sim ser feito na Educação Básica, ressaltando que isso serve para mostrar aos alunos que a Matemática não surgiu do nada, como também para que eles possam ver os padrões e regularidades presentes na Matemática. Como afirmam Pietropaolo (2005), Dias (2009), Nasser e Tinoco (2003), Caldato, Utsumi e Nasser (2017), Ferreira (2016), Neves, Baccarin e Silva (2013), entre outros, é necessário que o futuro professor compreenda o funcionamento das demonstrações em um ambiente exploratório-investigativo e não em um ambiente que reproduzam as demonstrações tal qual estão nos livros-texto sem uma visão crítica ou uma discussão, e o licenciando pode experienciar esse processo de exploração e investigação nas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática.

Portanto, os licenciandos em Matemática além de conhecerem e saberem trabalhar com axiomas, teoremas, definições e demonstrações de forma eficiente, é necessário que eles também sejam levados a construir e vivenciar o processo de levantamento de hipóteses, teste de regularidades, refinamento e refutações de conjecturas, verificação das conclusões e por fim conseguir chegar a elaborar uma demonstração, abandonando assim a visão formalista ainda presente nos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática. Somente vivenciando esse ambiente, os futuros professores conseguirão ampliar seus conhecimentos e trabalhar com esse processo na Educação Básica.

6.1.3 Comentários

A partir dos resultados encontrados, percebemos que os onze licenciandos não vivenciaram um trabalho pedagógico adequado das provas e demonstrações matemáticas, seja na Educação Básica ou na Licenciatura em Matemática. No momento da aplicação do questionário, conseguimos identificar que quatro licenciandos cursavam o 6º período do curso (36,4%); quatro estavam no 8º período (36,4%); dois estavam no 9º período (18,2%); e um estava no 10 período da Licenciatura (9,1%). Ou seja, são alunos que já vivenciaram o trabalho com as demonstrações matemáticas por meio das disciplinas do curso, tais como Lógica

Matemática, Estruturas Algébricas, Análise Matemática, Tópicos de Geometria I e II, Introdução à Teoria dos Números, entre outras. Além disso, já possuíam conhecimento das terminologias utilizadas na Matemática, tais como teorema, lema, corolário, hipótese, tese, etc.

Contudo, o que encontramos não foi esse cenário. Na verdade, inferimos que esses licenciandos aprendem ou estudam os conceitos e terminologias apenas para as disciplinas, ficando pouco conhecimento posterior a elas. Uma das primeiras coisas que buscamos conhecer é se eles saberiam distinguir as palavras prova e demonstração. O resultado foi quase unanime, uma vez que nove dos onze licenciandos (81,8%) consideram como palavras sinônimas. Isso se deve ao fato de não haver distinção no meio acadêmico, principalmente pelos matemáticos, dessas duas palavras, considerando-as com o mesmo significado e fazendo com que os licenciandos desconheçam a possibilidade de trabalhar com níveis diferentes de prova, ao ampliarmos esse conceito para justificativas de acordo com o nível de escolaridade e conhecimento dos alunos do ensino básico (GARNICA, 1996; MORAIS FILHO, 2010; ORDEM, 2015). Ferreira (2016) também percebeu que a maioria dos licenciandos participantes de sua pesquisa atribui a prova e a demonstração o mesmo significado.

Nos resultados também encontramos que mais de 50% dos sujeitos pesquisados não souberam definir corretamente hipótese e tese de um teorema, como também a própria definição de teorema. O que significa que, embora estivessem entre o 6º e 10º período da Licenciatura em Matemática, esses alunos desconhecem as terminologias da área, como também não conseguem identificar corretamente hipótese e tese, uma vez que não sabem diferenciá-las. Neves, Baccarin e Silva (2013) e Ferreira (2016) também encontraram resultados parecidos em suas pesquisas, apontando para o fato de que os licenciandos possuem dificuldades relacionadas à argumentação e à distinção entre definições e teoremas e em reconhecer e manipular as hipóteses e conclusão de uma propriedade.

Quanto à definição de corolário, mais de 50% dos licenciandos conseguiram defini-lo corretamente, utilizando as suas próprias palavras. Contudo, percebemos uma dificuldade na escrita dessa e das outras definições, pois eles estavam sempre nos dizendo que já tinham visto, mas que não se lembravam mais. A dificuldade não se encontrava somente ao não lembrar dos conceitos, mas também na forma de como escreve-los utilizando as suas próprias palavras. O que corrobora os resultados encontrados no ENADE 2014 (BRASIL, 2014), em que os licenciandos demonstraram ter muita dificuldade na expressão escrita do seu pensamento nas questões discursivas, como também apresentaram dificuldades em escrever textos simples, uma vez que continha inúmeros erros gramaticais, redundância, ambiguidade e desconexão.

Todos os onze licenciandos não vivenciaram atividades com provas e demonstrações na Educação Básica. A maioria afirmou que seus professores de Matemática do ensino básico trabalhavam apenas com conceitos e problemas e outros só apresentavam o resultado e diziam que valia. Durante a graduação, 54,5% dos sujeitos investigados não tiveram uma experiência boa com as demonstrações. A maioria afirma que teve muitas dificuldades e que não via a sua importância, assim como alguns não se identificam com essa área. Outros licenciandos relacionaram as dificuldades ao método de trabalho do professor, principalmente os mais rígidos, enquanto que um professor com uma boa didática e que apresente o passo a passo da construção de uma demonstração, vem a facilitar mais o entendimento.

Embora a SBEM (2003) recomende que o professor em formação seja levado a explorar situações-problema, a procurar regularidades, a fazer conjecturas e generalizações, a pensar de maneira lógica e a comunicar-se matematicamente utilizando diferentes linguagens, como também orienta que o licenciando compreenda as noções de conjectura, de teorema, de demonstração, sabendo examinar as consequências do uso de diferentes definições. O que é percebido é que a maioria dos licenciandos não domina as habilidades de demonstrar determinada afirmação durante o curso, nem quando se formam e nem durante os primeiros anos de docência, o que ocasiona um despreparo ao chegaram na Educação Básica, uma vez que eles não têm a noção de como poderiam fazer um trabalho de incentivo à argumentação, à justificação e ao raciocínio matemático, já que o curso de Licenciatura em Matemática não lhes permitiram uma reflexão acerca da pertinência ou não do trabalho com as provas e demonstrações na Educação Básica.

O que sugere que esses licenciandos acabam vendo a demonstração de forma técnica e abstrata, em um ambiente que requer rigor e formalidade excessivos. Ou seja, eles conhecem a palavra demonstração somente a partir da reprodução desta no quadro, desenvolvida pelo professor, em que muitos não explicam o que ela significa e qual a sua importância na Matemática. Além disso, eles somente enfatizam as funções de verificação e de explicação de uma demonstração, não abordando outros aspectos de sua utilização, como também como se deu e como pode ser feito o processo de construção e elaboração de uma demonstração. Esses resultados encontrados corroboram as ideias apresentadas por Ferreira (2016) ao afirmar que os licenciandos, muitas vezes, não são envolvidos em tarefas que os permitam construir demonstrações, o que pode indicar que a abordagem da demonstração vivenciada por eles é apenas de reprodução tal qual está no livro-texto.

Percebemos também que mais de 50% dos licenciandos investigados afirmaram que viriam a demonstrar alguns teoremas a seus alunos da Educação Básica, com o intuito dos alunos visualizarem que determinado assunto não surgiu do nada. Ou seja, esses licenciandos justificam a utilização das provas e demonstrações na Educação Básica pelo fato de os alunos saberem de onde vêm as fórmulas e que eles percebam que a Matemática não é algo pronto e acabado. A partir disso, inferimos que a função da demonstração para esses casos é apenas a de explicar o porquê determinada afirmação ou determinada fórmula é verdadeira, proporcionando assim o entendimento dos motivos da validade da afirmação. Contudo, há outros tipos de função da demonstração que auxiliam no entendimento, como também permitem o raciocínio, a busca de regularidades, a investigação, o desafio pessoal, a autoconfiança, entre outros, conforme discutido na seção 3.6 do Capítulo 3.

Dois licenciandos afirmaram que não demonstrariam teoremas na Educação Básica, pois os alunos geralmente possuem um nível muito baixo e têm dificuldade até mesmo do básico, como também não têm muito interesse em descobrir de onde vêm as fórmulas usadas, já que a maioria aceita como verdade e pede para os professores irem logo para as aplicações. Isso se deve ao fato dos professores trabalharem exercícios rotineiros e mecânicos, sem estimular o pensamento e o raciocínio matemático, justamente com a justificativa de que os alunos não conseguem. Devemos eliminar de nossa fala e atitude o comodismo e tentarmos compreender as dificuldades dos alunos, sabendo em que nível de pensamento e de conhecimento eles estão, para poder utilizar as atividades e linguagem adequadas, e assim ir evoluindo, partindo de atividades simples a complexas.

Percebemos que 72,7% dos licenciandos investigados consideram os teoremas da Geometria Plana mais importantes para que um aluno egresso do ensino básico saiba a sua demonstração, principalmente os teoremas de Pitágoras e de Tales. A maioria justifica essa escolha justamente por considerarem que eles têm muita importância na Geometria e que é uma forma de mostrar aos alunos que não foi algo simplesmente inventado, que existe e que merece ser reconhecido. Além disso, percebemos que são poucas as indicações de demonstrações dentro das áreas da Álgebra ou da Aritmética.

Quanto a esses resultados, Ávila (2010) ressalta que, embora a Geometria seja a disciplina que melhor apresenta o aspecto dedutivo da Matemática, os teoremas e as demonstrações não se restringem somente a ela, uma vez que se encontram presentes em todas as disciplinas da Matemática. Além disso, Ávila (2010) alerta que é importante que os alunos e os licenciandos também conheçam os teoremas e demonstrações contidos nas outras áreas da

Matemática e percebam que, dependendo do nível de desenvolvimento e conhecimento do seu alunado, a informalidade muitas vezes é bem-vinda.

Por fim, percebemos que mais de 50% dos licenciandos acreditam ser necessário e importante demonstrar alguns teoremas, com a justificativa de que existem teoremas que deixam mais claro o entendimento de determinado assunto, como também quando os alunos estudam de onde veio as coisas, eles acabam aprendendo melhor. Percebemos também que há licenciandos que consideram necessário esse trabalho, desde que os alunos consigam acompanhar o raciocínio. O que corrobora as ideias de Balacheff (2000) ao afirmar que não devemos ensinar a demonstração aos alunos por meio de sua apresentação e dedução e esperando que eles façam o mesmo, sem sabermos quais dificuldades poderão ter. É preciso conhecer o seu nível de pensamento, tendo em mente a sua racionalidade, que antes do advento da demonstração, possuem meios para *fazer matemática*, por meio da investigação, da argumentação, da busca por regularidades, das conjecturas, das provas informais, etc.

Encontramos também uma resposta negativa a esse trabalho com provas e demonstrações na Educação Básica, em que o licenciando afirma que os alunos do ensino básico já sentem muita dificuldade na disciplina de Matemática somente com o básico e caso trabalhemos com essa parte mais abstrata, a dificuldade iria aumentar. Esse licenciando também acredita que quando trazemos a Matemática para a nossa realidade, o aprendizado torna-se melhor. Contudo, Ávila (2010) ressalta que as demonstrações devem ser trabalhadas de forma compreensível para os alunos, onde nem sempre deve-se adotar o rigor lógico, sendo necessário atentar para os requisitos didáticos.

Ávila (2010) também ressalta que o que não podemos admitir é que os conteúdos matemáticos sejam ensinados dogmaticamente, sem qualquer justificativa. Garbi (2009) alerta para o fato de que a contextualização passou dos limites do razoável no Brasil, tornando-se algo obsessivo e, muitas vezes, ridículo. Ele lembra aos contextualizadores compulsivos que a Matemática, embora tenha incontáveis aplicações práticas, é uma ciência abstrata, ou seja, seus objetos de estudos lógico-dedutivos são imateriais e existe muita coisa importante nessa área que não é contextualizável e que também merece ser estudada, como é o caso da Teoria dos Números e dos Números Complexos. Desse modo, Garbi (2009) enfatiza que a exclusiva apresentação de questões matemáticas contextualizadas restringe o raciocínio dos alunos, dificultando-lhes a aquisição da capacidade de pensar de forma genérica e abstrata.

Em consequência, devemos ter cautela ao utilizar as metodologias de ensino na Matemática, pois algumas vezes poderemos estar utilizando alguma em demasia e não contribuindo para estimular o raciocínio e o pensamento dos alunos. Além disso, precisamos ter a clareza que não devemos começar com as demonstrações para alunos, por exemplo, do 6º ano que ainda não possuem certa maturidade intelectual e abstrata para tal. Conforme recomenda Hanna (1990), o trabalho com argumentações, provas e demonstrações deve ser iniciado desde os anos iniciais, trabalhando-se inicialmente com argumentações e justificativas, até evoluir para as demonstrações, ao longo da escolaridade, de tal forma que leve em consideração a racionalidade e os conhecimentos dos alunos.

Para que isso aconteça é necessário também os professores estarem conscientes da ampliação do conceito de prova e que estejam aptos a elaborarem situações que levem os alunos a no momento oportuno realizar demonstrações. Isso só ocorrerá na Educação Básica se, na formação inicial, os professores formadores considerarem a prova e a demonstração com significados distintos e trabalharem com os licenciandos atividades que os possibilitem *fazer matemática*, como também que percebam a importância da demonstração para a Matemática e que possam participar ativamente do processo de construção e elaboração de uma demonstração, não sendo meros telespectadores e reprodutores, uma vez que esse processo é muito mais rico e útil para a construção do conhecimento matemático do que a demonstração propriamente dita. Somente assim o futuro professor estará preparado para, no ensino básico, trabalhar com as provas e demonstrações considerando o nível de escolaridade, maturidade e conhecimento dos seus alunos (DIAS, 2009; FERREIRA, 2016).

Portanto, percebemos que os resultados encontrados a partir da aplicação do questionário a onze licenciandos em Matemática de uma universidade pública do estado da Paraíba vem a corroborar as ideias e resultados de pesquisas de vários educadores matemáticos citados anteriormente, alertando para o fato de melhorarmos o ensino e aprendizagem da Matemática tanto na Educação Básica, como no Ensino Superior, buscando motivar os alunos a pensar e raciocinar matematicamente, por meio de atividades que os levem a *fazer matemática* e que estejam de acordo com o seu nível de conhecimento. Precisamos reintroduzir, por meio de doses equilibradas, as argumentações, justificações, provas e demonstrações no ensino da Matemática, como também precisamos nos lembrar de que a primeira qualidade de um bom professor é conhecendo bem o que ele vai ensinar, ou seja, que ele saiba mais do que aquilo que vai ensinar.

6.2 ANÁLISE A PRIORI E A POSTERIORI DAS ATIVIDADES COM PROVAS MATEMÁTICAS

Nesta seção apresentamos as atividades que foram submetidas aos licenciandos de nossa pesquisa com a respectiva análise didática *a priori* e *a posteriori*, fazendo também uma discussão acerca dos resultados encontrados. Para cada atividade apresentamos os objetivos e os conhecimentos matemáticos envolvidos e uma análise *a priori*. Imediatamente após essa análise de cada atividade, apresentamos a análise *a posteriori*, trazendo sempre que possível os dados das notas de campo e dos áudios das videogravações e das entrevistas, a fim de complementar a nossa análise e discussão.

São atividades que julgamos que podiam fornecer os dados necessários para respondermos à questão norteadora da pesquisa, bem como aos objetivos específicos que propusemos para o nosso estudo. Como foi apresentado no Capítulo 5, o objetivo deste estudo é "estabelecer articulações entre os níveis de pensamento geométrico discutidos por van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff". Assim, as atividades foram propostas tendo como foco as estratégias que os sujeitos investigados utilizaram para justificar e provar as suas ideias.

As atividades propostas foram projetadas para fornecer respostas ao nosso objetivo geral da pesquisa a partir dos três últimos objetivos específicos que apresentamos novamente a seguir:

2 – Estudar as argumentações, justificações e estratégias utilizadas pelos licenciandos ao responderem atividades que exigem provas de afirmações matemáticas;

3 – Analisar os tipos de prova elaborados pelos licenciandos e o nível de pensamento geométrico em que eles se encontram;

4 – Verificar o que os licenciandos entendem por casos particulares e casos genéricos ao analisarem argumentações, justificativas e provas de afirmações matemáticas.

Após a análise *a priori* de cada atividade, apresentamos e discutimos os dados da pesquisa. Os dados compreendem os protocolos produzidos pelos sujeitos quando da resolução das atividades com provas matemáticas; das videogravações (ou filmagens) durante a resolução; das notas de campo elaboradas a partir da observação da pesquisadora durante a resolução das atividades pelos licenciandos; e dos áudios gravados a partir da entrevista semiestruturada realizada após a resolução das atividades. Ressaltamos que essa parte do trabalho foi realizada em duplas, ficando apenas um licenciando sozinho. Assim, para a análise apresentamos o extrato de protocolos de cinco duplas e um licenciando, cujas respostas se revelaram pertinentes para o nosso objetivo da pesquisa.

As atividades com provas matemáticas foram nosso segundo instrumento de coleta de dados realizado e contemplam dez atividades que as duplas deveriam responder no tempo disponibilizado por eles. Por conta disso, não foi possível a conclusão das dez atividades, pois a duração média foi de duas horas. Acordamos então com todas as duplas a resolução das sete primeiras atividades. Apresentamos aqui a análise e discussão das atividades de 1 a 7, enquanto que as atividades de 8 a 10 são apresentadas somente com sua análise *a priori* no Apêndice C.

Por questões éticas, classificamos em Dupla 01 a Dupla 05 e o licenciando recebeu a referência da seção anterior, L05, com efeitos de preservação da integridade e manutenção de anonimato na apresentação dos resultados do estudo.

Ressaltamos que com essas atividades buscamos analisar os tipos de prova elaborados pelas duplas, como também o nível de pensamento em que eles se encontram, compreendendo que, de acordo com Nasser (1992) e Andrade e Nacarato (2004), os licenciandos podem apresentar características de dois níveis diferentes em tópicos distintos da Geometria, sendo possível transitar entre um nível e outro imediatamente anterior ou posterior a resolução de uma mesma atividade. Além disso, conforme aponta Oliveira (2012), os licenciandos podem oscilar de um nível para outro na mesma atividade, como também podem ser enquadrados em níveis diferentes, executando as mesmas atividades, dependendo do critério utilizado.

Por estarmos considerando que a existência dos quatro primeiros níveis de pensamento geométrico nos licenciandos investigados são mais possíveis de serem encontrados, conforme discutido na seção 2.3 do Capítulo 2 e no Capítulo 4, esperamos que os licenciandos construam variados tipos de prova, dentre àqueles discutidos por Balacheff (2000). Isto quer dizer que estamos tomando a palavra *prova* em um sentido mais amplo, podendo ser entendida como um discurso para estabelecer a validade de uma afirmação, não necessariamente aceita pela comunidade matemática (GRINKRAUT, 2009). Conforme discutido por Balacheff (2000), *provas* são explicações aceitas em um determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para uma comunidade, mas também pode ser rejeitada por outra, ou seja, é um discurso que valida a proposição para determinada comunidade, podendo assumir diferentes níveis de generalização. Considerando a palavra *prova* com esse significado implica que estaremos aceitando, a depender do contexto, outras produções dos licenciandos para estabelecer a validade de uma afirmação, em que estas produções estarão de acordo com o seu nível de pensamento geométrico.

Em nossa análise estaremos considerando que não existe uma única resposta correta ou um único tipo de prova, uma vez que as justificativas e respostas dependem do nível de pensamento geométrico em que os licenciandos se encontram e, consequentemente, isso virá a influenciar a elaboração dessa prova. Não apresentamos exemplos específicos das possíveis respostas dos licenciandos pois, a partir dos nossos referenciais teóricos, há várias possibilidades de respostas tanto no que diz respeito aos níveis de pensamento geométrico, como nos tipos de prova. Além disso, por não fazermos isso, deixamos claro que a correção vai além daquelas possibilidades de respostas que poderíamos esperar, uma vez que não consideramos apenas a nossa como verdadeira e única. Por conta disso, discutimos na análise *a priori* as possibilidades de respostas de forma genérica, levando em consideração as discussões trazidas por Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), Gutiérrez e Jaime (1998) e Balacheff (2000).

Portanto, estaremos considerando as características gerais dos níveis de pensamento geométrico discutidos por van Hiele (1957), De Villiers (2010), Nasser (1991), Kaleff *et al*. (1994), Dall'Alba (2015), Ontário (2006), Battista e Clements (1995), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), entre outros. Como também, estaremos considerando os aspectos gerais dos tipos de prova propostos e discutidos por Balacheff (2000). Além disso, nessa etapa da análise de dados buscamos concretizar as articulações específicas entre os níveis de pensamento geométrico e os tipos de prova que elaboramos no Capítulo 4, a partir das discussões feitas por Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), Gutiérrez e Jaime (1998) e Balacheff (2000).

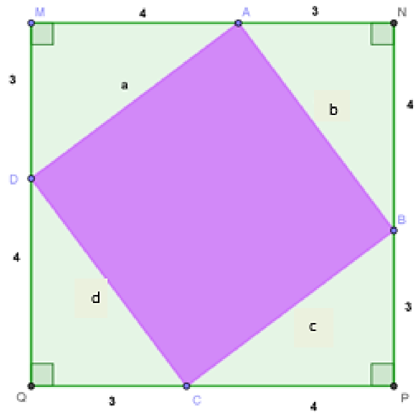
6.2.1 Análise da atividade 1

A seguir são apresentadas as análises *a priori* e *a posteriori* da atividade 1 (Figura 15), que diz respeito ao teorema de Pitágoras.

Figura 15 - Atividade 1

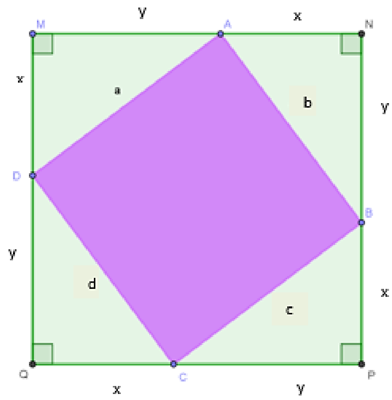
1) (adaptado de FERREIRA FILHO, 2007)

a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem sua resposta.



b) Calculem a medida do lado *a*, do item anterior, utilizando o conceito de área. Expliquem como vocês fizeram.

c) Observem a figura abaixo e calculem a medida do lado *a* em função das medidas dos lados *x* e *y* usando apenas o conceito de área. Justifiquem sua resposta.



d) Comparem a conclusão obtida na letra b com a conclusão obtida na letra c. O que vocês observam?

e) A partir dessa conclusão, respondam:

- ✓ As duas conclusões são equivalentes (iguais)? Justifiquem sua resposta.
- ✓ Em qual dos dois processos (item *b* ou item *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem sua resposta.

Fonte: adaptada de Ferreira Filho (2007)

6.2.1.1 Análise *a priori* da atividade 1

A atividade tem por objetivo conduzir as duplas a uma verificação para o Teorema de Pitágoras, utilizando as áreas do quadrado e do triângulo que compõem a figura, como também será observado o que os licenciandos entendem por casos particulares e casos genéricos ao analisarem argumentações, justificativas e provas de afirmações matemáticas. Os conhecimentos matemáticos envolvidos são: definição de um quadrado, área de um quadrado e de um triângulo, produtos notáveis, potenciação, radiciação, congruência de triângulos e noções acerca de casos particulares e casos genéricos na Matemática. Necessita-se também perceber que a área do quadrado maior (MNPQ) é composta pelas áreas de um quadrado menor (ABCD) e de quatro triângulos retângulos (DMA, ANB, BPC e CQD).

O *item a)* tem como objetivo verificar a forma como os licenciandos irão argumentar/justificar que o quadrilátero ABCD trata-se de um quadrado. A partir do que foi discutido nos Capítulos 2 e 4, pode-se afirmar que os licenciandos que estejam no nível 1 de van Hiele irão perceber o quadrado em sua totalidade, não sendo capazes de generalizar as características que reconhecem em uma figura para outras de sua classe. Ou seja, a identificação de que o quadrilátero ABCD trata-se de um quadrado é feita a partir de suas características físicas globais, tais como aspecto, tamanho dos elementos, posição. Para aqueles que estejam no nível 2, conseguirão identificar o quadrado com base em suas propriedades, mas podem ter problemas com algumas partículas lógicas ao ler ou declarar definições (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

Os licenciandos que estejam no nível 3 de van Hiele, poderão fornecer definições do quadrado ABCD matematicamente corretas, uma vez que entendem o papel das definições e os requisitos de uma definição correta. Contudo, nesse nível, seu raciocínio lógico ainda continua apoiado pela manipulação. Por fim, caso estejam no nível 4, eles poderão entender e executar o raciocínio lógico formal e a estrutura axiomática da Matemática, mas não sentem a necessidade do rigor. Ou seja, nesse nível, os licenciandos já terão um melhor entendimento das definições e poderão apenas se utilizar das propriedades e definições para validar que o quadrilátero ABCD é efetivamente um quadrado (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

Ao analisarmos as justificativas e/ou argumentações utilizadas no item *a)*, os licenciandos no nível 1 podem justificar a afirmação por meio da visualização, apenas ao observarem a imagem do quadrilátero ABCD, confirmarão que se trata de um quadrado. No nível 2, os licenciandos podem, por conhecerem as propriedades de um quadrado, justificar por meio de medições dos ângulos e dos lados do quadrilátero ABCD, confirmando que é um quadrado. No nível 3, eles podem, por exemplo, justificar atribuindo valores aos ângulos dos triângulos retângulos e percebendo que os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ equivalem a 90º. E no nível 4, os licenciandos podem justificar a afirmação de forma teórica a partir de definições e propriedades do quadrado e de outros dados que compõem a figura maior, o quadrilátero MNPQ (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

Estabelecendo uma articulação com os tipos de prova de Balacheff (2000), os licenciandos, caso estejam no nível 1 de van Hiele, não produzirão provas, pois não entendem o conceito de prova e utilizarão apenas a visualização para confirmar a veracidade da afirmação. No nível 2, os licenciandos podem produzir provas do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, utilizando medições e/ou justificativas de acordo com as definições e propriedades de um quadrado. No nível 3, eles podem produzir provas do tipo *exemplo genérico*, utilizando um exemplo bem específico, o que poderia ter sido feito de forma genérica. E no nível 4, os licenciandos podem escrever provas do tipo *experiência mental*, utilizando apenas definições, conceitos e propriedades que envolvam os quadriláteros MNPQ e ABCD.

Os *itens b)* e *c)* tem como objetivo conduzir os licenciandos, respectivamente, a uma verificação empírica do teorema de Pitágoras e a uma comprovação da relação pitagórica de forma algébrica, utilizando as áreas do quadrado e do triângulo que compõem a figura. Para isso, é preciso que esses licenciandos percebam que a área da figura maior, o quadrado MNPQ, é composta pela área de cinco figuras menores: um quadrado menor ABCD e quatro triângulos retângulos semelhantes (DMA, ANB, BPC e CQD). Além disso, é preciso que eles se lembrem dos conceitos de produtos notáveis, cálculo de área, congruência de triângulos, potenciação e radiciação. Uma dificuldade que pode surgir na resolução desses itens diz respeito a não visualização de que a área da figura pode ser expressa de duas formas diferentes e, consequentemente, irão querer aplicar o teorema de Pitágoras de imediato. No item *c*, os licenciandos também podem ter dificuldade no campo algébrico ao manipularem as áreas dos quadrados e dos triângulos por meio de variáveis.

Nesses dois itens os licenciandos não produzirão uma prova, mas sim uma justificativa, respectivamente, aritmética e algébrica a partir dos conceitos envolvidos. Então, só observaremos o seu nível de pensamento geométrico. A partir do que foi discutido nos Capítulos 2 e 4, pode-se afirmar que os licenciandos que estejam no nível 1 geralmente não reconhecem explicitamente as partes das quais as figuras são compostas ou suas propriedades. Para aqueles que estejam no nível 2, os licenciandos irão perceber que o quadrilátero maior MNPQ é composto por outras figuras geométricas (quadrados e triângulos), mas ainda não são capazes de relacionar algumas propriedades a outras. Os licenciandos que estejam no nível 3 já são capazes de reconhecer que algumas propriedades são deduzidas de outras e descobre essas implicações, contudo ainda não entendem a estrutura axiomática da Matemática. Caso estejam no nível 4, os licenciandos já aceitam a possibilidade de alcançar o mesmo resultado a partir de premissas diferentes e já possuem um melhor entendimento das definições e na capacidade de provar a equivalência de diferentes definições do mesmo conceito (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994; GUTIÉRREZ e JAIME, 1998; ONTÁRIO, 2006; DALL'ALBA, 2015).

Ao analisarmos as justificativas e/ou argumentações utilizadas nos itens *b)* e *c),* os licenciandos no nível 1 não entendem o que está sendo pedido nos itens e por conta disso deixam em branco, pois não compreendem quais conceitos irão utilizar e nem sabem como utilizar. No nível 2, eles não conseguem relacionar a área do quadrilátero maior com as áreas das figuras menores (quadrado e triângulos) e acabam aplicando o teorema de Pitágoras de imediato ou podem encontrar apenas a área do quadrado maior MNPQ, não conseguindo estabelecer relação com as áreas das figuras menores e, por conta disso, também aplicam o teorema de Pitágoras. Esses dois casos presentes no segundo nível não deveriam ser construídos, pois estamos buscando uma verificação para esse teorema e não sua aplicação. Nos níveis 3 e 4, havendo distinção apenas na linguagem adotada, há a possibilidade dos licenciandos conseguirem perceber a relação existente entre a área do quadrado maior com as áreas do quadrado menor e dos triângulos, conseguindo com isso determinar, no item *b*, a medida do lado *a* utilizando as áreas que compõem a figura e, no item *c*, a medida do lado *a* em função das medidas dos lados *x* e *y* utilizando as áreas que compõem a figura (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

Por fim, o *item d)* tem como objetivo conduzir os licenciandos a reconhecerem que os resultados dos itens *b* e *c* são semelhantes, mas que um diz respeito a um caso particular e o outro a um caso genérico. Já o *item e)* tem como objetivo verificar o que os licenciandos entendem por casos particulares e casos genéricos ao analisarem as argumentações/justificações realizadas nos itens *c* e *d*, como também saber se as duplas reconhecerão quando um argumento se constitui em uma prova. A partir do que foi respondido no item *d*, caso percebam que são semelhantes, no item *e* eles também devem enunciar que são conclusões equivalentes, mas que uma assume valores numéricos e a outra é tratada de forma genérica.

Nesses dois itens os licenciandos não produzirão uma prova, mas deverão ter claro conhecimento de que exemplos não constituem efetivamente uma justificativa para uma afirmação e que, por isso, é necessário a generalização. Então, só observaremos o seu nível de pensamento geométrico. A partir do que foi discutido nos Capítulos 2 e 4, pode-se afirmar que os licenciandos que estejam no nível 1 se limitam a descrever a aparência física das figuras e geralmente não reconhecem explicitamente as partes das quais as figuras são compostas ou suas propriedades matemáticas. Os licenciandos que estejam no nível 2 podem descrever as partes que compõem uma figura e declarar suas propriedades, mas ainda informalmente, generalizando a partir da experimentação (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

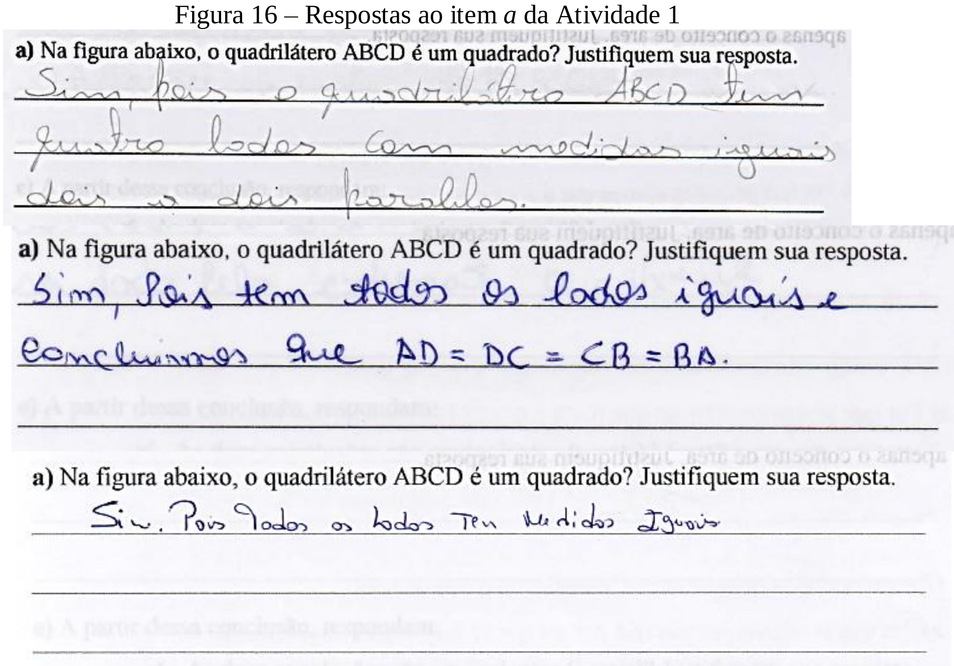
Caso estejam no nível 3, já começam a desenvolver a sua capacidade de raciocínio formal (matemático), mas ainda é apoiada na manipulação, uma vez que eles ainda não são capazes de construir uma prova formal sozinhos, pois não entendem a estrutura axiomática da Matemática. Os licenciandos que estejam no nível 4 já são capazes de entender e executar o raciocínio lógico formal e sentem a necessidade de elaborar provas formais, pois sabem que é um dos meios de verificar a validade de uma afirmação de forma genérica. Ou seja, nesse nível os licenciandos utilizam figuras específicas apenas para ajudar a escolher as propriedades adequadas para a prova, pois já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário fazer uma sequência de implicações com base em propriedades já provadas (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

Ao analisarmos as justificativas e/ou argumentações utilizadas nos itens *d)* e *e)*, os licenciandos que estão no nível 1 podem, no item *d*, não perceber a semelhança entre os itens *b* e *c* e no item *e* podem dizer que não são equivalentes, ou porque não entendem o que é pedido nos itens ou porque não possuem o conhecimento sedimentado acerca de casos particulares e casos genéricos de uma afirmação, não conseguindo também no item *e* reconhecer que o item *c* diz respeito a um tipo de prova formal do teorema de Pitágoras. Caso os licenciandos estejam nos níveis 2, 3 e 4, havendo distinção apenas na linguagem adotada, eles poderão perceber no item *d* que são semelhantes e no item *e* que são equivalentes, ou por terem encontrado a resposta dos itens por meio do teorema de Pitágoras (o que não era para ser feito) ou por terem encontrado a resposta dos itens utilizando as áreas que compõem a figura, confirmando também no item *e* que o item *c* diz respeito a um tipo de prova formal para o teorema de Pitágoras (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

6.2.1.2 Análise das produções dos licenciandos na atividade 1

No item *a)*, a pergunta era: *Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem sua resposta*. Percebemos que quatro duplas e o licenciando (Figura 16) inferiram que se tratava de um quadrado apenas pela observação da figura do quadrilátero ABCD. As quatro duplas justificaram que todos os lados possuem a mesma medida, enquanto que o licenciando afirmou que possui todas as características de um quadrilátero e um quadrado, como lados e ângulos iguais. Temos abaixo as respostas, respectivamente, das Duplas 01, 02, 03 e 04 e de L05:

Figura 16 – Respostas ao item *a* da Atividade 1


a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem sua resposta.

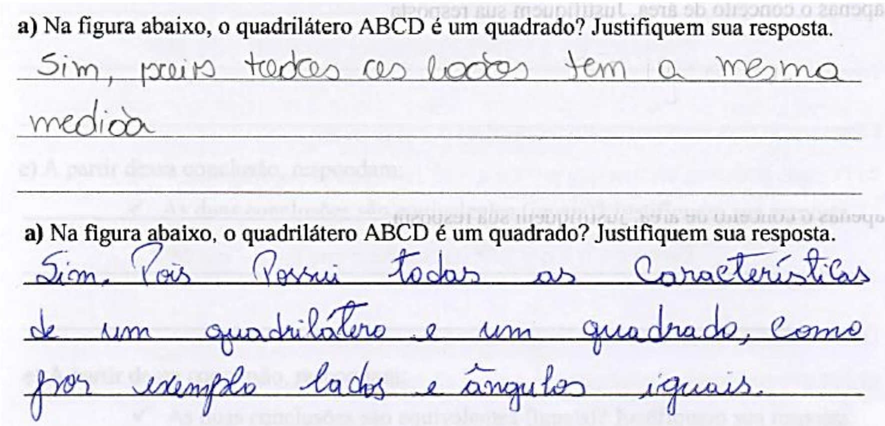
Sim, pois o quadrilátero ABCD tem quatro lados com medidas iguais dois a dois paralelos.

a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem sua resposta.

Sim, pois tem todos os lados iguais e concluímos que AD = DC = CB = BA.

a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem sua resposta.

Sim. Pois todos os lados Tem medidas Iguais



a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem sua resposta.

Sim, pois todos os lados tem a mesma medida

a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem sua resposta.

Sim. Pois Possui todas as Características de um quadrilátero e um quadrado, como por exemplo lados e ângulos iguais.

Fonte: dados da pesquisa

Na análise *a priori* afirmamos que os indivíduos que estivessem no nível 1 de van Hiele iriam identificar o quadrilátero ABCD a partir de suas características físicas globais, tais como aspecto, tamanho dos elementos, posição, etc., já os que estivessem no nível 2 iriam identificar o quadrado com base em suas propriedades. Ou seja, as justificativas e/ou argumentações utilizadas pelos licenciandos no nível 1 seria apenas a partir da visualização, enquanto que os do nível 2, por conhecerem as propriedades de um quadrado, fariam medições dos ângulos e dos lados para validar a afirmação. Dessa forma, embora os sujeitos pesquisados não tenham feito medições para confirmar se todos os lados possuem as mesmas medidas e se todos os ângulos internos são congruentes, todos sabiam as propriedades de um quadrado, conforme Dolce e Pompeo (1993, p. 101), “um quadrilátero plano convexo é um quadrado se, e somente se, possui quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes”.

Caracterizando assim que eles se encontram, nesse item, entre os níveis 1 e 2 de van Hiele, de acordo com Ontário (2006), Dall’Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois ainda precisam da observação para verificar determinada propriedade, como também já conhecem as propriedades das figuras geométricas, conseguindo distingui-las exclusivamente. Esse resultado corrobora as ideias defendidas por Oliveira (2012) ao afirmar que os licenciandos podem oscilar de um nível para outro na mesma atividade, assim como podem ser enquadrados em níveis diferentes, executando as mesmas atividades, dependendo do critério usado.

Durante a resolução desse item, percebemos que a Dupla 01 discute aspectos das propriedades de um quadrado:

> **L11:** é um quadrado. Por que? Porque tem ... como é ... quatro lados, dois lados paralelos e iguais.
> **(L11 dita para L10 copiar):** Pois tem dois lados paralelos e iguais... quatro lados iguais né? Pois tem os quatro lados iguais, sendo dois paralelos.

O que confirma que eles conhecem as propriedades da família dos quadriláteros. Contudo, com a filmagem, percebemos que eles não fazem medições de lados nem de ângulos para verificar que possuem as mesmas medidas, o que poderia caracterizá-los efetivamente no nível 2 de van Hiele.

A Dupla 02 também observa que é um quadrado, mas L01 não se convence de que é verdade, enquanto que L06 tenta convencê-lo de que é um quadrado, apenas pela observação, já que possuem lados iguais. Além disso, percebemos que, embora L01 não se convença de que a figura se trata de um quadrado, também não se mobiliza nem discute para buscar um contraexemplo:

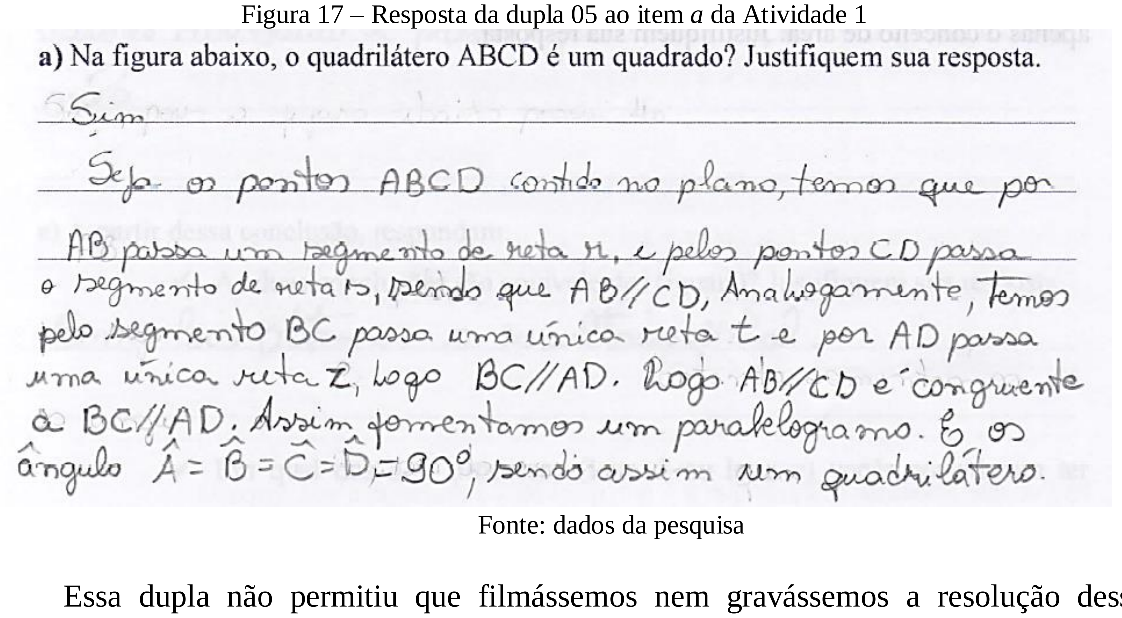
> **L06:** Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado. Justifique sua resposta. (...) No caso ABCD (indicando na figura) (...) Né isso? (...) pois tem todos os lados iguais. Né isso?
> **L01:** Deixa eu ver. (leitura da questão)
> **L06:** E aí? Não?
> **L01:** é maiúsculo A, B, C, D. Para ser um quadrado tinha que ser assim oh... (indica na figura).
> **L06:** O quadrilátero ABCD é um quadrado, aí a gente vai analisar só isso aqui oh... Ele não vai analisar os outros não, vai analisar só isso aqui. Todos os lados não são iguais?
> **L01:** ok.
> **L06:** Né não?
> **L01:** não.
> **L06:** Lado AB é igual ao lado BC.
> **L01:** olha as outras.
> **L06:** então, é nessa daqui. (...) Eu vou botar só isso aqui só.
> **L01:** (lendo a questão)
> **L06:** tu estás querendo dizer que isso aqui é um losango?
> **L06** fica observando a figura.
> **L06:** isso é um quadrado. Olha aqui, faça todas as relações... O *a* vai ser a mesma coisa, o *b* a mesma coisa, o *c* a mesma coisa e o *d* a mesma coisa. Conclui-se que é um quadrado. Eu só não sei o nome disso aqui.

No início da resolução dessas atividades L01 estava mexendo no celular e não estava concentrado, então durante toda essa conversa somente L06 estava tentando resolver e encontrar a justificativa para o quadrilátero ser um quadrado, enquanto que L01 mexia no celular e para ele a figura não seria um quadrado, mas sim um losango. Contudo, ele também não se dispôs em buscar uma justificativa de que a figura fosse um losango e, consequentemente, não ajuda o colega. Com a videogravação, conseguimos inferir que L01 considera o quadrilátero ABCD como losango devido ao seu posicionamento, uma vez que ele compara os dois quadriláteros e afirma que para ser quadrado deveria estar de outra forma, indicando na figura (quadrilátero MNPQ) como seria. Nesse item, somente quem respondeu foi L06 e, na filmagem, percebemos que ele também não utiliza medições para comprovar a congruência dos lados e dos ângulos, o que poderia caracterizá-los no nível 2.

As Duplas 03 e 04 e L05 não discutiram aspectos acerca desse item, apenas observaram que se tratava de um quadrado. Pela filmagem, percebemos que nenhum desses licenciandos se utilizaram de medições para verificar as medidas dos lados e dos ângulos, o que poderia caracterizá-los no nível 2. Inferimos, portanto, que as quatro duplas e o licenciando se encontram, nesse item, entre os níveis 1 e 2 de van Hiele, de acordo com Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998).

Já a Dupla 05 (Figura 17) buscou construir uma prova para justificar que o quadrilátero ABCD é um quadrado. A partir da análise da construção, percebemos que a dupla utilizou conceitos teóricos, contudo, em alguns momentos da prova, há uma certa afirmação de fatos sem ter feito a necessária verificação. Inferimos que, embora essa dupla saiba que a justificativa deveria ser feita por meios teóricos, ela ainda se utiliza da observação para afirmar determinadas conclusões. Notamos alguns equívocos na construção dessa prova. Primeiramente o fato de utilizar segmento de reta *r* e segmento de reta *s* e, posteriormente, utilizar uma única reta *t* e uma única reta *z*, para explicar a mesma situação. Além disso, a dupla observa que se trata de um paralelogramo e, posteriormente, sem fazer a verificação para os ângulos serem iguais a 90º, finaliza afirmando que é um quadrilátero.

Figura 17 – Resposta da dupla 05 ao item *a* da Atividade 1



a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem sua resposta.

Sim

Seja os pontos ABCD contido no plano, temos que por AB passa um segmento de reta r, e pelos pontos CD passa o segmento de reta s, sendo que AB//CD, Analogamente, temos pelo segmento BC passa uma única reta t e por AD passa uma única reta z, logo BC//AD. Logo AB//CD e congruente a BC//AD. Assim formentamos um paralelogramo. E os ângulo $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$, sendo assim um quadrilátero.

Fonte: dados da pesquisa

Essa dupla não permitiu que filmássemos nem gravássemos a resolução dessas atividades. Não anotamos as suas discussões, apenas percebemos que esses licenciandos tiveram muitas dúvidas e dificuldades na resolução dessas atividades. A entrevista nos possibilitou inferir que, na finalização da prova, a dupla queria dizer quadrado e não quadrilátero:

> **Pesquisadora:** então vamos lá... na primeira questão letra a... vocês fizeram a justificativa do... de que era um quadrado?

> **L09:** sim.
> **Pesquisadora:** sim?
> **L09:** sim, uma demonstração provando que era um quadrado.
> **Pesquisadora:** isso... aí no final? Essa última frase...
> **L09:** sim...
> **Pesquisadora:** é um quadrilátero?
> **L04:** realmente... tem outras figuras né que tem quatro lados...
> **Pesquisadora:** não... é...
> **L09:** era para ter mostrado...
> **Pesquisadora:** era... você mostrou que os lados paralelos, tudo direitinho... aí no caso você disse que seria um paralelogramo...
> **L04:** sim.
> **Pesquisadora:** depois percebeu que A, B, C, D era 90º. Então seria...
> **L09:** um quadrado.
> **L04:** um quadrilátero.
> **L09:** né?
> **Pesquisadora:** é.
> **L09:** que quadrilátero tem várias formas.
> **Pesquisadora:** é... losango, quadrado...

Na análise *a priori* discutimos que os indivíduos que estivessem no nível 3 de van Hiele poderiam fornecer definições do quadrado matematicamente corretas, pois já entendem o papel das definições e os requisitos de uma definição correta, porém seu raciocínio ainda continua apoiado na manipulação. Além disso, ao estabelecermos uma articulação entre esse nível e os tipos de prova de Balacheff (2000), discutimos que eles poderiam produzir provas do tipo *exemplo genérico,* se utilizando de um exemplo bem específico, o que poderia ter sido feito de forma genérica.

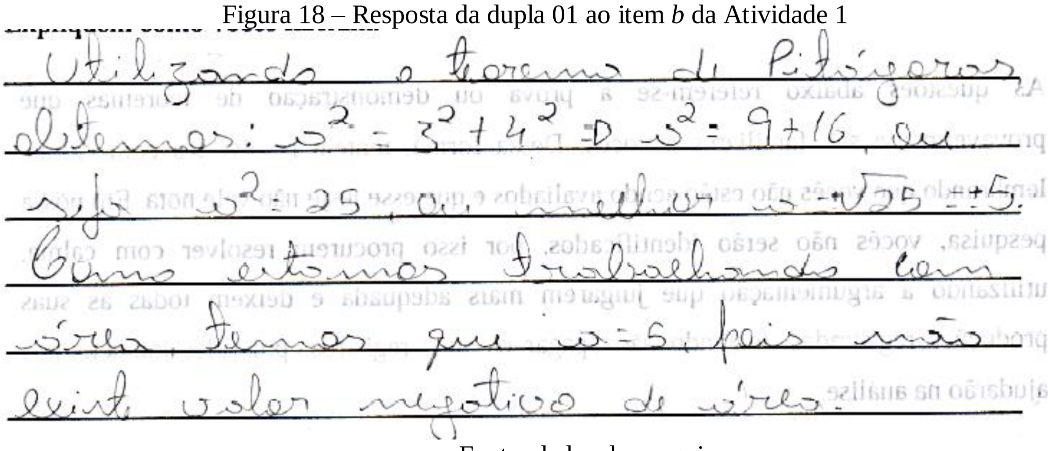
Por conta disso, inferimos que a Dupla 05 se encontra, nesse item, no nível 3 de van Hiele, de acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois já sabe que exemplos não confirmam a validade de uma afirmação e por isso busca justificar por meio da teoria os fatos, contudo ainda não compreende as provas formais em sua totalidade e, devido a isso, não consegue organizar uma sequência de raciocínio lógico que justifique as suas observações. Além disso, concluímos que a prova realizada por essa dupla é do tipo *exemplo genérico,* segundo Balacheff (2000), uma vez que os licenciandos utilizaram a explicação das razões de validade de uma afirmação para a validação de operações ou transformações de um objeto como representante de uma determinada classe e essa formulação foi baseada em propriedades, características e estruturas de uma classe, sempre ligada à sua categoria e à exibição de um de seus representantes.

No item *b),* a pergunta era: *Calcule a medida do lado a, da figura anterior, utilizando o conceito de área. Expliquem como vocês fizeram*. Ao analisarmos as resoluções, percebemos que a maioria das duplas aplicou o próprio teorema de Pitágoras para determinar a medida do lado *a* e, consequentemente, não utilizou os conceitos de áreas de um quadrado e de um triângulo. Durante a realização desse item, muitos não conseguiam perceber qual conceito de área utilizar e outros conseguiam determinar apenas a área do quadrado MNPQ, não conseguindo perceber que a figura poderia ser decomposta em outras menores. O objetivo desse item seria conduzir os licenciandos a compreenderem o teorema de Pitágoras, por meio da utilização das áreas do quadrado e do triângulo que compõem a figura. Não queríamos a aplicação imediata do teorema, uma vez que estávamos em busca de uma verificação para esse teorema, a ser construída no próximo item, de forma genérica.

As Duplas 01, 02, 03 e 05 aplicaram o teorema de Pitágoras de imediato, pois não conseguiram perceber que a área da figura maior, o quadrado MNPQ, é composta pela área de cinco figuras menores: um quadrado menor ABCD e quatro triângulos retângulos semelhantes (DMA, ANB, BPC e CQD).

A Dupla 01 (Figura 18) não discute acerca do conceito de área, os licenciandos leem a questão e deduzem que irão utilizar o teorema de Pitágoras. Na resolução, percebemos que eles determinam dois valores para *a*: 5 ou – 5. Para justificar que ficaram apenas com o valor positivo, eles consideram que estão trabalhando com área e por isso não existe valor negativo. Contudo, o conceito de área a ser utilizado na questão diz respeito às áreas dos quadrados MNPQ e ABCD e dos triângulos DMA, ANB, BPC e CQD, e esse conceito não foi utilizado na resolução desse item.

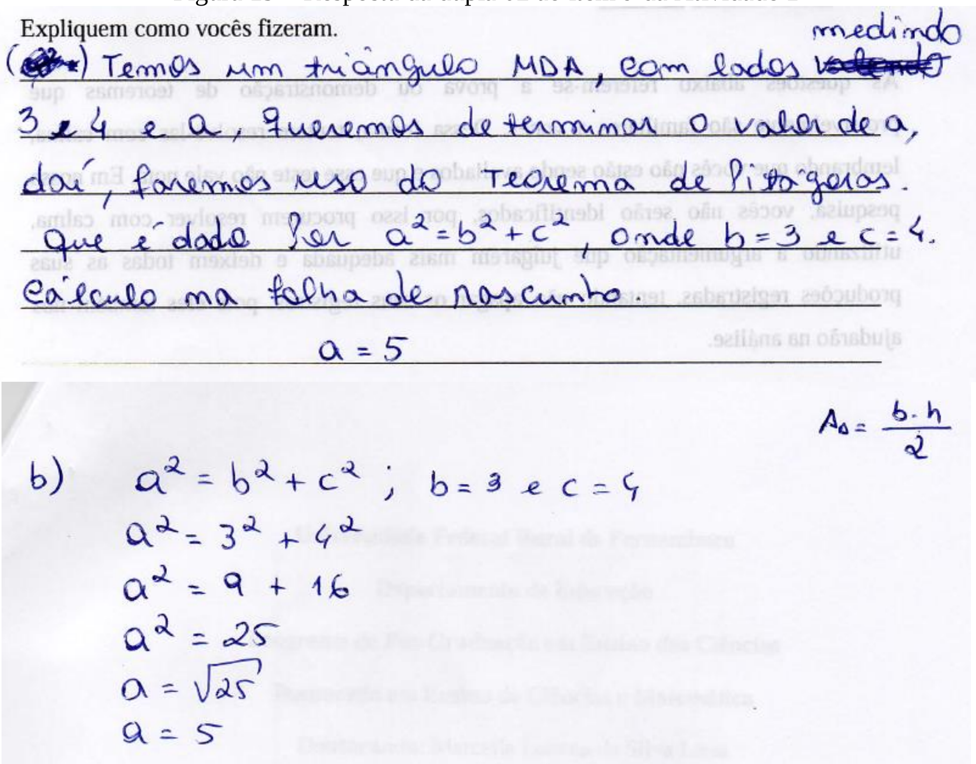
Figura 18 – Resposta da dupla 01 ao item *b* da Atividade 1


Utilizando o teorema de Pitágoras, obtemos: $a^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 16$ ou seja $a^2 = 25$, ou melhor $a = \pm\sqrt{25} = \pm 5$. Como estamos trabalhando com área, temos que $a = 5$ pois não existe valor negativo de área.

Fonte: dados da pesquisa

A Dupla 02 (Figura 19) discute pouco e acaba aplicando o teorema de Pitágoras, justamente por não entender qual conceito de área iria utilizar para responder à questão. A partir das filmagens, percebemos que L06 faz a leitura do item *b* e L01 manda ele fazer o cálculo, indicando que deve ser feito pelo teorema de Pitágoras. Com isso, L01 vai ditando e L06 vai copiando o que deve ser escrito. Na folha de rascunho, percebemos que eles colocam a fórmula da área de um triângulo, mas não a utilizam em momento algum. Diferentemente da Dupla 01, essa dupla já coloca o resultado da medida do lado *a* positivo.

Figura 19 – Resposta da dupla 02 ao item *b* da Atividade 1



Expliquem como vocês fizeram.

Temos um triângulo MDA, com lados ~~valendo~~ medindo 3 e 4 e a, queremos determinar o valor de a, daí, faremos uso do Teorema de Pitágoras. que é dado por $a^2=b^2+c^2$, onde $b=3$ e $c=4$. Cálculo na folha de rascunho.

$a = 5$

$A_\Delta = \frac{b \cdot h}{2}$

b) $a^2 = b^2 + c^2$; $b = 3$ e $c = 4$

$a^2 = 3^2 + 4^2$

$a^2 = 9 + 16$

$a^2 = 25$

$a = \sqrt{25}$

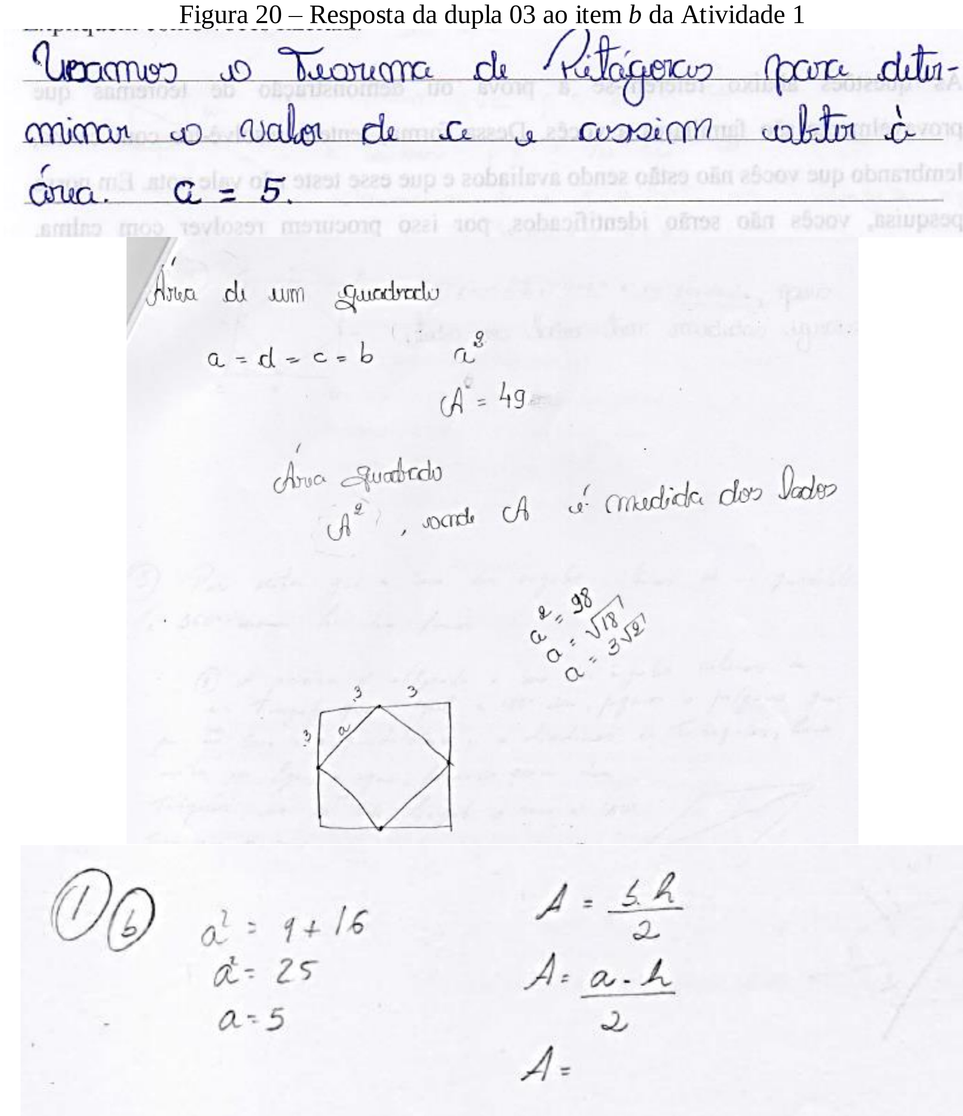
$a = 5$

Fonte: dados da pesquisa

A Dupla 03 (Figura 20) também teve dúvidas para encontrar a medida do lado *a* usando as áreas que compõem a figura e não conseguiu visualizar a figura maior decomposta em outras menores. L07 consegue determinar a área dos quadrados MNPQ e ABCD, mas não consegue perceber que os triângulos retângulos são congruentes e que a medida *4* diz respeito à altura do triângulo, enquanto que a medida *3* é a base. Já L08 afirma que não sabe e que por ele faria por Pitágoras, utilizando os outros lados do quadrado ABCD, já que a pesquisadora pediu para determinar apenas a medida do lado *a* utilizando o conceito de área. A partir das filmagens, conseguimos perceber que L07 fala como faz, mas não tenta resolver, afirmando que não sabe e que já pensou demais.

A partir da folha de rascunho (Figura 20), percebemos que L07 observa que $a = b = c = d$, possuindo área a^2, enquanto que o quadrado maior tem área medindo *49*. Contudo, não consegue estabelecer uma relação entre esses valores, como também com a área de um triângulo, colocando a medida da base como *a* e altura *h*. Ou seja, o licenciando não consegue perceber as medidas corretamente da base e da altura do triângulo na figura. Percebemos também que L07 faz o mesmo desenho do item *b*, só que coloca as medidas dos lados do triângulo como *3*, mas resolve também utilizando o teorema de Pitágoras, sem estabelecer uma relação com áreas do quadrado e do triângulo.

Figura 20 – Resposta da dupla 03 ao item *b* da Atividade 1



Fonte: dados da pesquisa

Durante a resolução desse item, os licenciandos discutem sobre como utilizar o conceito de área. Os licenciandos rotacionam a folha para visualizar a figura por ângulos diferentes, mas não conseguem visualizar nada. Segue a discussão durante as tentativas de resolução desse item pela Dupla 03:

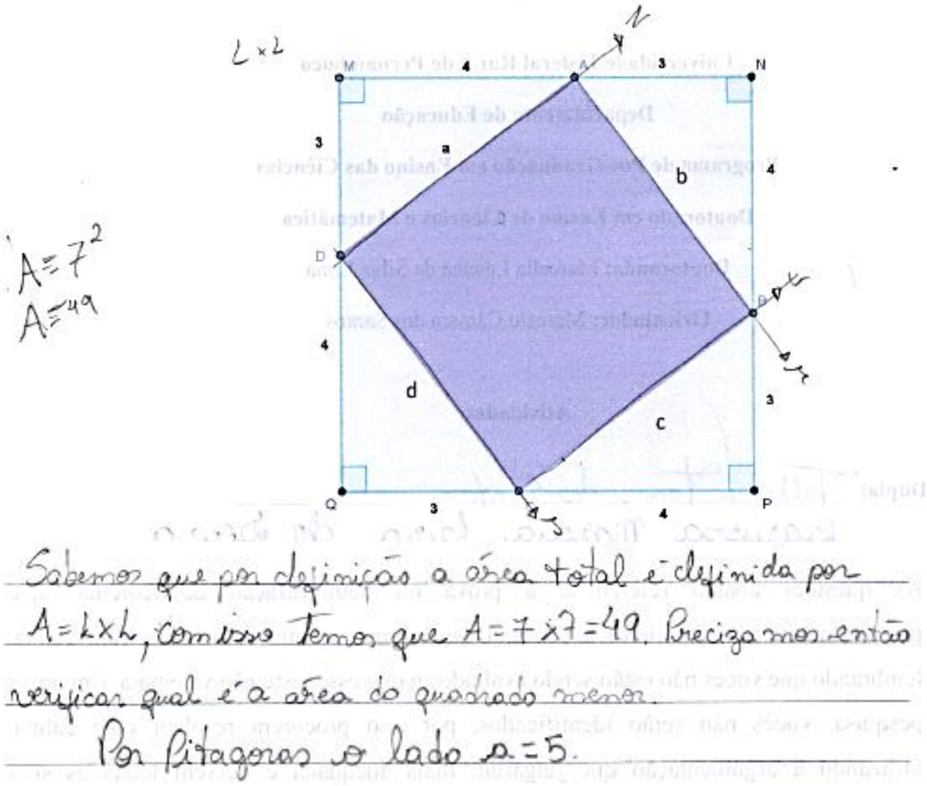
> **L07:** se pudesse usar Pitágoras ao invés de área seria muito mais simples. (...) eu já tentei fazer aqui usando o conceito de área e não consegui não. É sério. Usando o conceito de área... sim...
> **L08:** eu não sei não. Se fosse Pitágoras...
> **L07:** aí eu já teria feito... há tempos...
> (...)

> **L07 fala para a pesquisadora:** só se calcular a área do quadrado maior... aí depois vai fazer o que? Faz a área do triângulo e depois subtrai. Calcula a área do triângulo. Eu já pensei demais nessa questão.
> **Pesquisadora confirma**.
> (...)
> **L07:** eu já pensei demais e não deu certo.
> **L08:** área do quadrado
> **L07:** sim, *a* ao quadrado.
> **L08:** o lado *a* é igual ao de *b*, que é igual ao de *c* e de *d*. *a* ao quadrado. Não, não é isso. Olhe... ele quer o lado *a*, não falou nada do lado *b*, do *c* e do *d*.
> (...)
> **L07:** você está querendo usar Pitágoras desse lado aqui...
> **L08:** é.
> **Pesquisadora:** o que?
> **L08:** a questão pede calcule a medida do lado *a* utilizando o conceito de área. Mas não falou o lado *b*, o lado *c* nem o *d*, então pode usar Pitágoras.
> (risos)
> **Pesquisadora:** mas é esperto viu?
> **L08:** não, mas é a questão.
> **Pesquisadora:** vocês já fizeram a letra *a*?
> **L07:** não.
> **L08:** já fez sim.
> **L07:** ah, a letra *a* é um quadrado.
> **Pesquisadora:** sim, mas tem que dizer por que.
> **L07:** vai dizer aí o porquê.
> **L08:** porque os lados são iguais.
> **Pesquisadora:** então todos os lados medem *a*.
> **L08:** é verdade... agora entendi.
> (...)
> **Pesquisadora:** faça do jeito de vocês ...
> **L08:** então coloca.
> **L07:** sério?
> **L08:** é.
> **L07:** ah, pode fazer do nosso jeito.
> **Pesquisadora:** pode fazer do jeito de vocês.
> **L07:** então vamos fazer aquela por teorema de Pitágoras.

Percebemos que, embora a pesquisadora tenha dito que L07 estava fazendo correto, a dupla não se mobilizou para responder o item utilizando as áreas que compõem a figura, pois não conseguiram perceber que os triângulos também faziam parte da figura decomposta.

A Dupla 05 (Figura 21) determina apenas a área do quadrado maior MNPQ e aplica o teorema de Pitágoras para determinar a medida do lado *a* do quadrado menor. Percebemos que foi mais uma dupla que não conseguiu visualizar a figura maior decomposta em outras menores, como também não compreendeu qual conceito de área utilizar para determinar o que estava sendo pedido no item.

Figura 21 – Resposta da dupla 05 ao item *b* da Atividade 1



Fonte: dados da pesquisa

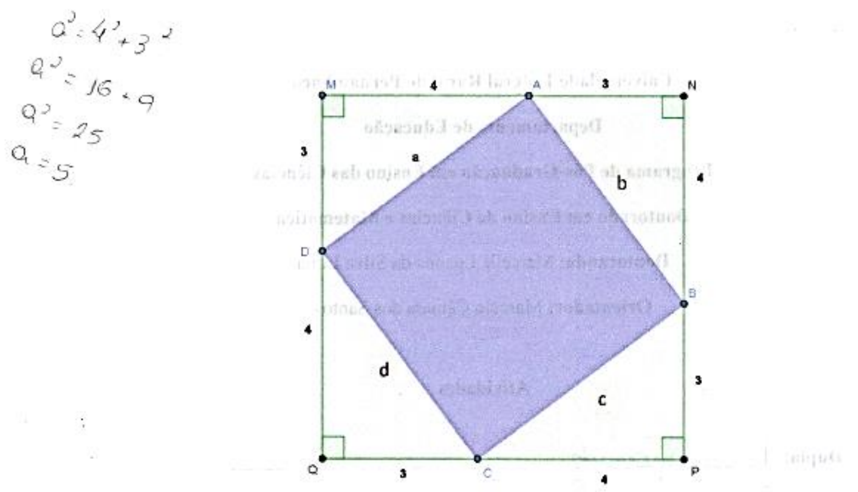
Na análise *a priori* discutimos que nesse item os indivíduos não iriam produzir uma prova, mas sim uma justificativa aritmética para determinar a medida do lado *a* utilizando as áreas que compõem a figura. Dessa forma, iríamos apenas observar o nível de pensamento das duplas. Para aqueles que estivessem no nível 2, poderiam perceber que o quadrilátero maior MNPQ é composto por outras figuras geométricas (quadrados e triângulos), mas ainda não seriam capazes de relacionar algumas propriedades a outras, ou seja, eles não conseguem relacionar a área do quadrilátero maior com as áreas das figuras menores (quadrado e triângulos) e acabam aplicando o teorema de Pitágoras de imediato ou podem encontrar apenas a área do quadrado maior MNPQ e do quadrado ABCD, mas não relaciona com as áreas das outras figuras e, por conta disso, também aplicam o teorema de Pitágoras. Esses dois casos presentes no segundo nível não deveriam ser construídos, pois estamos buscando uma verificação empírica para esse teorema e não sua aplicação imediata.

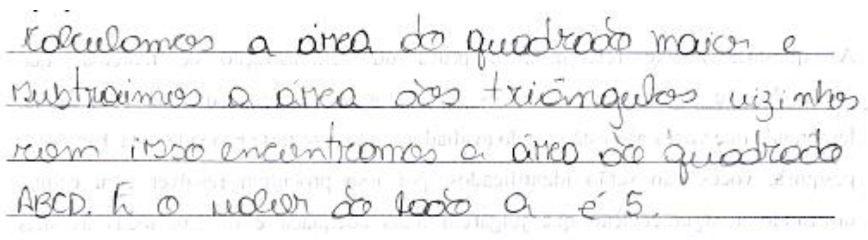
A partir das construções feitas, inferimos que as Duplas 01, 02, 03 e 05 se encontram, nesse item, no nível 2 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall’Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois conseguem perceber que o quadrilátero maior é composto por outras figuras geométricas, mas não conseguem relacionar a área dele com as áreas dos outros e aplicam o teorema de Pitágoras de imediato. O que corrobora as ideias apresentadas por Oliveira (2012) ao afirmar que os licenciandos podem oscilar de um nível para outro na mesma atividade.

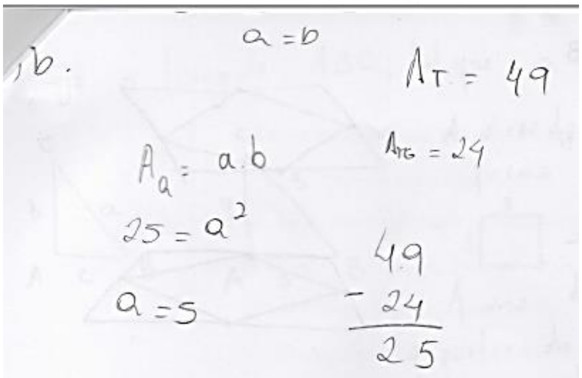
O licenciando que fez sozinho, L05, não conseguiu desenvolver o item *b* pois não sabia como deveria fazer e não entendeu o que estava sendo pedido na questão, afirmando sempre que não se lembrava dos conceitos. Na filmagem, percebemos que ele não consegue visualizar a figura maior decomposta em outras menores, não sabe como utilizar o conceito de área, fica muito tempo olhando a figura tentando entende-la e, consequentemente, acaba desistindo, deixando a questão em branco. A partir do que discutimos na análise *a priori*, inferimos que L05 se encontra, nesse item, no nível 1 de van Hiele, segundo Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois ele não reconheceu explicitamente as partes das quais as figuras são compostas e suas propriedades e por isso deixou o item em branco. O que corrobora as ideias apresentadas por Oliveira (2012) ao afirmar que os licenciandos podem oscilar de um nível para outro na mesma atividade.

A Dupla 04 (Figura 22) foi a única que conseguiu responder utilizando as áreas do quadrado e do triângulo que compõem a figura maior, a partir dos direcionamentos da pesquisadora. Os licenciandos lembraram dos conceitos de área do quadrado e do triângulo, como também perceberam a área do quadrado maior e do quadrado menor. A partir da folha de rascunho, percebemos que resolveram corretamente utilizando esses conceitos. Determinando, assim, a resposta do item *b* de acordo com o que estava sendo pedido.

Figura 22 – Resposta da dupla 04 ao item *b* da Atividade 1







Fonte: dados da pesquisa

A partir das filmagens, percebemos que a pesquisadora interviu com alguns questionamentos e a dupla conseguiu perceber que a figura maior é composta por outras menores, conseguindo assim determinar corretamente a medida do lado *a*. Segue a extração da conversa durante a resolução do item:

> **L02:** ele quer saber valor de *a* só que tem que ser pela área. Área do triângulo é base vezes altura dividido por dois.
> **L03:** é.
> **L02:** o quadrado vai ser *a* vezes *b*.
> **L03:** é base vezes altura... *a* vezes qualquer um vai ser igual. (...) vamos calcular a área dos triângulos, mas não vai achar o *a*. Está entendendo?
> **L02:** é.
> **L03:** não vai dar certo.
> **L02** pega uma folha de rascunho e escreve a área do quadrado: *a* vezes *b*. (...) Pode utilizar Pitágoras?
> **Pesquisadora:** não.
> **L03:** só área.
> **Pesquisadora** confirma.
> **L02:** como é que descobre?
> **Pesquisadora:** não é um quadrado?
> **L02 e L03:** hum?
> **Pesquisadora:** o roxo não é um quadrado?
> **L02:** é.
> **Pesquisadora:** então eu posso dizer que *b* também é *a*.
> **L02:** é. (...) eu já posso supor a área desse quadrado? A área desse quadrado, por exemplo, é *25*. Eu posso supor?
> **Pesquisadora** diz que não pode.
> **Pesquisadora:** fazendo pelo conceito de área vocês irão chegar nesse resultado que fez de grafite aí em cima.
> **L02 e L03** ficam observando a figura.
> **L03:** só se fizer a área do todo e tirar a área do pequeno.
> **Pesquisadora** confirma.
> **L02 olha para a pesquisadora e confirma:** é isso aí.
> **L03:** é isso mesmo né?

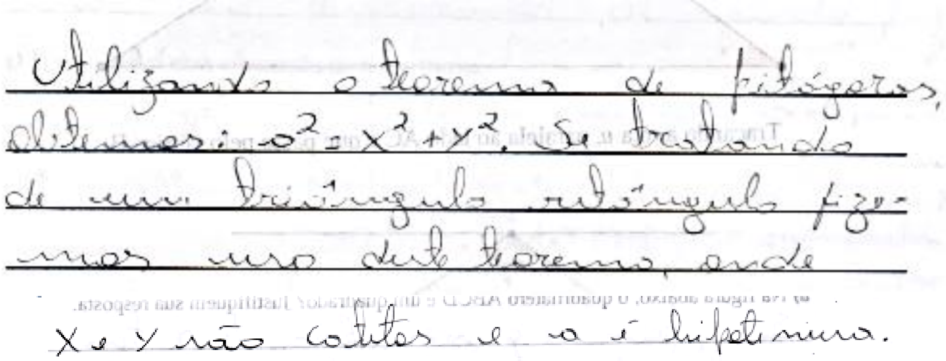
Pesquisadora confirma.

A partir da construção feita, inferimos que a Dupla 04 se encontra, nesse item, no nível 3 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois foi capaz de reconhecer que algumas propriedades são deduzidas de outras e descobre essas implicações, contudo ainda não entende a estrutura axiomática da Matemática e por isso a linguagem adotada associa essa dupla ao nível 3. O que corrobora as ideias apresentadas por Oliveira (2012) ao afirmar que os licenciandos podem oscilar de um nível para outro na mesma atividade.

No item *c*, a pergunta era: *Observem a figura abaixo e calculem a medida do lado a em função das medidas dos lados de x e y usando apenas o conceito de área. Justifiquem sua resposta*. Ao analisarmos as resoluções, percebemos que aqueles que aplicaram o teorema de Pitágoras no item *b*, também o fizeram nesse item e a única dupla que resolveu pelo conceito de área, também desenvolveu pelo mesmo conceito no item *c*. O licenciando que fez sozinho respondeu esse item colocando apenas a fórmula final, aplicando também o teorema de Pitágoras. O objetivo desse item seria conduzir os licenciandos a compreenderem o teorema de Pitágoras, por meio da utilização do conceito de áreas do quadrado e do triângulo, só que diferentemente do item *b*, aqui os sujeitos deveriam resolver de forma genérica.

A Dupla 01 (Figura 23) especifica que *x* e *y* são os catetos e *a* é a hipotenusa e também aplica o teorema de Pitágoras nesse item para determinar a medida do lado *a* em função das medidas dos lados *x* e *y*. Nesse item, eles discutem um pouco acerca do conceito de área e do teorema de Pitágoras e relacionam esse teorema ao conceito de área, mas não especificam qual.

Figura 23 – Resposta da dupla 01 ao item *c* da Atividade 1


Utilizando o teorema de Pitágoras, obtemos: $a^2 = x^2 + y^2$, se tratando de um triângulo retângulo fizemos uso deste teorema, onde x e y são catetos e a é hipotenusa.

Fonte: dados da pesquisa

A partir das filmagens, percebemos que os licenciandos discutem sobre utilizar conceito de cosseno e seno nesse item, mas desistem após uma pequena intervenção da pesquisadora. Segue o extrato do diálogo durante a resolução desse item:

> **L11 lê a letra c e fala:** vai usar o conceito de cosseno e seno. Aliás...
> **Pesquisadora:** ahm?
> **L11:** não? Ah, eu não tenho o ângulo. (...) Ah, é de outro jeito, eu pensava que era outra coisa.
> **L10:** o valor de *a* em função de *x* e *y*. Conceito de área. É a mesma coisa dessa aqui (indicando a letra *b*), só que diferente. Né?
> **L11:** é.

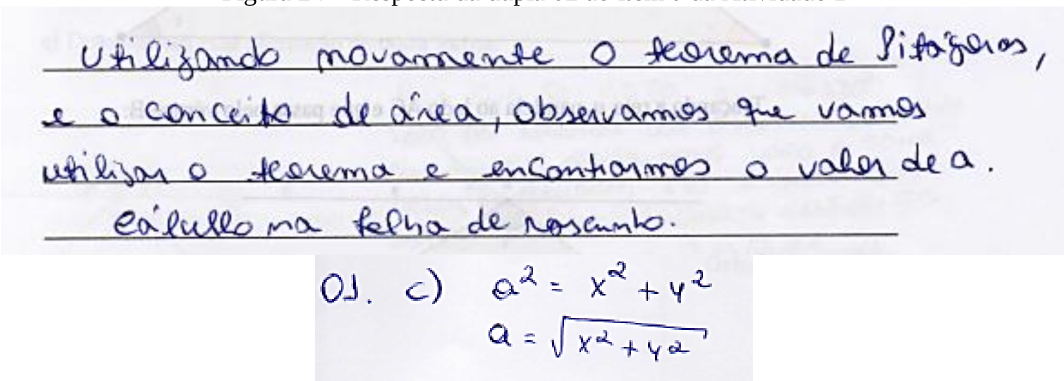
Além disso, na entrevista, conversamos acerca das resoluções feitas nos itens *b* e *c* da Dupla 01 e eles afirmaram que ficaram na dúvida de como utilizar o conceito de área para resolver os dois itens e perceberam que o teorema de Pitágoras era mais fácil para determinar a medida do lado *a* solicitada nos dois itens. Segue o extrato da entrevista:

> **Pesquisadora mostra os itens *b* e *c* da atividade 1.**
> **Pesquisadora:** nos itens *b* e *c*, pede-se para calcular a medida do lado *a* utilizando o conceito de área e vocês aplicaram o teorema de Pitágoras.
> **L11:** era essa a dúvida... a gente... não a gente conversou assim... se... não...
> **Pesquisadora:** ah, então foi isso... teve alguns momentos na discussão que eu não consegui escutar.
> **L11:** é porque nós ficamos na dúvida assim... o teorema de Pitágoras é para saber o que? Assim... para saber o que é a gente sabe, só que eu digo, a gente pode usar como área, porque como a gente viu o resultado aqui e o resultado aqui, a gente já viu um negócio mais rápido né?
> **Pesquisadora:** é.
> **L11:** aí mais rápido é Pitágoras. Agora assim... o conceito de área...
> **Pesquisadora:** área do quadrado e área do triângulo.
> **L11:** ah...
> **Pesquisadora:** consegue visualizar?
> **L11:** pera aí visse?
> **L11 fica pensando.**
> **L11:** é... pera aí. (...) lado *a*.
> **Pesquisadora:** unhum.., que é a mesma coisa de *b*, *c* e *d*, porque é um quadrado né?
> **L11:** unhum.
> **Pesquisadora:** você não disse na letra *a* que esse quadrilátero é um quadrado?
> **L11:** foi. Sim, eu estou me lembrando agora dos debates. Mas... a gente não lembrou não. Eu sei que tem uma... alguma coisa assim que a gente faz.
> **Pesquisadora:** é porque não era para aplicar Pitágoras.
> **L11:** justamente e a gente ficou na dúvida. Se aplicava ou se não aplicava.
> **Pesquisadora:** vocês chegavam ao mesmo resultado né? Mas... a partir da aplicação do conceito de área do quadrado e do triângulo, você chegava no teorema.
> **L11:** de área... eu sei que existe, mas eu me esqueci.
> **Pesquisadora:** está certo então.

Percebemos que eles não se lembraram, durante a resolução, quais os conceitos de área estavam envolvidos nos dois itens e, por isso, acharam mais fácil determinar o resultado utilizando o teorema de Pitágoras.

A Dupla 02 (Figura 24) também aplica o teorema de Pitágoras e relaciona também com área e determina a medida do lado *a* em função das medidas dos lados *x* e *y*. Antes de aplicarem o teorema de Pitágoras, os licenciandos discutem como deveriam resolver e percebem que deveriam estar utilizando o conceito de área, só que não conseguem entender como devem determinar a medida do lado *a* utilizando a área do triângulo. Dessa forma, os licenciandos não percebem que a figura maior é composta por um quadrado menor (roxo) e quatro triângulos retângulos congruentes.

Figura 24 – Resposta da dupla 02 ao item *c* da Atividade 1


Utilizando novamente o teorema de Pitágoras, e o conceito de área, observamos que vamos utilizar o teorema e encontramos o valor de a. cálculo na folha de rascunho.

01. c) $a^2 = x^2 + y^2$

$a = \sqrt{x^2 + y^2}$

Fonte: dados da pesquisa

A partir das filmagens, percebemos que os licenciandos ficam na dúvida de como determinar a medida do lado *a* utilizando as áreas que compõem a figura. Inclusive L06 relaciona a medida encontrada no item *b* com o resultado da área do triângulo de base *3* e altura *4*, ou seja, ele não percebe que a figura maior é composta por outras menores e acha que deve determinar a medida do lado *a* utilizando apenas o conceito de área de um triângulo. Segue o extrato da discussão durante a resolução do item:

L06 faz a leitura da letra *c* (questão 1).
L06: olha L01.
L01: Oi... qual é a questão?
L06 explica, lendo a questão novamente.
L01: a mesma coisa.
L06: então vai usar a mesma fórmula?
L01: isso, só que agora é *a* ao quadrado igual a *x* ao quadrado mais *y* ao quadrado. (...) entendeu?
L06: então a gente está usando Pitágoras?
L01: ahm?
L06: é para usar Pitágoras né?
L01: é para calcular a área é?
L06: é.
L06 lê a questão e fala: mas a gente não está utilizando o conceito de área. No caso, o dessa área? Ele quer essa área aqui. (...) Vamos usar Pitágoras então. Vamos lá.
L01: tem certeza que é o teorema de Pitágoras?
L06: conceito de área. Geralmente num triângulo é a base vezes a altura ... dividido por dois, não é isso? Ele está falando... conceito de área ... estou entendendo mais nada.
L06: utilizando novamente o teorema de Pitágoras (leitura da escrita da resposta).
L01 e L06 ainda conversam sobre o conceito de área, mas não compreendem o que devem utilizar.
L01: esse negócio de conceito... o conceito de área... você vai utilizar Pitágoras mesmo?
L06: sim, porque não é um triângulo retângulo. (...) esse valor aqui para saber o de *a*. Não é não? Porque todos têm a mesma medição.

L01: qual o valor?
L06: de *a* ele tem, é esse aqui oh... Base vezes altura dividido por 2.
L01: vai usar essa formulazinha eu acho (...) teria mais sentido.
L06: *x* vezes *y* dividido por 2. Onde o *a* entrava?
L01: no outro lado?
L06: porque o *a* a gente não pode medir como altura... porque o *a* é maior... porque o *a* é quadrado do lado... duas vezes o quadrado dos outros dois lados (...) então a gente não pode levar o *a* para essa área aqui não.
L01 não fala nada.
L06 faz então pelo teorema de Pitágoras.
L06: mas em relação a área?
L01: como é que calcula a área?
L06: aqui.
L01: como?
L06: onde o *a* entra na área? Nessa letra *b* aqui... *3* vezes *4* não é *12*? *12* dividido por *2* é *6* e o *a* é *5*. (...) Olha aqui a fórmula... *a* ao quadrado é *cinco*, que é base vezes altura (...) ele quer o valor de *a*.

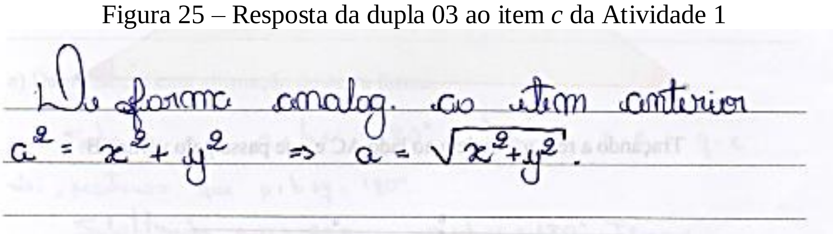
Na entrevista também questionamos a Dupla 02 o porquê de eles não terem utilizado o conceito de área para resolver os itens *b* e *c*. Os licenciandos sabiam que teriam que usar, mas preferiram fazer por Pitágoras. L01 ainda afirma que conversou com L06 durante a resolução, afirmando que era para resolver por área, mas nenhum dos dois conseguiu visualizar, durante a resolução, a figura decomposta. Enquanto que durante a entrevista, após estimular o pensamento deles, eles conseguiram perceber que dava para resolver utilizando os conceitos de áreas do quadrado e do triângulo, afirmando como deveriam ter feito. Segue o extrato da entrevista:

Pesquisadora: vocês viram que na *b* e na *c*, pedia para resolver usando o conceito de área?
L06: unhum
Pesquisadora: e vocês não utilizaram o conceito de área.
L06: foi, a gente não fez o conceito de área. A gente explicou como a gente fez aqui.
Pesquisadora: foi... aplicando Pitágoras.
L06: foi.
Pesquisadora: mas não era para aplicar Pitágoras.
L06: o conceito de área não era? Estava tão bonitinha a figura, a gente quis...
Pesquisadora: vocês saberiam qual conceito de área iria usar?
L01: eu não lembro nem qual era a pergunta.
Pesquisadora: aqui. (Pesquisadora dá a atividade para eles darem uma olhada).
L01 relê a questão.
L06: a senhora enganou a gente aqui oh.
Pesquisadora: por que?
L06: porque tem os valores de *3* e *4* aqui.
Pesquisadora: hum...
L06: mas vamos lá, vamos para área agora... isso não vem ao caso agora. Por área eu teria que calcular...
L01: lado vezes lado... eu acho que calcularia... a área dessa figura total menos as partes que a compõe.
Pesquisadora: isso.
L06: era só assim?
Pesquisadora: era.
L01: infelizmente...
Pesquisadora: nos dois.
L01: eu teimei... eu lembro que eu teimei ainda...

L06: foi... foi eu que falei que não era assim.
Pesquisadora: era a área toda do quadrado...
L06: unhum
L01: menos a área dos demais...
Pesquisadora: menos a área dessas cinco partes né?
L06: aí a gente teria a medida do lado *a*.
Pesquisadora: isso.
L06: estava na cara é porque a gente está acostumado...
Pesquisadora: ou a área toda é igual à soma dessas cinco, né?
L06: unhum.
L01: isso.
Pesquisadora: pronto... era só isso.

A Dupla 03 (Figura 25) também aplicou o teorema de Pitágoras e determinou a medida do lado *a* em função das medidas dos lados *x* e *y*, sem haver discussões sobre a resolução. A partir da folha de rascunho, percebemos que eles registraram *(x + y)(x + y)*, mas não responderam e não fizeram ligação alguma com as áreas das outras figuras. Além disso, essa escrita estava solta na folha, possivelmente diz respeito a resolução desse item, contudo eles não desenvolveram.

Figura 25 – Resposta da dupla 03 ao item *c* da Atividade 1


De forma analog. ao item anterior
$a^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow a = \sqrt{x^2+y^2}$.

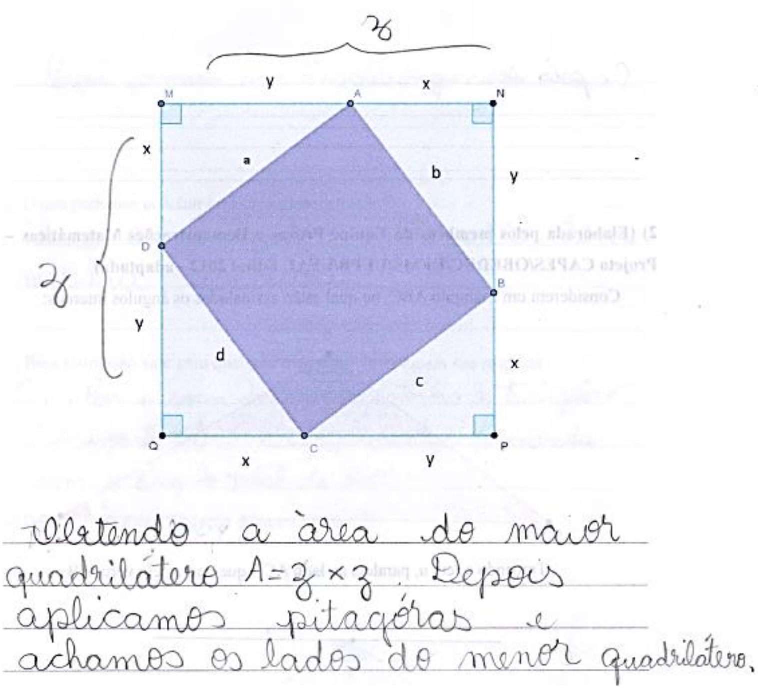
Fonte: dados da pesquisa

Na entrevista também questionamos a Dupla 03 o porquê de não terem resolvido os itens *b* e *c* utilizando o conceito de área e eles informaram que foi porque na hora não se lembraram dos conceitos. Na verdade, eles conseguiram inferir alguns dados das áreas dos quadrados na resolução desses itens, mas não conseguiram visualizar a figura decomposta e acharam mais fácil determinar o resultado aplicando de imediato o teorema. Na entrevista também aconteceu o mesmo, uma vez que eles só justificaram que não lembraram de jeito nenhum, mas não adentraram na resolução dos itens. Segue o extrato da entrevista:

Pesquisadora: os itens *b* e *c* você lembra não é?
L07: o que a gente fez aí?
Pesquisadora: sim... a minha pergunta é só porque...
L07: sim, o conceito de área.
Pesquisadora: é... não usou.
L07: foi... a gente não lembrou, de jeito nenhum... não aqui foi porque a gente não lembrou o conceito de... área do triângulo...
Pesquisadora: qual conceito que... iria usar.
L07: foi... exatamente... foi isso...

A Dupla 05 (Figura 26) não determina a medida do lado *a* em função das medidas dos lados *x* e *y*, apenas consideram o lado do quadrado maior (MNPQ) medindo *z* e afirmam que aplicam o teorema de Pitágoras para determinar o lado do quadrilátero menor (ABCD). Essa dupla não consegue desenvolver o item e, consequentemente, não determina a medida do lado *a* em função das medidas dos lados *x* e *y*.

Figura 26 – Resposta da dupla 05 ao item *c* da Atividade 1



Fonte: dados da pesquisa

Na entrevista com a Dupla 05 também questionamos o porquê de não terem resolvido os itens *b* e *c* utilizando área. Não conseguimos construir um diálogo de forma a incentivar o raciocínio desses licenciandos, pois eles justificavam que as questões eram muito difíceis ou que foi o tempo ou que não se prepararam psicologicamente para resolvê-las. Só encontramos justificativas para a não resolução dos itens por meio do conceito de área, não conseguindo fazer com que eles percebessem a figura maior decomposta em figuras menores. Segue o extrato da entrevista:

> **Pesquisadora:** nessa daqui...
> **L09:** essa daí é muito complicada.
> **Pesquisadora:** na letra *b* e na letra *c* pedia para usar o conceito de área...
> **L09:** na hora faltou memória...
> **Pesquisadora:** usaram apenas no quadrado maior, não foi?
> **L04:** foi...
> **L09:** foi... mas... sabia e não sabia ao mesmo tempo... porque a gente não tinha se preparado psicologicamente né, para responder?!
> **Pesquisadora:** sabia em que sentido?
> **L09:** lembrava vagamente, mas não sabia escrever...
> **Pesquisadora:** vocês fizeram do maior...

L09: é.
L04: foi... para achar os lados do menor... porque se a gente achasse a hipotenusa aqui, achava os lados do menor...
Pesquisadora: era...
L09: era...
Pesquisadora: mas aí vocês acabaram... achando só a área... e aplicou o... Pitágoras não foi?
L04: foi.
L09: unhum...
Pesquisadora: já foi direto... mas foi por que não lembrou mesmo?
L09: não... era o horário... o horário...

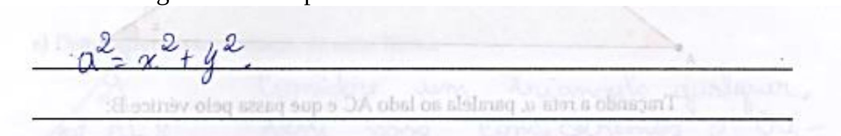
Percebemos que eles não se lembraram, durante a resolução, quais os conceitos de área estavam envolvidos nos dois itens, apenas determinaram a área do quadrado maior (MNPQ), não conseguindo perceber que a figura maior poderia ser decomposta em cinco menores. Consequentemente, eles acharam mais fácil determinar o resultado utilizando o teorema de Pitágoras.

A partir das construções feitas, inferimos que as Duplas 01, 02 e 03 se encontram, nesse item, no nível 2 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois conseguem perceber que o quadrilátero maior é composto por outras figuras geométricas, mas não consegue relacionar a área dele com as áreas dos outros e aplicam o teorema de Pitágoras de imediato. Já a Dupla 05 se encontra, nesse item, entre os níveis 1 e 2, pois não entende o que é solicitado no item e acaba considerando o lado do quadrado maior com outra variável e por isso não consegue responder corretamente.

Após a entrevista, apenas a Dupla 02 conseguiu visualizar a figura decomposta e fez a resolução de forma correta dos itens *b* e *c*. Por isso, afirmamos que ela agora se encontra, nesse item, entre os níveis 2 e 3 de van Hiele, enquanto que os demais não conseguiram relacionar a área do quadrilátero maior composta pelas áreas do quadrado menor e dos quatro triângulos, permanecendo assim no mesmo nível. Além disso, percebemos que as Duplas 01, 02 e 03 permaneceram, em itens parecidos, no mesmo nível, pois resolveram aplicando o mesmo conceito (teorema de Pitágoras). Já a Dupla 05 oscilou de um nível para outro na mesma atividade, embasando as ideias apresentadas por Oliveira (2012).

O licenciando L05 (Figura 27) não respondeu o item *b*, pois não entendeu o que estava sendo pedido na questão. Já no item *c*, o licenciando apenas colocou a fórmula final da medida do lado a em função das medidas dos lados x e y, aplicando assim o teorema de Pitágoras. A partir das filmagens, percebemos que o licenciando afirma que não sabe como determinar a resposta utilizando o conceito de área, que se fosse por Pitágoras seria mais fácil. Além disso, ele informa que foi o professor de Tópicos em Geometria I que o traumatizou. Inferimos que L05 encontra-se, nesse item, no nível 2, segundo Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998). Há uma modificação com relação ao item *b*, pois nesse item o licenciando não conseguiu determinar a medida do lado *a*, embora, em alguns momentos, tenha pensado em aplicar o teorema de Pitágoras, mas não o aplicou.

Figura 27 – Resposta de L05 ao item *c* da Atividade 1

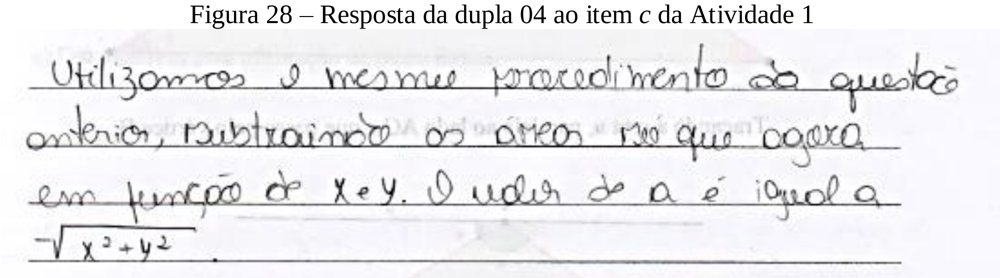

$a^2 = x^2 + y^2.$

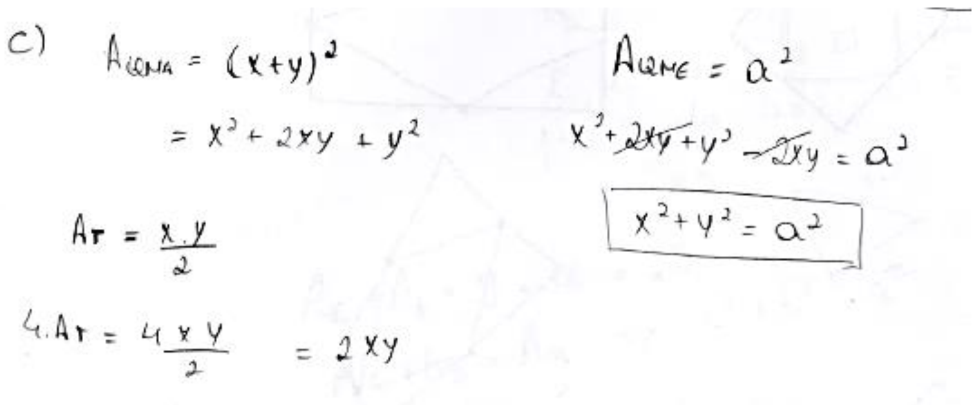
Fonte: dados da pesquisa

Na entrevista questionamos o motivo de ter deixado em branco o item *b* e por ter apenas colocado a fórmula final no item *c*. L05 afirmou que na hora da resolução esqueceu dos conceitos que deveria utilizar e por conta disso não respondeu os itens. Além disso, L05 informou que duas semanas após a resolução dessas atividades, ele foi ensinar o teorema de Pitágoras a seus alunos do 9º ano e encontrou a mesma resolução do item *c* no livro adotado pela escola e foi com isso que ele percebeu como deveria ter resolvido os dois itens, afirmando que era muito simples, mas que na hora não se lembrou de nada. Permanecendo, portanto, no nível 2 de van Hiele, segundo Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998).

A Dupla 04 (Figura 28) foi a única a utilizar, nos dois itens, o conceito de área para determinar a medida do lado *a*. A partir da folha de rascunho, percebemos que os licenciandos resolveram corretamente o item, utilizando produtos notáveis, radiciação e áreas do quadrado e do triângulo. Com isso, a Dupla 04 foi a única a conseguir fazer a verificação empírica e genérica para o teorema de Pitágoras. Conforme mencionado na análise *a priori*, nos itens *b* e *c* os licenciandos iriam elaborar uma justificativa, respectivamente, numérica e algébrica, para a medida do lado *a* utilizando as áreas que compõem a figura e por isso estávamos interessados apenas no nível do pensamento geométrico dos indivíduos, já que eles não iriam elaborar uma prova.

Figura 28 – Resposta da dupla 04 ao item *c* da Atividade 1


Utilizamos o mesmo procedimento da questão anterior, subtraindo as áreas só que agora em função de x e y. O valor de a é igual a $\sqrt{x^2+y^2}$.



Fonte: dados da pesquisa

Ao analisarmos as filmagens, percebemos que L02 e L03 buscam relembrar os conceitos de área e um vai ajudando o outro no processo de resolução do item na folha de rascunho. Segue o extrato da discussão dos licenciandos no momento da resolução do item:

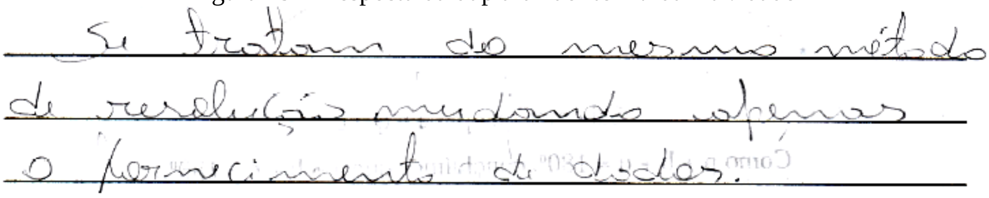
> **L03:** o valor de *a* em função de *x* e *y* usando apenas o conceito de área.
> **L02:** ah...
> **L02 e L03:** é a mesma coisa.
> **Fazem o cálculo da letra *c* da mesma forma que a *b*.**
> **L03:** certo... menos a área dos quatro triângulos... *x* mais *y*.
> **L02:** não, *x* vezes *y* dividido por *2.*
> **L03:** aí é vezes *4*.
> **L02:** aí no caso tem que colocar que a área do quadrado menor é ... não...
> **L03:** não é isso mesmo...
> **L02:** é... a área do quadrado maior é isso aqui que é igual a isso menos isso.
> **L02 e L03:** menos *4* vezes isso.
> **L03 vai falando o que está escrevendo.**
> **L02:** é show.
> **L03:** pode deixar ao quadrado?
> **Pesquisadora:** pode. Pode deixar assim mesmo.

A partir disso, inferimos que a Dupla 04 também se encontra, nesse item, no nível 3 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998). Permanecendo assim, em itens parecidos, no mesmo nível, uma vez que resolveram aplicando o mesmo conceito (áreas do quadrado e do triângulo).

No item *d*, a pergunta era: *Comparem a conclusão obtida na letra b com a conclusão obtida na letra c. O que vocês observam?* Esse item tem por objetivo conduzir os licenciandos a reconhecerem que os dois resultados são semelhantes e dizem respeito ao teorema de Pitágoras, mas que o primeiro é um caso particular e o segundo é o caso genérico. A partir das resoluções dos licenciandos, percebemos que a maioria considera que se trata do mesmo método de resolução, havendo uma diferença entre responder atribuindo valores e utilizando o conceito geral de área. O que nos leva a inferir que, embora os licenciandos não conheçam a diferença entre as palavras *prova* e *demonstração*, eles já compreendem que exemplos não justificam a veracidade de uma afirmação e que para isso é necessário uma *prova intelectual* ou uma *demonstração*, utilizando conceitos teóricos.

A Dupla 01 (Figura 29) percebe que as conclusões dos itens *b* e *c* dizem respeito ao mesmo método de resolução, mudando apenas o fornecimento de dados. A partir das filmagens, percebemos que eles afirmam que deu a mesma coisa, só que diferente. Ou seja, eles afirmam que se trata da aplicação do mesmo assunto, no caso teorema de Pitágoras, concordando que deu o mesmo valor, a mesma coisa.

Figura 29 – Resposta da dupla 01 ao item *d* da Atividade 1

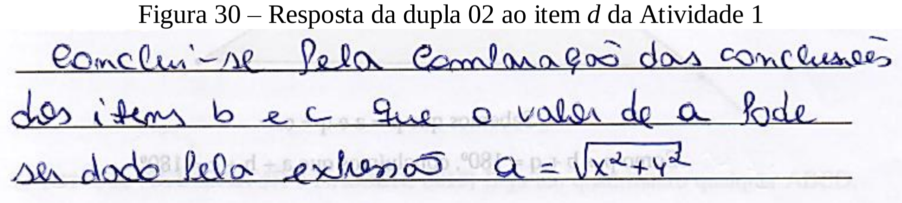


Se tratam do mesmo método de resolução mudando apenas o fornecimento de dados.

Fonte: dados da pesquisa

A Dupla 02 (Figura 30), ao comparar as conclusões encontradas nos itens *b* e *c*, observam que a medida do lado *a* pode ser resumido na expressão $a = \sqrt{x^2 + y^2}$. Confirmando que esses licenciandos perceberam que *x* e *y* podem assumir quaisquer valores positivos e caso atribuamos $x = 3$ e $y = 4$, encontraremos o resultado do item *b*. A partir das filmagens, percebemos que esses licenciandos compreendem que o item *c* é a generalização do item *b*.

Figura 30 – Resposta da dupla 02 ao item *d* da Atividade 1

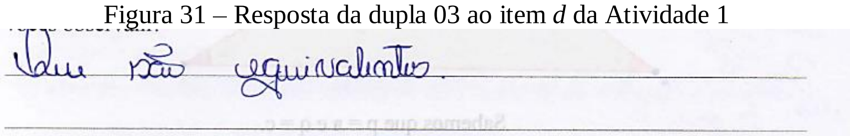


Conclui-se pela comparação das conclusões dos itens b e c que o valor de a pode ser dado pela expressão $a = \sqrt{x^2+y^2}$

Fonte: dados da pesquisa

A Dupla 03 (Figura 31) também afirma que as conclusões são equivalentes. A partir das filmagens, percebemos que os licenciandos apenas analisam os dois resultados e afirmam que são iguais, registrando assim na atividade.

Figura 31 – Resposta da dupla 03 ao item *d* da Atividade 1

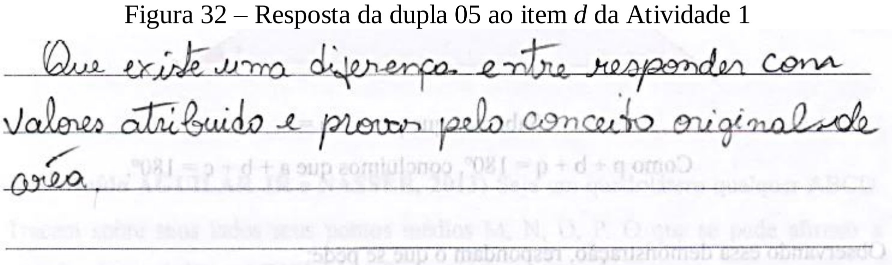


Vão são equivalentes.

Fonte: dados da pesquisa

A Dupla 05 (Figura 32) também percebe que existe uma diferença entre responder com valores atribuídos e provar utilizando o conceito geral de área. Ou seja, esses licenciandos compreendem o que é uma simples verificação, a partir de um caso particular e o que é uma *prova intelectual* ou uma *demonstração*, utilizando conceitos teóricos.

Figura 32 – Resposta da dupla 05 ao item *d* da Atividade 1


Que existe uma diferença entre responder com valores atribuido e provar pelo conceito original de área.

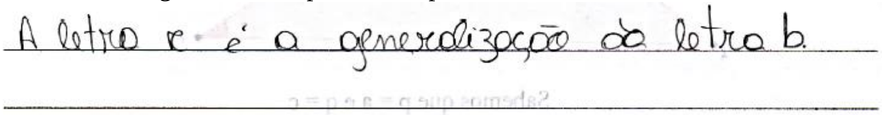
Fonte: dados da pesquisa

A partir das justificativas, inferimos que as Duplas 01, 02, 03 e 05 se encontram, nesse item, entre os níveis 2 e 3 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois já conseguem descrever as partes que compõem uma figura e declarar suas propriedades, como também já começam a desenvolver a sua capacidade de raciocínio formal (matemático), mas ainda é apoiada na manipulação. O que corrobora as ideias apresentadas por Oliveira (2012) ao afirmar que os licenciandos podem oscilar de um nível para outro na mesma atividade, assim como podem ser enquadrados em níveis diferentes, executando as mesmas atividades, dependendo do critério usado.

O licenciando 05, como não desenvolveu o item *b* e no item *c* aplicou de imediato o teorema de Pitágoras, sem fazer uma discussão acerca do que encontrou, deixou o item *d* em branco, pois não tinha como comparar as conclusões. Inferimos que L05 se encontra, nesse item, no nível 1 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois se limita a descrever a aparência física das figuras e geralmente não reconhece explicitamente as partes das quais as figuras são compostas ou suas propriedades matemáticas.

A Dupla 04 (Figura 33) conseguiu perceber que o item *c* é a generalização do item *b*. A partir das filmagens, percebemos que os licenciandos confirmam que são iguais, mas que uma é específica e a outra é geral.

Figura 33 – Resposta da dupla 04 ao item *d* da Atividade 1


A letra c é a generalização da letra b.

Fonte: dados da pesquisa

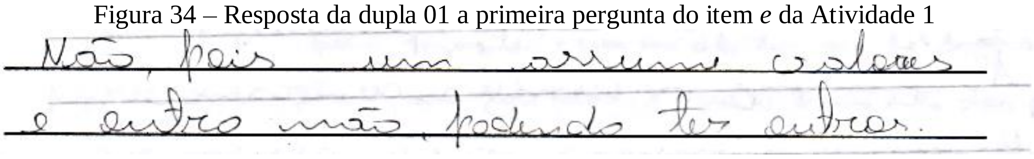
A partir disso, inferimos que a Dupla 04 se encontra, nesse item, entre os níveis 3 e 4 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e

Gutiérrez e Jaime (1998), pois já começa a desenvolver a sua capacidade de raciocínio formal (matemático), embora ainda esteja apoiada na manipulação, e já está ciente de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário fazer uma sequência de implicações com base em propriedades já provadas. A diferença dessa dupla se encontrar entre os níveis 3 e 4 de van Hiele das demais, é que apenas ela conseguiu determinar a medida do lado *a* nos itens *b* e *c* de forma correta, ou seja, foram os únicos licenciandos que conseguiram utilizar o conceito de áreas do quadrado e do triângulo para determinar a medida do lado *a*.

No item *e*, há duas indagações. A primeira perguntava: *As duas conclusões são equivalentes (iguais)? Justifiquem sua resposta.* Já a segunda perguntava: *Em qual dos dois processos (letra b ou letra c) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem sua resposta.* A partir das resoluções dos licenciandos, percebemos que, embora no item *d*, alguns tenham dito que são semelhantes e que uma é a generalização da outra, nesse item esses mesmos licenciandos afirmaram que não são equivalentes. Além disso, a maioria percebeu que o item *c* é a generalização do teorema de Pitágoras.

A Dupla 01 (Figura 34) afirma que as duas conclusões não são iguais, pois uma assume valores específicos e a outra pode assumir outros valores.

Figura 34 – Resposta da dupla 01 a primeira pergunta do item *e* da Atividade 1


Não, pois um assume valores e outro não, podendo ter outros.

Fonte: dados da pesquisa

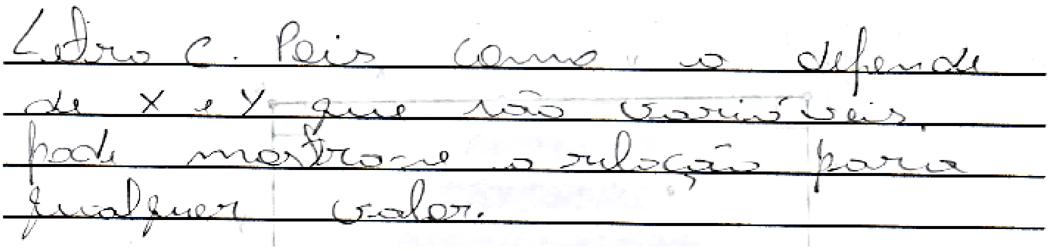
Com as filmagens, percebemos que, durante a resolução, a dupla compreende que se trata do mesmo método e que são iguais, mas L10 acaba afirmando que não o são. Segue o extrato:

> **L10 percebe que são iguais:** Se nesse geral eu colocar a igual a *5*, não dá igual?
> **L11** confirma e diz que entende.
> **L11:** esse aqui (letra *b*) está em função...
> **L10:** de *3* e *4* e na *c*, de *x* e *y*. Ah, então é a mesma coisa. A diferença é que uma é numérica e a outra não.
> **L11 lê a letra e e afirma:** são iguais.
> **L10 analisa e afirma:** não são iguais não.
> **L11:** é... Para justificar a resposta é porque em um eu vou ter uma resposta completa e na outra, variáveis. (...) Professora, eu vou colocar aqui que é igual, mas sendo diferente.

Ao fazermos a entrevista com a Dupla 01, os licenciandos percebem que não entenderam direito o que estava sendo pedido nessa primeira pergunta do item *e* e confirmaram que são sim equivalentes. Eles também afirmam que, durante a resolução, estavam com dúvidas nos itens *b* e *c*, principalmente porque deveriam fazer por área e fizeram pelo teorema de Pitágoras. Por conta disso, acabaram escrevendo errado. Além disso, eles afirmaram que estavam considerando equivalentes como se fosse outra coisa, mas não conseguiram explicar direito que outro sentido que eles estavam tendo para essa palavra.

Na segunda pergunta, a Dupla 01 (Figura 35) conseguiu perceber corretamente que a letra *c* é um tipo de prova do teorema de Pitágoras, justificando que *x* e *y* são variáveis e assumem qualquer valor (positivo).

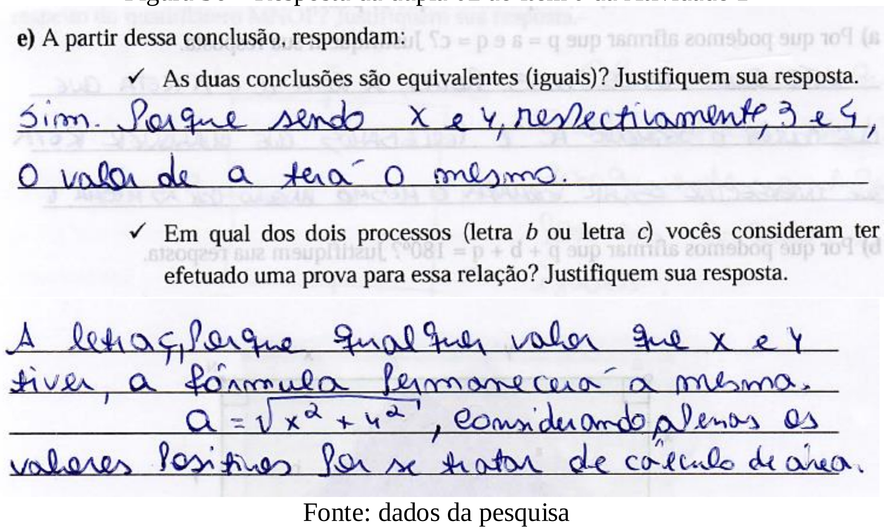
Figura 35 – Resposta da dupla 01 a segunda pergunta do item *e* da Atividade 1


Letra c. Pois como o defende de x e y que são variáveis, pode mostrar a relação para qualquer valor.

Fonte: dados da pesquisa

A Dupla 02 (Figura 36) percebe corretamente que são equivalentes, justamente porque *x* e *y* podem assumir valores como *3* e *4* e, consequentemente, encontraremos o mesmo valor. Além disso, na segunda pergunta desse item, os licenciandos também compreendem que a letra *c* é a generalização do teorema de Pitágoras.

Figura 36 – Resposta da dupla 02 ao item *e* da Atividade 1


e) A partir dessa conclusão, respondam:

✓ As duas conclusões são equivalentes (iguais)? Justifiquem sua resposta.

Sim. Porque sendo x e y, respectivamente, 3 e 4, o valor de a terá o mesmo.

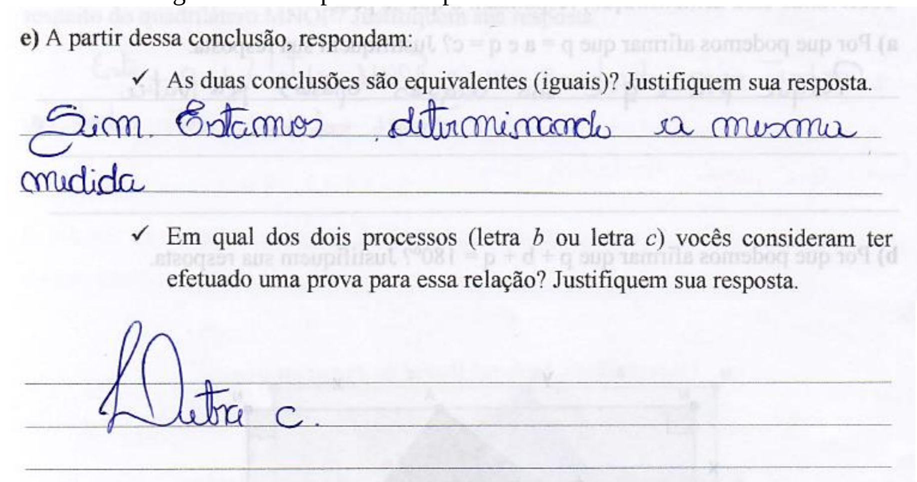
✓ Em qual dos dois processos (letra *b* ou letra *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem sua resposta.

A letra c, porque qualquer valor que x e y tiver, a fórmula permanecerá a mesma. $a = \sqrt{x^2 + y^2}$, considerando apenas os valores positivos por se tratar de cálculo de área.

Fonte: dados da pesquisa

A Dupla 03 (Figura 37) também conseguiu perceber corretamente que são conclusões equivalentes, pois determinam a mesma medida. Já na segunda pergunta, apenas afirmam que a letra *c* diz respeito a um tipo de prova do teorema de Pitágoras, sem justificar a resposta.

Figura 37 – Resposta da dupla 03 ao item *e* da Atividade 1


e) A partir dessa conclusão, respondam:

✓ As duas conclusões são equivalentes (iguais)? Justifiquem sua resposta.

Sim. Estamos determinando a mesma medida

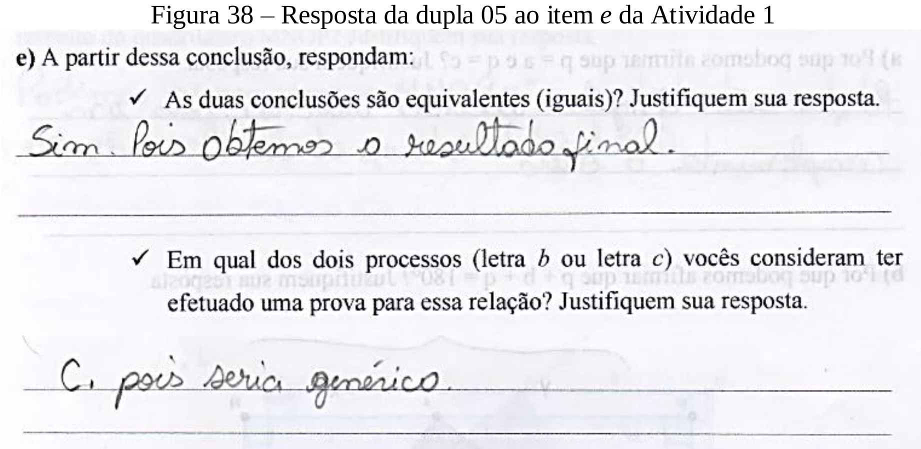
✓ Em qual dos dois processos (letra *b* ou letra *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem sua resposta.

Letra c.

Fonte: dados da pesquisa

A Dupla 05 (Figura 38) também conseguiu perceber corretamente que as conclusões são equivalentes, pois obtêm-se um resultado final. Além disso, observaram corretamente que o item *c* é a generalização do *b* e, consequentemente, é um tipo de prova para o teorema de Pitágoras.

Figura 38 – Resposta da dupla 05 ao item *e* da Atividade 1


e) A partir dessa conclusão, respondam:

✓ As duas conclusões são equivalentes (iguais)? Justifiquem sua resposta.

Sim. Pois obtemos o resultado final.

✓ Em qual dos dois processos (letra *b* ou letra *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem sua resposta.

C, pois seria genérico.

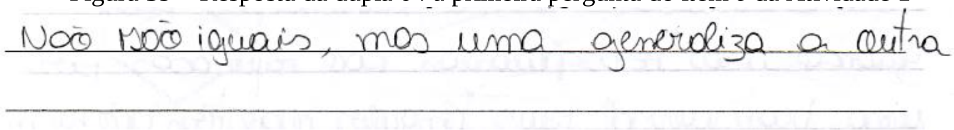
Fonte: dados da pesquisa

A partir das justificativas, inferimos que as Duplas 01, 02, 03 e 05 se encontram, nesse item, entre os níveis 2 e 3 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois já conseguem descrever as partes que compõem uma figura e declarar suas propriedades, como também já começam a desenvolver a sua capacidade de raciocínio formal (matemático), mas ainda é apoiada na manipulação. Embora a Dupla 01 tenha colocado que não são equivalentes, percebemos que os licenciandos sabiam que as respostas dos itens *b* e *c* eram equivalentes, pois uma assumia valores específicos e a outra podia assumir qualquer número positivo. Permanecendo assim, em itens parecidos, no mesmo nível, uma vez que perceberam que se tratava do mesmo método de resolução e que o item *c* é a generalização do item *b*.

O licenciando 05, por não desenvolver o item *b* e no item *c* aplicar de forma imediata, como também não desenvolver o item *d*, o item *e* também foi deixado em branco, pois não tinha como ele comparar as conclusões encontradas nos itens *b* e *c*. Inferimos que L05 se encontra, nesse item, no nível 1 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois se limita a descrever a aparência física das figuras e geralmente não reconhece explicitamente as partes das quais as figuras são compostas ou suas propriedades matemáticas. Permanecendo assim, em itens parecidos, no mesmo nível, uma vez que não conseguiu entender o que estava sendo pedido nos itens anteriores e, consequentemente, deixou em branco.

A Dupla 04 (Figura 39), embora tenha percebido no item *d* que a letra *c* é a generalização da letra *b*, nesse item *e* os licenciandos afirmaram que não são iguais, pois uma generaliza a outra. O que nos leva a perceber que eles não entenderam o que estava sendo pedido no item, já que a justificativa leva a crer que as conclusões são equivalentes.

Figura 39 – Resposta da dupla 04 a primeira pergunta do item *e* da Atividade 1



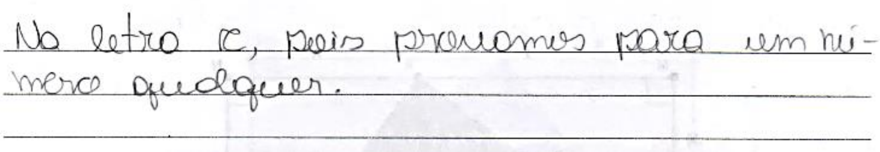
Fonte: dados da pesquisa

Na entrevista questionamos sobre esse fato e os dois licenciandos perceberam que se equivocaram e que são sim equivalentes. Segue o extrato:

> **Pesquisadora:** é... na questão 1, na letra *d*, vocês disseram que a letra *c* é a generalização da letra *b*.
> **L03:** hum...
> **Pesquisadora:** você lembra?
> **L03:** lembro.
> **Pesquisadora:** pronto... na *e* vocês disseram que não são iguais, mas uma generaliza a outra...
> **L03:** eita... não espera aí deixa eu ver... é melhor. (L03 vê as questões novamente e revê as respostas). Então no caso elas são iguais... é né? Elas são iguais... só que uma é a generalização da outra.
> **Pesquisadora:** é... no caso, se eu colocar *x* como *3* e *y* como *4*, é a mesma coisa.
> **L03:** ah sim, é verdade.
> **Pesquisadora:** não é?
> **L03:** foi um erro de comunicação.

Na segunda pergunta, a Dupla 04 (Figura 40) conseguiu perceber corretamente que a letra *c* é um tipo de prova do teorema de Pitágoras, justificando que nesse item eles provaram para um número qualquer.

Figura 40 – Resposta da dupla 04 a segunda pergunta do item *e* da Atividade 1


Na letra c, pois provamos para um nú-
mero qualquer.

Fonte: dados da pesquisa

Embora essa dupla tenha colocado que não são equivalentes, percebemos que os licenciandos sabiam que as respostas dos itens *b* e *c* eram equivalentes, pois uma assumia valores específicos e a outra podia assumir qualquer número positivo. Assim, inferimos que a Dupla 04 se encontra, nesse item, entre os níveis 3 e 4 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois já começa a desenvolver a sua capacidade de raciocínio formal (matemático), embora ainda esteja apoiada na manipulação, e já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário fazer uma sequência de implicações com base em propriedades já provadas. Se difere das demais porque foi a única dupla que conseguiu utilizar o conceito de áreas do quadrado e do triângulo para determinar a medida do lado *a* nos itens *b* e *c*.

De modo geral, percebemos que houve muita oscilação entre os níveis de pensamento geométrico desses licenciandos, em que na mesma atividade, eles se encontravam em níveis diferentes. Por exemplo, as Duplas 01, 02, 03 e 05 oscilaram entre os níveis 1, 2 e 3 na mesma atividade. Além disso, essas duplas oscilaram entre os níveis 1 e 2 nos itens *b* e *c*, em que pedia para determinar a medida do lado *a* utilizando o conceito de área, a partir da visualização da figura. Já o L05 oscilou entre os níveis 1 e 2, pois só conseguiu responder os itens *a* e *c*, deixando os outros em branco. A Dupla 04 oscilou entre os níveis 1, 2, 3 e 4, pois foi a única dupla que conseguiu desenvolver os itens *b* e *c* utilizando o conceito de área. A oscilação pode apontar para o fato de os licenciandos estarem em um momento de transição entre um nível e outro, pois eles já possuem as características do nível mais baixo completas, faltando fortalecer as demais características do nível superior.

Esses resultados vêm a corroborar as ideias apresentadas por Nasser (1992) e Andrade e Nacarato (2004) ao afirmarem que um determinado aluno pode apresentar características de dois níveis diferentes em tópicos distintos da Geometria, sendo possível transitar entre um nível e outro imediatamente anterior ou posterior a resolução de uma mesma atividade. Além disso, embasa também a discussão trazida por Nasser e Sant'Anna (2010) ao argumentarem que um aluno também pode raciocinar em um nível sem ter atingido completamente o nível anterior. Ou seja, esses resultados corroboram a primeira crítica apresentada ao modelo de van Hiele acerca do caráter hierárquico de seus níveis, discutida por Oliveira (2012) e apresentada na seção 2.4 do Capítulo 2.

O licenciando que fez sozinho, L05, não conseguiu estar em níveis superiores ao 2, como também deixou os itens *b*, *d* e *e* em branco, pois não sabia quais conceitos de área deveria utilizar para responder ao item *b* e, como consequência, não tinha como responder os itens *d* e *e*, uma vez que precisava das respostas dos itens *b* e *c*. Esse resultado nos leva a inferir a importância da interação na resolução das atividades, pois o licenciando não teve ninguém com quem argumentar e discutir as ideias e por conta disso não conseguiu avançar na resolução desses itens. O que vem a corroborar as ideias de van Hiele (1957) ao afirmar que o trabalho em duplas facilita a aquisição da compreensão do conhecimento geométrico e um aluno pode ajudar o outro a adquiri-lo.

Nessa atividade esperávamos construções de prova apenas no item *a* com o intuito de justificar a afirmação de que o quadrilátero ABCD seria um quadrado. Encontramos que apenas a Dupla 05 conseguiu construir uma prova do tipo *exemplo genérico* para validar a afirmação. Além disso, essa dupla se encontrava no nível 3 de van Hiele, compreendendo que um exemplo não vale para confirmar a veracidade de determinada afirmação e por isso busca por algo geral, contudo ainda não compreende as provas formais em sua totalidade e, devido a isso, não conseguiu organizar uma sequência de raciocínio lógico que justificasse as suas observações.

As outras duplas (01, 02, 03 e 04) e L05 inferiram que era um quadrado apenas por visualização da imagem e pelas propriedades da figura, ou seja, estavam entre os níveis 1 e 2 de van Hiele, pois utilizaram apenas a observação para validar determinada afirmação, como também compreendem as propriedades exclusivas de determinados quadriláteros. Devido a isso, eles não conseguiram construir nenhum tipo de prova, uma vez que não sentiram a necessidade disso, já que pela observação e por conhecerem as propriedades, sabiam que era verdadeiro. Conforme discutido em Jaime e Gutiérrez (1990), essa é uma reação típica dos alunos do nível 3 ou abaixo, onde quando o professor pede para os alunos mostrarem algumas propriedades, eles o repreendem questionando o porquê de se provar isso, uma vez que eles já sabem que é verdade.

A partir dos resultados encontrados no item *a*, foi possível averiguar concretamente as articulações estabelecidas no Capítulo 4, em que a Dupla 05 que estava no nível 3, conseguiu elaborar uma prova do tipo *exemplo genérico* e, L05 e as Duplas 01, 02, 03 e 04 que estavam entre os níveis 1 e 2 não sentiram a necessidade de construir uma prova, pois ficaram satisfeitos com a afirmação de que o quadrilátero ABCD era um quadrado apenas pela observação da figura e por conhecerem as propriedades exclusivas desse quadrilátero, sem ter a necessidade de realizar medições apropriadas com alguma ferramenta.

Nos itens *b* e *c* não haveria uma construção de variados tipos de prova, uma vez que já eram verificações bem específicas, pois no item *b* os licenciandos iriam verificar empiricamente o teorema de Pitágoras e no item *c* iriam comprovar a relação pitagórica de forma algébrica, utilizando em ambas as áreas do quadrado e do triângulo que compõem a figura. Por conta disso, nesses dois itens estávamos interessados apenas no nível de pensamento geométrico dos sujeitos. Apenas a Dupla 04 conseguiu responder os itens utilizando as áreas do quadrado e do triângulo que compunham a figura, ou seja, foi a única dupla que percebeu que a área da figura maior (quadrado MNPQ) é composta pela área de cinco figuras menores: um quadrado menor ABCD e quatro triângulos retângulos semelhantes (DMA, ANB, BPC e CQD), respondendo assim os itens conforme solicitado.

Por fim, nos itens *d* e *e*, notamos que, embora os sujeitos pesquisados não conheçam a diferença entre as palavras *prova* e *demonstração*, eles compreendem que exemplos não justificam a validade de determinadas afirmações, conseguindo com isso distinguir corretamente casos particulares de casos genéricos, ao analisarem a estrutura de uma prova.

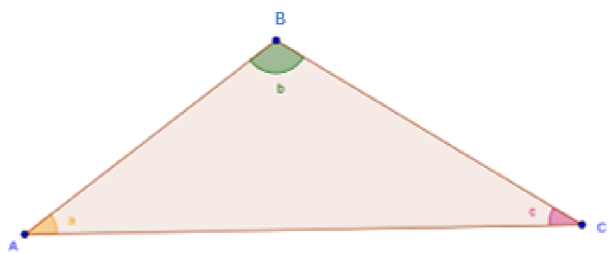
6.2.2 Análise da atividade 2

A seguir são apresentadas as análises *a priori* e *a posteriori* da atividade 2 (Figura 41), que diz respeito à soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

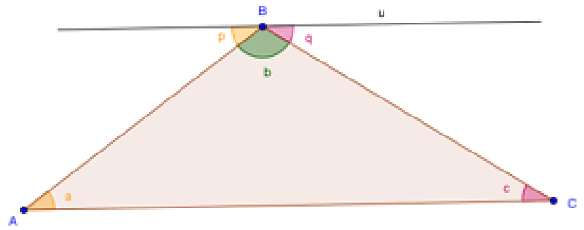
Figura 41 - Atividade 2

2) (Elaborada pelos membros da Equipe Provas e Demonstrações Matemáticas – Projeto CAPES/OBEDUC/UFMS/UEPB/UFAL Edital 2012 - adaptada)

Considerem um triângulo ABC, no qual estão assinalados os ângulos internos:



Traçando a reta *u*, paralela ao lado AC e que passa pelo vértice B:



Sabemos que p = a e q = c.

Como p + b + q = 180°, concluímos que a + b + c = 180°.

Observando essa prova, respondam o que se pede:

a) Por que podemos afirmar que p = a e q = c? Justifiquem sua resposta.

b) Por que podemos afirmar que p + b + q = 180°? Justifiquem sua resposta.

c) O que podemos concluir com essa prova?

d) Essa afirmação vale para qualquer triângulo? Justifiquem sua resposta.

e) Provem essa afirmação de outra forma.

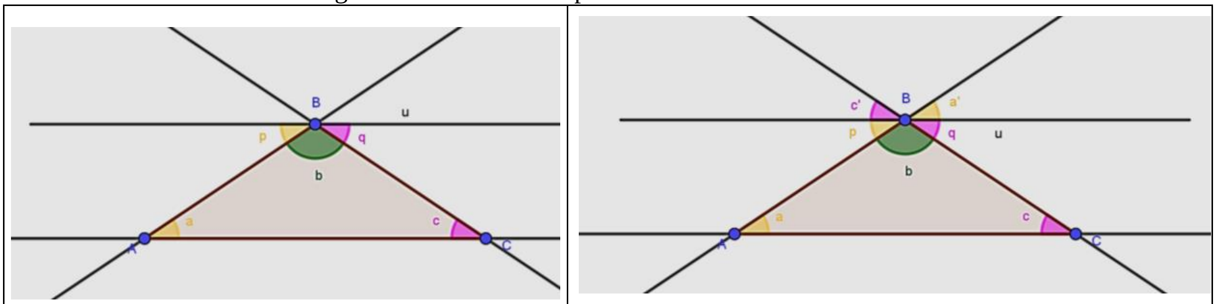
Fonte: adaptado de Lima (2015)

6.2.2.1 Análise *a priori* da atividade 2

A atividade tem por objetivo conduzir as duplas a uma prova do teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, diferente da que é apresentada no enunciado da atividade. Os conhecimentos matemáticos envolvidos são: retas paralelas, teorema das retas paralelas cortadas por uma transversal, ângulos suplementares, relações entre os ângulos de um triângulo e o teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

O *item a)* tem como objetivo verificar os conhecimentos dos licenciandos acerca dos ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal, como também a forma como apresentarão a justificativa para a sua resposta. Aqui os alunos podem ter dificuldades no entendimento do que é pedido no item ou não conseguirem visualizar os ângulos alternos internos, como também não lembrarem desse conceito. Os licenciandos podem, por exemplo, justificar que $p = a$ e $q = c$ de duas formas diferentes. A primeira (Figura 42a), ao perceberem que p e a são alternos internos e que q e c também o são, logo são congruentes. A segunda (Figura 42b), ao prolongarem o segmento $\overline{AB}$, a partir do ponto B, encontrarão um ângulo a' congruente ao ângulo a, pois são correspondentes. Como p e a' são opostos pelo vértice, então são congruentes. De maneira análoga, concluem que q e c' são congruentes. Consequentemente, $p = a$ e $q = c$.

Figura 42 - Possíveis respostas ao item *a* da atividade 2



(a) (b)

Fonte: autoria própria

Já o *item b)* tem como objetivo verificar os conhecimentos dos licenciandos acerca dos ângulos suplementares. Aqui os alunos podem ter dificuldades no entendimento do que é pedido no item ou não conseguirem visualizar, por exemplo, que formam um ângulo raso ou que são ângulos suplementares ou que forma um semicírculo.

Nesses dois itens os licenciandos não produzirão uma prova, mas deverão ter claro conhecimento dos conceitos geométricos presentes na figura. Então, só observaremos o seu nível de pensamento geométrico. A partir do que foi discutido nos Capítulos 2 e 4, pode-se afirmar que os licenciandos que estejam no nível 1 irão fazer atribuições físicas globais dos ângulos dispostos nas figuras, mas essas atribuições têm um significado apenas visual, pois ainda não são capazes de usar determinadas definições matemáticas. Caso estejam no nível 2, já serão capazes de utilizar e reconhecer propriedades matemáticas, mas podem ter dificuldades ao usar algumas expressões lógicas. Os licenciandos que estejam no nível 3 já são capazes de usar e reconhecer propriedades matemáticas, podendo estabelecer relações lógicas entre as propriedades, mas ainda não entendem a estrutura axiomática da Matemática. Caso estejam no nível 4, os licenciandos poderão usar e reconhecer propriedades matemáticas e já possuem uma melhor compreensão da estrutura lógica da Matemática (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994; GUTIÉRREZ e JAIME, 1998).

Ao analisarmos as justificativas e/ou argumentações utilizadas no item *a)*, os licenciandos que estão no nível 1 podem justificar que são iguais porque apresentam cores iguais na figura. Caso os licenciandos estejam nos níveis 2, 3 e 4, havendo distinção apenas na linguagem adotada, eles poderão reconhecer esses dois tipos de procedimentos, pelos ângulos alternos internos ou pelos ângulos correspondentes e opostos pelo vértice, conforme apresentado na Figura 42. Já no item *b)*, os licenciandos que estão no nível 1 de van Hiele não conseguem perceber qual conceito está envolvido nesse item, deixando a questão em branco ou respondendo erroneamente. Caso os licenciandos estejam nos níveis 2, 3 e 4, havendo distinção apenas na linguagem adotada, eles poderão utilizar, por exemplo, os conceitos de ângulos suplementares, de ângulo raso ou de semicírculo para justificar a relação entre os ângulos (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

O *item c)* tem como objetivo verificar o que os licenciandos entendem pela conclusão da prova apresentada na atividade, que diz respeito a um importante teorema da Geometria. Aqui os licenciandos deverão perceber que a prova conclui que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. As dificuldades podem estar associadas ao entendimento do que é pedido no item. Já o *item d)* tem como objetivo verificar o que os licenciandos entendem por casos particulares e casos genéricos ao analisarem argumentações, justificativas e provas de afirmações matemáticas. Ou seja, nesse item eles deverão reconhecer que a prova apresentada na atividade é uma das possibilidades de provar o teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e que vale para qualquer triângulo.

Nesses dois itens os licenciandos não produzirão uma prova, mas deverão ter claro conhecimento dos conceitos geométricos presentes na figura, como também a importância da conclusão de uma prova. Aqui só observaremos o seu nível de pensamento geométrico. A partir do que foi discutido nos Capítulos 2 e 4, pode-se afirmar que os licenciandos que estejam no nível 1 não entendem o conceito de prova, fazem atribuições físicas globais das figuras e não são capazes de usar determinadas definições matemáticas. Caso estejam no nível 2, já poderão verificar experimentalmente, a partir de um ou alguns casos, a verdade de uma propriedade, pois já compreende que as figuras geométricas são formadas por partes e que são dotadas de propriedades matemáticas, mas ainda não são capazes de relacionar algumas propriedades a outras (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994; GUTIÉRREZ e JAIME, 1998).

Dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, eles podem se convencer apenas com um exemplo especial ou podem precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Os licenciandos que estejam no nível 3 já são capazes de fazer deduções e provas informais, pois a sua capacidade de raciocínio formal (matemático) começa a ser desenvolvida, mas ainda está apoiada na manipulação. Caso estejam no nível 4, eles já podem entender e escrever provas formais, pois estas provas já têm significado para eles e sentem sua necessidade como um dos meios de verificar a validade de uma afirmação de forma genérica (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994; GUTIÉRREZ e JAIME, 1998).

Ao analisarmos as justificativas e/ou argumentações utilizadas no item *c)*, os licenciandos que estão no nível 1 de van Hiele não conseguem perceber qual conceito está envolvido nesse item, não conseguindo identificar o que se concluiu a partir da prova e por isso deixam a questão em branco ou respondem erroneamente. Caso os licenciandos estejam nos níveis 2, 3 e 4, havendo distinção apenas na linguagem adotada, eles poderão concluir que a prova se trata do fato de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. Já no item *d)*, os licenciandos que estão no nível 1 de van Hiele podem afirmar que vale para todo triângulo, pois eles já sabem que a afirmação é verdadeira, não sentindo a necessidade de construir uma prova. Àqueles que estejam no nível 2 poderão não conseguir perceber que a prova apresentada na atividade vale para todo triângulo, justificando que teria que analisar outros tipos de triângulos. Caso estejam nos níveis 3 e 4, havendo distinção apenas na linguagem adotada, eles poderão concluir que a prova foi construída de forma geral e que, portanto, vale para todo triângulo (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

Por fim, o *item e)* tem como objetivo estudar as estratégias que os licenciandos irão utilizar para provar, de maneira diferente da que foi apresentada na atividade, o teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Aqui os alunos podem ter dificuldades no entendimento do que é pedido no item, como também na elaboração e construção de uma prova diferente da que foi apresentada.

A partir do que foi discutido nos Capítulos 2 e 4, pode-se afirmar que os licenciandos que estejam no nível 1 não entendem o conceito de prova e por isso não sentem a necessidade de validar as afirmações. Caso estejam no nível 2, eles poderão provar a afirmação a partir da verificação experimental de um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, os licenciandos podem se convencer apenas com um exemplo especial ou podem precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Os licenciandos que estejam no nível 3 já são capazes de fazer deduções e provas informais, como também são capazes de dar razões informais para a verdade das propriedades. Caso estejam no nível 4, poderão entender e escrever provas formais. Além disso, algumas vezes os licenciandos podem utilizar figuras específicas apenas para ajudar a selecionar as propriedades adequadas para a prova, mas eles já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário desenvolver uma sequência de implicações com base em propriedades já estabelecidas (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994; GUTIÉRREZ e JAIME, 1998).

Ao analisarmos as justificativas e/ou argumentações utilizadas no item *e)*, os licenciandos que estão no nível 1 não desenvolvem uma prova, pois não a reconhece como necessária, uma vez que eles sabem que é válido para todos os triângulos. Àqueles que estão no nível 2 podem verificar a validade da afirmação a partir de casos particulares de triângulos, por exemplo triângulos com medidas quaisquer ou triângulos especiais, tais como equilátero, retângulo, etc., confirmando assim a veracidade da afirmação. Os licenciandos que estão no nível 3 podem construir um exemplo bem geral (ainda manipulativo) para provar a afirmação, o que poderia ter sido feito por meio de conceitos e propriedades. Àqueles que estão no nível 4 podem provar que é verdade a partir de conceitos teóricos (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

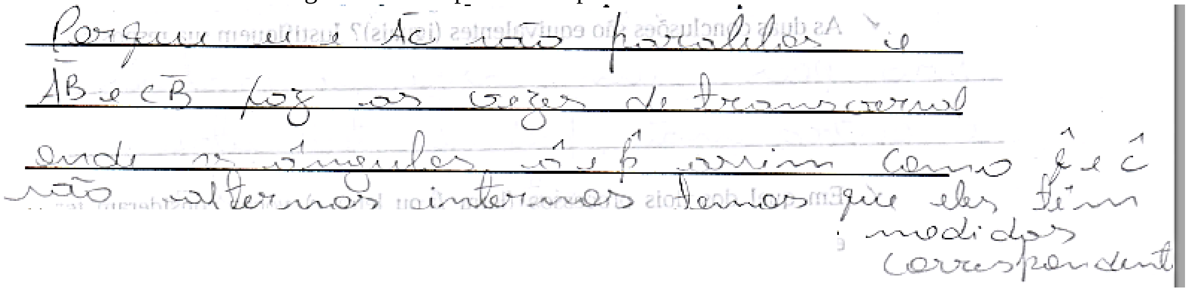
Estabelecendo uma articulação com os tipos de prova de Balacheff (2000), os licenciandos que estão no nível 1 não produzirão provas, deixando o item em branco. Àqueles que estão no nível 2, podem produzir provas do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, utilizando um ou alguns exemplos de triângulos para validar a afirmação. Os licenciandos que estão no nível 3 justificarão a partir do *exemplo genérico*, validando informalmente a afirmação, pois seu raciocínio lógico ainda continua apoiado pela manipulação. Àqueles que estão no nível 4, escreverão provas do tipo *experiência mental*, validando a afirmação de forma genérica.

6.2.2.2 Análise das produções dos licenciandos na atividade 2

No item *a)*, a pergunta era: *Por que podemos afirmar que p = a e q = c? Justifiquem sua resposta*. Percebemos que a maioria dos licenciandos afirmou que eles são congruentes porque são opostos pelo vértice. Alguns fizeram a figura de acordo com a que indicamos na análise *a priori* (Figura 42b), outros nós tivemos que buscar a justificativa da resposta a partir da entrevista.

A Dupla 01 (Figura 43) justificou que os ângulos são congruentes, porque são alternos internos. Além disso, os licenciandos trazem dados de retas paralelas e reta transversal. Somente há um equívoco na finalização da resposta ao afirmarem que os ângulos alternos internos possuem medidas correspondentes, mas inferimos que eles queriam dizer que são congruentes.

Figura 43 - Resposta da dupla 01 ao item *a* da atividade 2


Porque AC são paralelas e
AB e CB faz as vezes de transversal
onde os ângulos â e p̂ assim como ê e ĉ
são alternos internos que eles têm
medidas
correspondent

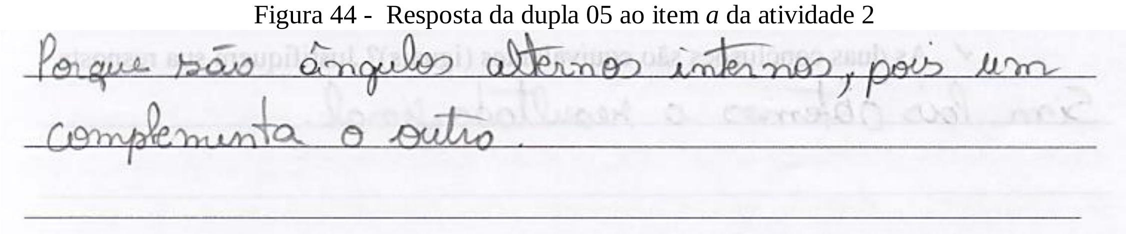
Fonte: dados da pesquisa

O licenciando 05 também queria afirmar que os ângulos são congruentes porque são alternos internos, contudo acaba afirmando que os ângulos são congruentes porque são ângulos correspondentes. Na entrevista buscamos verificar se ele realmente queria dizer correspondentes e percebemos que ele trocou a nomenclatura dos ângulos. Segue o extrato da entrevista:

> **Pesquisadora faz a leitura da resposta da letra *a*, atividade 2.**
> **Pesquisadora:** *p* e *a*, *q* e *c* são...
> **L05:** aonde é que *p* e *a* são correspondentes?
> **Pesquisadora:** é.
> **L05:** aí meu Deus, eu coloquei correspondentes.
> **Pesquisadora:** eles são o que?
> **L05:** alternos...
> **Pesquisadora:** o que?
> **L05:** internos.
> **Pesquisadora:** isso... pronto.
> **L05:** *p* e *a* alternos internos e *q* e *c* também. Meu Deus, e eu coloquei correspondentes?
> **Pesquisadora:** foi...

A Dupla 05 (Figura 44) também afirmou que são congruentes pois são ângulos alternos internos, justificando que um complementa o outro. Como não temos o extrato do diálogo desenvolvido durante a resolução, utilizamos a entrevista para verificar se os licenciandos realmente queriam dizer que um complementa o outro.

Figura 44 - Resposta da dupla 05 ao item *a* da atividade 2



Fonte: dados da pesquisa

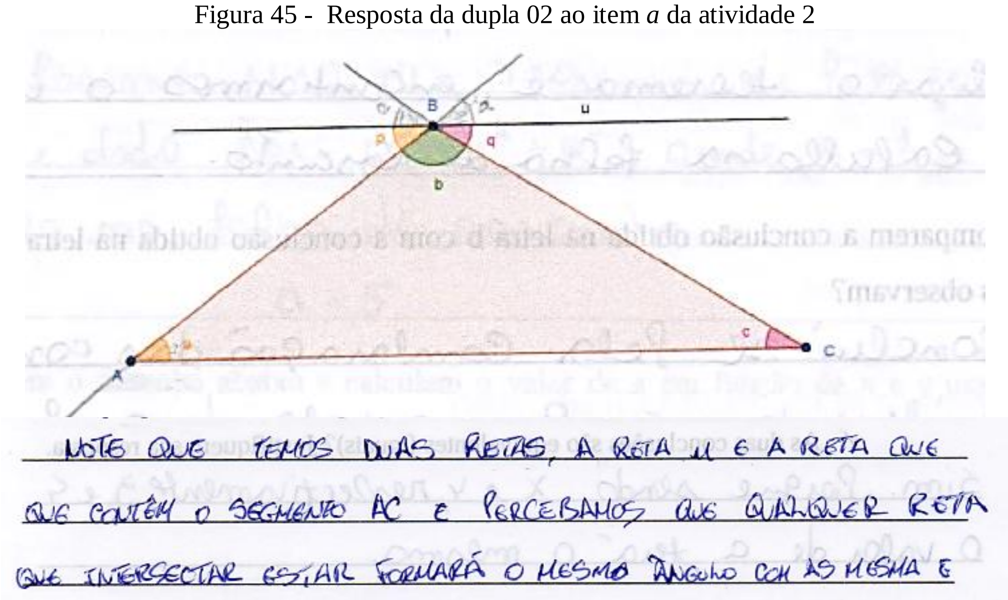
Com a entrevista, percebemos que os licenciandos misturam muitos conceitos diferentes, como também percebemos que eles estavam sempre reclamando que não avisamos os conteúdos que eles deveriam ter estudado e por isso não se prepararam.

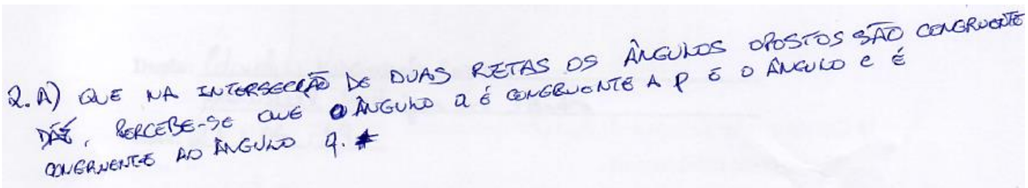
> **Pesquisadora:** na segunda questão vocês disseram que *p* era igual a *a* e *q* igual a *c* porque são ângulos alternos internos... mas os ângulos alternos internos complementam o outro?
> **L04:** seria complementar não era?
> **L09:** é... era mais ou menos isso que a gente queria informar... sabia que era alternos internos...
> **Pesquisadora:** isso.
> **L09:** aí saberia...
> **Pesquisadora:** esse e esse são alternos internos...
> **L04:** unhum...
> **Pesquisadora:** mas qual é a propriedade dos alternos internos?
> **L09:** não lembrei na hora...

Pesquisadora: e agora?
L09: também não lembro não, porque eu não estudei... eu estou em outras contas, professora... eu estou em outras contas... a senhora não mandou a gente se preparar...
Pesquisadora: essa era a ideia... *p* não é igual a *a*?
L09 e L04: é.
Pesquisadora: vocês disseram que *p* é igual a *a* porque são alternos internos.
L04: sim...
Pesquisadora: então...
L04: são correspondentes né!?
Pesquisadora nega.
Pesquisadora: para eu dizer que dois ângulos são iguais...
L09: são congruentes...
Pesquisadora: isso... no caso, são ângulos alternos internos, pois eles são...
L04 e L09: congruentes...
Pesquisadora: congruentes, certo? Só isso.
L09: só isso?
Pesquisadora: é.

Já a Dupla 02 (Figura 45) explica que são congruentes porque são opostos pelo vértice e também faz toda explicação utilizando os conceitos expostos na Figura 42b, contida na análise *a priori*. Os licenciandos utilizam a própria figura da atividade para construir os ângulos *a* e *c*, percebendo que são opostos pelo vértice aos ângulos *p* e *q*, respectivamente. Contudo, eles não justificam por que podemos considerar esses ângulos *a* e *c* na reta *u* e por isso tivemos que questioná-los a partir da entrevista. Durante a resolução desse item, L01 tenta explicar a abertura dos ângulos opostos pelo vértice com as mãos, afirmando que não importa a abertura, eles são sempre congruentes.

Figura 45 - Resposta da dupla 02 ao item *a* da atividade 2




2.A) QUE NA INTERSECÇÃO DE DUAS RETAS OS ÂNGULOS OPOSTOS SÃO CONGRUENTE DAÍ, PERCEBE-SE QUE O ÂNGULO a É CONGRUENTE A p E O ÂNGULO c É CONGRUENTES AO ÂNGULO q.

Fonte: dados da pesquisa

Com as filmagens, percebemos que eles envolvem vários conceitos geométricos juntos, tais como ângulos internos, ângulos externos, suplementares, complementares, alternos internos e opostos pelo vértice. Além disso, L06 afirma que são congruentes porque são alternos internos, mas não tem segurança no que fala nem tampouco L01 escuta a sua ideia de resposta. Segue o extrato da discussão durante a resolução desse item:

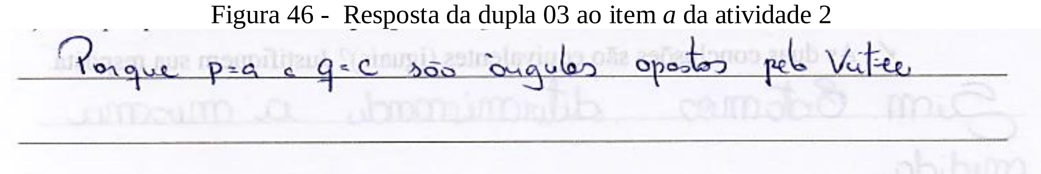
> **L06 faz a leitura da questão 2.**
> **L01:** porque temos duas retas paralelas, reta *u* e a reta que passa pelo segmento AC (...) tem até um negócio que fala sobre as retas paralelas cortadas por transversal (...)
> **L06:** ângulos internos e os externos. Porque aqui é o teorema dos ângulos internos ou externos né? E alterno. Entre duas retas paralelas...
> **L01:** Meu Deus do céu... coisas que a gente já viu e não lembra... eu sei que é um teorema, mas eu não lembro a demonstração exata. Mas é justamente um teorema.
> **L06:** porque ele fala que $p = a$ e $q = c$, vai ser do ângulo alterno interno.
> (...)
> **L01:** suplementar esse aqui... complementar...
> **L06:** hum... ângulos suplementares e complementares. É. Suplementar é esse aqui que forma 180º e complementar é que forma 90º.
> **L01:** ângulos opostos é?
> **L06:** não... um ângulo completa o outro.
> **L01:** não... complementar é esse aqui... eu tenho duas retas paralelas...
> **L06:** com uma linha intersectando.
> **L01:** com uma transversal... os ângulos opostos são congruentes.
> **L06:** é, são congruentes.
> **L01:** é oposto que se fala né?
> **L01:** é, oposto.
> **L01:** tem certeza?
> **L06:** unhum. Esse é o oposto desse.
> **L01:** não, não. Pode riscar nem muito né?
> **Pesquisadora:** pode, pode sim. Mas não apague.
> **L01 faz o desenho na figura.**
> **L06:** aqui é oposto. Né isso? Nesse caso aqui.
> **L01:** então, como se eu transferisse esse ângulo aqui vai ser o mesmo. O ângulo dessa reta que intercepta em relação à AC vai ser o mesmo, como elas são paralelas, vai ser o mesmo. Logo esse ângulo aqui é oposto a *a*, que o ângulo *p* vai ser igual a *a*. Você entendeu mais ou menos?
> **L06:** unhum.
> **L01:** E esse aqui vai ser igual a esse. Porque esse aqui vai ser *c* e vai ser igual a *q*, porque são ângulos opostos. (...) os ângulos opostos sempre são iguais. Aí pode colocar assim.

Na entrevista conversamos com a dupla sobre algumas colocações da resposta desse item, mas eles não se lembravam dos conceitos que envolviam a questão, como também não lembravam da discussão que fizeram no momento da resolução. A pesquisadora disse os nomes dos ângulos e eles se lembraram quais se tratavam. Segue o extrato da entrevista:

> **Pesquisadora lê a resposta da letra a, da atividade 2:** por que... você chegou daqui até ver que os ângulos são opostos? Quais ângulos são opostos? Leiam novamente para ver se vocês lembram.
> **L01:** pior que eu não lembro mais não... o ângulo *a* é oposto ao ângulo *p*.
> **Pesquisadora:** é, isso. Aí como foi que você viu que esse *a* aqui é o mesmo que desse daqui debaixo?
> **L01:** porque essa reta aqui tem o segmento AC, paralela à reta *u*.
> **Pesquisadora:** sim.
> **L01:** então qualquer reta que interceptar as duas, vai formar o mesmo ângulo.
> **Pesquisadora:** que ângulo é esse?
> **L01:** esqueci agora professora. Esqueci.
> **Pesquisadora:** L06 tinha dito durante a discussão um outro nome, de outro jeito. Eu pensei que vocês tinham escrito.
> **L06:** foi?
> **Pesquisadora:** foi... você tinha dito que esse e esse são... você lembra?
> **L06:** suplementares... não... complementares?
> **Pesquisadora:** não...
> **L06:** vou chutando até acertar.
> **Pesquisadora:** você falou em alternos internos.
> **L06:** internos... foi... que disse que tinha visto... não lembrava...
> **Pesquisadora:** pronto... poderia ser esse conceito.
> **L06:** que eles são alternos internos né?
> **Pesquisadora:** sim, mas esse que vocês fizeram também está certo. Também pode ser por esse. Mas esse ângulo aqui é igual a esse porque eles são correspondentes.
> **L01:** correspondentes.
> **Pesquisadora:** é...
> **L01:** era essa palavrinha que estava tentando lembrar.
> **Pesquisadora:** por esse aqui ser oposto pelo vértice, aí são congruentes.
> **L01:** isso. Acertou. Parabéns professora.

A Dupla 03 (Figura 46) também afirma que os ângulos são opostos pelo vértice e por isso são congruentes. Contudo não fazem nenhuma construção para verificação dessa afirmação. Além disso, não há discussão, pois L08 concorda com a fala de L07.

Figura 46 - Resposta da dupla 03 ao item *a* da atividade 2



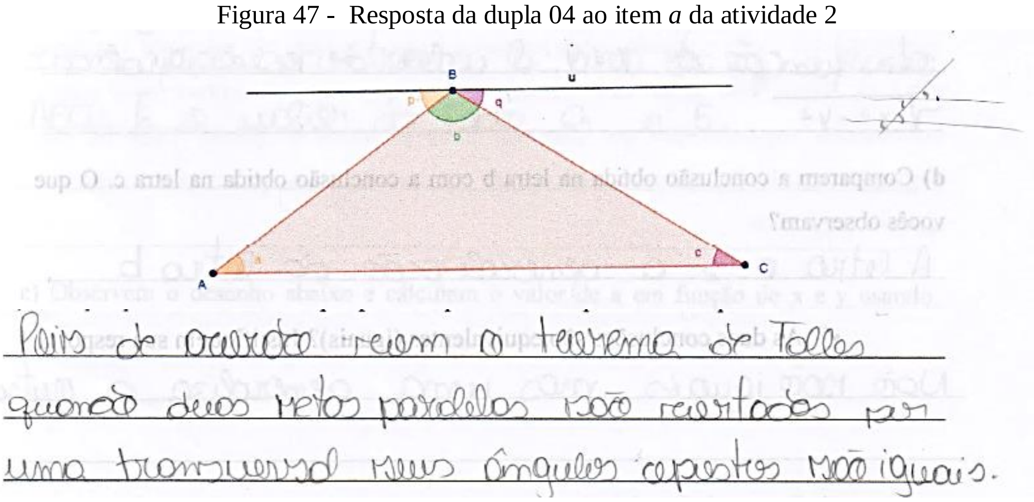
Fonte: dados da pesquisa

Utilizamos a entrevista para verificar a afirmação feita nesse item, contudo também não conseguimos chegar a uma resposta convincente, pois os licenciandos não se lembravam dos conceitos que envolviam esses ângulos. Além disso, a pesquisadora não conseguiu realizar um diálogo satisfatório a fim de estimular o raciocínio dos sujeitos, uma vez que eles foram veementes ao afirmarem que não lembravam de jeito nenhum e que tinha dado aula recentemente sobre esses ângulos, mas que não lembravam e que era uma vergonha.

Percebemos então que os licenciandos não se estimulam em desenvolver o pensamento, utilizando como justificativa não lembrarem dos conceitos. Além disso, esses licenciandos estavam no 9º período e afirmavam que lembravam que o professor de Tópicos em Geometria I havia ensinado esses conceitos, como também tinham ministrado esse assunto recentemente, mas que não se lembravam mais.

A Dupla 04 (Figura 47) também afirma que são opostos pelo vértice, utiliza o conceito de teorema de Tales e faz a construção de uma figura ao lado da que está na atividade. Inferimos que, para chegarem na afirmativa de ângulos opostos pelo vértice, eles utilizam o conceito de ângulos correspondentes. Contudo, isso não é indicado na resposta e por conta disso fizemos a entrevista para saber os conhecimentos envolvidos.

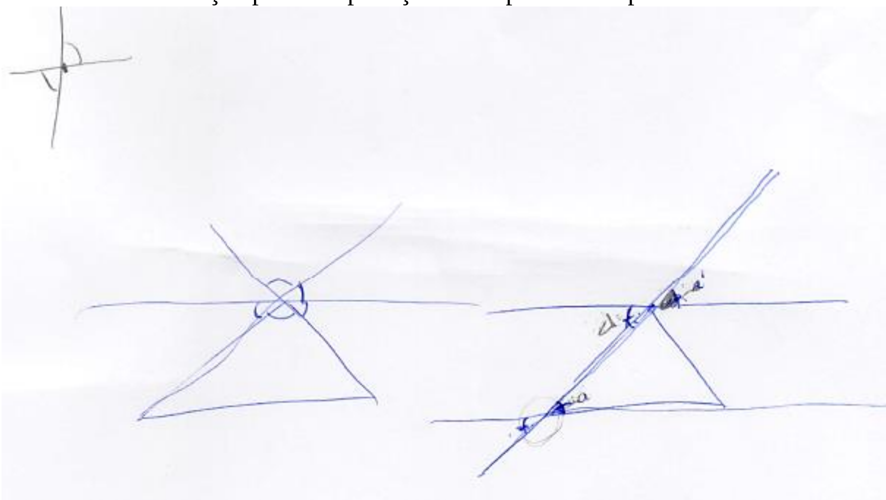
Figura 47 - Resposta da dupla 04 ao item *a* da atividade 2



Fonte: dados da pesquisa

Durante a resolução, os licenciandos estão sempre dizendo que se tratava do teorema de Tales, o qual afirma que “se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra” (DOLCE e POMPEO, 1993, p. 185). Contudo, esse assunto não diz respeito a esse teorema, mas sim ao teorema das retas paralelas cortadas por uma transversal, tratando sobre as propriedades dos ângulos correspondentes, alternos (internos e externos) e colaterais (internos e externos). Na entrevista, os licenciandos fizeram novamente uma figura (Figura 48) para confirmar que se tratam de ângulos opostos pelo vértice, contudo durante a explicação eles não abordam os outros ângulos envolvidos nessa construção.

Figura 48 - Nova construção para a explicação da resposta da dupla 04 ao item *a* da atividade 2



Fonte: dados da pesquisa

Somente após o estímulo e a resposta da pesquisadora, eles conseguem lembrar dos conceitos envolvidos. Segue o extrato da entrevista:

> **L02:** vou fazer de novo...
> **Pesquisadora:** não, só me explique.
> **L02:** aí aqui não é o *a*, que ele fala.
> **Pesquisadora:** isso...
> **L02:** e aqui é o *p*... o *p* é aqui...
> **Pesquisadora:** isso.
> **L02:** a gente fez aqui como se fossem duas retas cortadas por esse aqui...
> **Pesquisadora:** sim...
> **L02:** aí esse é a mesma coisa desse...
> **Pesquisadora:** por que?
> **L02:** pelo teorema.
> **Pesquisadora:** por que são... por que são iguais?
> **L02:** eita, e agora? E agora? Eu não lembro mais, professora. Eu sei que são...
> **Pesquisadora:** são.
> **L02:** né?!
> **Pesquisadora:** mas por que?
> **L02:** eles são iguais... porque eu não sei se é o teorema ou a gente pode dizer assim direto que é pelo teorema de Pitágoras... de Pitágoras... de Tales né? É de Tales?
> **Pesquisadora:** pelos ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.
> **L02:** sim...
> **Pesquisadora:** unhum.
> **L02:** aí esse é a mesma coisa desse... e esse aqui é oposto a esse...
> **Pesquisadora:** unhum.
> **L02:** então eles são iguais.
> **Pesquisadora:** por que esse é igual a esse? (indicando *a* e *a'*)
> **L02:** é esse aqui que é igual a esse (indicando *p* e *a'*)... porque se esse aqui é igual a esse (*a* e *a'*), e esse é oposto a esse (*p* e *a'*), então...
> **Pesquisadora:** sim, mas por que esse e esse são iguais? (indicando *a* e *a'*)
> **L02:** sim, porque eles também não estão cortados.
> **Pesquisadora:** eu quero o nome do ângulo.
> **L02:** é... eu não lembro não...
> **Pesquisadora:** aqui...
> **L02:** certo...
> **Pesquisadora:** se aqui é *a*, aqui também é *a*.
> **L02:** é...

Pesquisadora: foi por isso que vocês viram que *p* é igual a *a*.
L02: isso, exato... exatamente
Pesquisadora: então, por que aqui é *a* e aqui também é *a*?
L02: aí a senhora está querendo um nome que eu não me lembro.
Pesquisadora: você lembra dos tipos de ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal?
L02: opostos pelo vértice.
Pesquisadora: também... mas tem outros... eu tenho aqui duas retas paralelas cortadas por uma transversal...
L02: certo.
Pesquisadora: no caso aqui eu formo quatro ângulos né?
L02: é.
Pesquisadora: aqui também.
L02: é.
Pesquisadora: a gente pode comparar esses ângulos, tendo três nomenclaturas... para esses tipos de ângulos...
L02: complementar, suplementar... é não?
Pesquisadora: não...
L02: juro que eu não me lembro... porque a gente não escreveu, a gente só fez isso aqui oh...
Pesquisadora: foi...
L02: não me lembro não...
Pesquisadora: vou só dizer os nomes dos três e vamos ver se sai...
L02: certo...
Pesquisadora: correspondentes, alternos e colaterais.
L02 e L03: eita... correspondentes...
Pesquisadora: por que *a*... esse ângulo aqui é congruente a esse?
L02: porque é o correspondente?
Pesquisadora: e por que *a* é igual a *p*? (indicando os alternos internos)
L02: aí tem que ser um nome desses?
Pesquisadora: não, eu vou esperar...
L02: não... é oposto... aí na minha lógica está aqui é porque são opostos.
Pesquisadora: não, eles não são opostos, não é?! Eles são opostos aqui. (indicando *p* e *a'*).
L02: não... exato... exato... e esse daqui não é correspondente a esse aqui.
Pesquisadora: é... mas se eu comparar aqui eles não são opostos...
L02: sim, sim.
Pesquisadora: aqui é outra nomenclatura.
L02: congruentes, é?
Pesquisadora: não, eles são congruentes...
L02: é um nome desses daí é?
Pesquisadora: é...
L02: alternos...
Pesquisadora: você está chutando?
L02: estou, porque eu não lembro. Isso aí faz muito tempo que eu vi, eu não lembro não.
Pesquisadora: são alternos...
L02: alternos certo.
Pesquisadora: um está de um lado e o outro está do outro. Aí são alternos internos... por conta disso eles são congruentes... ou poderia usar isso que vocês fizeram... e que no caso foi por isso que eu perguntei por que eles são opostos... eles são opostos porque esse ângulo e esse são correspondentes... e aí eu tenho os...
L02 e L03: é isso aí, exato... é... tanto é que a gente fez numa folhinha que *a*, *a'*. Aí depois que *a'* é igual a *a*.
Pesquisadora: foi.
L02 e L03: pronto... é isso aí.

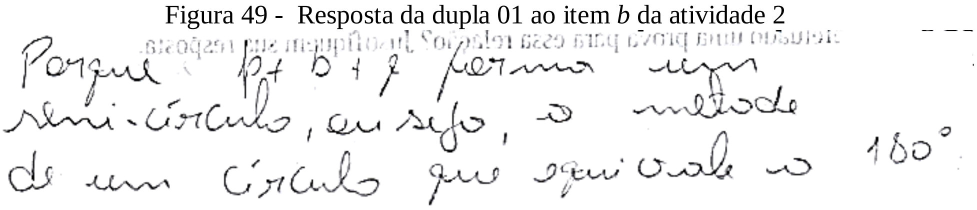
O diálogo foi bastante proveitoso, embora os licenciandos tenham chutado as respostas e acabaram acertando. Notamos que L02 se encontrava no 10º período do curso e L03 no 8º, consequentemente eles afirmaram que não lembravam mais dos assuntos, mas isso não foi impedimento para estabelecermos um diálogo e conseguirmos estimular o raciocínio deles a partir dos questionamentos feitos.

A partir das justificativas, inferimos que L05 e as Duplas 01, 02, 03, 04 e 05 se encontram, nesse item, entre os níveis 2 e 3 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois já são capazes de usar e reconhecer propriedades matemáticas, podendo estabelecer relações lógicas entre elas, contudo ainda não entendem a estrutura axiomática da Matemática. Por conta disso, eles utilizaram como resposta o que foi discutido na análise *a priori* a partir da Figura 42, reconhecendo que os ângulos são congruentes porque ou são ângulos alternos internos (Figura 42a) ou utilizam os conceitos de ângulos correspondentes e ângulos opostos pelo vértice (Figura 42b). O que corrobora as ideias apresentadas por Oliveira (2012) ao afirmar que licenciandos podem oscilar de um nível para outro na mesma atividade.

No item *b)*, a pergunta era: *Por que podemos afirmar que p + b + q = 180º? Justifiquem sua resposta*. Percebemos que a maioria dos licenciandos afirmou que a soma das medidas desses três ângulos é igual a 180º porque são ângulos suplementares, ou porque estão em um semi-plano, ou porque formam um semicírculo.

A Dupla 01 (Figura 49) afirmou que vale 180º porque formam um semicírculo e, consequentemente, vale metade de um círculo. Durante a resolução, L11 afirma que é porque forma um semicírculo, enquanto que L10 afirma que é porque formam um ângulo raso. Os licenciandos agrupam as duas respostas, chegando a conclusão que é metade de um círculo.

Figura 49 - Resposta da dupla 01 ao item *b* da atividade 2


Porque p + b + q formam um semi-círculo, ou seja, a metade de um círculo que equivale a 180°.

Fonte: dados da pesquisa

Já a Dupla 02 (Figura 50) afirma que a reta *u* divide o plano em dois semi-planos e que por isso cada um vale 180º. Durante a resolução desse item, L06 lê o que se pede e diz que L01 já tinha comentado a respeito disso e que vai colocar a resposta com as suas palavras. Não questionamos a resolução na entrevista, pois consideramos correta a justificativa para a igualdade.

Figura 50 - Resposta da dupla 02 ao item *b* da atividade 2

VEJA QUE A RETA u DIVIDE O PLANO EM DOIS SEMI-PLANOS LOGO, DE CADA LADO DA RETA EXISTEM 180°, DAÍ CONCLUIMOS QUE A SOMA DOS ÂNGULOS p, b E q É IGUAL A 180°.

Fonte: dados da pesquisa

O licenciando 05 (Figura 51) conclui que $p + b + q = 180º$, porque são ângulos suplementares. Não questionamos a resolução na entrevista, pois consideramos a resposta correta.

Figura 51 - Resposta de L05 ao item *b* da atividade 2

Porque são suplementares. A soma deles três é igual a 180°.

Fonte: dados da pesquisa

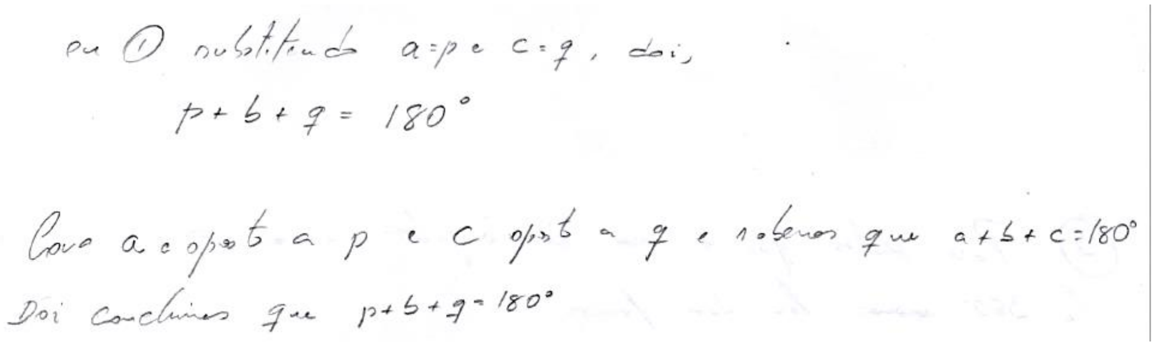
A Dupla 03 (Figura 52) utiliza a própria finalização da prova para confirmar que vale 180º, contudo eles não justificam o porquê essa afirmação é verdadeira. Não há discussão durante a resolução desse item, uma vez que L08 concorda com a escrita de L07. A partir da folha de rascunho, confirmamos que os licenciandos utilizaram a finalização da prova para comprovar que a soma das medidas dos ângulos *p*, *b* e *q* vale 180º.

Figura 52 - Resposta da dupla 03 ao item *b* da atividade 2

Como a é oposto a p e c oposto a q e sabemos que $a+b+c=180°$, Daí concluimos que $p+b+q=180°$

(b) (i)

Sabemos que $a+b+c=180°$ e Também $p=a$ e $q=c$ daí, Mostramos que $p+b+q=180°$



em ① substituindo $a = p$ e $c = q$, dai,
$p + b + q = 180°$

Como a é oposto a p e c oposto a q e sabemos que $a + b + c = 180°$
Dai concluimos que $p + b + q = 180°$

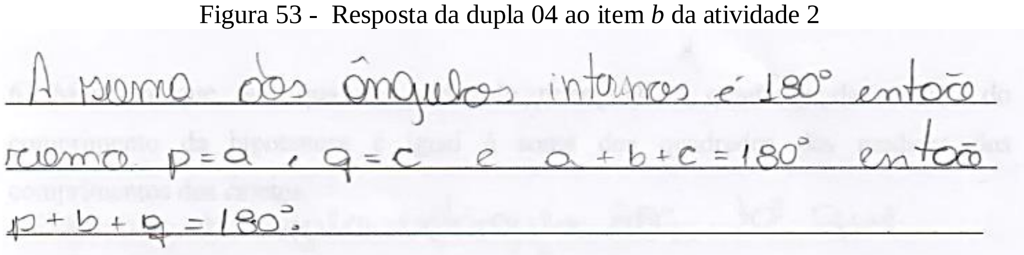
Fonte: dados da pesquisa

Na entrevista, buscamos verificar se eles também percebem que a soma vale 180º pois os ângulos são suplementares. Os licenciandos afirmaram que vale porque formam um ângulo raso. Consideramos as duas respostas corretas, contudo gostaríamos que eles tivessem justificado a partir de outros conceitos e não por meio da finalização da prova dada na atividade. Segue o extrato da entrevista:

> **Pesquisadora:** a pergunta era assim... por que podemos afirmar que *p + b + q = 180º*?
> **L07:** porque formam um ângulo raso.
> **Pesquisadora:** isso.
> **L07:** e eu disse o que?
> **Pesquisadora lê o que L07 escreveu.**
> **L07:** não é isso não?
> **Pesquisadora:** também... mas a resposta era só a primeira mesmo...
> **L07:** só? Ah...

A Dupla 04 (Figura 53) resolve da mesma forma que a Dupla 03, utilizando a finalização da prova para comprovar que a igualdade é verdadeira, contudo não justifica a resposta. Durante a resolução desse item, L03 afirma que formam 90º, enquanto que L02 afirma que não é verdade, porque a soma das medidas dos três ângulos é igual a 180º. Na entrevista, os licenciandos também afirmaram que vale 180º pois formam um ângulo raso.

Figura 53 - Resposta da dupla 04 ao item *b* da atividade 2

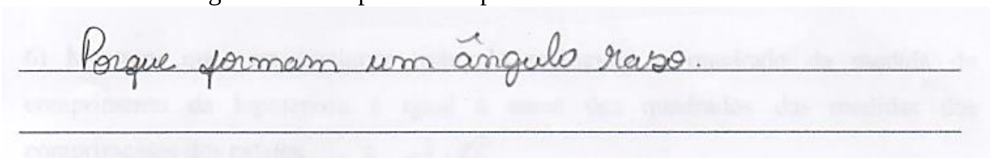


A soma dos ângulos internos é 180° então
como $p = a$, $q = c$ e $a + b + c = 180°$ então
$p + b + q = 180°$.

Fonte: dados da pesquisa

A Dupla 05 (Figura 54) também afirma que *p + b + q = 180º* porque formam um ângulo raso. Não questionamos a resolução na entrevista, pois consideramos a resposta correta.

Figura 54 - Resposta da dupla 05 ao item *b* da atividade 2



Porque formam um ângulo raso.

Fonte: dados da pesquisa

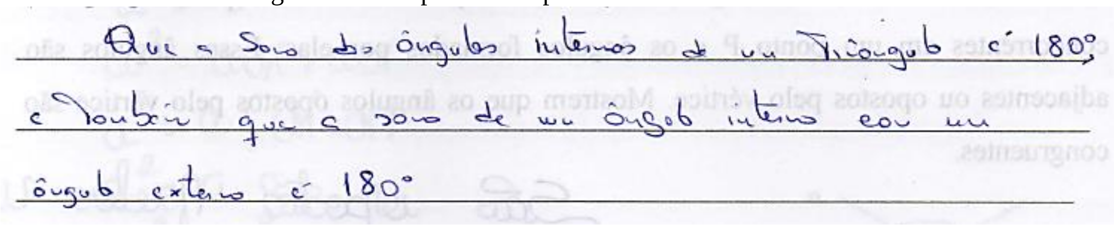
A partir das justificativas, inferimos que L05 e as Duplas 01, 02, 03, 04 e 05 se encontram, nesse item, entre os níveis 2 e 3 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois já são capazes de usar e reconhecer propriedades matemáticas, podendo estabelecer relações lógicas entre elas, contudo ainda não entendem a estrutura axiomática da Matemática. Por conta disso, eles utilizaram como justificativa para a soma das medidas dos ângulos *p*, *b* e *q* ser igual a 180º os conceitos de ângulos suplementares, ângulo raso, estão em um mesmo semiplano ou formam um semicírculo. Permanecendo assim, em itens parecidos, no mesmo nível, uma vez que conseguem observar as figuras geométricas, sabendo utilizar e reconhecer as propriedades matemáticas presentes nelas.

No item *c)*, a pergunta era: *O que podemos concluir com essa prova?* A partir das resoluções dos licenciandos, percebemos que a maioria concluiu que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale sempre 180º. Alguns licenciandos misturaram a resposta desse item com as respostas dos itens anteriores, o que nos levou a questiona-los durante a entrevista, a fim de entendermos o que eles realmente queriam dizer.

A Dupla 01 conseguiu perceber corretamente que a prova apresentada na atividade conclui que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Durante a resolução, L11 faz a leitura do item e de imediato afirma que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º, L10 concorda e anota a resposta na atividade. O licenciando 05 também conseguiu perceber corretamente que a prova apresentada na atividade 2 conclui que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale 180º.

A Dupla 03 (Figura 55) também conseguiu perceber que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º, assim como afirmou que a soma da medida de um ângulo interno com a medida do seu ângulo externo vale 180º.

Figura 55 - Resposta da dupla 03 ao item *c* da atividade 2


Que a Soma dos ângulos internos de um Triângulo é 180°,
e também que a soma de um ângulo interno com um
ângulo externo é 180°

Fonte: dados da pesquisa

Na entrevista, questionamos se os licenciandos tinham percebido essa segunda afirmação também pela prova, mas L07 afirmou que se trata de um conceito já conhecido e ele quis colocar também na resposta. Entretanto, afirmamos que o item só pedia a conclusão da prova e por isso perguntamos, pois não sabíamos se eles tinham também observado esse detalhe na prova construída na atividade. Segue o extrato da entrevista:

> **Pesquisadora:** aqui, onde foi que você percebeu...
> **L07 lê a questão.**
> **Pesquisadora:** que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º... e também que...
> **L07:** que a soma da medida do ângulo interno com a medida do seu externo é 180º.
> **Pesquisadora:** você percebeu isso aqui?
> **L07:** aí não...
> **Pesquisadora:** porque a pergunta era o que podemos concluir com essa afirmação... Por isso que eu perguntei.
> **L07:** aqui eu não percebi não, eu sabia já.
> **Pesquisadora:** ok então.

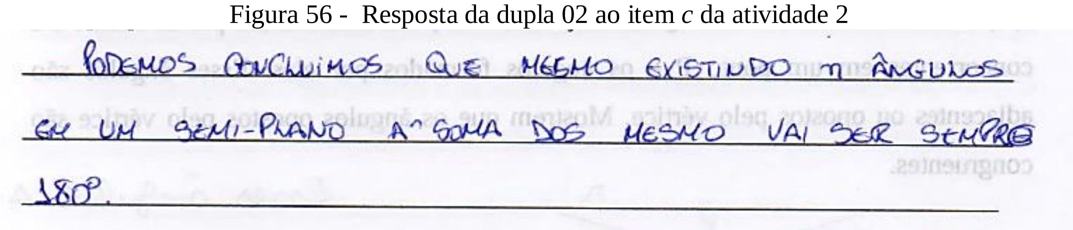
A Dupla 04 também percebeu corretamente que a prova apresentada na atividade conclui que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é 180º. Durante a resolução, os licenciandos não entenderam o que estava sendo pedido no item, porque para eles era algo óbvio. Quando a pesquisadora modifica o questionamento, eles compreendem o que estava sendo pedido e respondem corretamente. Segue o extrato da discussão durante a resolução:

> **L03 faz a leitura do item *c* da atividade 2.**
> **L02:** como assim produção?
> **L03 lê novamente.**
> **Pesquisadora:** o que a prova finaliza... qual a finalização da prova?
> **L02:** que a soma das medidas dos ângulos internos é 180º.
> **Pesquisadora confirma.**
> **L03:** ah...
> **L02:** é porque é tão óbvio...

A partir das justificativas, inferimos que L05 e as Duplas 01, 03 e 04 se encontram, nesse item, entre os níveis 3 e 4 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois já são capazes de fazer deduções e provas informais, como também já podem entender e escrever provas formais, compreendendo que ela é um dos meios de verificar a validade da afirmação de forma genérica. Por conta disso, conseguem concluir corretamente que a prova apresentada na atividade diz respeito a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ser sempre 180º.

Já a Dupla 02 (Figura 56) concluiu que, caso exista *n* ângulos em um semi-plano, a soma deles será sempre 180º. O que nos leva a inferir que os licenciandos não compreenderam o que estava sendo pedido no item e por isso aliou a sua resposta com a resposta dada ao item *b*. Além disso, durante a resolução, percebemos que L06 faz a leitura do item e afirma que se deve comparar o item *a* com o item *b*.

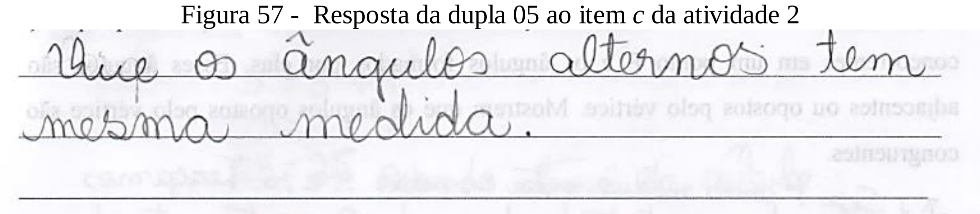
Figura 56 - Resposta da dupla 02 ao item *c* da atividade 2


PODEMOS CONCLUIMOS QUE MESMO EXISTINDO m ÂNGULOS EM UM SEMI-PLANO A^ SOMA DOS MESMO VAI SER SEMPRE 180º.

Fonte: dados da pesquisa

A Dupla 05 (Figura 57) também utilizou a resposta do item *a* para responder a esse item e afirmou que os ângulos alternos têm a mesma medida, contudo no item *a* os licenciandos afirmaram que os ângulos alternos internos complementam o outro.

Figura 57 - Resposta da dupla 05 ao item *c* da atividade 2


que os ângulos alternos tem mesma medida.

Fonte: dados da pesquisa

Com a entrevista, buscamos entender o que eles queriam dizer com a resposta e percebemos que eles também não tinham entendido o que estava sendo pedido no item e, consequentemente, misturaram as respostas dos itens anteriores com a resposta desse item. Além disso, afirmaram que o não entendimento diz respeito à fome e ao horário que estava sendo feito as atividades. Entretanto, ao lermos a finalização da prova, eles conseguiram concluir corretamente o que estava sendo pedido no item. Segue o extrato da entrevista:

> **Pesquisadora:** essa prova aqui... conclui o que?
> **L09:** mulher, como a senhora é difícil... faça outras perguntas...
> **Pesquisadora lê a finalização da demonstração:** como *p* mais *b* mais *q* é 180º, a gente conclui que *a* mais *b* mais *c* é igual a 180º. E essa conclusão é o que?
> **L09:** a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo?
> **Pesquisadora:** é?
> **L09:** 180º.
> **Pesquisadora:** isso.
> **L09:** aí a gente não colocou não?

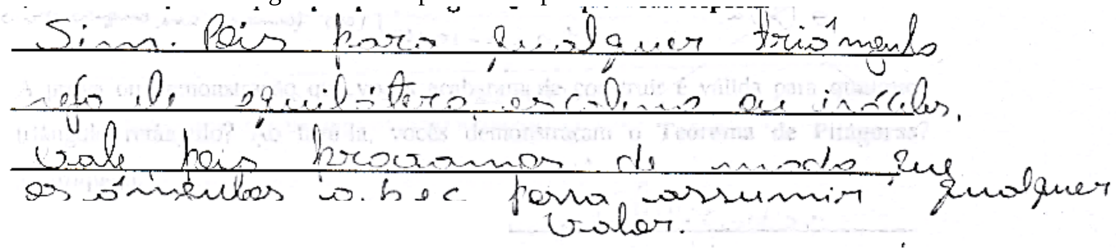
Pesquisadora: não... vocês colocaram que os ângulos alternos têm mesma medida.
L09: ah mulher, foi porque a gente não entendeu a pergunta...
Pesquisadora: está vendo que aqui vocês dizem que eles são congruentes... Porque...
L04: porque tem a mesma medida.
Pesquisadora: porque são congruentes... E aqui vocês dizem que eles são... que um complementa o outro...
L09: complementa o outro...
Pesquisadora: isso...
L09: foi a fome... era o horário...

A partir das justificativas apresentadas pelas Duplas 02 e 05, inferimos que elas se encontram, nesse item, entre os níveis 1 e 2 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall’Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois não entenderam o que estava sendo pedido no item, mas compreenderam que existem outros conceitos que os ajudaram a concluir a prova de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale 180º. O que corrobora as ideias apresentadas por Oliveira (2012) ao afirmar que os licenciandos podem oscilar de um nível para outro na mesma atividade. Além disso, nos leva a inferir também que quando eles estão apressados com horário ou quando estão com fome, não há uma concentração maior na hora da resolução das atividades e consequentemente não leem direito, não entendendo o que está sendo pedido nos itens.

No item *d)*, a pergunta era: *Essa afirmação vale para qualquer triângulo? Justifiquem sua resposta.* A partir das resoluções dos licenciandos, percebemos que a maioria concluiu corretamente que a prova feita na atividade vale para qualquer triângulo, uma vez que não foi utilizado triângulos específicos ou medidas de ângulos específicas. Percebemos que eles compreendem que exemplos não constituem efetivamente uma justificativa para uma afirmação e por isso é necessário a generalização. Além disso, notamos que, embora os sujeitos pesquisados não conheçam a diferença entre as palavras *prova* e *demonstração*, eles conseguem distinguir corretamente casos particulares de casos genéricos, ao analisarem a estrutura de uma prova.

A Dupla 01 (Figura 58) afirmou que vale para todo triângulo, uma vez que a prova apresentada na atividade considera ângulos *a*, *b* e *c*, podendo assumir qualquer valor. Além disso, os licenciandos observaram que poderiam considerar qualquer triângulo, já que os ângulos poderiam assumir quaisquer medidas.

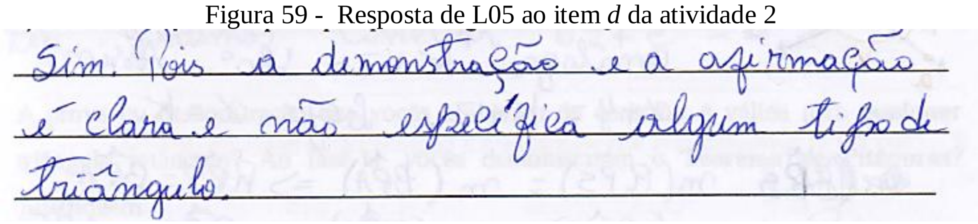
Figura 58 - Resposta da dupla 01 ao item *d* da atividade 2


Sim. Pois para qualquer triângulo seja ele equilátero, escaleno ou isósceles. Vale pois provamos de modo que os ângulos a, b e c pode assumir qualquer valor.

Fonte: dados da pesquisa

O licenciando 05 (Figura 59) também afirma corretamente que vale para qualquer triângulo, pois a prova não utiliza um tipo específico de triângulo e sim um triângulo qualquer.

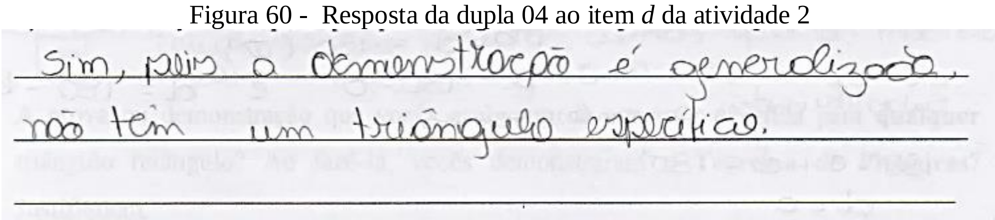
Figura 59 - Resposta de L05 ao item *d* da atividade 2


Sim. Pois a demonstração e a afirmação é clara e não especifica algum tipo de triângulo.

Fonte: dados da pesquisa

A Dupla 04 (Figura 60) também afirmou que valia sim para qualquer triângulo, pois a prova é generalizada e não foi utilizado um triângulo específico. A partir das filmagens, percebemos que os licenciandos compreenderam que a prova apresentada na atividade diz respeito a um caso geral desse teorema.

Figura 60 - Resposta da dupla 04 ao item *d* da atividade 2


Sim, pois a demonstração é generalizada. não tem um triângulo específico.

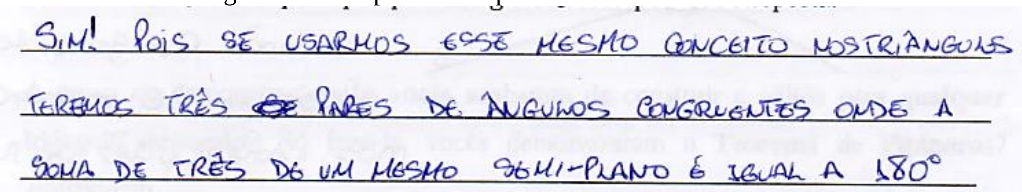
Fonte: dados da pesquisa

Percebemos que L05 e as Duplas 01 e 04 compreendem a importância da generalização, uma vez que, ao considerarmos um triângulo qualquer com seus ângulos internos possuindo medidas quaisquer, estaremos provando dedutivamente que a soma das medidas de seus ângulos internos vale sempre 180º. A partir dessas justificativas, inferimos que L05 e as Duplas 01 e 04 se encontram, nesse item, entre os níveis 3 e 4 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois esses licenciandos já são capazes de fazer deduções e provas informais, como também já podem entender e escrever provas formais, compreendendo que ela é um dos meios de verificar a validade da afirmação de forma genérica. O que corrobora as ideias apresentadas por Oliveira

(2012) ao afirmar que os licenciandos podem oscilar de um nível para outro na mesma atividade.

Já Dupla 02 (Figura 61) utiliza a resposta dada ao item *c* e afirma que vale para todo triângulo, pois se utilizarmos esse mesmo conceito nos triângulos, perceberemos que existem três pares de ângulos congruentes e assim inferiremos que esses três ângulos formados no semi-plano valem 180º.

Figura 61 - Resposta da dupla 02 ao item *d* da atividade 2


SIM! POIS SE USARMOS ESSE MESMO CONCEITO NOS TRIÂNGULOS TEREMOS TRÊS PARES DE ÂNGULOS CONGRUENTES ONDE A SOMA DE TRÊS DE UM MESMO SEMI-PLANO É IGUAL A 180°

Fonte: dados da pesquisa

Percebemos que eles não concluíram corretamente a finalização da prova, mas compreendem que existe outros conceitos envolvidos na prova de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale 180º. Além disso, notamos que durante a resolução do item *d*, os licenciandos conseguem concluir que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º, porém na escrita das respostas aos itens, eles utilizam os conceitos envolvidos na prova. Segue a discussão durante a resolução desse item:

> **L06:** e a letra *d*?
> **L01:** estou lendo.
> **L06:** sim, pois todas as somas das medidas dos ângulos internos é 180º... né isso?
> **L01:** eu já fiz a demonstração disso, só que eu não lembro. (...) no caso, as medidas dos três ângulos de um triângulo dão 180º.
> **L06:** de qualquer um?
> **L01 confirma.**

Inferimos que a Dupla 02 se encontra, nesse item, entre os níveis 1 e 2 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois há um equívoco na conclusão dos itens *c* e *d* e que embora compreendam que a prova apresentada na atividade diz respeito ao teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, os licenciandos não conseguiram concluir que essa prova foi feita dedutivamente, valendo para qualquer triângulo. O que corrobora as ideias apresentadas por Oliveira (2012) ao afirmar que licenciandos podem oscilar de um nível para outro na mesma atividade.

A Dupla 03 (Figura 62) também conseguiu perceber que vale para qualquer triângulo, contudo eles utilizaram o próprio conceito para justificar que é verdadeiro. Ou seja, eles justificaram que, em qualquer triângulo, a soma das medidas de seus ângulos internos é 180º.

Durante a resolução, percebemos que eles sempre estavam enfatizando que não precisavam provar as afirmações, pois já sabiam que era verdadeiro. Essa reação é observada em alunos que se encontram do nível 3 ou abaixo, segundo Jaime e Gutiérrez (1990), uma vez que, quando o professor pede para eles mostrarem determinada propriedade, eles o repreendem questionando o motivo de se provar, uma vez que já sabem que é verdade.

Figura 62 - Resposta da dupla 03 ao item *d* da atividade 2

Sim. Pois em qualquer Triângulo a Soma dos
seus ângulos internos é igual a 180°

Fonte: dados da pesquisa

Percebemos que esses licenciandos compreendem a importância de uma prova formal e de uma demonstração na Matemática, contudo consideram que para seus alunos isso não é importante, pois eles não se interessam em saber de onde veio as fórmulas. Além disso, entendemos que eles compreendem que exemplos não constituem efetivamente uma justificativa para uma afirmação e por isso é necessário a generalização. Entretanto, em alguns momentos, não há consideram importante, pois já sabem que vale.

A Dupla 05 (Figura 63) também afirmou que vale para qualquer triângulo utilizando o próprio conceito. Ou seja, os licenciandos justificaram que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º e que ao juntarmos com as medidas dos ângulos exteriores teremos um ângulo total de 360º.

Figura 63 - Resposta da dupla 05 ao item *d* da atividade 2

Sim, Pois a soma dos ângulos interno do triângulo é
180°. e as parte exterior é complementar formando
assim o ângulo total de 360°.

Fonte: dados da pesquisa

Com a entrevista, percebemos que eles utilizam o conceito da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero para afirmarem que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale 180º. Além disso, infere-se que os licenciandos também não compreenderam que a justificativa podia ser feita a partir de afirmativas como as outras duplas fizeram, uma vez que eles estavam compreendendo que a justificativa deveria ser feita a partir de uma prova. Contudo, isso deveria ser feito apenas no item *e*. Segue o extrato da entrevista:

> **Pesquisadora:** essa afirmação vale para qualquer triângulo?
> **L09:** é válida, mas aí para lembrar... porque... porque... eu não lembrava direito. Está certo ou errado isso aí? Eu sei que um triângulo é a metade de um quadrado, aí por definição... se no quadrado a soma dos internos dá 360º... o triângulo é 180º. Qualquer triângulo... só que um vai ser maior, outro vai ser menor, vai ser igual.... agora para provar eu não...
> **Pesquisadora:** não, era só para justificar...
> **L09:** só isso?
> **Pesquisadora:** sim... vale para qualquer triângulo?
> **L09:** vale... é válido.

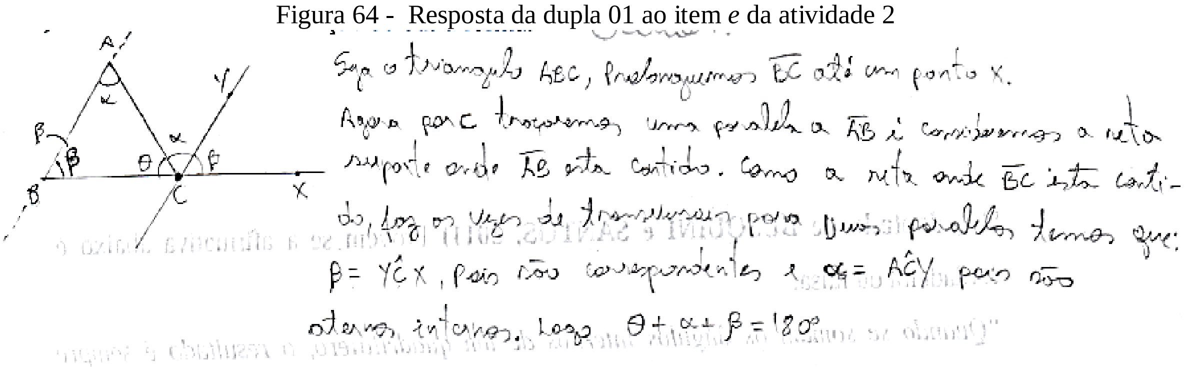
A partir das justificativas apresentadas pelas Duplas 03 e 05, inferimos que elas se encontram, nesse item, entre os níveis 2 e 3 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), pois, embora não tenham justificado de forma correta, os licenciandos compreendem a importância da generalização e sabem que a prova apresentada na atividade é válida para qualquer triângulo. O que corrobora as ideias apresentadas por Oliveira (2012) ao afirmar que licenciandos podem oscilar de um nível para outro na mesma atividade.

No item *e*, pedíamos que: *Provem essa afirmação de outra forma.* Ou seja, aqui eles deveriam provar o teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo diferente da que foi apresentada no enunciado da atividade. Durante a resolução desse item, percebemos que muitos licenciandos questionavam se precisavam de desenho e que outra forma seria essa, ou seja, muitos não entendiam o que era para ser feito e outros não sabiam se necessitava ou não de desenho para provar tal afirmação.

A Dupla 01 (Figura 64) elaborou uma prova utilizando conceitos teóricos, contudo não se utilizou efetivamente do rigor e da formalidade inerentes a uma demonstração, uma vez que a demonstração é entendida como estrutura do discurso e o nível de formalização dos conhecimentos que coloca em prática é um ponto crucial. Por isso, consideramos que os licenciandos fizeram uma prova do tipo *experiência mental*. Segundo Balacheff (2000), os alunos, ao utilizarem esse tipo de prova, afirmam a validade de uma proposição de forma genérica e não fazem mais referência a casos particulares, como também a validação é sustentada pela teoria.

Notamos também que esses licenciandos discutem pouco acerca da resolução da atividade, quando a conversa surge, é somente para efetivar a escrita ou resposta para cada item. Além disso, nesse item, L11 fez a prova e L10 concordou com a construção.

Figura 64 - Resposta da dupla 01 ao item *e* da atividade 2

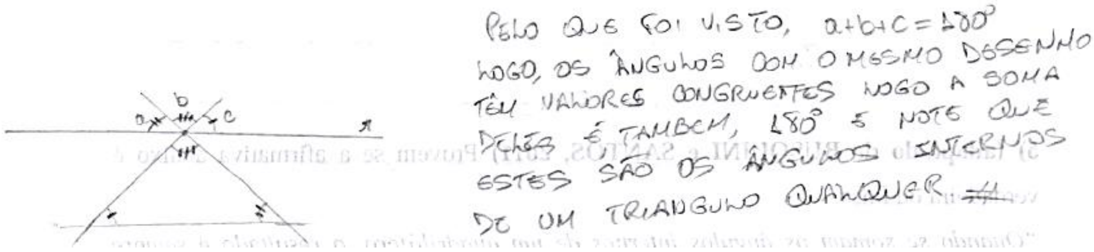


Fonte: dados da pesquisa

A partir disso, inferimos que esses licenciandos já possuem um melhor entendimento das definições e na capacidade de provar a equivalência de diferentes definições do mesmo conceito, assim como já entendem e executam o raciocínio lógico formal e as provas formais possuem significado para eles, pois sabem que é um dos meios de verificar a validade de uma afirmação de forma genérica. De acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), esses licenciandos encontram-se, nesse item, no nível 4 de van Hiele, pois já são capazes de realizar provas matemáticas formais e as figuras são utilizadas apenas algumas vezes para ajudar a escolher as propriedades adequadas para a sua prova.

A Dupla 02 (Figura 65) elabora uma prova utilizando o conceito percebido nos itens anteriores, que a soma das medidas dos ângulos de um semi-plano vale 180º, para verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo mede 180º. A prova construída por eles busca justificativas por meio de conceitos relacionados ao teorema, contudo ainda não diz respeito a uma generalização, ou seja, os licenciandos buscaram uma explicação das razões de validade de uma afirmação a partir de propriedades, características e estruturas envolvidas no teorema, mas eles ainda se utilizam de exemplos práticos para validar a afirmação. Segundo Balacheff (2000), a Dupla 02 construiu uma prova do tipo *exemplo genérico*.

Figura 65 - Resposta da dupla 02 ao item *e* da atividade 2



Fonte: dados da pesquisa

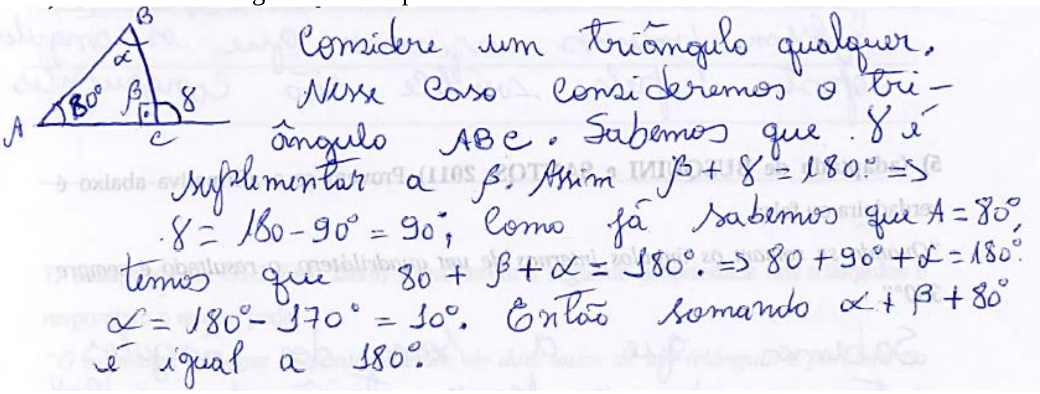
Um fato importante de se notar é que não há um raciocínio lógico formal na construção dessa prova e por isso não a consideramos como *experiência mental*. Além disso, percebemos que, durante a resolução desse item, os licenciandos não sabiam se deviam utilizar desenho para validar a afirmação, como também ficaram na dúvida se a prova construída era diferente da apresentada na atividade. Segue o extrato da discussão:

> **L06 lê o item e da atividade 2.**
> **L01:** tem que desenhar para demonstrar de outra forma?
> **Pesquisadora:** pode...
> **L01 explica.**
> **Pesquisadora:** também.
> **L06:** desenha três retas... igual como você fez antes.
> **L01 e L06 escrevem a resposta.**
> **L01:** não sei se esse é igual a esse...
> **L06:** e agora?

A partir disso, percebemos que a construção da prova feita pela dupla 02 encontra-se na transição entre as *provas pragmáticas* e as *intelectuais*, por isso os licenciandos sabem que buscam por uma generalização, ainda baseada em exemplos, mas procurando justifica-la com os conceitos relacionados ao teorema proposto. Inferimos que os licenciandos já são capazes de fazer tais experimentações, porque já conseguem interpretar e declarar definições, estando conscientes das condições necessárias e suficientes de uma propriedade. Além disso, eles procuram por alguma explicação informal baseada em propriedades matemáticas ou os exemplos utilizados são bem selecionados. De acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), esses licenciandos encontram-se, nesse item, no nível 3 de van Hiele, pois ainda não compreendem as provas formais em sua totalidade, como também não conseguem organizar uma sequência de raciocínio lógico que justifique suas observações, uma vez que não sentem a necessidade de utilizar o raciocínio lógico formal por não entenderem o sistema axiomático da Matemática.

O licenciando 05 (Figura 66) constrói um caso bem particular em sua prova, utilizando um triângulo retângulo para fazer a verificação. Embora ele afirme que se trata de um triângulo qualquer, esse fato não é verdadeiro, pois na sua construção, há valores de dois ângulos internos do triângulo, 80º e 90º. Percebemos, portanto, que se trata de um triângulo retângulo e não de um triângulo qualquer. Além disso, percebemos que L05 se utiliza da própria tese para provar que ela é válida, uma vez que ele afirma que “$80 + \beta + \alpha = 180°$”.

Figura 66 - Resposta de L05 ao item *e* da atividade 2

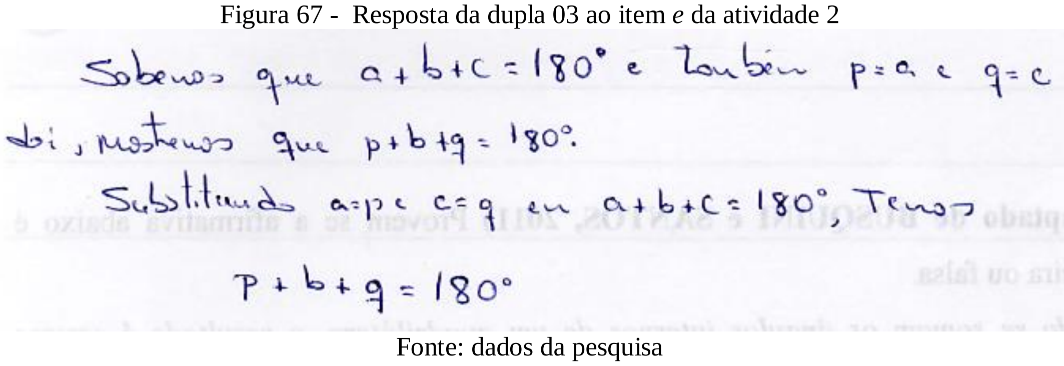


Fonte: dados da pesquisa

A prova construída por L05 diz respeito a *experiência crucial*, pois, segundo Balacheff (2000), o licenciando utiliza um caso especial, geralmente não familiar, como também realiza experiências e começa a tomar consciência de que busca por um resultado geral. Esse tipo de prova difere do *empirismo ingênuo* no sentido de que o indivíduo coloca explicitamente o problema da generalização e o resolve, aventurando-se na execução de um caso que reconhece tão pouco quanto possível.

A Dupla 03 (Figura 67) também constrói uma prova do tipo *experiência crucial*, pois os licenciandos utilizam a finalização da prova apresentada na atividade para verificar a afirmação e por isso consideramos que se trata de um exemplo bem particular. Além disso, os licenciandos utilizam os mesmos conceitos da prova, como também as mesmas letras para os ângulos. Esses licenciandos não construíram desenho para verificarmos efetivamente se utilizaram as mesmas nomenclaturas. Todavia, inferimos que a dupla não provou de forma diferente, uma vez que a construção da prova é igual ao que está na atividade. Ou seja, a prova construída pela dupla não tem explicitação das propriedades e dos conceitos inerentes a ela, como também a dupla utiliza a própria tese para verificar a validade do teorema.

Figura 67 - Resposta da dupla 03 ao item *e* da atividade 2

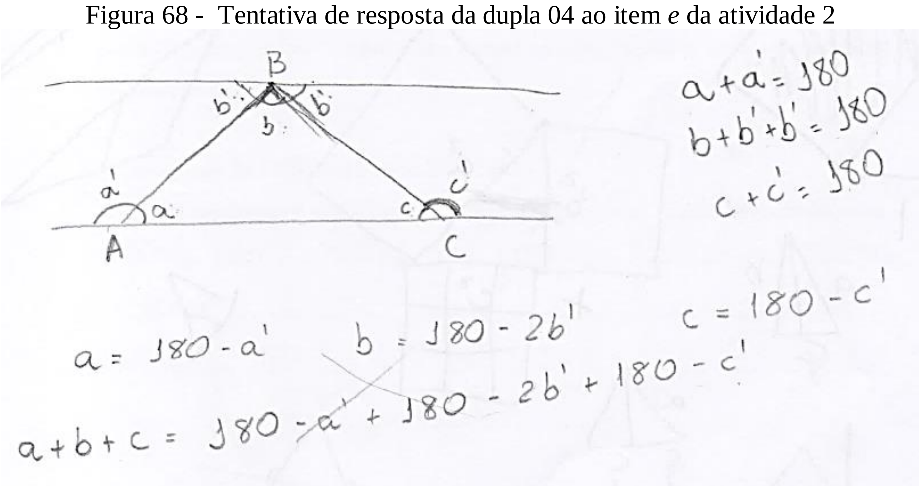


Fonte: dados da pesquisa

Inferimos, portanto, que L05 e a Dupla 03 já buscam uma verificação experimental da verdade da propriedade, utilizando um exemplo bem particular. Além disso, esses licenciandos já começam a fazer esses tipos de experiências porque já reconhecem a figura geométrica com base em suas propriedades matemáticas. Contudo, eles ainda não entendem a estrutura lógica das definições e só são capazes de fornecer provas por meio de exemplos e casos bem particulares. De acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), esses licenciandos encontram-se, nesse item, no nível 2 de van Hiele, pois a prova construída dentro desse nível consiste em alguma verificação experimental por meio de um ou mais casos, como também já são capazes de utilizar e reconhecer propriedades matemáticas, mas ainda sentem dificuldade em estabelecer conexões lógicas entre essas propriedades.

A Dupla 04 (Figura 68) deixou o item *e* em branco. Durante a resolução, percebemos que os licenciandos dialogam bastante sobre a construção dessa prova e até fazem, na folha de rascunho, uma construção de uma prova, mas não surte efeito, pois não sabem como continuar e acabam desistindo. Além disso, consideram que é semelhante a que está na atividade.

Figura 68 - Tentativa de resposta da dupla 04 ao item *e* da atividade 2



Fonte: dados da pesquisa

Com as filmagens, percebemos que L02 tenta dar uma sugestão de uma prova, mas desiste pois não é generalizada. Além disso, os licenciandos enfatizam que não lembram e que não sabem como fazer de uma forma diferente. Segue o extrato do diálogo durante a resolução desse item:

> **L03 lê o item *e* da atividade 2.**
> **L03:** no caso essa daqui?
> **Pesquisadora:** é... que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º. De outra forma, sem ser igual a essa.
> **L03:** você sabe? Eu não lembro não.
> **L02 pega a folha para fazer a prova.**
> (L02 e L03 ficam por um bom tempo tentando construir uma prova, mas não conseguem. Desistem e passam para a atividade 3).
> **L02:** e se pegar... deixa para lá.

Na entrevista, questionamos o motivo de terem deixado o item em branco e eles afirmaram que foi porque eles começaram a desenvolver a prova e quando perceberam, ficou a mesma coisa. Então para eles não adiantava de nada o item pedir para fazer de um jeito diferente e eles fazerem igual. Ou seja, percebe-se que a dupla 04 só lembrou de uma prova para o teorema igual à que foi apresentada na atividade. Além disso, a tentativa de construção da prova não surte efeito, pois não tinha como eles concluírem o que se propuseram a fazer, já que “travaram” após a substituição dos valores para os ângulos *a*, *b* e *c*.

A Dupla 05 também deixou em branco o item *e*. Não temos registro de folha de rascunho, uma vez que os licenciandos não utilizaram, nem extrato dos diálogos estabelecidos durante a resolução, pois eles não permitiram a filmagem ou áudio. Temos as notas de campo que nos permitem inferir que eles deixaram em branco porque não sabiam como fazer, uma vez que não lembravam de uma forma diferente da que foi apresentada na questão, como também não lembravam dos conceitos que podiam envolver essa nova apresentação.

Na entrevista, questionamos o motivo de terem deixado a questão em branco e percebemos que eles realmente não sabiam como elaborar a prova de uma forma diferente, se podia ser desenhando ou tinha que ser teoricamente. Além disso, a partir da entrevista, os licenciandos já haviam dito como provariam, discutido no item anterior, em que L09 afirmou que sabendo que um triângulo é metade de um quadrado e que, por definição, a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrado é 360º, então a do triângulo é 180º. E isso vale para qualquer triângulo, podendo ser maior, menor ou igual. Contudo, esse licenciando afirma que para fazer a construção escrita dessa prova, ele não saberia, mas só sabia de cabeça. Segue o extrato da entrevista:

> **Pesquisadora:** pronto... e aqui? Por que deixou em branco?
> **L09:** porque era prove essa afirmação de outra forma... desenhando?
> **Pesquisadora:** poderia ser... mas era para provar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º...
> **L09:** eu vi essa questão?
> **Pesquisadora:** ... de outra forma, sem ser essa...
> **L09:** aí só se eu fizesse do jeito que eu estava falando... pode fazer agora? Fazia um quadrado, parte no meio... escrito, escrito eu não sei fazer não... sei assim de cabeça...

De acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), as Duplas 04 e 05 encontram-se, nesse item, entre os níveis 1 e 2 de van Hiele, pois não conseguiram construir uma prova para o teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo por não saberem que tipo de forma diferente deveriam fazer, mas também compreendem as propriedades e conceitos contidos no teorema e por isso poderiam utilizar casos particulares e exemplos bem específicos para verificarem a afirmação. O que corrobora as ideias apresentadas por Oliveira (2012) ao afirmar que licenciandos podem oscilar de um nível para outro na mesma atividade. Por conta disso, a sua tentativa de prova e a sua explicação para a elaboração de uma prova, respectivamente, estão dentro das *provas pragmáticas*, segundo Balacheff (2000), pois eles recorreriam a testes de validade, a busca de regularidades, a exemplos ou desenhos para justificar determinado resultado.

De modo geral, percebemos que houve muita oscilação entre os níveis de pensamento geométrico desses licenciandos, em que na mesma atividade, eles se encontravam em níveis diferentes. Ou seja, notamos que a Dupla 01 e L05 oscilaram entre os níveis 2, 3 e 4; as Duplas 02 e 05 entre os níveis 1, 2 e 3; a Dupla 03 oscilou entre os níveis 2 e 3; e a Dupla 04 oscilou entre os níveis 1, 2, 3 e 4. A oscilação pode apontar para o fato de os licenciandos estarem em um momento de transição entre um nível e outro, uma vez que eles já possuem as características do nível mais baixo completas, faltando fortalecer as demais características do nível superior.

Além disso, notamos que, em comparação da atividade 1 para a 2, duas duplas e o licenciando 05 oscilaram de níveis de uma atividade para outra. A Dupla 01, na atividade 1 se encontrava entre os níveis 1, 2 e 3, enquanto que nessa atividade, encontra-se entre os níveis 2, 3 e 4, conseguindo construir provas do tipo *experiência mental*. Já L05, na atividade 1 se encontrava entre os níveis 1 e 2, e nessa atividade encontra-se oscilando entre os níveis 2, 3 e 4, conseguindo construir provas do tipo *experiência crucial*. A Dupla 03, na atividade 1 se encontrava entre os níveis 1, 2 e 3, enquanto que nessa atividade, encontra-se oscilando entre os níveis 2 e 3, conseguindo construir provas do tipo *experiência crucial*. Além disso, em termos comparativos, encontramos que no item *a* da Atividade 1 apenas a Dupla 05 conseguiu construir uma prova do tipo *exemplo genérico* para validar que o quadrilátero ABCD se tratava de um quadrado, enquanto que no item *e* da Atividade 2 essa dupla deixou o item em branco, pois não se lembrava como deveria provar o teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e com a entrevista verificamos que a dupla poderia construir *provas pragmáticas*, pois afirmou que consideraria a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero para verificar a de um triângulo. Isto quer dizer que em atividades diferentes essa dupla esteve em níveis de pensamento geométrico diferentes e, consequentemente, elaborou provas de tipos diferentes.

O que corrobora as ideias apresentadas por Nasser (1992) e Andrade e Nacarato (2004) ao afirmarem que um determinado aluno pode apresentar características de dois níveis diferentes em tópicos distintos da Geometria, sendo possível transitar entre um nível e outro imediatamente anterior ou posterior a resolução de uma mesma atividade. Além disso, embasa também a discussão trazida por Nasser e Sant'Anna (2010) ao argumentaram que um aluno também pode raciocinar em um nível sem ter atingido completamente o nível anterior. Isto quer dizer que esses resultados corrobora a primeira crítica apresentada ao modelo de van Hiele acerca do caráter hierárquico de seus níveis, discutida em Oliveira (2012) e apresentada na seção 2.4 do Capítulo 2.

Percebemos também que, dependendo do período em que o licenciando se encontra no curso, há esquecimento maior do que estudou nas disciplinas, em especial na de Tópicos em Geometria I. Por exemplo, as Duplas 03, 04 e 05 possuem licenciandos entre o 8º e 10º período do curso e eles nessa atividade só conseguiram elaborar *provas pragmáticas*, buscando verificar a validade das afirmações por meio de testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos. Além disso, a contradição que notamos é que esses licenciandos, estando próximos de concluir o curso, não realizaram, nessa atividade, provas do tipo *experiência mental*, pois diziam que já sabiam que os teoremas e as afirmações eram verdadeiros e também tiveram muita dificuldade em organizar uma sequência lógica formal que expresse coerentemente as ideias matemáticas.

Nos itens *a* e *b* percebemos que todas as duplas e o licenciando se encontravam entre os níveis 2 e 3, uma vez que justificaram corretamente o que estava sendo pedido nesses itens utilizando os conceitos geométricos compreendidos na figura. Nos itens *c* e *d*, que estavam relacionados a conclusão da prova apresentada na atividade, somente L05 e as Duplas 01 e 04 conseguiram afirmar que a conclusão da prova apresentada na atividade dizia respeito à soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ser igual a 180º e que essa prova valia para qualquer triângulo, pois a construção foi genérica, sem a utilização de um triângulo específico ou de medidas específicas dos ângulos. Com isso, notamos que, embora os sujeitos pesquisados não conheçam a diferença entre as palavras *prova* e *demonstração*, eles compreendem que exemplos não justificam a validade de determinadas afirmações, como também conseguem distinguir corretamente casos particulares de casos genéricos, ao analisarem a estrutura de uma prova matemática.

No item *e*, apenas a Dupla 01 estava no nível 4 de van Hiele, pois podia entender e escrever provas formais, como também podia utilizar figuras específicas apenas para ajudar a selecionar as propriedades adequadas para a prova. Por conta disso, essa dupla foi a única que conseguiu elaborar uma prova do tipo *experiência mental*, validando a afirmação de forma genérica. A Dupla 02 se encontrava no nível 3 de van Hiele, pois já é capaz de fazer deduções e provas informais, como também é capaz de dar razões informais para a verdade das propriedades, contudo seu raciocínio lógico ainda continua apoiado pela manipulação. Por conta disso, essa dupla construiu uma prova do tipo *exemplo genérico*, validando informalmente a afirmação, pois já sabia que os exemplos não validam uma afirmação, mas ainda não sabia trabalhar com o raciocínio lógico formal.

A Dupla 03 e L05 se encontravam no nível 2 de van Hiele, pois eles podiam provar a afirmação a partir da verificação experimental de um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, esses licenciandos podiam se convencer apenas com um exemplo especial ou podiam precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Por conta disso, eles construíram provas do tipo *experiência crucial*, validando a afirmação a partir de casos particulares de triângulos, por exemplo triângulos com medidas quaisquer ou triângulos especiais, tais como equilátero, retângulo, etc. As Duplas 04 e 05 deixaram o item *e* em branco, mas fizeram tentativas de prova para validar a afirmação, seja de forma escrita ou falada a partir da entrevista. Por isso inferimos que essas duplas se encontravam entre os níveis 1 e 2 de van Hiele, uma vez que não sentiam a necessidade de validar as afirmações, mas podiam produzir provas a partir da verificação experimental de um ou alguns casos. Por conta disso, a partir das suas tentantivas de provas, concluímos que as duplas podiam construir *provas pragmáticas*, recorrendo a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para validar o teorema.

Portanto, conseguimos averiguar concretamente as articulações estabelecidas no Capítulo 4, verificando que os licenciandos que estavam efetivamente no nível 2 de van Hiele elaborariam provas do tipo *experiência crucial*, utilizando exemplos bem particulares para validar as afirmações. Os licenciandos que estavam efetivamente no nível 3 de van Hiele conseguiriam elaborar provas do tipo *exemplo genérico*, caracterizando a transição entre *provas pragmáticas* e *provas intelectuais*, validando informalmente a afirmação, pois seu raciocínio lógico ainda continua apoiado pela manipulação. E os licenciandos que estavam efetivamente no nível 4 de van Hiele conseguiriam elaborar provas do tipo *experiência mental*, utilizando o raciocínio lógico formal e os conceitos teóricos corretamente.

6.2.3 Análise da atividade 3

A seguir são apresentadas as análises *a priori* e *a posteriori* da atividade 3 (Figura 69), que diz respeito ao teorema de Varignon.

Figura 69 - Atividade 3

3) (extraído AGUILAR JR e NASSER, 2013) Seja um quadrilátero qualquer ABCD. Tracem sobre seus lados seus pontos médios M, N, O, P. O que se pode afirmar a respeito do quadrilátero MNOP? Justifiquem sua resposta.

Fonte: extraído de Aguilar Jr e Nasser (2013)

6.2.3.1 Análise *a priori* da atividade 3

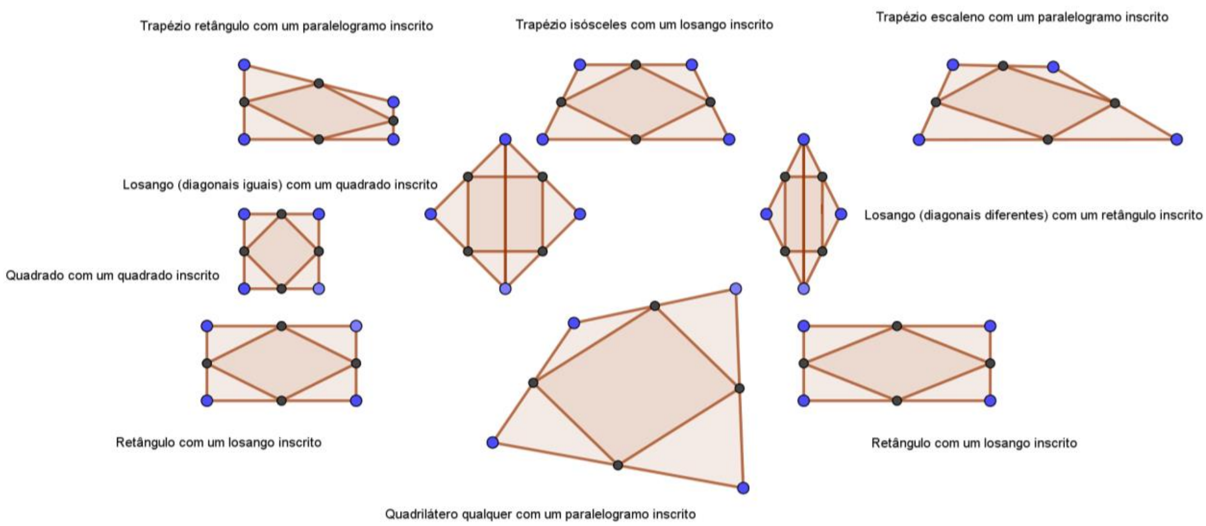
A atividade tem por objetivo estudar as estratégias que os licenciandos irão utilizar para levantar afirmativas quanto ao quadrilátero MNOP. Para isso, eles deverão se lembrar do teorema de Varignon, que estabelece que "*a figura definida pelos pontos médios de qualquer quadrilátero é sempre um paralelogramo, de lados paralelos às suas diagonais em que a área do paralelogramo corresponde sempre à metade da área do quadrilátero"*. Buscaremos analisar o que eles conseguem afirmar e/ou provar acerca do que é pedido na atividade. Consideraremos uma das duas respostas, pois são dados que podemos encontrar a partir do quadrilátero MNOP. Os conhecimentos matemáticos envolvidos são: ponto médio de um segmento, base média de um triângulo, paralelismo, conceito de paralelogramo, diagonais de um quadrilátero qualquer e casos de congruência de triângulos. Aqui a dificuldade pode estar associada ao enunciado sem um desenho para um melhor esclarecimento, ao tomar um quadrilátero específico e não qualquer, ao não entendimento do que se pretende provar e a elaboração e construção de uma prova.

Nessa atividade os licenciandos podem afirmar duas coisas sobre o quadrilátero inscrito em um quadrilátero qualquer: que *é sempre um paralelogramo* e que *sua área é metade da área do maior*. Estaremos satisfeitos com qualquer uma dessas afirmações, contudo a mais usual seria apenas a identificação do tipo de quadrilátero. Caso eles consigam determinar também que a área do quadrilátero inscrito possui metade da área do maior, inferiremos que os licenciandos podem ter lembrado do teorema de Varignon. Desse modo, nosso intuito é analisar as estratégias utilizadas, conseguindo identificar o nível de pensamento e o tipo de prova elaborado.

A partir do que foi discutido nos Capítulos 2 e 4, pode-se afirmar que os licenciandos que estejam no nível 1 não entendem o conceito de prova e por isso não sentem a necessidade de validar as afirmações. Caso estejam no nível 2, eles poderão provar a afirmação a partir da verificação experimental de um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, os licenciandos podem se convencer apenas com um exemplo especial ou podem precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Os licenciandos que estejam no nível 3 já são capazes de fazer deduções e provas informais, como também são capazes de dar razões informais para a verdade das propriedades. Caso estejam no nível 4, poderão entender e escrever provas formais. Além disso, algumas vezes os licenciandos podem utilizar figuras específicas apenas para ajudar a selecionar as propriedades adequadas para a prova, mas eles já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário desenvolver uma sequência de implicações com base em propriedades já estabelecidas (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994; GUTIÉRREZ e JAIME, 1998).

Ao analisarmos as justificativas e/ou argumentações utilizadas nessa atividade, os licenciandos que estão no nível 1 não desenvolvem uma prova, pois não a reconhece como necessária, uma vez que eles sabem que será outro quadrilátero. Àqueles que estão no nível 2 podem buscar a afirmação a partir de casos particulares de quadriláteros e com isso encontrará resultados diferentes (ver Figura 70), pois caso desenhe um quadrado, o quadrilátero MNOP será também um quadrado; se construir um retângulo, obtêm-se um losango inscrito; caso desenhe um losango com diagonais iguais, terão um quadrado inscrito e, se o losango tiver diagonais diferentes, têm-se um retângulo inscrito; ou se construir um trapézio isósceles, encontrarão um losango inscrito e, se for trapézio retângulo ou escaleno, obtêm-se um paralelogramo inscrito.

Figura 70 - Casos particulares de quadriláteros



Fonte: autoria própria

Os licenciandos que estão no nível 3 podem construir um exemplo bem geral (ainda manipulativo) para buscar a afirmação, o que poderia ter sido feito por meio de conceitos e propriedades. Àqueles que estão no nível 4 podem provar que é verdade a partir de conceitos teóricos (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

Estabelecendo uma articulação com os tipos de prova de Balacheff (2000), os licenciandos que estão no nível 1 não produzirão provas, deixando a questão em branco. Àqueles que estão no nível 2, podem produzir provas do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, utilizando um ou alguns exemplos de quadriláteros para validar a afirmação. Os licenciandos que estão no nível 3 justificarão a partir do *exemplo genérico*, validando informalmente a afirmação, pois seu raciocínio lógico ainda continua apoiado pela manipulação. Àqueles que estão no nível 4, escreverão provas do tipo *experiência mental*, validando a afirmação de forma genérica.

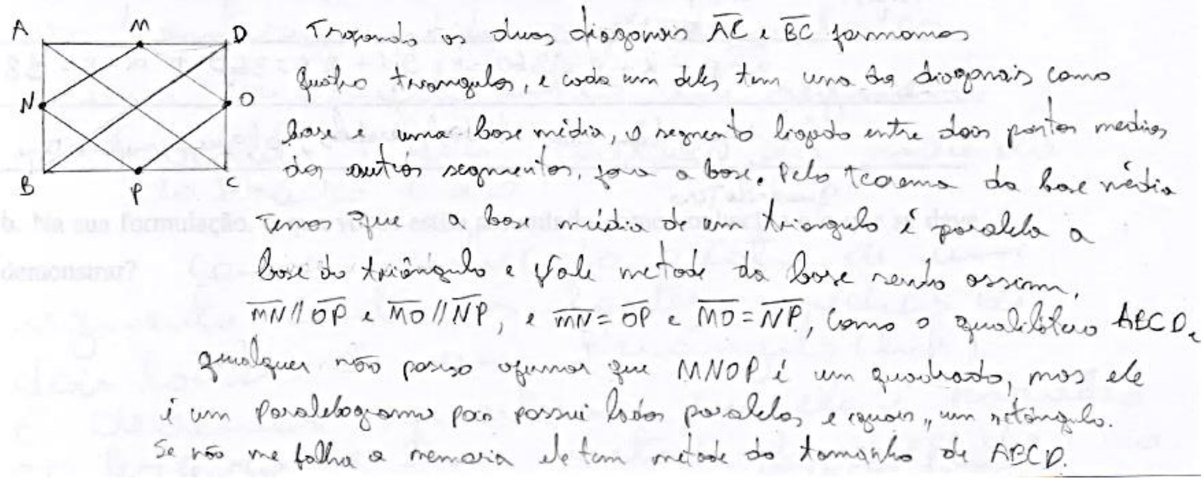
6.2.3.2 Análise das produções dos licenciandos na atividade 3

A atividade não fornecia figura e para responde-la seria necessário a sua construção. Deve-se considerar um quadrilátero qualquer, marcar os pontos médios dos lados desse quadrilátero e liga-los. A partir dessa construção, pergunta-se: *O que se pode afirmar a respeito do quadrilátero MNOP? Justifiquem sua resposta.* A partir das resoluções, percebemos que apenas a Dupla 01 e L05 conseguiram construir provas do tipo *experiência mental* com o intuito de validar a afirmação de forma genérica.

A Dupla 01 (Figura 71) conseguiu construir uma prova utilizando corretamente os conceitos de ponto médio de um segmento, base média de um triângulo, paralelismo, conceito de paralelogramo e diagonais de um quadrilátero qualquer. Apenas não verificou que os triângulos formados com as diagonais do quadrilátero são congruentes aos triângulos formados com os pontos médios do quadrilátero. Além disso, seria importante eles acrescentarem na prova as nomenclaturas dos triângulos formados, uma vez que sem a identificação pode dificultar a visualização. Ou seja, quando eles abordam os quatro triângulos formados com as diagonais e relacionam a base deles com a sua base média, estão se referindo aos seguintes triângulos: ABD, ABC, DCB e CBA.

A fim de esclarecer a construção feita pela dupla 01 (Figura 71), inferimos que o triângulo ABD tem como base o segmento $\overline{BD}$ e como base média o segmento $\overline{NM}$. Já o triângulo ADC tem como base o segmento $\overline{AC}$ e como base média o segmento $\overline{MO}$. Enquanto que o triângulo DCB tem como base o segmento $\overline{DB}$ e como base média o segmento $\overline{OP}$. Por fim, o triângulo CBA tem como base o segmento $\overline{CA}$ e como base média o segmento $\overline{PN}$.

Figura 71 - Resposta da dupla 01 a atividade 3

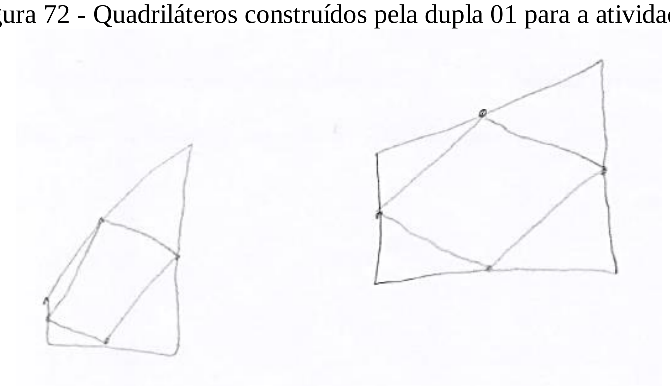


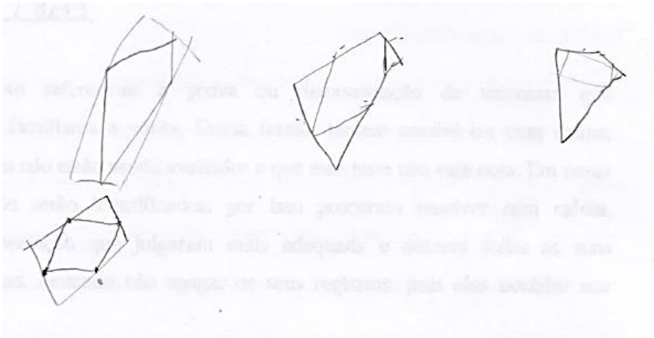
Fonte: dados da pesquisa

Na finalização da construção, embora eles tenham feito o quadrilátero ABCD como um retângulo, percebemos que eles afirmam que se trata de um quadrilátero qualquer e, por conta disso, não podem concluir que MNOP é um quadrado. Contudo, concluem que se trata de um paralelogramo, o que está correto uma vez que eles conseguiram perceber que os lados (opostos) são paralelos e iguais. Além disso, eles ainda concluem, não tendo certeza, que o paralelogramo MNOP possui metade do tamanho de ABCD. O que nos leva a inferir que eles queriam afirmar que área do paralelogramo possui metade da área do quadrilátero qualquer. Conseguindo assim perceber as duas afirmações presentes no teorema de Varignon.

Antes dos licenciandos construírem a prova que se encontra na Figura 71, eles fizeram vários experimentos utilizando quadriláteros quaisquer (Figura 72). O que ressalta a importância do processo heurístico antes da construção e elaboração de uma prova, pois esses experimentos os ajudaram a elaborar uma prova do tipo *experiência mental*, utilizando apenas conceitos teóricos para validar as afirmações.

Figura 72 - Quadriláteros construídos pela dupla 01 para a atividade 3





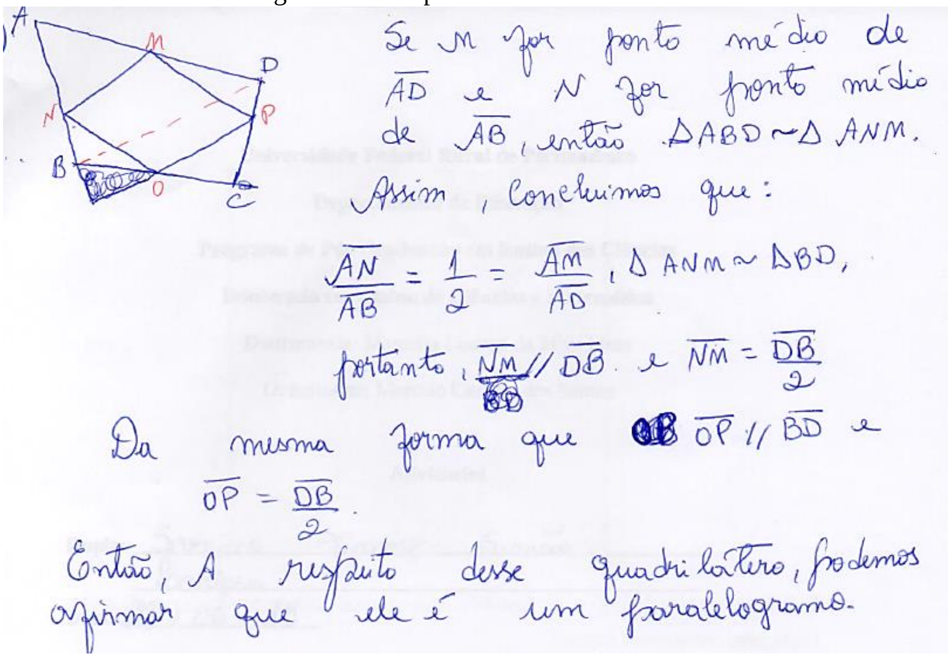
Fonte: dados da pesquisa

Com as filmagens, percebemos que os licenciandos discutiram muito sobre as afirmações que poderiam levantar com a construção desses quadriláteros. L10 questionou se diz respeito à soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero, mas L11 responde que não e que sabe fazer essa atividade, mas que não lembra. Contudo, a partir da construção feita por L11, ele consegue se lembrar e constrói a prova conforme a Figura 71. Ao final, L10 concorda com o que ele fez. Segue o diálogo durante a resolução:

> **L11 faz o desenho do quadrilátero da atividade 3.**
> **L10 pergunta se é sobre a soma das medidas dos ângulos internos.**
> **L11 responde que não e lê novamente.**
> **L10:** isso aqui é um quadrilátero qualquer?
> **L11 fala a pesquisadora que já fez uma questão dessa, mas que não lembra e afirma:** Eu sei que eu sei, que eu já fiz ela, mas...
> **L11 desenha um quadrilátero qualquer na folha de rascunho, enquanto que L10 também faz outras tentativas em outra folha de rascunho.**
> **L10:** Isso mesmo? Eles têm a mesma medida?
> **Pesquisadora:** não sei... Coloquem o que vocês acharam.
> **L11:** eu sei que devia saber, mas ...
> **L10:** eu acho que é isso.

O licenciando 05 (Figura 73) também conseguiu construir uma prova utilizando corretamente os conceitos de ponto médio de um segmento, base média de um triângulo, paralelismo, conceito de paralelogramo, diagonais de um quadrilátero qualquer e casos de congruência de triângulos. Percebemos que ele faz a construção corretamente, contudo para afirmar que se trata de um paralelogramo, faltou L05 concluir que, a partir da verificação de que $\overline{NM} \parallel \overline{DB}$ e que $\overline{OP} \parallel \overline{DB}$, pode-se concluir que $\overline{NM} \parallel \overline{OP}$ e, de maneira análoga encontra-se que $\overline{MP} \parallel \overline{NO}$. Concluindo, portanto, que MNOP é um paralelogramo. Consideramos então que L05 fez uma prova do tipo *experiência mental*. Segundo Balacheff (2000), o aluno, ao utilizar esse tipo de prova, afirma a validade de uma proposição de forma genérica e não faz mais referência a casos particulares, como também a validação é sustentada pela teoria.

Figura 73 - Resposta de L05 a atividade 3



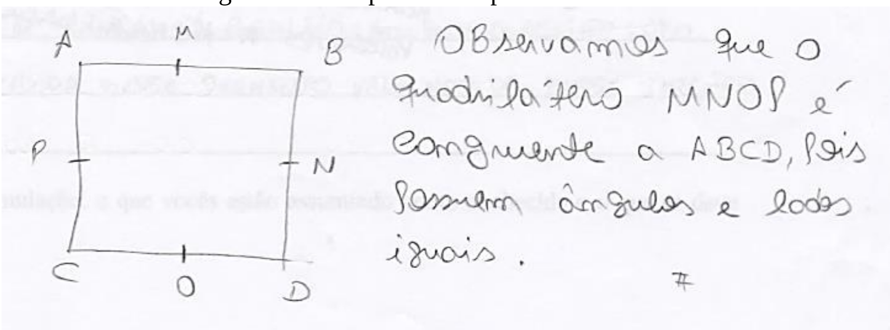
Fonte: dados da pesquisa

A partir das construções feitas pela Dupla 01 e por L05, inferimos que esses licenciandos já possuem um melhor entendimento das definições e na capacidade de provar a equivalência de diferentes definições do mesmo conceito, assim como já entendem e executam o raciocínio lógico formal e as provas formais possuem significado para eles, pois sabem que é um dos meios de verificar a validade de uma afirmação de forma genérica. De acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), esses licenciandos encontram-se no nível 4 de van Hiele, pois são capazes de realizar provas matemáticas formais e as figuras são usadas apenas algumas vezes para ajudar a escolher as propriedades adequadas para a sua prova.

Já a Dupla 02 (Figura 74) constrói uma prova a partir da observação de uma figura construída por eles, sem terem traçado os segmentos ligando os pontos médios do quadrilátero ABCD. Os licenciandos afirmam que o quadrilátero MNOP é congruente ao quadrilátero ABCD, pois possuem ângulos e lados iguais. Percebemos que eles apenas fazem uma construção de um exemplo bem específico (quadrado) e levantam uma afirmação sem verificarem se a mesma é verdadeira, pois eles apenas deduziram a partir da figura construída.

Com as filmagens, percebemos que L06 tenta comparar a figura construída com a figura dada na atividade 1, mas L01 afirma que não são iguais, pois na atividade 3 tem-se pontos médios e na 1 não. Além disso, percebe-se que L01 afirma que os quadriláteros possuem a mesma área, contudo isso não é registrado na resposta.

Figura 74 - Resposta da dupla 02 a atividade 3



Fonte: dados da pesquisa

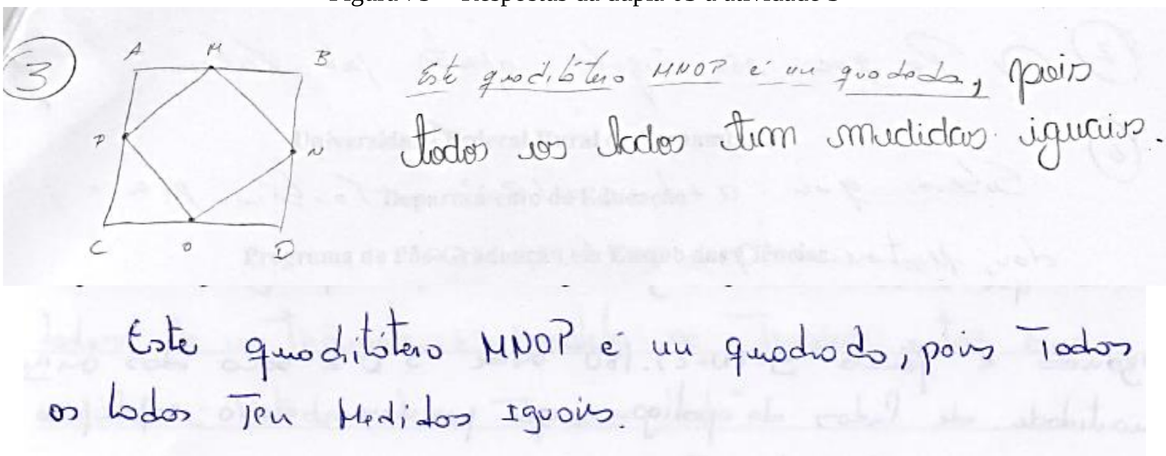
Por se tratar de um exemplo bem particular, afirmamos que a prova construída pela dupla é do tipo *experiência crucial*, pois não há explicitação das propriedades e conceitos inerentes a prova, como também eles se utilizam apenas da figura para levantar afirmações. De acordo com Balacheff (2000), esses licenciandos utilizam um caso especial, geralmente não familiar, como também realizam experiências e começam a tomar consciência de que busca por um resultado geral. Esse tipo de prova difere do *empirismo ingênuo* no sentido de que o indivíduo coloca explicitamente o problema da generalização e o resolve, aventurando-se na execução de um caso que reconhece tão pouco quanto possível.

Na entrevista, questionamos acerca da afirmação feita e eles continuaram concluindo que ao marcar os pontos médios do quadrilátero ABCD e ligando-os, encontraremos outro quadrilátero que possui as mesmas medidas do primeiro. Percebemos que a afirmação continua a mesma e que eles só deduziram a partir da construção da figura, sem utilizarem medições ou conceitos para validar tal afirmação. Segue o extrato da entrevista:

> **Pesquisadora:** terceira...
> **L01:** diga.
> **Pesquisadora:** "eles possuem ângulos e lados iguais"... como é que vocês descobriram isso?
> **L06:** não olhe para mim não...
> **L01:** cadê?
> **Pesquisadora:** aqui.
> **L01:** porque traçou os pontos médios, já que... ligando os pontos... os pontos médios de cada lado... teremos outro retângulo... outro quadrilátero dentro desse, com as mesmas medidas.
> **Pesquisadora:** certo.
> **L01:** Ligou o ponto médio de cada...
> **Pesquisadora:** de cada lado.
> **L01:** de cada lado... e você vai ter um novo lado com a mesma medida.

A Dupla 03 (Figura 75) também constrói uma prova a partir da observação de uma figura construída por eles, percebendo que o quadrilátero MNOP é um quadrado, pois possui todos os lados com medidas iguais. Contudo, eles não fizeram a verificação para comprovar se esses lados realmente possuem as mesmas medidas. Conforme discutimos na análise *a priori*, se realmente eles construíssem quadriláteros específicos, iriam encontrar quadriláteros diferentes. Ao observar a Figura 70, percebe-se que quando se constrói um quadrado, obtêm-se um quadrado inscrito.

Figura 75 - Respostas da dupla 03 a atividade 3



Fonte: dados da pesquisa

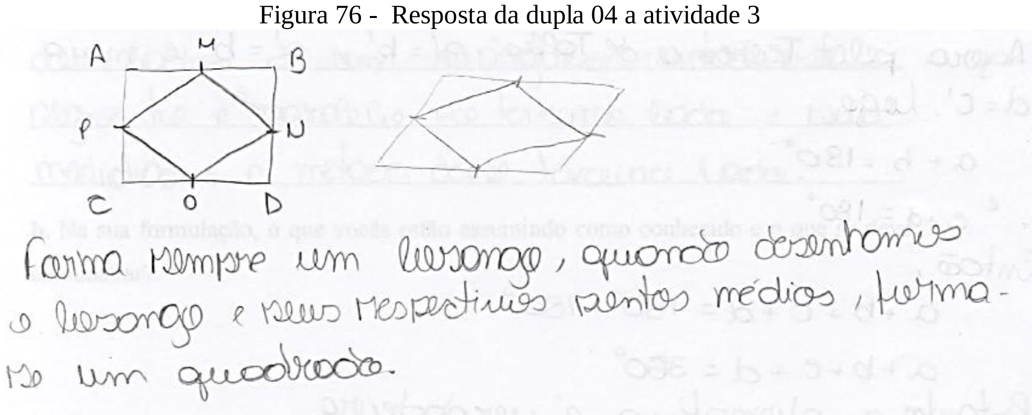
Por se tratar de um exemplo bem particular, afirmamos que a prova construída pela dupla é do tipo *experiência crucial*, pois não há explicitação das propriedades e conceitos inerentes a prova, como também eles se utilizam apenas da figura para levantar afirmações. De acordo com Balacheff (2000), os licenciandos utilizam um caso especial, geralmente não familiar, como também realizam experiências e começam a tomar consciência de que busca por um resultado geral.

Com as filmagens, percebemos que L07 elabora a resposta da atividade na folha de rascunho, faltando apenas justificar. L08 justifica afirmando que é um quadrado, pois possui todos os lados iguais. L07 questiona o motivo e ele afirma que é porque são iguais. Não ocorrendo uma discussão que viesse a levantar conceitos e propriedades mais fortes para validar a afirmação. Percebemos que eles apenas justificam a partir da construção da figura, não examinado a partir de medições ou conceitos.

A partir das construções feitas pelas Duplas 02 e 03, inferimos que elas já buscam uma verificação experimental da verdade da propriedade, utilizando um exemplo bem particular para isso. Ademais, esses licenciandos já começam a fazer esses tipos de experiências porque já reconhecem a figura geométrica com base em suas propriedades matemáticas. Contudo, eles ainda não entendem a estrutura lógica das definições e só são capazes de fornecer provas por meio de exemplos e casos bem particulares. De acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), esses licenciandos encontram-se no nível 2 de van Hiele, pois a prova construída dentro desse nível consiste em alguma verificação experimental por meio de um ou mais casos, como também já são capazes de utilizar e reconhecer propriedades matemáticas, mas sentem dificuldade em estabelecer conexões lógicas entre essas propriedades.

A Dupla 04 (Figura 76) elabora construções por meio de casos particulares e levanta afirmativas a partir dessas construções, sem utilizar medições ou conceitos, apenas afirma pela observação/visualização das figuras. Os licenciandos afirmam que forma sempre um losango, mas que quando eles constroem um losango, obtêm-se um quadrado. Conforme discutimos na análise *a priori*, se realmente eles construíssem quadriláteros específicos, iriam encontrar quadriláteros diferentes. Ao observar a Figura 70, percebe-se que quando se constrói um losango com diagonais iguais, tem-se um quadrado inscrito, já se construir um losango com diagonais diferentes, tem-se um retângulo inscrito. Além disso, conforme o teorema de Varignon, ao se construir um quadrilátero qualquer, tem-se sempre um paralelogramo e não um losango.

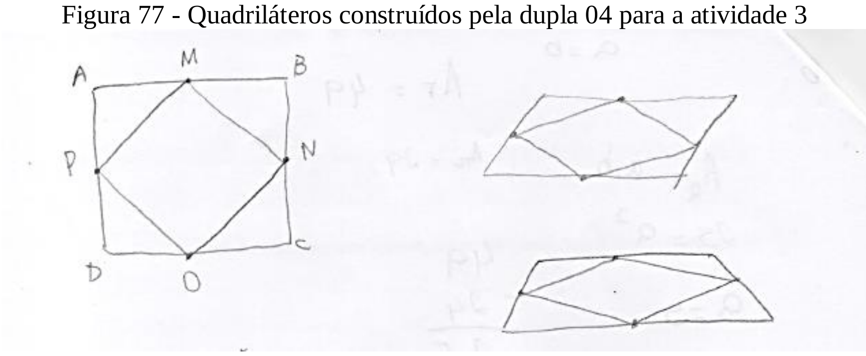
Figura 76 - Resposta da dupla 04 a atividade 3

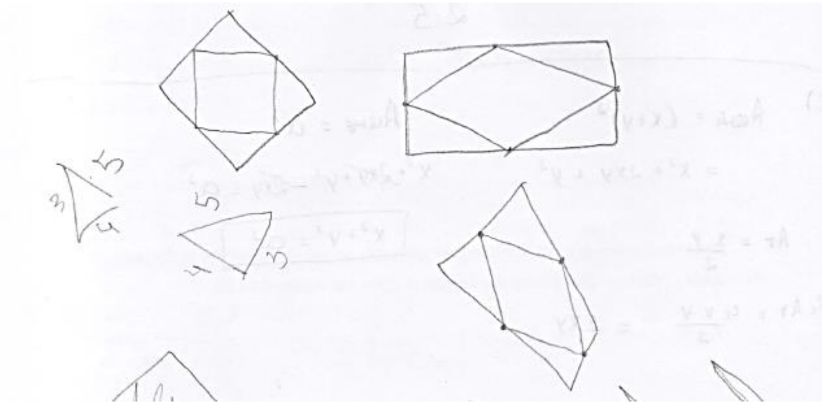


Fonte: dados da pesquisa

Para chegarem a essa conclusão, eles fizeram vários tipos de construções na folha de rascunho (Figura 77), todas sem o auxílio de régua para ajudar nas medições dos lados. O que nos leva a perceber que eles utilizaram apenas a visualização para levantar afirmativas.

Figura 77 - Quadriláteros construídos pela dupla 04 para a atividade 3





Fonte: dados da pesquisa

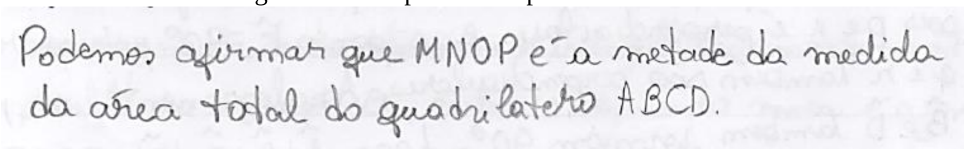
Por utilizarem vários casos particulares nas construções dos quadriláteros, afirmamos que a prova construída pela dupla é do tipo *empirismo ingênuo*, pois não há explicitação de propriedades e conceitos inerentes a prova, como também eles se utilizam apenas da figura para levantar afirmações. De acordo com Balacheff (2000), os licenciandos asseguram a validade de um enunciado depois de tê-lo verificado em alguns casos. Esse modo de validação é rudimentar e insuficiente, como também é uma das primeiras formas do processo de generalização.

Com as filmagens, percebemos que, a partir das construções feitas, eles dialogam bastante, tentando estabelecer uma linha de raciocínio e encontrar uma afirmativa coerente com o que estão visualizando. Durante o diálogo, percebemos que surge um pequeno erro conceitual ao afirmarem que um quadrado não pode ser considerado um losango, mas sabemos que existem losangos que são quadrados, pois todos os quadrados são losangos. Segue o diálogo durante a resolução da atividade:

> **L02:** tem que ser um quadrilátero qualquer né?
> **L03:** a respeito do quadrilátero. (...) É, no caso, tem que ser qualquer. (...) vai sempre formar um losango né?
> **L02:** é, é isso que eu estava pensando.
> **L03:** eu vou colocar isso mesmo.
> **L02:** é, forma um losango.
> **L03:** faz um retângulo.
> **L02:** acho que forma um losango... se for um losango...
> **L03:** forma um quadrado.
> **L02:** não sei... a gente pode dizer que forma um quadrilátero.
> **L03:** não, mas aí já está dizendo que forma um quadrilátero.
> **L02:** o quadrado pode ser considerado um losango?
> **L03:** não... pode ser um... retângulo né? (...)
> **L02 e L03:** é... um quadrado é um retângulo.

A Dupla 05 (Figura 78) não constrói uma figura e apenas afirma que a área do quadrilátero MNOP possui metade da medida da área do quadrilátero ABCD. Contudo, não há verificação para tal afirmação.

Figura 78 - Resposta da dupla 05 a atividade 3



Podemos afirmar que MNOP é a metade da medida da área total do quadrilatero ABCD.

Fonte: dados da pesquisa

Na entrevista, buscamos entender como os licenciandos chegaram a esse resultado e eles envolveram conceitos de medidas de diagonais com medidas dos segmentos formados a partir dos pontos médios, que diz respeito a um dos conceitos necessários para verificar a base média formada a partir dos triângulos. Contudo, eles não chegaram a concluir, pois não conseguiram expressar coerentemente suas ideias. Além disso, afirmaram que o quadrilátero formado seria um losango, como também um quadrado. Entretanto, não foi realizada nenhuma construção, apenas suposições. Segue o extrato da entrevista:

> **Pesquisadora:** por que o quadrilátero formado MNOP é metade da medida da área total do maior?
> **L09:** esse era com relação aquele outro... né?
> **Pesquisadora:** é... que você construiria um quadrilátero qualquer ABCD... marcaria os pontos médios... dos seus lados... e aí ele pergunta o que se pode afirmar a respeito do quadrilátero MNOP... formado a partir dos pontos médios...
> **L09:** eu sei que a... não sei se tem a ver né?! A diagonal de um quadrado é maior do que seus lados... não é? Se a gente pega um ponto médio de cada lado, ele formará outras diagonais menores... é isso ou nada a ver? Tem nada a ver... é mais ou menos isso professora... que é... a diagonal de qualquer quadrado... ela... é maior do que seus lados... qualquer de seus lados... quando a gente pega um ponto médio... de cada quadrado... né?
> **Pesquisadora:** hum...
> **L09:** (risos) sei mais não...
> **Pesquisadora:** continue...
> **L09:** é isso... quando a gente pega o ponto médio parte daquela área foi perdida...
> **Pesquisadora:** hum...
> **L09:** pronto, sei explicar mais não... aí é porque formou outras diagonais e ficou uma diagonal menor... mais ou menos isso...
> **Pesquisadora:** certo... mas é com relação a isso né?! É por isso que vocês afirmaram que é metade da área total...
> **L09:** é... era pra justificar é? Era... mas a gente não justificou não...
> **Pesquisadora:** não...
> **L09:** era a fome.
> **Pesquisadora:** poderia também dizer a forma desse quadrilátero?
> **L09:** é... como assim?
> **Pesquisadora:** quando... é... você construiu um quadrilátero... marcou os pontos médios... vai ter outro quadrilátero...
> **L04:** sim.
> **Pesquisadora:** eu poderia dizer qual é? Qual seria?
> **L09:** eu acho que vai formar um losango né?! Ou não?
> **Pesquisadora:** depende...
> **L09:** eu acredito que formaria outro quadrado... outro quadrilátero... interno...
> **L04:** outro quadrilátero...
> **L09:** é...
> **Pesquisadora:** certo...

Embora tenham feito a afirmativa corretamente, os licenciandos não utilizaram construções, medições ou propriedades e conceitos para validar tal afirmativa. Além disso, na entrevista, eles fizeram apenas suposições quanto ao tipo de quadrilátero MNOP, como também não conseguiram expressar coerentemente as suas ideias. Por conta disso, afirmamos que a prova construída pela dupla é do tipo *empirismo ingênuo*, pois não há explicitação de propriedades e conceitos inerentes a prova, como também eles utilizam apenas suposições (casos particulares) para levantar afirmações. De acordo com Balacheff (2000), os licenciandos asseguram a validade de um enunciado depois de tê-lo verificado em alguns casos.

A partir das construções feitas pelas Duplas 04 e 05, inferimos que elas buscam uma verificação experimental da verdade da propriedade, utilizando um ou mais exemplos específicos. Além disso, esses licenciandos já começam a fazer esses tipos de experiências porque já reconhecem a figura geométrica com base em suas propriedades matemáticas. Contudo, eles ainda não entendem a estrutura lógica das definições e só são capazes de fornecer provas por meio de exemplos e casos bem particulares. De acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), esses licenciandos encontram-se no nível 2 de van Hiele, pois a prova construída dentro desse nível consiste em alguma verificação experimental por meio de um ou mais casos, como também já são capazes de utilizar e reconhecer propriedades matemáticas, mas sentem dificuldade em estabelecer conexões lógicas entre essas propriedades.

De modo geral, percebemos que houve algumas oscilações entre os níveis de pensamento geométrico desses licenciandos de uma atividade para outra. Por exemplo, L05 na atividade 2 se encontrava no nível 2 construindo provas do tipo *experiência crucial*, enquanto que nessa atividade, encontra-se no nível 4 conseguindo construir provas do tipo *experiência mental*. Já a Dupla 02, na atividade 2 se encontrava no nível 3 construindo provas do tipo *exemplo genérico,* enquanto que nessa atividade, encontra-se no nível 2 conseguindo construir provas do tipo *experiência crucial*. Isto quer dizer que em atividades diferentes esses licenciandos estiveram em níveis de pensamento geométrico diferentes e, consequentemente, elaboraram provas de tipos diferentes.

Isso vem a corroborar as ideias apresentadas por Nasser (1992) e Andrade e Nacarato (2004) ao afirmarem que um determinado aluno pode apresentar características de dois níveis diferentes em tópicos distintos da Geometria, sendo possível transitar entre um nível e outro imediatamente anterior ou posterior a resolução de uma mesma atividade. Além disso, embasa também a discussão trazida por Nasser e Sant'Anna (2010) ao argumentarem que um aluno também pode raciocinar em um nível sem ter atingido completamente o nível anterior. Ou seja, esses resultados corroboram a primeira crítica apresentada ao modelo de van Hiele acerca do caráter hierárquico de seus níveis, discutida em Oliveira (2012) e apresentada na seção 2.4 do Capítulo 2.

Percebemos também que, dependendo do período em que o licenciando se encontra no curso, há esquecimento maior do que estudou nas disciplinas, em especial na de Tópicos em Geometria I. Por exemplo, as Duplas 03, 04 e 05 possuem licenciandos entre o 8º e 10º período do curso e nessa atividade eles só conseguiram elaborar provas do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, que estão dentro das *provas pragmáticas*, em que os licenciandos buscam verificar a validade de determinada afirmação por meio de testes de regularidade, exemplos ou desenhos. Além disso, a contradição que notamos é que esses licenciandos, estando próximos de concluir o curso, não conseguiram realizar, nessa atividade, provas do tipo *experiência mental*, pois diziam que já sabiam que os teoremas e afirmações eram verdadeiros.

Nessa atividade verificamos que apenas a Dupla 01 e L05 estavam no nível 4 de van Hiele, pois podiam entender e escrever provas formais e algumas vezes utilizar figuras específicas apenas para ajudar a selecionar as propriedades adequadas para a elaboração da prova, uma vez que já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário desenvolver uma sequência de implicações com base em propriedades já estabelecidas. Por conta disso, esses licenciandos foram os únicos que conseguiram elaborar provas do tipo *experiência mental*, validando a afirmação de forma genérica.

As Duplas 02, 03, 04 e 05 estavam no nível 2 de van Hiele, pois podiam provar a afirmação a partir da verificação experimental de um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, esses licenciandos podiam se convencer apenas com um exemplo especial ou podiam precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Por conta disso, as Duplas 02 e 03 conseguiram elaborar provas do tipo *experiência crucial*, uma vez que verificaram a afirmação a partir de um caso bem especial de quadrilátero, geralmente não familiar, enquanto que as Duplas 04 e 05 elaboraram provas do tipo *empirismo ingênuo*, pois precisaram verificar a validade da afirmação para alguns casos particulares de quadriláteros.

Portanto, conseguimos averiguar concretamente as articulações estabelecidas no Capítulo 4, verificando que os licenciandos que estavam efetivamente no nível 2 de van Hiele elaboravam provas do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, utilizando alguns casos particulares ou um exemplo bem específico para validar as afirmações. E os licenciandos que estavam efetivamente no nível 4 de van Hiele conseguiram elaborar provas do tipo *experiência mental*, utilizando o raciocínio lógico formal e os conceitos teóricos corretamente.

6.2.4 Análise da atividade 4

A seguir são apresentadas as análises *a priori* e *a posteriori* da atividade 4 (Figura 79), que diz respeito a uma propriedade dos ângulos opostos.

Figura 79 - Atividade 4

4) (adaptado de PINTO e ESQUINCALHA, 2016) Considerem um par de retas r e s concorrentes em um ponto P e os ângulos formados por elas. Esses ângulos são adjacentes ou opostos pelo vértice. Provem que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Fonte: extraído de Pinto e Esquincalha (2016)

6.2.4.1 Análise *a priori* da atividade 4

A atividade tem por objetivo estudar as estratégias que os licenciandos irão utilizar para provar que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes. Os conhecimentos matemáticos envolvidos são: ângulos suplementares, ângulos adjacentes e sistema de equações. Aqui a dificuldade pode estar associada aos licenciandos não lembrarem dos conceitos necessários para a prova e como devem elaborá-la e construí-la.

A partir do que foi discutido nos Capítulos 2 e 4, pode-se afirmar que os licenciandos que estejam no nível 1 não entendem o conceito de prova e por isso não sentem a necessidade de validar as afirmações. Caso estejam no nível 2, eles poderão provar a afirmação a partir da verificação experimental de um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, os licenciandos podem se convencer apenas com um exemplo especial ou podem precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Os licenciandos que estejam no nível 3 já são capazes de fazer deduções e provas informais, como também são capazes de dar razões informais para a verdade das propriedades. Caso estejam no nível 4, poderão entender e escrever provas formais. Além disso, algumas vezes os licenciandos podem utilizar figuras específicas apenas para ajudar a selecionar as propriedades adequadas para a prova, mas eles já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário desenvolver uma sequência de implicações com base em propriedades já estabelecidas (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994; GUTIÉRREZ e JAIME, 1998).

Ao analisarmos as justificativas e/ou argumentações utilizadas nessa atividade, os licenciandos que estão no nível 1 não desenvolverão uma prova, pois não a reconhece como necessária, uma vez que eles sabem que ângulos opostos pelo vértice são sempre congruentes. Àqueles que estão no nível 2 poderão verificar a validade da afirmação a partir de um ou alguns exemplos de ângulos, atribuindo valores para as suas medidas, confirmando assim a veracidade da afirmação. Os licenciandos que estão no nível 3 poderão construir um exemplo bem geral (ainda manipulativo) para provar a afirmação, o que poderia ter sido feito por meio de conceitos e propriedades. Àqueles que estão no nível 4 podem provar que é verdade a partir de conceitos teóricos (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

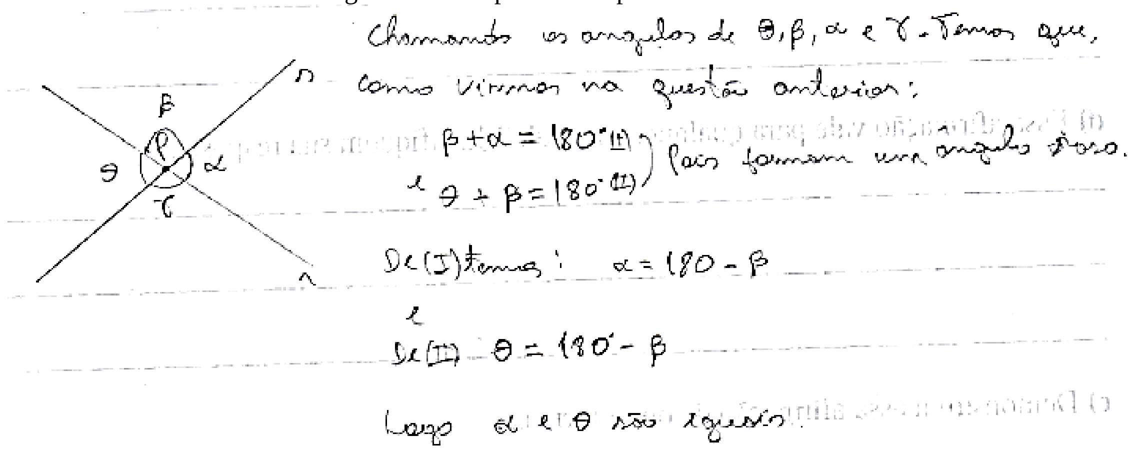
Estabelecendo uma articulação com os tipos de prova de Balacheff (2000), os licenciandos que estão no nível 1 não produzirão provas, deixando a questão em branco. Àqueles que estão no nível 2, podem produzir provas do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, utilizando um ou alguns exemplos de ângulos ou ainda um exemplo bem especial de ângulo para validar a afirmação. Os licenciandos que estão no nível 3 justificarão a partir do *exemplo genérico*, validando informalmente a afirmação, pois seu raciocínio lógico ainda continua apoiado pela manipulação. Àqueles que estão no nível 4, escreverão provas do tipo *experiência mental*, validando a afirmação de forma genérica.

6.2.4.2 Análise das produções dos licenciandos na atividade 4

A atividade não fornecia figura e para responde-la os sujeitos pesquisados poderiam ou não fazer a sua construção. Deve-se considerar um par de retas *r* e *s* concorrentes em um ponto P e os ângulos formados por elas, compreendendo que esses ângulos são adjacentes ou opostos pelo vértice. A partir disso, pede-se: *Provem que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.* Podemos perceber que apenas L05 e as Duplas 01 e 04 conseguiram construir uma prova do tipo *experiência mental*, validando dedutivamente que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

A Dupla 01 (Figura 80) conseguiu construir uma prova utilizando corretamente os conceitos de ângulos suplementares, ângulos adjacentes e sistema de equações.

Figura 80 - Resposta da dupla 01 a atividade 4

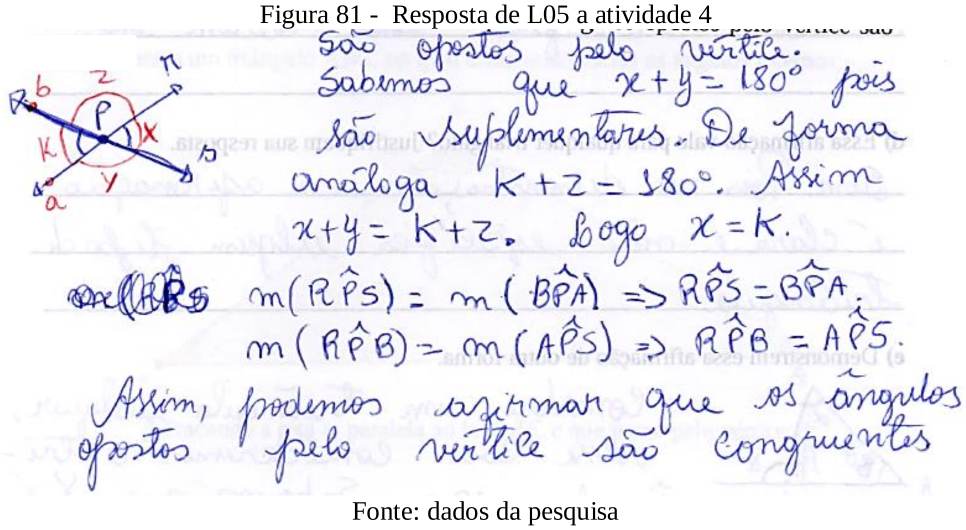


Fonte: dados da pesquisa

A partir das filmagens, percebemos que L11 desenvolve a prova e L10 concorda com o que foi feito. Notamos que os licenciandos provaram que os ângulos α e θ são congruentes e para isso utilizaram os conceitos de ângulos suplementares e adjacentes. Como a dupla 01 não utilizou formalidade e rigor para mostrar a validade da afirmação, consideramos que eles construíram uma prova do tipo *experiência mental*. Segundo Balacheff (2000), os alunos, ao utilizarem esse tipo de prova, afirmam a validade de uma proposição de forma genérica, não fazem mais referência a casos particulares e a validação é sustentada somente pela teoria.

O licenciando 05 (Figura 81) também conseguiu construir uma prova utilizando corretamente os conceitos de ângulos suplementares, ângulos adjacentes e sistema de equações. Contudo, ao separar as duas equações para o sistema, ele utilizou as quatro incógnitas diferentes e, por conta disso, fez uma conclusão ($x = k$) que não seria possível fazer, pois as equações utilizadas não o ajudam a chegar nessa conclusão. Para ele chegar a tal conclusão, deveria ter considerado a segunda equação como $y + k = 180°$, pois ao isolar o x da primeira equação e o k da segunda, concluiria que $x = k$.

Figura 81 - Resposta de L05 a atividade 4



Fonte: dados da pesquisa

Na entrevista, questionamos como ele chegou a tal conclusão a partir das equações utilizadas e percebemos que ele não soube explicar, enfatizou que tem uma propriedade que o ajudou a chegar nessa conclusão, mas não lembrava qual era e por conta disso não conseguimos prosseguir o diálogo, pois ele estava sempre afirmando que não se lembrava. Segue o extrato da entrevista:

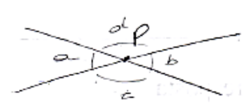
> **Pesquisadora:** a quarta... como você chegou nessa conclusão?
> **L05:** meu Deus...
> **Pesquisadora lê a resposta da atividade 4.**
> **Pesquisadora:** “logo $x = k$”.
> **L05:** sim... x igual a k... mas isso aqui não tem uma propriedade que a gente usa isso, não é?

Pesquisadora: qual?
L05: eita Jesus... e agora quem disse que eu lembro!? Eu sei que é uma demonstração que tem, rapaz.
Pesquisadora: foi esse pulinho daqui para cá que ficou subentendido.
L05: mas aqui... não... mas aqui são opostos pelo vértice né?
Pesquisadora: é, mas aí... é porque você já foi direto... porque era para mostrar que eles são congruentes.
L05: isso.
Pesquisadora: até aqui... aí o que foi que ficou aqui escondido?
L05: eita, eu não lembro não. Eu não lembro disso aqui agora não. Eita meu Deus... eu não lembro. Não lembro de jeito nenhum isso mais... isso tem alguma coisa a ver com opostos pelo vértice... aí usa alguma propriedade. Agora eu não lembro qual foi essa propriedade... que vergonha...
Pesquisadora: certo... não tem como ficar forçando também né?! Porque se não lembra, não lembra.
L05: é, eu não lembro dessa propriedade agora não.

A prova elaborada por L05 não está errada, pois ele utilizou todos os conceitos corretamente, apenas na hora de separar as duas equações para chegar na conclusão de que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes, ele considerou a segunda equação de forma equivocada, pois ela não o ajudaria a chegar na conclusão pretendida. Embora tenha ocorrido esse equívoco, ainda consideramos que ele desenvolveu uma prova do tipo *experiência mental*, uma vez que validou a afirmação de forma genérica, mas não utilizou formalidade e rigor na construção da sua prova.

A Dupla 04 (Figura 82) também conseguiu construir uma prova utilizando corretamente os conceitos de ângulos suplementares, ângulos adjacentes e sistema de equações. Além disso, provaram que os dois ângulos opostos pelo vértice, formados pela intersecção das retas no ponto P, são congruentes. Como a dupla não utilizou formalidade e rigor para mostrar a validade da afirmação, consideramos que eles fizeram uma prova do tipo *experiência mental*.

Figura 82 - Resposta da dupla 04 a atividade 4



$$\begin{cases} a + d = 180° \ (I) \\ b + c = 180° \ (II) \\ a + c = 180° \ (III) \\ b + d = 180° \ (IV) \end{cases}$$

$a = 180 - c$ e $d = 180° - b$

Substituindo a em (I), temos

$180° - c + d = 180°$

$d = c$

E substituindo d em (I)

$a + \cancel{180°} - b = \cancel{180°}$

$a = b$

Portanto, os ângulos opostos pelo vértice são congruentes

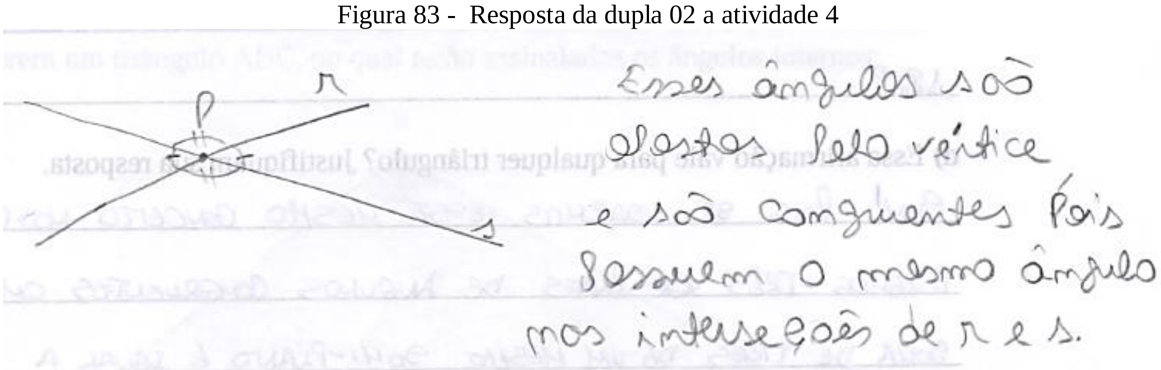
Fonte: dados da pesquisa

Com as filmagens, percebemos que a Dupla 04 faz a leitura da atividade e afirma que não lembra da prova para essa afirmação. L02 percebe que a medida do ângulo *a* mais a medida do ângulo *d* é igual a 180º, pois são suplementares, assim como a medida do ângulo *b* mais a medida do ângulo *c* é igual a 180º. Após essa colocação, eles ficam observando a figura construída e L03 tem um *insight*, conseguindo assim explicar a L02 como irá construir a prova.

A partir das construções feitas por L05 e pelas Duplas 01 e 04, inferimos que esses licenciandos já possuem um melhor entendimento das definições e na capacidade de provar a equivalência de diferentes definições do mesmo conceito, assim como já entendem e executam o raciocínio lógico formal e as provas formais possuem significado para eles, pois sabem que é um dos meios de verificar a validade de uma afirmação de forma genérica. De acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), esses licenciandos encontram-se no nível 4 de van Hiele, pois já são capazes de realizar provas formais e as figuras são usadas apenas algumas vezes para ajudar a escolher as propriedades adequadas para a sua prova.

Já a Dupla 02 (Figura 83) não realizou uma prova para a afirmação, apenas justificaram, por meio da observação, que são congruentes devido os ângulos possuírem a mesma medida nas intersecções de *r* e *s*.

Figura 83 - Resposta da dupla 02 a atividade 4



Fonte: dados da pesquisa

Com as filmagens, percebemos que eles tiveram bastante dificuldade em responder essa atividade, pois não lembravam dos conceitos necessários e de como elaborar uma prova para tal afirmação. Notamos também que L01 não compreendeu o que estava sendo pedido na atividade, pois pensou que também estava querendo saber sobre os ângulos adjacentes. Os licenciandos constroem a figura dos ângulos formados a partir de duas retas concorrentes em um ponto P, desistem de responder, pois não lembram como devem elaborar a prova e passam para as outras atividades. Apenas no final, antes de entregar, L01 faz a escrita de tal justificativa, considerando apenas o fato observado, sem utilizar conceitos ou propriedades para levantar mais afirmações. Segue o extrato do diálogo durante a resolução:

L01: vai, desenha aí.
L06: estás brincando comigo né?
L01: não. Desenha aí o que você entende.
L06 desenha e lê a questão.
L01: espera aí, isso aqui não é uma pergunta não. Não entendi um negócio aqui. Esses ângulos são adjacentes ou opostos. Eu não entendi essa questão.
Pesquisadora: não entendeu o que?
L01: um negócio aqui em uma questão. Isso é só uma informação a mais?
Pesquisadora: é, é uma informação a mais. Porque forma quatro ângulos, tem adjacentes e tem opostos pelo vértice.
L01: eu achei que estava perguntando.

Na entrevista, buscamos compreender quais conceitos eles utilizaram para chegar a justificativa e L01 utiliza o conceito exposto na atividade 2, ao afirmar que se considerarmos uma reta dividindo o plano têm-se 180º em ambos os lados. Ao traçarmos uma reta concorrente a esta, teremos quatro ângulos que são dois a dois iguais. Contudo, esse conceito utilizado é apenas por observação, eles não apresentaram uma prova utilizando conceitos teóricos. Segue o extrato da entrevista:

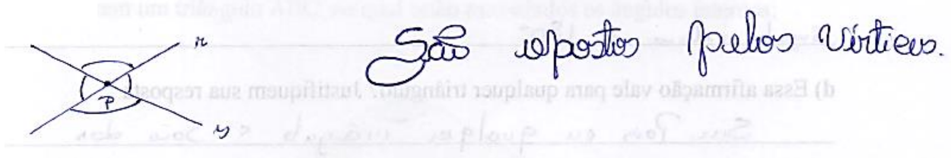
Pesquisadora lê a questão 4.
L06: quem deu a explicação foi você, eu só fiz copiar.
Pesquisadora: então vai...
L01: deixa eu lembrar... era para senhora ter mando uma foto para gente.
Pesquisadora: a questão 4 pedia para mostrar que ângulos opostos pelo vértice são congruentes.
L01: eu não estou lembrado de como é que eu cheguei a essa resposta.
L06: acho que deve ter colocado também uma linha... de referência.
L01: não.
L06: foi não? Chutando a pessoa acerta.
L01: vai... começa a chutar aí.
(...)
L06 lê novamente a resposta dada.
L06: eu creio que seja a mesma ideia do alterno interno... mas tem que fomentar isso...
Pesquisadora: hum...
L06: porque esse é congruente a esse e esse é congruente a esse.
Pesquisadora: isso... mas por que?
L06: aí você falou alguma coisa, mas eu não lembro mais não o que era.
Pesquisadora: pode fazer aqui... se for fazer extra, faz aqui.
L01: eita... é porque eu não me lembro direito... eu lembro de ter falado... tipo... se ela tem uma reta, se ela parte um plano... a parte de... de um lado vai ter 180º... e ângulos... ângulo de 180º... se essa... se tiver uma reta concorrente a essa... ela vai dividir em quatro... então vai dividir em quatro partes... vai ser duas a duas iguais... opostas, que vão ser iguais.
Pesquisadora: unhum.
L01: foi essa noção que eu usei para dizer isso.
Pesquisadora: certo.

Os licenciandos já sabiam que a afirmativa era verdadeira, bastava elaborar uma prova para tal afirmativa. Contudo, eles utilizaram exemplos e observações para chegar a tal justificativa, sem utilizar medições ou propriedades e conceitos para validar a afirmativa. Além disso, na entrevista, eles não lembraram dos conceitos que utilizaram para fazer a justificativa e fizeram apenas suposições quanto às justificativas utilizadas. Por conta disso, afirmamos que a prova construída pela dupla é do tipo *empirismo ingênuo*, pois não há explicitação de propriedades e conceitos inerentes a prova, como também eles se utilizam de suposições (casos particulares) para levantar afirmações. Segundo Balacheff (2000), os licenciandos asseguram a validade de um enunciado depois de tê-lo verificado em alguns casos. Essa validação é rudimentar e insuficiente e é uma das primeiras formas do processo de generalização.

Inferimos que a Dupla 02 busca uma verificação experimental da verdade da propriedade, utilizando um ou mais exemplos específicos. Além disso, esses licenciandos já começam a fazer esses tipos de experiências porque já reconhecem a figura geométrica com base em suas propriedades matemáticas. Contudo, eles ainda não entendem a estrutura lógica das definições e só são capazes de fornecer provas por meio de exemplos e casos bem particulares. De acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), esses licenciandos encontram-se no nível 2 de van Hiele, pois a prova construída dentro desse nível consiste em alguma verificação experimental por meio de um ou mais casos, como também já são capazes de utilizar e reconhecer propriedades matemáticas, mas sentem dificuldade em estabelecer conexões lógicas entre essas propriedades.

A Dupla 03 (Figura 84) também não realizou uma prova para a afirmação, apenas justificou, por meio da observação, que são opostos pelo vértice. Contudo, gostaríamos que ela verificasse e provasse que esses ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

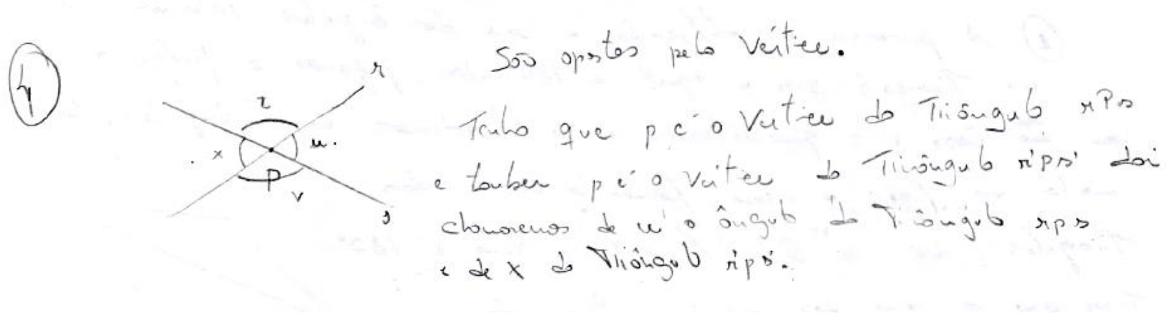
Figura 84 - Resposta da dupla 03 a atividade 4



Fonte: dados da pesquisa

Na folha de rascunho, encontramos que os licenciandos começaram a fazer uma construção de uma prova para a afirmação (Figura 85), considerando triângulos formados por essas retas concorrentes, mas eles não chegaram a concluir.

Figura 85 - Tentativa de prova da dupla 03 a atividade 4



Fonte: dados da pesquisa

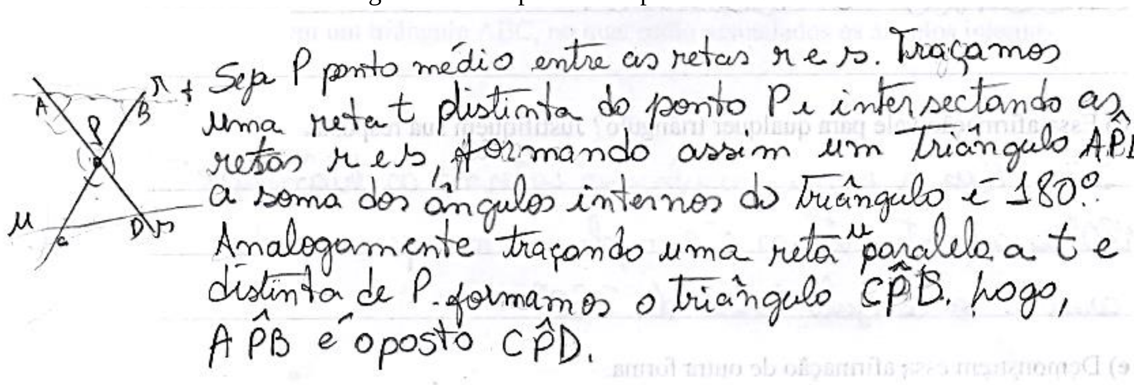
Com as filmagens, percebemos que eles dialogaram bastante na tentativa de construir uma prova para a afirmação, contudo não conseguiram desenvolvê-la. Notamos também que eles estavam sempre dizendo que não precisava provar, pois se aceitava e pronto, como também que o professor da disciplina de Tópicos em Geometria I havia feito a demonstração para essa afirmação, mas que eles não lembravam mais, pois fazia muito tempo. Devido a isso, na folha das atividades, eles apenas fazem a figura das retas concorrentes e afirmam que são opostos pelo vértice. Segue o extrato do diálogo durante a resolução:

> **L07:** a atividade dos ângulos opostos pelo vértice eu não demonstrei.
> **Pesquisadora:** o que?
> **L07:** eu dei aula sobre isso, mas não demonstra. Aceita e pronto. (...) a gente faz a simetria L08, desse triângulo com esse e desse com esse, e está provado.
> **L08 compara os triângulos e fala:** são congruentes né?
> **L07:** congruentes... agora como a gente vai dizer que eles são.
> **L08:** por absurdo. Supõe que não são e mostra que são (...) esse ângulo é o mesmo que esse. Os dois lados são iguais.
> **L07:** que é isso?
> **L08:** os dois lados são iguais.
> **L07:** por que?
> **L08:** porque eles são iguais.
> **L08:** o professor da disciplina mostrou isso.
> **L07:** e eu lembro lá do professor, faz tempo demais que eu estudei isso.
> **(**...)
> **L07 fez o desenho na atividade 4 e fala:** olhe, eles são opostos pelo vértice. Agora mostrar que eles são é outra coisa.

Na entrevista, buscamos compreender o motivo de não terem realizado a construção da prova, como também conversamos sobre o início da construção feita. Contudo, os licenciandos afirmaram que não desenvolveram porque não sabiam como continuar a prova construída na Figura 85 e também não lembravam dos conceitos necessários para essa construção. Eles ainda discutiram durante a resolução das atividades, mas não colocaram no papel o que estavam discutindo, acerca da prova de que os triângulos seriam congruentes. Por conta disso, afirmamos que a prova quase construída pela dupla é do tipo *experiência crucial*, pois não há explicitação das propriedades e conceitos inerentes a prova, como também eles se utilizam apenas da figura para levantar afirmações. De acordo com Balacheff (2000), os licenciandos utilizam um caso especial, geralmente não familiar, como também realizam experiências e começam a tomar consciência de que buscam por um resultado geral.

A Dupla 05 (Figura 86) também inicia a construção da prova parecida com a Dupla 03, mas a primeira faz uma explicação mais detalhada da formação dos triângulos, a partir das retas concorrentes, do que a segunda dupla. Contudo, eles também não chegam a desenvolver com maiores detalhes a construção da prova e já concluem que o ângulo $A\hat{P}D$ é oposto a $C\hat{P}D$, sem verificar e provar que são congruentes.

Figura 86 - Resposta da dupla 05 a atividade 4



Fonte: dados da pesquisa

Na entrevista, buscamos compreender o que a dupla queria provar com tal construção. Para isso, os licenciandos explicaram que mostrariam que os triângulos são semelhantes, pois os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são congruentes, por serem alternos internos, assim como os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$. E utilizariam a própria tese para mostrar que o ângulo $A\hat{P}D$ é congruente a $C\hat{P}D$. Essa discussão seria para mostrar que os triângulos formados são semelhantes, a partir do caso *ângulo ângulo*. Segue o extrato da entrevista:

> **Pesquisadora:** na atividade 4 era para provar que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes... aí vocês usam uma reta aqui e uma reta aqui pra poder... ter um triângulo... dizem que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º... com isso traçando uma reta *t* também teria outro triângulo... logo... $A\hat{P}D$ é oposto a $C\hat{P}D$... são opostos... certo... e congruentes?
> **L09:** que eles são congruentes?
> **Pesquisadora:** é, teria que mostrar essa parte...
> **L09:** a gente não concluiu não... aí teria que fechar totalmente o...
> **L04:** era...
> **L09:** o quadrado.
> **L04:** aí no caso seria congruente o ângulo de... esse ângulo debaixo de D com esse de A, por conta da transversal...
> **Pesquisadora:** e o que mais?
> **L09:** e o vice-versa aí... o outro... B com C... e dá tudo certo também...
> **Pesquisadora:** certo.

Ao mostrar que esses ângulos são congruentes, teríamos que o ângulo $A\hat{P}D$ é congruente a $C\hat{P}D$, pois, por termos triângulos semelhantes e sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º, além de termos dois ângulos de medidas iguais, teríamos o terceiro também de igual medida. Contudo, toda nossa discussão fica apenas na inferência do que eles queriam explicar, pois não há registro na entrevista dessas conclusões a que chegamos. Por conta disso, afirmamos que a prova quase construída pela dupla também é do tipo *experiência crucial*, uma vez que não há explicitação das propriedades e conceitos inerentes a prova, como também eles se utilizam apenas da figura para levantar afirmações. Além disso, eles utilizaram apenas observações e um exemplo bem específico para chegar a tal justificativa.

A partir das construções feitas pelas Duplas 03 e 05, inferimos que elas buscam uma verificação experimental da verdade da propriedade, utilizando um exemplo bem particular. Além disso, esses licenciandos já começam a fazer esses tipos de experiências porque já reconhecem a figura geométrica com base em suas propriedades matemáticas. Contudo, eles ainda não entendem a estrutura lógica das definições e só são capazes de fornecer provas por meio de exemplos e casos bem particulares. De acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), esses licenciandos encontram-se no nível 2 de van Hiele, pois a prova construída dentro desse nível consiste em alguma verificação experimental por meio de um ou mais casos, como também já são capazes de utilizar e reconhecer propriedades matemáticas, mas ainda sentem dificuldade em estabelecer conexões lógicas entre essas propriedades.

Ademais, ressaltamos que a Dupla 03 já sabia que a afirmativa era verdadeira, bastava apenas elaborar uma prova para tal afirmativa. Contudo, esses licenciandos não conseguiram desenvolver a prova e utilizaram observações e um exemplo bem específico para chegar a tal justificativa. Além disso, na entrevista, eles não lembraram dos conceitos que utilizaram, como também não conseguiram finalizar, verbalmente, a construção feita, pois para eles isso não era necessário, uma vez que sabiam que a afirmativa é verdadeira. O que corrobora as ideias de Jaime e Gutiérrez (1990), ao afirmarem que essa reação é típica de alunos que estão no nível 3 ou abaixo, uma vez que não entendem o porquê de o professor provar determinado resultado, se eles já sabem que é verdadeiro.

De modo geral, percebemos que, em comparação da atividade 3 para a 4, apenas uma dupla oscilou de nível, as demais permaneceram nos mesmos níveis de pensamento geométrico de uma atividade para outra. A Dupla 04, na atividade 3 se encontrava no nível 2 construindo provas do tipo *empirismo ingênuo*, enquanto que nessa atividade, encontra-se no nível 4 construindo uma prova do tipo *experiência mental*. Isto quer dizer que em atividades diferentes essa dupla esteve em níveis de pensamento geométrico diferentes e, consequentemente, elaborou provas de tipos diferentes.

Percebemos também que as Duplas 02 e 05 permaneceram no mesmo nível de uma atividade para outra (nível 2), contudo os tipos de prova elaborados foram diferentes. A Dupla 02 na atividade 3 construiu provas do tipo *experiência crucial* e na atividade 4 construiu provas do tipo *empirismo ingênuo*, já a Dupla 05 na atividade 3 construiu provas do tipo *empirismo ingênuo* e na atividade 4 construiu provas do tipo *experiência crucial*. Embora tenham sido tipos de prova diferentes, essas duplas continuaram elaborando provas dentro das *pragmáticas*, ou seja, elas ainda recorrem a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar as afirmações matemáticas.

Isso vem a corroborar as ideias apresentadas por Nasser (1992) e Andrade e Nacarato (2004) ao afirmarem que um determinado aluno pode apresentar características de dois níveis diferentes em tópicos distintos da Geometria, sendo possível transitar entre um nível e outro imediatamente anterior ou posterior a resolução de uma mesma atividade. Além disso, embasa também a discussão trazida por Nasser e Sant'Anna (2010) ao argumentarem que um aluno também pode raciocinar em um nível sem ter atingido completamente o nível anterior. Ou seja, esses resultados corroboram a primeira crítica apresentada ao modelo de van Hiele acerca do caráter hierárquico de seus níveis, discutida em Oliveira (2012) e apresentada na seção 2.4 do Capítulo 2.

Percebemos também que, dependendo do período em que o licenciando se encontra no curso, há esquecimento maior do que estudou nas disciplinas, em especial na de Tópicos em Geometria I. Por exemplo, as Duplas 03 e 05 possuem licenciandos entre o 8º e 10º período do curso e nessa atividade eles só conseguiram elaborar provas do tipo *experiência crucial*, que estão dentro das *provas pragmáticas*, em que os licenciandos buscam verificar a validade de determinada afirmação por meio de testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos. Além disso, a contradição que notamos é que os licenciandos dessas duas duplas, estando próximos de concluir o curso, não realizaram, nessa atividade, provas do tipo *experiência mental*, pois diziam que já sabiam que os teoremas e afirmações eram verdadeiros.

Nessa atividade verificamos que apenas L05 e as Duplas 01 e 04 estavam no nível 4 de van Hiele, pois podiam entender e escrever provas formais e algumas vezes utilizar figuras específicas apenas para ajudar a selecionar as propriedades adequadas para a elaboração da prova, uma vez que já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário desenvolver uma sequência de implicações com base em propriedades já estabelecidas. Por conta disso, esses licenciandos foram os únicos que conseguiram elaborar provas do tipo *experiência mental*, validando a afirmação de forma genérica.

As Duplas 02, 03 e 05 estavam no nível 2 de van Hiele, pois podiam provar a afirmação a partir da verificação experimental de um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, esses licenciandos podiam se convencer apenas com um exemplo especial ou podiam precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Por conta disso, as Duplas 03 e 05 conseguiram elaborar provas do tipo *experiência crucial*, uma vez que verificaram a afirmação a partir de um caso bem especial, geralmente não familiar, enquanto que a Dupla 02 elaborou provas do tipo *empirismo ingênuo*, pois precisou verificar a validade da afirmação apenas para um caso particular de ângulos.

Portanto, conseguimos averiguar concretamente as articulações estabelecidas no Capítulo 4, verificando que os licenciandos que estavam efetivamente no nível 2 de van Hiele elaboravam provas do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, utilizando alguns exemplos específicos ou exemplos bem particulares para validar as afirmações. E os licenciandos que estavam efetivamente no nível 4 de van Hiele conseguiram elaborar provas do tipo *experiência mental*, utilizando o raciocínio lógico formal e os conceitos teóricos corretamente.

6.2.5 Análise da atividade 5

A seguir são apresentadas as análises *a priori* e *a posteriori* da atividade 5 (Figura 87), que diz respeito à soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero.

Figura 87 - Atividade 5

5) (adaptado de BUSQUINI e SANTOS, 2011) Provem se a afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

"Quando se somam as medidas dos ângulos internos de um quadrilátero, o resultado é sempre 360°".

Fonte: adaptada de Busquini e Santos (2011)

6.2.5.1 Análise *a priori* da atividade 5

A atividade tem por objetivo estudar as estratégias que os licenciandos irão utilizar para provar que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre 360º. Os conhecimentos matemáticos envolvidos são: diagonais de um quadrilátero, o teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, sistema de equações, propriedades dos tipos específicos de quadriláteros (quadrado, retângulo, etc.), fórmula da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo, dependendo da forma como os licenciandos irão construir a sua prova. Aqui a dificuldade pode estar associada aos licenciandos não lembrarem dos conceitos necessários para a prova, como também em como se deve elaborar e construir a prova para essa afirmação.

A partir do que foi discutido nos Capítulos 2 e 4, pode-se afirmar que os licenciandos que estejam no nível 1 não entendem o conceito de prova e por isso não sentem a necessidade de validar as afirmações. Caso estejam no nível 2, eles poderão provar a afirmação a partir da verificação experimental de um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, os licenciandos podem se convencer apenas com um exemplo especial ou podem precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Os licenciandos que estejam no nível 3 já são capazes de fazer deduções e provas informais, como também são capazes de dar razões informais para a verdade das propriedades. Caso estejam no nível 4, poderão entender e escrever provas formais. Além disso, algumas vezes os licenciandos podem utilizar figuras específicas apenas para ajudar a selecionar as propriedades adequadas para a prova, mas eles já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário desenvolver uma sequência de implicações com base em propriedades já estabelecidas (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994; GUTIÉRREZ e JAIME, 1998).

Ao analisarmos as justificativas e/ou argumentações utilizadas nessa atividade, os licenciandos que estão no nível 1 não desenvolvem uma prova, pois não a reconhece como necessária, uma vez que eles já sabem que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero será sempre 360º. Àqueles que estão no nível 2 podem verificar a validade da afirmação a partir de casos particulares de quadriláteros, utilizando os ângulos internos, por exemplo, do quadrado e do retângulo com o intuito de validar a afirmação. Nesse nível, os licenciandos também podem considerar, por exemplo, um caso bem especial como a fórmula da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo ($S = (n - 2) \times 180°$), substituindo *n* pelo número de lados de um quadrilátero (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

Os licenciandos que estão no nível 3 podem construir um exemplo bem geral (ainda manipulativo) para provar a afirmação, o que poderia ter sido feito por meio de conceitos e propriedades. Por exemplo, considerar um quadrilátero (particular ou qualquer), dividi-lo a partir de uma de suas diagonais e utilizar o conceito da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo para validar a afirmação de forma manipulativa. Além disso, poderiam utilizar por exemplo os conceitos de retas perpendiculares, construindo assim um quadrado ou um retângulo e validando a afirmação da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero também a partir da manipulação de um caso bem geral. Àqueles que estão no nível 4 podem provar que é verdade a partir de conceitos teóricos (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

Estabelecendo uma articulação com os tipos de prova de Balacheff (2000), os licenciandos que estão no nível 1 não produzirão provas, deixando a questão em branco.

Àqueles que estão no nível 2, podem produzir provas do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, utilizando um ou alguns exemplos de quadriláteros ou também fórmulas para validar a afirmação. Os licenciandos que estão no nível 3 justificarão a partir do *exemplo genérico*, validando informalmente a afirmação, pois seu raciocínio lógico ainda continua apoiado pela manipulação. Àqueles que estão no nível 4, escreverão provas do tipo *experiência mental*, validando a afirmação de forma genérica.

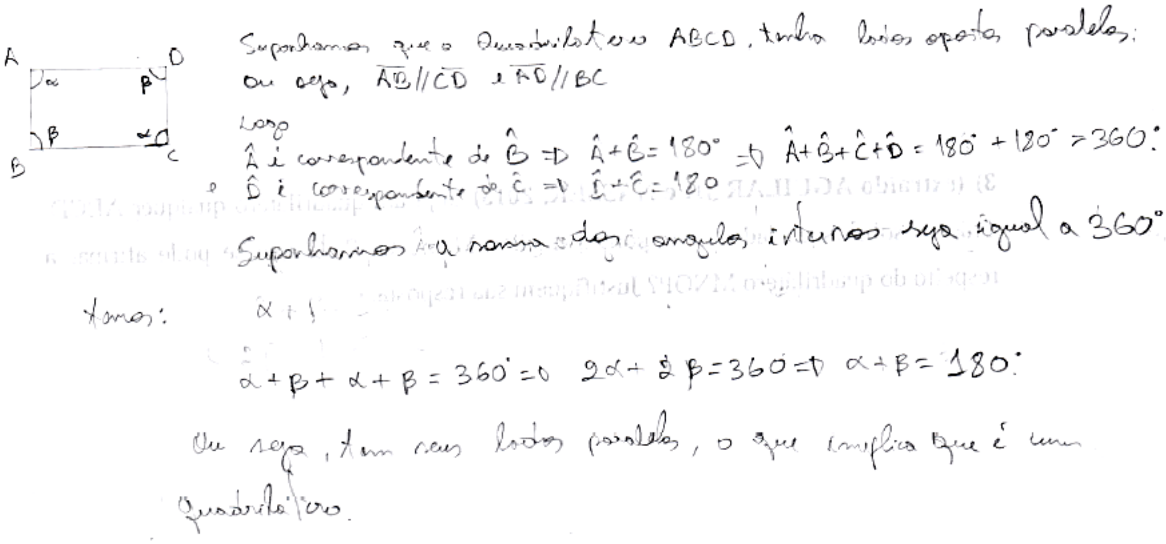
6.2.5.2 Análise das produções dos licenciandos na atividade 5

A atividade não fornecia figura e para responde-la os sujeitos pesquisados poderiam ou não fazer a sua construção. A atividade pede para provar se a afirmativa é verdadeira ou falsa: *"Quando se somam as medidas dos ângulos internos de um quadrilátero, o resultado é sempre 360º"*. Podemos perceber que algumas duplas utilizaram o teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo para verificar a validade da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero. Outros utilizaram propriedades específicas de alguns quadriláteros para chegar à conclusão de que é verdade. A partir das resoluções, percebemos que apenas as Duplas 01 e 04 conseguiram construir provas do tipo *experiência mental*, validando dedutivamente que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre 360º.

A Dupla 01 (Figura 88) utilizou algumas propriedades do retângulo para chegar à conclusão de que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º, como também utilizou o conceito de lados paralelos, o que considera apenas alguns quadriláteros notáveis. Embora os licenciandos tenham utilizado propriedades específicas de alguns quadriláteros, eles mostraram que a afirmação é verdadeira de maneira genérica.

Notamos que os licenciandos fizeram a ida da afirmação, provando que se temos um quadrilátero, a soma das medidas de seus ângulos internos é 360º, como também fizeram a volta, que se a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono for 360º, então ele será um quadrilátero. A partir das filmagens, percebemos que os licenciandos pouco discutiram, L11 fez a prova e L10 concordou com o que foi construído.

Figura 88 - Resposta da dupla 01 a atividade 5



Suponhamos que o Quadrilatero ABCD, tenha lados opostos paralelos: ou seja, $\overline{AB}//\overline{CD}$ e $\overline{AD}//\overline{BC}$

Logo

$\hat{A}$ é correspondente de $\hat{B} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=180°$ $\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=180°+180°=360°$.

$\hat{D}$ é correspondente de $\hat{C} \Rightarrow \hat{D}+\hat{C}=180°$

Suponhamos que a soma dos ângulos internos seja igual a 360°

temos: $\alpha + \beta$

$\alpha+\beta+\alpha+\beta=360° \Rightarrow 2\alpha+2\beta=360° \Rightarrow \alpha+\beta=180°$.

Ou seja, tem seus lados paralelos, o que implica que é um Quadrilátero.

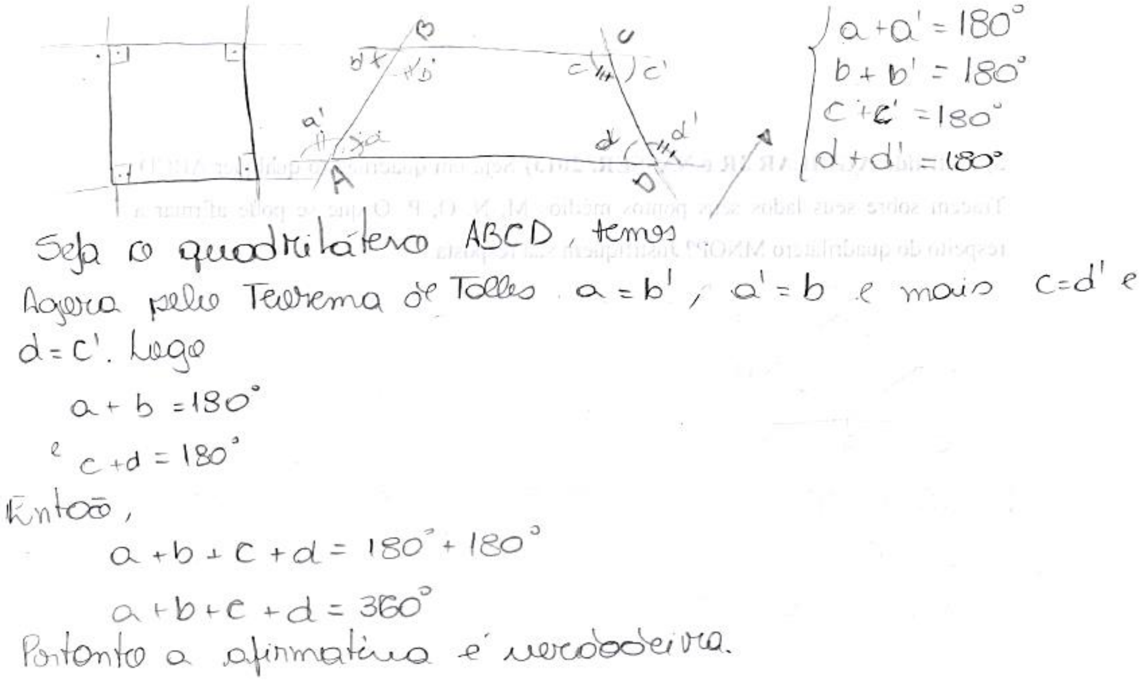
Fonte: dados da pesquisa

Como a dupla 01 não utilizou formalidade e rigor para mostrar a validade da afirmação, como também não utilizou conceitos mais gerais para verificar a afirmação, consideramos que eles fizeram uma prova do tipo *experiência mental*. Segundo Balacheff (2000), os alunos, ao utilizarem esse tipo de prova, afirmam a validade de uma proposição de forma genérica, não fazem mais referência a casos particulares e a validação é sustentada somente pela teoria.

A Dupla 04 (Figura 89) também utiliza conceitos de ângulos suplementares (ângulo interno com o externo adjacente a ele), ângulos alternos internos e sistema de equações. Por considerar que a soma da medida de cada ângulo interno de um quadrilátero com a medida do ângulo externo adjacente a cada um é igual a 180º e que, pelo teorema das retas paralelas cortadas por uma transversal, e não pelo teorema de Tales, obtemos ângulos congruentes por serem alternos internos, então essa dupla deduz que $a + b = 180º$ e que $c + d = 180º$, somando essas duas equações, obtêm-se que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360º.

Por conta disso e pela dupla não utilizar formalidade e rigor para mostrar a validade da afirmação, como também não utilizar conceitos mais gerais para verificar a afirmação, consideramos que esses licenciandos elaboraram uma prova do tipo *experiência mental*.

Figura 89 - Resposta da dupla 04 a atividade 5



Fonte: dados da pesquisa

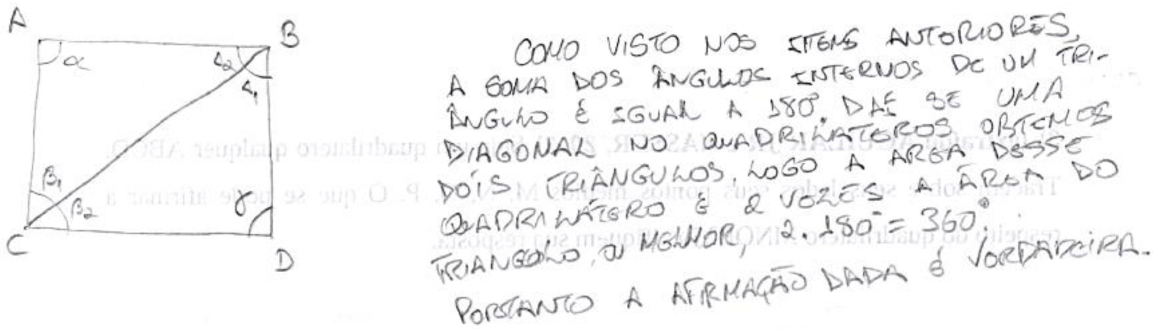
Com as filmagens, percebemos que os licenciandos discutem que devem trabalhar com um quadrilátero qualquer, o conceito de retas paralelas e de ângulos alternos internos, mas que para esse último conceito eles não lembravam o nome. L02 orienta a parte escrita de L03 e é possível perceber que eles utilizam a palavra demonstração, mas sabem que não estão escrevendo corretamente, pois não estão detalhando o processo e os conceitos. Segue o extrato do diálogo durante a resolução:

> **L03:** aqui a gente tem retas paralelas.
> **L02:** aqui tem aquele negócio desse aqui ser igual a esse e esse igual a esse.
> **L03:** eu lembro de alguma coisa de perpendicular.
> **L02:** mas aí não dá para a gente generalizar... por que não tem que ser qualquer quadrilátero?
> **L03:** ah é.
> **L02:** mas pode ser um trapézio...
> **L03 escreve e L02 concorda.**
> **L02 pede para L03 acrescentar:** seja um quadrilátero ABCD, temos... para não ficar tão assim...
> **L02:** agora... as demonstrações estão meio rápidas sabe, professora?
> **L03:** sabe quando você sabe que está errado.
> **L02:** não, não... é porque a gente não está escrevendo. A senhora entende, não é?
> **Pesquisadora:** sim.
> **L02:** é porque a gente tem que escrever tudo, não é?
> **Pesquisadora:** é... tudo detalhado.

A partir das construções feitas pelas Duplas 01 e 04, inferimos que elas já possuem um melhor entendimento das definições e na capacidade de provar a equivalência de diferentes definições do mesmo conceito, assim como já entendem e executam o raciocínio lógico formal e as provas formais possuem significado para elas, pois sabem que é um dos meios de verificar a validade de uma afirmação de forma genérica. De acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), esses licenciandos encontram-se no nível 4 de van Hiele, pois já são capazes de realizar provas matemáticas formais e as figuras são utilizadas apenas algumas vezes para ajudar a escolher as propriedades adequadas para a sua prova.

Já a Dupla 02 (Figura 90) utilizou os conceitos de diagonal de um quadrilátero e o teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Para isso, eles construíram um quadrilátero com a diagonal $\overline{BC}$, dividindo-o em dois triângulos ABC e DBC. Por sabermos que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º, então a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é duas vezes 180º, que é igual a 360º. Contudo, na escrita eles utilizaram o conceito de que a área do quadrilátero é duas vezes a área do triângulo, o que está correto, mas este conceito não deve ser definido por “$2 \cdot 180° = 360°$”, pois são conceitos distintos.

Figura 90 - Resposta da dupla 02 a atividade 5



Fonte: dados da pesquisa

Com as filmagens, percebemos que houve pouca discussão durante a resolução dessa atividade. L06 perguntou a L01 se tinha que construir um quadrilátero, ele desenha, questiona quais ângulos ele deve colocar e por que dá 360º. L01 pede para ele desenhar uma diagonal e então L06 responde afirmando que é porque a soma das medidas dos ângulos internos de um dos triângulos é 180º e a do outro também. Concluindo assim a discussão acerca da resolução da atividade e com isso L01 elabora a justificativa para a veracidade da afirmação.

Na entrevista, questionamos o motivo de terem utilizado o conceito de área e logo após afirmarem que se tratava de duas vezes 180º. Então eles explicaram que queriam dizer que a figura seria dividida por dois triângulos e, devido a isso, a área do quadrilátero seria igual a duas vezes a área do triângulo. Mas, logo após consertarem a escrita, eles voltaram a afirmar que, devido a isso, a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é duas vezes a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Além disso, justificaram que não lembravam direito dos conceitos que estavam utilizando, mas que sabiam que tinham estudado. Segue o extrato da entrevista:

> **Pesquisadora:** aqui vocês usaram o conceito de área...
> **L06:** como a gente fez o conceito de área aqui e não fez na outra? Foi?
> **L01:** eu tinha falado naquela hora, eu tenho certeza.
> **Pesquisadora lê a resposta da atividade 5.**
> **Pesquisadora:** não seria área, não é? Porque depois disso vocês colocaram... "ou melhor, duas vezes 180º igual a 360º".
> **L01:** não... não era área... seria duas vezes a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.
> **Pesquisadora:** isso.
> **L01:** era só isso?
> **Pesquisadora:** era.
> **L01:** foi, foi, erro. A gente não se tocou.
> **Pesquisadora:** essa... essa prova está correta, mas só esse conceito de área que foi usado.
> **L01:** só era... só era ter falado que era a soma... que era o dobro da soma das medidas dos ângulos internos...
> **Pesquisadora:** de um triângulo.
> **L01:** que corresponde a área de dois triângulos. Poderia ser isso né?
> **Pesquisadora:** não corresponde a área né?!
> **L01:** não, eu digo assim... a figura, ela vai corresponder a soma de duas áreas de dois triângulos.
> **Pesquisadora:** isso.
> **L01:** logo os ângulos vão ser iguais a soma das medidas dos ângulos dos dois triângulos.
> **Pesquisadora:** ah... então era isso que vocês queriam dizer.
> **L01:** foi isso que quis dizer.
> **Pesquisadora:** porque também diz respeito a área, mas que não é duas vezes 180º. Porque se for duas vezes 180º, você está relacionando a soma das medidas dos ângulos internos. Mas aí eu compreendi essa escrita de vocês...
> **L01:** lembrava de nada... não lembrava o conceito exatamente...
> **L06:** os conceitos... quais conceitos...
> **L01:** a gente sabe que já viu isso, mas não soube colocar exatamente no papel.
> **Pesquisadora:** certo.

A prova construída pela Dupla 02 busca justificativas por meio de conceitos relacionados à soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, contudo ainda não diz respeito a uma generalização, ou seja, os licenciandos buscaram uma explicação das razões da validade de uma afirmação a partir de propriedades, características e estruturas envolvidas no teorema, mas eles ainda se utilizam de exemplos práticos para validar essa afirmação. Segundo Balacheff (2000), a Dupla 02 construiu uma prova do tipo *exemplo genérico*.

O licenciando 5 (Figura 91) também utilizou o conceito da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, sem fazer utilização de uma figura. Percebemos que o licenciando não utiliza conceitos genéricos e não verifica se realmente é verdadeiro, apenas pela visualização mental do quadrilátero dividido em dois triângulos retângulos, ele conclui que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º.

Figura 91 - Resposta de L05 a atividade 5

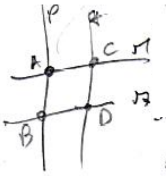
Sabemos que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°. O quadrilátero é formado por dois triângulos, ou seja 2·180° = 360°.

Fonte: dados da pesquisa

A prova construída por L05 também busca justificativas por meio de conceitos relacionados à soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, contudo ainda não diz respeito a uma generalização, pois ele ainda se utiliza de exemplos práticos para validar a afirmação. Segundo Balacheff (2000), L05 também construiu uma prova do tipo *exemplo genérico*.

A Dupla 05 (Figura 92) utilizou conceitos de retas paralelas e retas perpendiculares. Os licenciandos construíram, inicialmente, retas paralelas *r* e *s* e duas outras retas paralelas *p* e *q*, intersectando *r* com as retas *p e q*, respectivamente, nos pontos A e C e a interseção da reta *s* com as retas *p* e *q*, respectivamente, nos pontos B e D, formando assim um quadrilátero específico (um quadrado), já que mais à frente eles afirmam que os ângulos medem 90º por *p* ser perpendicular à *r* e *s*, assim como *q* ser perpendicular à *r* e *s*.

Figura 92 - Resposta da dupla 05 a atividade 5



Seja as retas r e s paralelas, traçamos duas retas p e q paralelas entre si. Seja A ponto em comum entre p e a reta r e B ponto em comum P e s, respectivamente seja C ponto de q e r e D ponto de q e s, fomentamentamos assim um quadrilátero, Observe que o ângulo do Ponto $\hat{A}$ = 90° pois p e r é perpendiculares, e o ponto $\hat{C}$ = 90° pois as retas q e r também são perpendiculares, Analogamente, os pontos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ também formam 90°. logo, $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} = 360°$

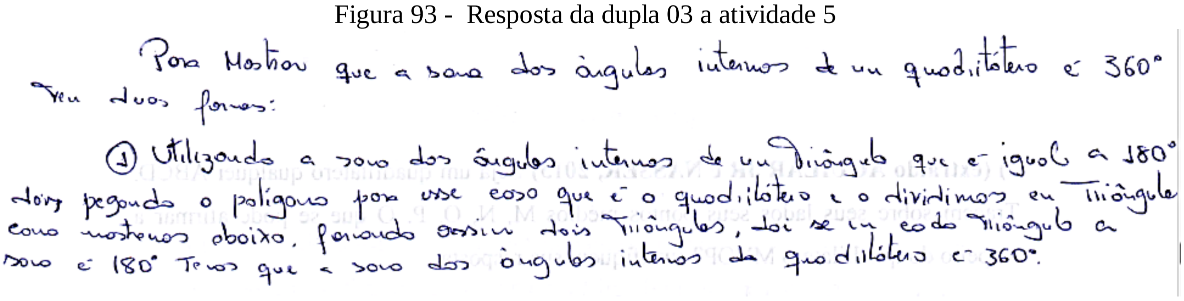
Fonte: dados da pesquisa

Percebemos que os licenciandos elaboraram uma prova que deveria ser feita de forma genérica, mas que acabam utilizando um exemplo bem específico, nesse caso um quadrado, pois eles utilizam as medidas dos quatro ângulos valendo 90º. Assim, a prova construída pela dupla 05 também busca justificativas por meio de conceitos relacionados às retas paralelas e retas perpendiculares, contudo ainda não diz respeito a uma generalização, pois eles acabam utilizando exemplos práticos para validar a afirmação. Segundo Balacheff (2000), a dupla também construiu uma prova do tipo *exemplo genérico*.

A partir das construções feitas por L05 e pelas Duplas 02 e 05, percebemos que as provas elaboradas se encontram na transição entre as *provas pragmáticas* e *intelectuais*, por isso os licenciandos sabem que buscam por uma generalização, ainda baseada em exemplos, mas procurando justifica-la com os conceitos relacionados ao teorema proposto. Inferimos que os licenciandos já são capazes de fazer tais experimentações, porque já conseguem interpretar e declarar definições, estando conscientes das condições necessárias e suficientes de uma propriedade. Além disso, eles procuram por alguma explicação informal baseada em propriedades matemáticas ou os exemplos utilizados são bem selecionados. De acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), esses licenciandos encontram-se no nível 3 de van Hiele, pois ainda não compreendem a prova formal em sua totalidade, como também não conseguem organizar uma sequência de raciocínio lógico que justifique suas observações, uma vez que ainda não sentem a necessidade de utilizar o raciocínio lógico formal.

Já a Dupla 03 (Figura 93) apresenta dois tipos de prova diferentes para validar a afirmação. Na primeira, os licenciandos utilizam o mesmo conceito apresentado pela Dupla 02 e por L05, partindo de uma das diagonais de um quadrilátero, obtêm-se dois triângulos retângulos, que sabemos que a soma das medidas dos ângulos internos de cada um é igual a 180º, como são dois, temos que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360º. Já na segunda, eles utilizam a fórmula estudada para encontrar a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer polígono convexo, $S = (n - 2) \cdot 180°$, onde n é o número de lados do polígono. Como um quadrilátero possui quatro lados, então eles deduzem que a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono é igual a 360º.

Figura 93 - Resposta da dupla 03 a atividade 5


Para Mostrar que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°
tem duas formas:
① Utilizando a soma dos ângulos internos de um triângulo que é igual a 180°
daí pegando o polígono para esse caso que é o quadrilátero e o dividimos em triângulo
como mostramos abaixo, formando assim dois triângulos, daí se em cada triângulo a
soma é 180° Temos que a soma dos ângulos internos do quadrilátero é 360°.

② Utilizando a fórmula $S=(N-2).180°$ onde S é a soma dos ângulos internos e n é a quantidade de lados do polígono, que para esse caso específico é o quadrilátero que possui 4 lados, Dai:

$S=(4-2).180$

$S= 2.180°$

$S = 360°$

Fonte: dados da pesquisa

Com as filmagens, percebemos que há pouco diálogo durante a resolução dessa atividade e que L07 elabora as duas provas e L08 concorda. Percebemos que a primeira prova elaborada pela dupla 03 envolve justificativas por meio de conceitos relacionados à soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, contudo ainda não diz respeito a uma generalização, ou seja, os licenciandos buscaram uma explicação das razões da validade de uma afirmação a partir de propriedades, características e estruturas envolvidas no teorema, mas eles ainda utilizam exemplos práticos para validar a afirmação. Segundo Balacheff (2000), a Dupla 03 construiu uma prova do tipo *exemplo genérico*.

Já na segunda prova elaborada, essa dupla utiliza um exemplo bem específico e trata-se da aplicação de uma fórmula, em que se pode encontrar a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer polígono convexo. Por conta disso, afirmamos que a segunda prova construída pela dupla é do tipo *experiência crucial*, pois ela utiliza um exemplo bem específico para validar a afirmação, como também utiliza apenas a aplicação de uma fórmula para chegar ao resultado. De acordo com Balacheff (2000), os licenciandos utilizam um caso especial, geralmente não familiar, como também realizam experiências e começam a tomar consciência de que buscam por um resultado geral.

Percebemos que a primeira construção se encontra na transição entre as *provas pragmáticas* e as *intelectuais* e a segunda se encontra dentro das *provas pragmáticas*, por isso os licenciandos sabem que buscam por uma generalização, ainda baseada em exemplos, mas procurando justifica-la com os conceitos relacionados ao teorema proposto. Inferimos que a Dupla 03 já é capaz de fazer tais experimentações, porque já consegue interpretar e declarar definições, estando consciente das condições necessárias e suficientes de uma propriedade. Além disso, ela procura por alguma explicação informal baseada em propriedades matemáticas ou os exemplos utilizados são bem selecionados. De acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), por ela apresentar dois tipos de prova diferentes, consideramos que a Dupla 03 está oscilando entre os níveis 2 e 3 de van Hiele, pois utiliza a verificação experimental por meio de um ou mais casos e ainda não compreende as provas formais em sua totalidade, como também não consegue organizar uma sequência de raciocínio lógico que justifique suas observações, uma vez que ainda não sente a necessidade de utilizar o raciocínio lógico formal.

De modo geral, percebemos que, em comparação da atividade 4 para a 5, duas duplas e o licenciando oscilaram de níveis de uma atividade para outra. A Dupla 02, na atividade 4 se encontrava no nível 2 construindo provas do tipo *empirismo ingênuo*, enquanto que nessa atividade, encontra-se no nível 3 construindo uma prova do tipo *exemplo genérico*. Já L05 estava no nível 4 na atividade 4 construindo provas do tipo *experiência mental* e nessa atividade encontra-se no nível 3, passando a construir provas do tipo *exemplo genérico*. A Dupla 05, na atividade 4 se encontrava no nível 2 construindo provas do tipo *experiência crucial,* enquanto que nessa atividade, encontra-se no nível 3 construindo provas do tipo *exemplo genérico.* Isto quer dizer que em atividades diferentes esses licenciandos estiveram em níveis de pensamento geométrico diferentes e, consequentemente, elaboraram provas de tipos diferentes.

Isso vem a corroborar as ideias apresentadas por Nasser (1992) e Andrade e Nacarato (2004) ao afirmarem que um determinado aluno pode apresentar características de dois níveis diferentes em tópicos distintos da Geometria, sendo possível transitar entre um nível e outro imediatamente anterior ou posterior a resolução de uma mesma atividade. Além disso, embasa também a discussão trazida por Nasser e Sant'Anna (2010) ao argumentarem que um aluno também pode raciocinar em um nível sem ter atingido completamente o nível anterior. Ou seja, esses resultados corroboram a primeira crítica apresentada ao modelo de van Hiele acerca do caráter hierárquico de seus níveis, discutida em Oliveira (2012) e apresentada na seção 2.4 do Capítulo 2.

Percebemos também que, dependendo do período em que o licenciando se encontra no curso, há esquecimento maior do que estudou nas disciplinas, em especial na de Tópicos em Geometria I. Por exemplo, as Duplas 03 e 05 possuem sujeitos que estão entre o 8º e 10º período do curso e nessa atividade eles elaboraram provas do tipo *experiência crucial* e *exemplo genérico*, que estão dentro das *provas pragmáticas* ou estão na transição, em que os licenciandos buscam verificar a validade de determinada afirmação por meio de testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos, como também podem considerar exemplos bem específicos para validar a afirmação. Além disso, a contradição que notamos é que esses licenciandos, estando próximos de concluir o curso, não realizaram, nessa atividade, provas do tipo *experiência mental*, pois diziam que já sabiam que os teoremas e afirmações eram verdadeiros.

Nessa atividade verificamos que apenas as Duplas 01 e 04 estavam no nível 4 de van Hiele, pois podiam entender e escrever provas formais e algumas vezes utilizar figuras específicas apenas para ajudar a selecionar as propriedades adequadas para a elaboração da prova, uma vez que já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário desenvolver uma sequência de implicações com base em propriedades já estabelecidas. Por conta disso, essas duplas foram as únicas que conseguiram elaborar provas do tipo *experiência mental*, validando a afirmação de forma genérica.

As Duplas 02 e 05 e L05 estavam no nível 3 de van Hiele, pois já são capazes de fazer deduções e provas informais, como também são capazes de dar razões informais para a verdade das propriedades, contudo seu raciocínio lógico ainda continua apoiado pela manipulação. Por conta disso, esses licenciandos construíram provas do tipo *exemplo genérico*, validando informalmente a afirmação, pois já sabiam que os exemplos não validam uma afirmação, mas ainda não sabiam trabalhar com o raciocínio lógico formal.

A Dupla 03 estava oscilando entre os níveis 2 e 3, pois podiam provar a afirmação a partir da verificação experimental de um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, esses licenciandos podiam se convencer apenas com um exemplo especial ou podiam precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado, como também podiam fazer deduções e provas informais, mas seu raciocínio lógico ainda continua apoiado pela manipulação. Por conta disso, essa dupla conseguiu construir dois tipos de prova, uma do tipo *experiência crucial*, pois verificou a afirmação a partir de um caso bem especial, aplicando a fórmula da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo, e a outra do tipo *exemplo genérico,* uma vez que verificou a afirmação a partir do teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

Portanto, conseguimos averiguar concretamente as articulações estabelecidas no Capítulo 4, verificando que os licenciandos que estavam efetivamente no nível 2 de van Hiele elaboravam provas do tipo *experiência crucial*, utilizando exemplos bem particulares para validar as afirmações. Os licenciandos que estavam efetivamente no nível 3 de van Hiele elaboraram provas do tipo *exemplo genérico,* utilizando exemplos e figuras, onde poderiam ter utilizado conceitos gerais. E os licenciandos que estavam efetivamente no nível 4 de van Hiele conseguiram elaborar provas do tipo *experiência mental*, utilizando o raciocínio lógico formal e os conceitos teóricos corretamente.

6.2.6 Análise da atividade 6

A seguir são apresentadas as análises *a priori* e *a posteriori* da atividade 6 (Figura 94), que diz respeito ao teorema de Pitágoras.

Figura 94 - Atividade 6

6) Provem que, em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos comprimentos dos catetos.

A prova que vocês acabaram de construir é válida para **qualquer** triângulo retângulo? Ao fazê-la, vocês provaram o **Teorema de Pitágoras**? Justifiquem.

Fonte: autoria própria

6.2.6.1 Análise *a priori* da atividade 6

A atividade tem por objetivo estudar as estratégias que os licenciandos irão utilizar para provar o teorema de Pitágoras. Além disso, eles deverão refletir sobre a construção feita, afirmando se é realmente válida para qualquer triângulo retângulo e, consequentemente, se o que eles acabaram de construir prova o teorema de Pitágoras. Os conhecimentos matemáticos envolvidos são: casos de congruência de triângulos, relações métricas de um triângulo retângulo, áreas de figuras geométricas e noções acerca de casos particulares e casos genéricos na Matemática, tudo depende da forma como os licenciandos irão construir a sua prova. Aqui a dificuldade pode estar associada aos licenciandos não lembrarem dos conceitos necessários para a prova, como também em como se deve elaborar e construir a prova para esse teorema. Além disso, do que eles entendem por casos particulares e casos genéricos na Matemática.

A partir do que foi discutido nos Capítulos 2 e 4, pode-se afirmar que os licenciandos que estejam no nível 1 não entendem o conceito de prova e por isso não sentem a necessidade de validar as afirmações. Caso estejam no nível 2, eles poderão provar a afirmação a partir da verificação experimental de um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, os licenciandos podem se convencer apenas com um exemplo especial ou podem precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Os licenciandos que estejam no nível 3 já são capazes de fazer deduções e provas informais, como também são capazes de dar razões informais para a verdade das propriedades. Caso estejam no nível 4, poderão entender e escrever provas formais. Além disso, algumas vezes os licenciandos podem utilizar figuras específicas apenas para ajudar a selecionar as propriedades adequadas para a prova, mas eles já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário desenvolver uma sequência de implicações com base em propriedades já estabelecidas (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994; GUTIÉRREZ e JAIME, 1998).

Ao analisarmos as justificativas e/ou argumentações utilizadas nessa atividade, os licenciandos que estão no nível 1 não desenvolvem uma prova, pois não a reconhece como necessária, uma vez que eles sabem que o teorema de Pitágoras é válido para todo triângulo retângulo. Àqueles que estão no nível 2 podem verificar a validade da afirmação a partir de casos particulares de triângulos retângulos, aplicando o próprio teorema para validar a tese, ou podem também utilizar construções com quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo bem particular, confirmando assim a sua veracidade. Os licenciandos que estão no nível 3 podem construir um exemplo bem geral (ainda manipulativo) para provar a afirmação, o que poderia ter sido feito por meio de conceitos e propriedades. Àqueles que estão no nível 4 podem provar que é verdade a partir de conceitos teóricos (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

Estabelecendo uma articulação com os tipos de prova de Balacheff (2000), os licenciandos que estão no nível 1 não produzirão provas, deixando a questão em branco. Àqueles que estão no nível 2, podem produzir provas do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, utilizando um ou alguns exemplos de triângulos retângulos ou ainda quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo bem particular para validar a afirmação. Os licenciandos que estão no nível 3 justificarão a partir do *exemplo genérico*, validando informalmente a afirmação, pois seu raciocínio lógico ainda continua apoiado pela manipulação. Àqueles que estão no nível 4, escreverão provas do tipo *experiência mental*, validando a afirmação de forma genérica.

Além disso, também é pedido na atividade que os licenciandos digam se o que eles acabaram de provar é válido para qualquer triângulo retângulo e se, ao fazê-la, estarão provando o teorema de Pitágoras. Dependendo da construção e do entendimento desses sujeitos com respeito a casos particulares e casos genéricos, caso tenham utilizado apenas casos particulares, eles podem afirmar que vale para todo triângulo e que provaram o teorema de Pitágoras, pois se contentaram com a construção feita. Estando, segundo Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), no nível 2 de van Hiele. Caso eles saibam que exemplos não constituem efetivamente uma justificativa para uma afirmação e que, por isso, é necessário a generalização, então eles afirmarão que não vale, pois construíram um caso particular. Estando, segundo Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), nos níveis 3 e 4 de van Hiele, havendo distinção apenas na linguagem adotada.

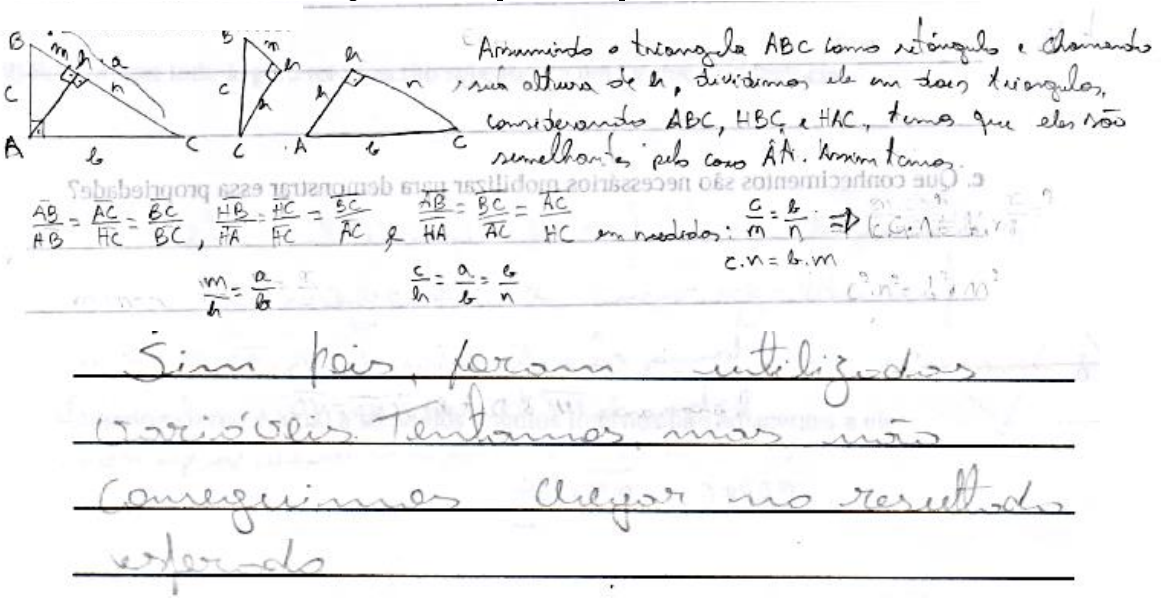
6.2.6.2 Análise das produções dos licenciandos na atividade 6

A atividade pede para provar que *"em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos comprimentos dos catetos".* Ou seja, a atividade pedia uma prova para o teorema de Pitágoras. Após a prova construída pelos licenciandos, pergunta-se: *"A prova que vocês acabaram de construir é válida para* ***qualquer*** *triângulo retângulo? Ao fazê-la, vocês provaram o* ***Teorema de Pitágoras****? Justifiquem".*

Podemos perceber que alguns licenciandos utilizaram casos particulares para verificar a validade do teorema de Pitágoras, outros não conseguiram desenvolver a prova e alguns desenvolveram uma prova utilizando a própria tese. A partir das resoluções, notamos que apenas a Dupla 01 conseguiu elaborar uma prova do tipo *experiência mental*, validando dedutivamente o teorema de Pitágoras. Além disso, notamos que nenhum dos licenciandos utilizaram a Atividade 1 como um dos tipos de prova para esse teorema, especificamente a comprovação da relação pitagórica feita de forma algébrica no item *c* da referida atividade.

A Dupla 01 (Figura 95) começou a construir uma prova do tipo *intelectual*, porém não conseguiu finalizá-la, pois não sabia como relacionar os três triângulos semelhantes e fazer as relações corretamente. Percebemos que os licenciandos iniciaram corretamente, utilizando adequadamente os casos de semelhança entre triângulos, contudo, ao relacionar os lados homólogos, eles não conseguiram associa-los de forma a obter equações que ajudassem a chegar a $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 95 - Resposta da dupla 01 a atividade 6

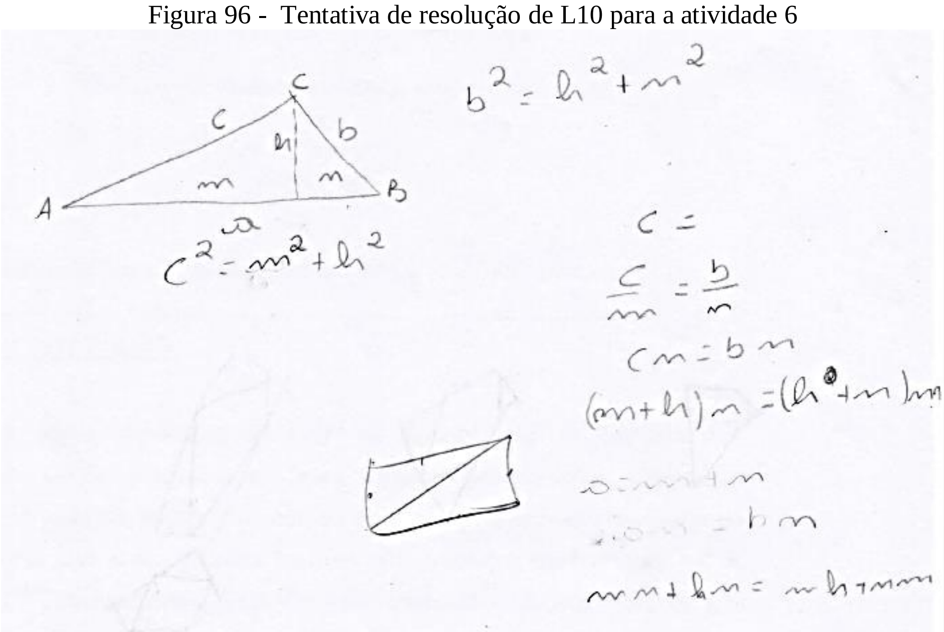


Fonte: dados da pesquisa

A partir dessa resolução, percebe-se que a Dupla 01 considerou HBC como um dos triângulos formados após traçar a altura do triângulo retângulo ABC, mas isso não é verdadeiro, o correto seria HAB. Além disso, para que os licenciandos conseguissem fazer as relações corretamente, eles deveriam ter considerado os triângulos HAB e ABC como semelhantes e ao verificarem as condições entre os ângulos correspondentes congruentes e os lados correspondentes (homólogos) proporcionais, teriam encontrado que $c^2 = a \cdot m$, como também ao considerar que os triângulos HAC e ABC são semelhantes e verificando as condições entre os ângulos correspondentes congruentes e os lados homólogos proporcionais, os licenciandos teriam encontrado $b^2 = a \cdot n$. Ao somarem essas duas equações e sabendo que $a = m + n$, teriam chegado a conclusão que $a^2 = b^2 + c^2$.

Com as filmagens, percebemos que os licenciandos tiveram dificuldades para elaborar uma prova para esse teorema. Além disso, eles não conseguiram finalizar a que iniciaram. Durante a resolução, L11 não lembrou da palavra semelhante ao relacionar dois triângulos e acabou questionando a pesquisadora. L11 mostrou a construção feita a L10 e afirmou que se perdeu demais. L10 também tentou fazer uma prova, a partir do que L11 desenvolveu, mas também não conseguiu e afirmou que sabia que era do jeito que L11 estava fazendo. Na folha de rascunho, encontramos a tentativa de resolução de L10 (Figura 96), buscando desenvolver a prova a partir dos conceitos de relações métricas em um triângulo retângulo, mas também não conseguiu estabelecer as associações corretamente para encontrar a relação pretendida e, por conta disso, não conseguiu finalizá-la.

Figura 96 - Tentativa de resolução de L10 para a atividade 6



Fonte: dados da pesquisa

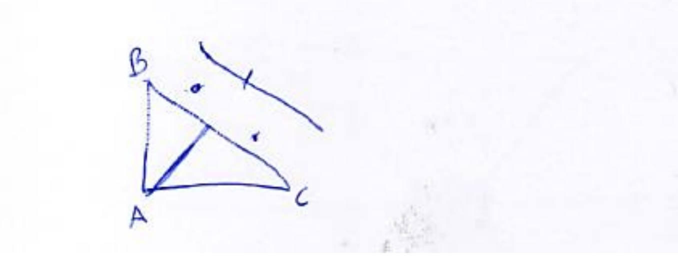
Na entrevista, buscamos entender o que foi feito e verificar se eles conseguiriam desenvolver novamente, mas isso não foi possível, pois eles não conseguiram e acabaram fazendo a mesma associação. Os licenciandos argumentaram que a ideia de como fazer eles sabiam, mas que o tempo estava terminando e o ônibus deles estava chegando, devido a isso eles não conseguiram finalizar, pois precisavam de mais tempo para desenvolver. Além disso, eles acabaram fazendo da mesma maneira que a anterior e por isso não finalizou. Segue o extrato da entrevista:

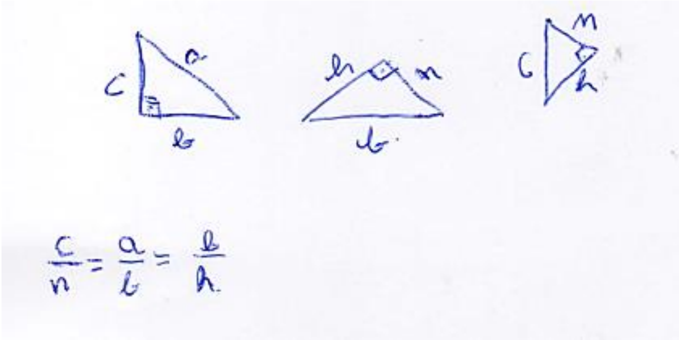
> **Pesquisadora:** você comparou esses dois triângulos retângulos...
> **L11:** só que na verdade eu estava comparando três...
> **Pesquisadora:** tinha que ser três para poder sair.
> **L11:** é... então... foi na hora das medidas... porque assim por exemplo, eu não tenho esse? Eu tenho esse aqui.
> **Pesquisadora:** o maior.
> **L11:** o maior.... aí eu considero a altura né?! Nisso fica um triângulo, dois triângulos, três triângulos com ele todinho.
> **Pesquisadora:** certo.
> **L11:** ele todo... aí fica esse triângulo aqui e esse outro aqui...
> **Pesquisadora:** isso.
> **L11:** eu vou comparar os três... quando eu vou comparando... no caso eu vou usar congruência... né isso?
> **Pesquisadora:** fica... coloca aqui *a*, *b*, *c*... que esse é o maior né?! (L11 construiu uma nova figura e passou a analisa-la e a compará-la com a anterior – Figura 97)
> **L11:** é.
> **Pesquisadora:** *a*, *b*, *c*... esse é esse? Não é?
> **L11:** é.
> **Pesquisadora:** então é *n*, *h* e *b*, não é?
> **L11:** não... espera aí.
> **Pesquisadora:** *n*... *h*... e *b*.
> **L11:** *n*, *h* e *b*. (lendo novamente)
> **Pesquisadora:** e esse outro é esse daqui... *m*, *h* e *c*.
> **L11:** *m*... é.
> **Pesquisadora:** pronto.
> **L11:** sim, aí vamos aqui... no caso... os três triângulos vão ser congruentes... pelo caso... que eu me esqueci agora... mas eu vou lembrar... porque quando eles são congruentes, tem que a equivalência de lados entre eles... equivalência não, a razão de lados entre eles será igual.
> **Pesquisadora:** isso.
> **L11:** no caso... a razão... por exemplo, a razão desse lado, que é esse lado aqui, desse lado sobre... o lado que vai ser... espera aí professora vamos... o *h* está aonde?
> **Pesquisadora:** não espera aí...
> **L11:** não, espera aí, deixa eu ver... porque tu vai desenvolver... esse *h* está aonde? Vamos descobrir agora... ângulo... (fica visualizando os desenhos para ver se consegue desenvolver). Semelhantes... pelo caso ângulo ângulo (AA).
> **Pesquisadora:** isso mesmo.
> **L11:** agora deixa eu achar o ângulo.
> **Pesquisadora:** isso aí, ângulo ângulo...
> **L11:** né? Eu tinha feito aqui oh professora... no dia... nesses dias eu estava estudando mesmo... é... pelo caso ângulo ângulo, eles são congruentes... Congruentes não, semelhantes. Aí eles são semelhantes, aí vale... o lado aqui... o lado aqui que é o problema.... (fica refletindo) espera aí.... deixa eu olhar aqui. (fica analisando a resolução feita anteriormente). Vai ser a altura... espera aí... cadê? Professora esse negócio de análise assim, de letrinha, é o que mata... *c* sobre *n*... *a* sobre *b*... e falta o que aqui? (...) espera aí...
> **Pesquisadora:** não vai sair também não...

L11: ahm? (...) não vai sair aqui não? É porque eu não estou querendo... começar nele mesmo, porque na verdade eu prefiro usar letra... as duas letras, no caso...
(...)
L11: eu preciso de um pouquinho de tempo...
Pesquisadora: é.
L11: é porque quando eu for desenrolar isso aqui, eu vou conseguir colocar a em evidência.
Pesquisadora: é.
L11: a em evidência, só que a em evidência quando eu... eu vou pegar esse lado maior... esse aqui e esse aqui, que eu chamei de m e n...
Pesquisadora: certo.
L11: ele vai ficar... professora... aqui... eu vou pegar... sim... vamos fazer a relação de novo... quando eu pegar esse triângulo que tem a... a semelhança ângulo ângulo... é ângulo ângulo mesmo né?
Pesquisadora: é.
L11: é, ângulo ângulo... quando eu for fazer a relação... que vai ter... não vai ter que a razão de lados entre eles é igual? Aí quando eu fizer a relação desse com esse... e desse com outro...
Pesquisadora: é.
L11: é desse com outro né?! Aí eu vou colocar a em evidência, aí eu sei que no final a fica igual a esse lado ao quadrado mais esse lado ao quadrado. Porque esse ladinho aqui, esse lado todinho do triângulo maior quando eu for fazer essas correspondências ele vai está dividido, porque justamente eu dividi aqui em dois triângulos.
Pesquisadora: isso.
L11: aí quando chega o final... que eu for usar os ladinhos todinhos... olha está vendo que eu fiz até aqui oh?
Pesquisadora: sim...
L11: eu vou colocar... aí no final dá isso que a é igual a n ao quadrado mais m ao quadrado...
Pesquisadora: certo.
L11: o negócio é porque aqui tem que ser com calma, bem devagarzinho.... e eu prefiro usar assim mesmo. Só que é mais chato.
Pesquisadora: é, o segmento né?!
L11: o segmento.
Pesquisadora: a notação do segmento.
L11: porque o segmento a pessoa sabe onde é que está... eu fiz aqui para mim... foi mais ligeiro, mas...
Pesquisadora: certo... eu já entendi... já deu para entender.

Percebemos também que os licenciandos afirmaram que ao final da resolução encontrariam $a = m^2 + n^2$, o que não deveria acontecer, pois não dá para estabelecer tal relação a partir do teorema de Pitágoras e das nomeações feitas nas figuras. Na nova tentativa de resolução (Figura 97), feita durante a entrevista, L11 também não conseguiu estabelecer as associações corretamente e não conseguiu finalizar o que havia feito.

Figura 97 - Nova tentativa de resolução de L11 para a atividade 6





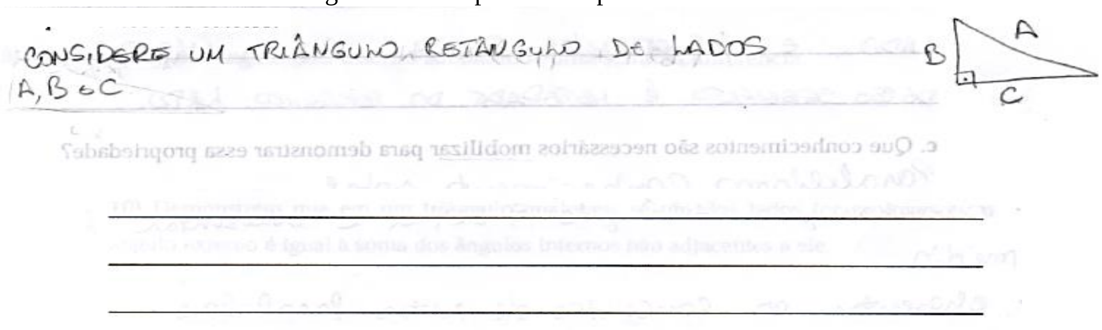
Fonte: dados da pesquisa

Embora não tenham finalizado a prova, percebemos que eles estavam desenvolvendo de forma genérica e os licenciandos também afirmam isso na segunda parte da atividade (ver Figura 95), uma vez que compreendem que a prova que estavam desenvolvendo vale para qualquer triângulo retângulo, pois estavam utilizando variáveis e que tentaram provar o teorema de Pitágoras, mas não conseguiram chegar ao resultado esperado.

Como a dupla 01 não utilizou formalidade e rigor para mostrar a validade da afirmação, consideramos que ela fez uma prova do tipo *experiência mental*. Segundo Balacheff (2000), os alunos, ao utilizarem esse tipo de prova, afirmam a validade de uma proposição de forma genérica e não fazem mais referência a casos particulares, como também a validação é sustentada pela teoria. Devido a isso, inferimos que esses licenciandos já possuem um melhor entendimento das definições e na capacidade de provar a equivalência de diferentes definições do mesmo conceito, assim como já entendem e executam o raciocínio lógico formal e as provas formais possuem significado para eles, pois sabem que é um dos meios de verificar a validade de uma afirmação de forma genérica. De acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), esses licenciandos encontram-se no nível 4 de van Hiele, uma vez que já são capazes de realizar provas matemáticas formais e as figuras são usadas apenas algumas vezes para ajudar a escolher as propriedades adequadas para a sua prova.

A Dupla 02 (Figura 98) não conseguiu desenvolver nenhum tipo de prova, embora tenha iniciado uma frase. A partir das filmagens, percebemos que a dupla tenta responder a atividade, mas não consegue e acaba passando para a próxima. L06 faz o desenho do triângulo retângulo e nomeia os lados e L01 tenta elaborar a prova, mas afirma que não se lembra e por isso desistem da atividade. Ao final, tentam voltar novamente para responder, mas não conseguem e deixam apenas iniciada com uma frase. Além disso, não respondem a segunda parte da atividade, pois não desenvolveram nenhuma prova para o teorema de Pitágoras.

Figura 98 - Resposta da dupla 02 a atividade 6



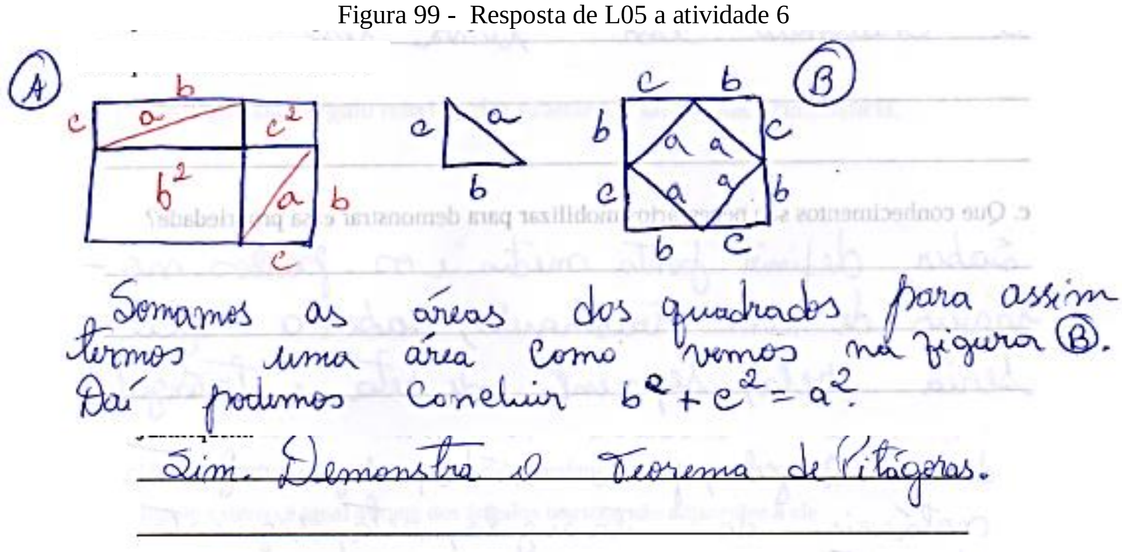
Fonte: dados da pesquisa

Nas filmagens também notamos que L01 pede para L06 fazer a prova desse teorema e ele afirma que não viu isso nem no Ensino Médio. L06 questiona se não pode ser feita a partir de área e L01 questiona como deveria fazer, mas L06 não sabe explicar e argumenta apenas utilizando o conceito de área de um triângulo. Notamos que L06 ainda tenta fazer algumas formulações, incompreensíveis no áudio, mas não consegue e acaba desistindo de fazer uma prova para o teorema de Pitágoras. Pode-se inferir que L06 estaria tentando fazer uma prova a partir da Atividade 1, mas como eles não conseguiram desenvolver naquela atividade a comprovação da relação pitagórica de forma algébrica utilizando as áreas que compunham a figura, aqui L06 também não soube explicar as suas ideias.

Na entrevista, buscamos entender o porquê de eles não terem feito a prova para esse teorema e os licenciandos relataram que não se lembravam de forma alguma de um exemplo ou uma prova para ele, nem tampouco dos conceitos envolvidos para fazer tal construção e por isso deixaram em branco. Por conta disso, consideramos que eles se encontram no nível 1 de van Hiele, pois, segundo Jaime e Gutiérrez (1990), os licenciandos não são capazes de generalizar as características que reconhecem em uma figura para outras de sua mesma classe e se limitam a descrever a aparência física das figuras e os reconhecimentos são baseados em similaridades ou diferenças físicas globais entre elas. Devido a isso, eles não compreendem o significado de uma prova matemática e por conta disso não a produz.

O licenciando 05 (Figura 99) buscou elaborar uma prova por meio da visualização geométrica, contudo não escreveu de forma compreensível e por conta disso não é possível verificar a relação estabelecida por ele entre as áreas dos quadrados. Ou seja, não é possível perceber quais as relações que ele está querendo estabelecer entre as figuras A e B, como também quais as relações entre as áreas dos quadrados e dos triângulos.

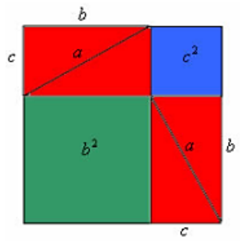
Figura 99 - Resposta de L05 a atividade 6



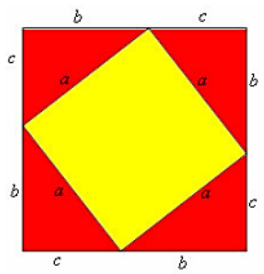
Fonte: dados da pesquisa

Notamos que ele gostaria de ter desenvolvido a prova de acordo com a figura abaixo (Figura 100), desenvolvida por Marcos Noé, graduado em Matemática, da Equipe Brasil Escola. Marcos Noé estabeleceu uma relação entre as duas figuras e percebeu que a posição dos triângulos retângulos da figura 1 determinam as áreas dos quadrados verde e azul. Posicionando-os de forma diferente, conforme a figura 2, determina-se a área de outro quadrado e com isso ele conclui que a área do quadrado amarelo é igual a área do quadrado verde mais a área do quadrado azul. Satisfazendo assim o teorema de Pitágoras.

Figura 100 - Visualização geométrica para o teorema de Pitágoras



De acordo com a posição dos triângulos retângulos constituimos um quadrado verde de área b^2 e um quadrado azul de área c^2. Em um outro posicionamento, os triângulos formam um quadrado amarelo de área a^2. Veja:



Se somarmos as áreas dos quadrados azul e verde teremos a área do quadrado amarelo. Dessa forma, concluímos que $\boldsymbol{b^2 + c^2 = a^2}$, satisfazendo o enunciado do teorema de Pitágoras.

Fonte: Brasil Escola

As percepções realizadas na prova desenvolvida por Marcos Noé do Brasil Escola não foram percebidas por L05 e por isso a sua prova não está tão bem elaborada, pois faltam indícios de como ele chegou a verificar que, ao somarmos as áreas dos quadrados, teríamos uma área como vemos na figura B. Dessa forma, não sabemos qual área L05 está considerando na figura B, nem tampouco de quais áreas dos quadrados ele cita no início da frase. Além disso, na segunda parte da atividade, percebemos que ele considera que a prova feita vale para todo triângulo retângulo e que demonstrou sim o teorema de Pitágoras, mas não elabora nenhuma justificativa para as afirmações feitas.

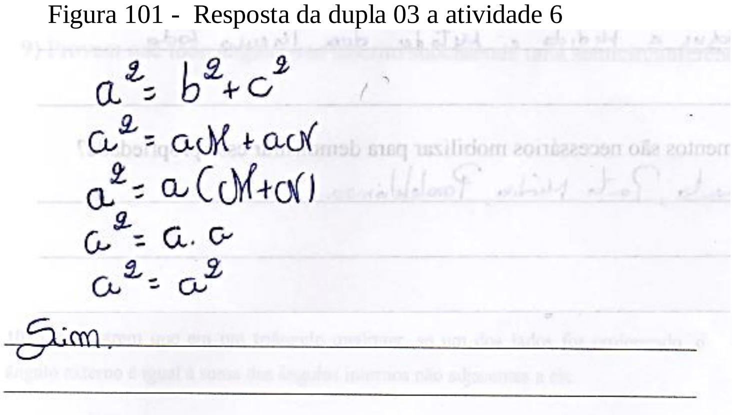
Na entrevista, buscamos entender como L05 chegou a tal entendimento e percebemos que ele utilizou apenas a visualização para chegar ao resultado, não fazendo nenhuma conclusão algébrica ou genérica. Além disso, ele tentou estabelecer uma relação com a Atividade 1, associando com as relações métricas, mas na primeira atividade essas relações não seriam utilizadas, apenas seria preciso utilizar o conceito de áreas do quadrado e do triângulo. Contudo, nessa atividade 6, ele poderia sim ter feito um tipo de prova para o teorema de Pitágoras utilizando as relações métricas de um triângulo retângulo. Segue o extrato da entrevista:

> **Pesquisadora:** nesse você escreveu... somamos as áreas dos quadrados para assim termos uma área como vemos na figura b. Daí concluímos que *a* ao quadrado é *b* ao quadrado mais *c* ao quadrado.
> **L05:** hum...
> **Pesquisadora:** só que... no caso, algebricamente, você não desenvolveu, não é?! Para chegar nisso aqui.
> **L05:** foi, foi.
> **Pesquisadora:** você só usou a imagem.
> **L05:** isso... mas aquele lá no primeiro, ele usa por outra maneira né!? Não é assim não. Vai usar o teorema de Pitágoras lá também?
> **Pesquisadora:** você vai chegar a ele.
> **L05:** isso, porque usa umas relações métricas lá, não é?
> **Pesquisadora:** na primeira não, só área.
> **L05:** ah é, verdade. Isso aí a gente estava... viu isso aí...
> **Pesquisadora:** aqui você poderia ter usado... mas não do jeito que está aqui não é?
> **L05:** sim.
> **Pesquisadora:** se você quisesse fazer uma prova, poderia utilizar as relações métricas.
> **L05:** é verdade.
> **Pesquisadora:** um outro tipo.
> **L05:** que aquele lá a gente vê lá no 9º ano.
> **Pesquisadora:** é.
> **L05:** eu estava ensinando aquilo na outra semana... acho que foi umas duas semanas depois no 9º ano... aí quando eu olhei o livro, eu vi lá como era...

A partir do que foi desenvolvido por L05 na atividade 6 e da entrevista feita, consideramos que ele não conseguiu desenvolver uma prova genérica e utilizou apenas observações e um exemplo bem específico para chegar a tal justificativa. Além disso, na entrevista, ele não dialogou sobre os conceitos utilizados, como também não conseguiu explicar como chegou, a partir da visualização, a conclusão. Por conta disso, afirmamos que a prova desenvolvida por L05 é do tipo *experiência crucial*, pois não há explicitação das propriedades e conceitos inerentes a prova, como também ele se utilizou apenas da figura para levantar afirmações. De acordo com Balacheff (2000), o licenciando utiliza um caso especial, geralmente não familiar, como também realiza experiências e começa a tomar consciência de que busca por um resultado geral.

A Dupla 03 (Figura 101) desenvolve uma prova utilizando a própria tese, o que consideramos forçado e que não está correto. Para isso, os licenciandos utilizam as relações métricas de um triângulo retângulo.

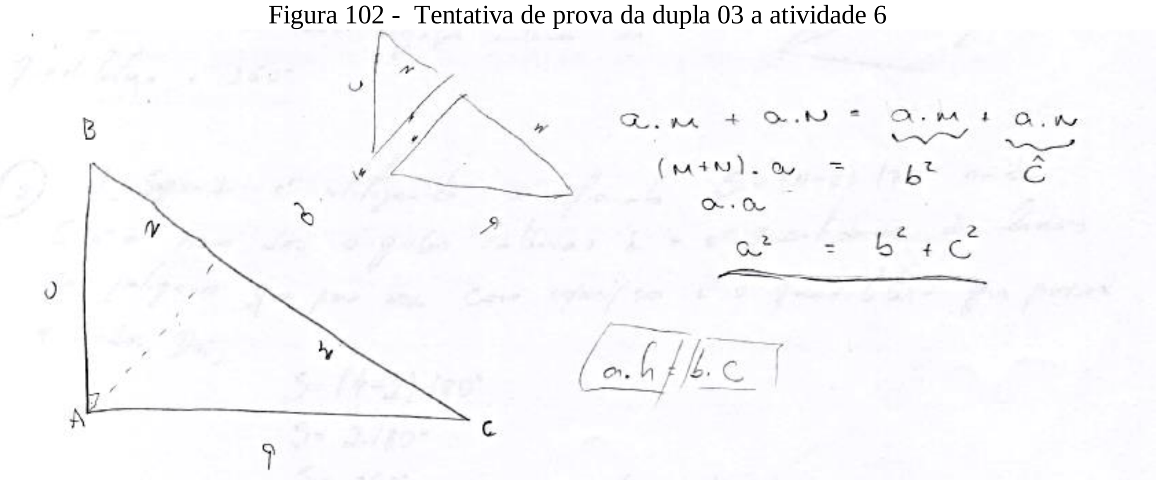
Figura 101 - Resposta da dupla 03 a atividade 6

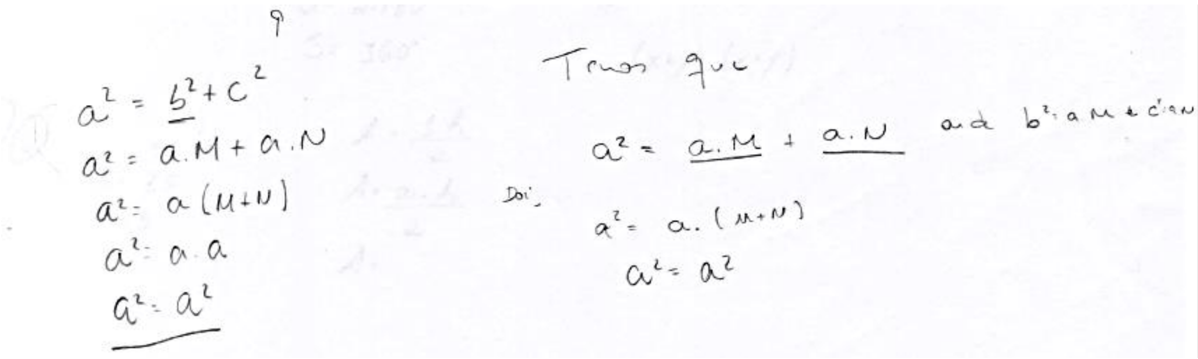


Fonte: dados da pesquisa

Com as filmagens, percebemos que os licenciandos não se lembravam de nenhum tipo de prova para o teorema, até que L07 faz um esboço na folha de rascunho (Figura 102), utilizando as relações métricas e mostra a L08, que não concorda com o que foi feito.

Figura 102 - Tentativa de prova da dupla 03 a atividade 6





Fonte: dados da pesquisa

Notamos também que eles não sabiam fazer a prova e L07 afirmou que queria se lembrar e que tinha acabado de fazer uma prova para esse teorema, mas L08 disse que estava errado. L07 pergunta a pesquisadora se realmente era preciso fazer uma prova para esse teorema, pois eles já sabiam que valia para todo triângulo retângulo e que não era necessário. Ao final, percebemos que eles voltam novamente para essa atividade, L07 explica a prova que fez, mas L08 não tem certeza se o que L07 fez está correto. Então eles desistem, L08 escreve a prova feita por L07 na folha de rascunho, só que de forma breve, e conclui que provaram o teorema de Pitágoras, mas não tinham certeza se sim e sabiam que valia para todo triângulo retângulo. A fala de L07 corrobora as ideias de Jaime e Gutiérrez (1990) ao afirmarem que uma reação típica de alunos que estão no nível 3 ou abaixo diz respeito a eles não entenderem o porquê de o professor provar determinada afirmação, uma vez que já sabem que é verdadeira.

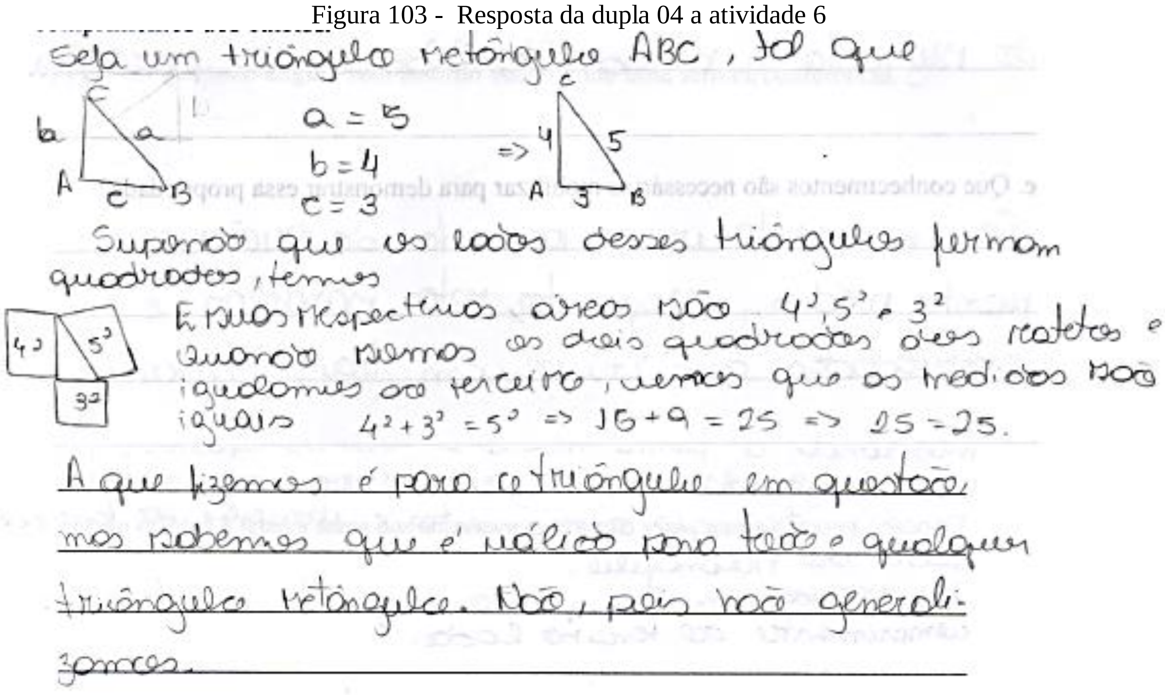
Na entrevista, perguntamos o motivo de terem feito tal prova e eles afirmaram que foi porque não se lembravam de nenhuma outra, apenas essa. Sabiam os conceitos que estavam usando, assim como que a prova feita tinha sido meio forçada, pois utilizaram a própria tese para chegar na igualdade, a partir das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa. A partir do que foi desenvolvido pela dupla 03, consideramos que eles não conseguiram desenvolver uma prova corretamente e utilizaram um exemplo bem específico para chegar a tal justificativa. Por conta disso, afirmamos que a prova desenvolvida por eles também é do tipo *experiência crucial*, uma vez que não há explicitação das propriedades e conceitos inerentes a prova, como também eles utilizaram a própria tese para levantar afirmações.

A partir das construções feitas por L05 e pela Dupla 03, inferimos que esses licenciandos buscam uma verificação experimental da verdade da propriedade, utilizando um exemplo bem particular. Além disso, eles já começam a fazer esses tipos de experiências porque já reconhecem a figura geométrica com base em suas propriedades matemáticas. Contudo, eles ainda não entendem a estrutura lógica das definições e só são capazes de fornecer provas por meio de exemplos e casos bem particulares. De acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e

Gutiérrez e Jaime (1998), esses licenciandos encontram-se no nível 2 de van Hiele, pois a prova construída dentro desse nível consiste em alguma verificação experimental por meio de um ou mais casos, como também já são capazes de utilizar e reconhecer propriedades matemáticas, mas ainda sentem dificuldade em estabelecer conexões lógicas entre essas propriedades.

A Dupla 04 (Figura 103) considerou um caso bem particular de triângulo retângulo e verificou que as áreas dos quadrados formados a partir dos lados do triângulo retângulo são iguais. Para isso, os licenciandos consideraram um triângulo retângulo de lados *3*, *4* e *5* e verificaram que $4^2 + 3^2 = 5^2$, as áreas dos quadrados formados sobre os lados do triângulo. Além disso, os licenciandos compreendem que a prova elaborada vale apenas para o triângulo retângulo construído, mas que eles sabem que o teorema vale para qualquer e todo triângulo retângulo, como também sabem que a prova elaborada não prova o teorema de Pitágoras, pois eles não generalizaram.

Figura 103 - Resposta da dupla 04 a atividade 6



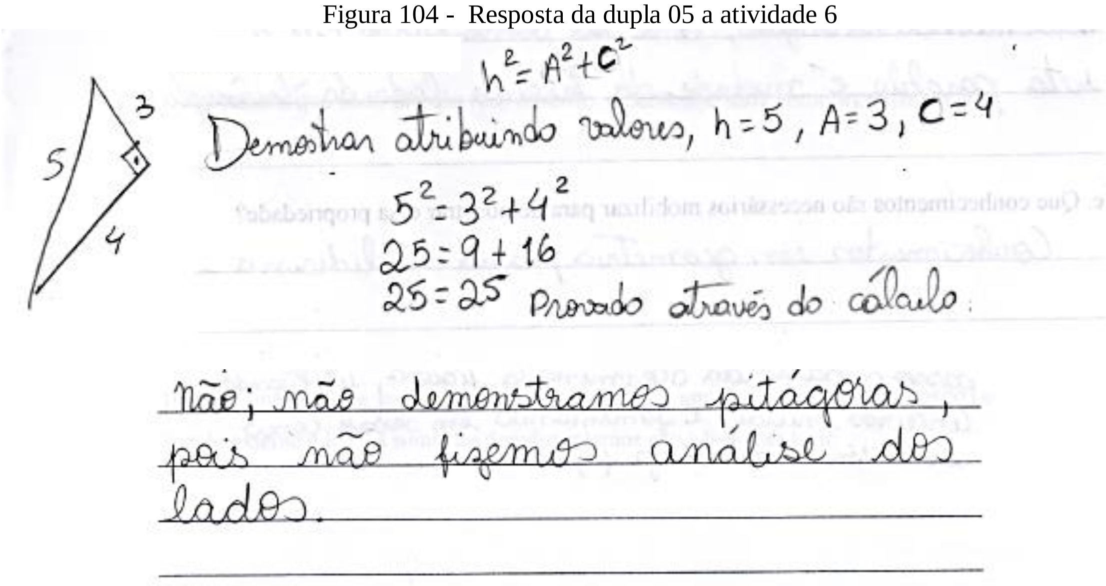
Fonte: dados da pesquisa

Com as filmagens, percebemos que os licenciandos não se lembravam de uma forma genérica de provar o teorema de Pitágoras, apenas lembraram desse exemplo que é feito com emborrachados nas escolas. L02 elabora essa prova e explica para L03 que, até então, não tinha percebido a relação do teorema de Pitágoras com as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo. Eles sabem que deveriam fazer generalizando e por isso concluem afirmando que a prova que elaboraram foi específica e que para provar o teorema deveriam ter feito de forma genérica.

A partir do que foi desenvolvido pela dupla 04, consideramos que eles não conseguiram desenvolver uma prova genérica e utilizaram um exemplo bem específico para chegar a tal justificativa. Por conta disso, afirmamos que a prova desenvolvida por eles é do tipo *experiência crucial*, pois não há explicitação das propriedades e conceitos inerentes a prova, como também eles utilizaram apenas a construção de um triângulo retângulo específico para levantar afirmações.

A Dupla 05 (Figura 104) também elaborou uma prova a partir de um exemplo bem específico de triângulo retângulo, contudo os licenciandos não estabeleceram uma relação entre o teorema de Pitágoras e as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo, eles somente aplicaram a fórmula $h^2 = a^2 + c^2$ e verificaram que a igualdade é verdadeira. Além disso, os licenciandos compreendem que a prova construída não vale para qualquer triângulo retângulo e que não provaram o teorema de Pitágoras, pois eles não fizeram a análise de forma genérica.

Figura 104 - Resposta da dupla 05 a atividade 6



Fonte: dados da pesquisa

Notamos que, embora as Duplas 04 e 05 não conheçam a diferença entre as palavras *prova* e *demonstração*, conforme verificado nos resultados do questionário, elas já compreendem que exemplos não justificam a validade de determinadas afirmações, como também conseguem distinguir corretamente casos particulares de casos genéricos, ao analisarem a estrutura de uma prova.

Na entrevista, buscamos entender o que os licenciandos queriam dizer com a análise dos lados e L04 afirmou que foi no sentido de não terem analisado os lados como letras, aplicando apenas valores numéricos a fórmula dada. Percebe-se então que eles sabiam que a prova construída foi feita apenas para um caso específico e que para generalizar deveriam ter considerado os lados como variáveis, de forma genérica. A partir do que foi desenvolvido pela Dupla 05, consideramos que essa dupla também não conseguiu desenvolver uma prova genérica e utilizou apenas um caso específico, ao aplicar os valores desse caso na fórmula dada, com o intuito de justificar que é verdadeiro.

Por conta disso, afirmamos que a prova desenvolvida por eles é do tipo *empirismo ingênuo*, pois não há explicitação de propriedades e conceitos inerentes a prova, como também eles utilizam apenas um caso específico para validar a fórmula dada. De acordo com Balacheff (2000), os licenciandos asseguram a validade de um enunciado depois de tê-lo verificado em um ou alguns casos. Esse modo de validação é rudimentar e insuficiente, como também é uma das primeiras formas do processo de generalização. A diferença desse tipo de prova para a da Dupla 04 é que a Dupla 05 utiliza apenas um terno pitagórico específico (3, 4, 5) e aplica esses valores na própria tese para validar o teorema, enquanto que a Dupla 04 utiliza um caso especial, considerando também um triângulo retângulo cujos lados também são os mesmos ternos pitagóricos primitivos (3, 4, 5), mas aqui esses licenciandos associam o teorema de Pitágoras à soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os lados desse triângulo, chegando assim a verificação da sentença verdadeira.

A partir das construções feitas pelas Duplas 04 e 05, inferimos que elas buscam uma verificação ainda experimental da verdade da propriedade, utilizando um exemplo bem particular. Além disso, esses licenciandos já começam a fazer esses tipos de experiências porque já reconhecem a figura geométrica com base em suas propriedades matemáticas. Contudo, eles ainda não entendem a estrutura lógica das definições e só são capazes de fornecer provas por meio de exemplos e casos bem particulares. Embora as provas desenvolvidas pelas duplas tenham sido, respectivamente, *experiência crucial* e *empirismo ingênuo,* notamos que elas sabiam que a prova construída não valida o teorema para todos os triângulos retângulos, pois foi utilizado algo bem específico e que por isso não generalizaram o teorema de Pitágoras.

Por conta disso, segundo Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), esses licenciandos encontram-se oscilando entre os níveis 2 e 3 de van Hiele, pois a prova construída dentro do primeiro nível consiste em alguma verificação experimental por meio de um ou mais casos, como também já são capazes de usar e reconhecer propriedades matemáticas, mas ainda sentem dificuldade em estabelecer conexões lógicas entre essas propriedades. Além disso, a capacidade de raciocínio formal desses licenciandos já começa a ser desenvolvida, mas ainda é apoiada na manipulação, e podem entender uma demonstração explicada pelo professor ou desenvolvida no livro, mas ainda não são capazes de construí-la sozinhos e por isso ainda não entendem a estrutura axiomática da Matemática.

De modo geral, percebemos que, em comparação da atividade 5 para a 6, três duplas e o licenciando oscilaram de níveis de uma atividade para outra. A Dupla 02, na atividade 5 se encontrava no nível 3 construindo provas do tipo *exemplo genérico*, enquanto que nessa atividade, encontra-se no nível 1 e não conseguiu desenvolver nenhum tipo de prova para o teorema de Pitágoras. Já L05, na atividade 5 se encontrava no nível 3 construindo provas do tipo *exemplo genérico*, e nessa atividade encontra-se no nível 2 construindo provas do tipo *experiência crucial*.

A Dupla 04, na atividade 5 estava em um nível superior (nível 4) construindo provas do tipo *experiência mental* e nessa atividade passou a oscilar entre os níveis 2 e 3 contruindo provas do tipo *experiência crucial* e tomando consciência de que a prova feita não generaliza o teorema de Pitágoras, valendo apenas para o caso específico construído. A Dupla 05, na atividade 5 se encontrava no nível 3 construindo provas do tipo *exemplo genérico*, enquanto que nessa atividade, passou a oscilar entre os níveis 2 e 3 construindo provas do tipo *empirismo ingênuo* e tomando consciência de que a prova elaborada não generaliza o teorema de Pitágoras, valendo apenas para o caso específico construído. Isto quer dizer que em atividades diferentes esses licenciandos estiveram em níveis de pensamento geométrico diferentes e, consequentemente, elaboraram provas de tipos diferentes.

Esses resultados vêm a corroborar as ideias apresentadas por Nasser (1992) e Andrade e Nacarato (2004) ao afirmarem que um determinado aluno pode apresentar características de dois níveis diferentes em tópicos distintos da Geometria, sendo possível transitar entre um nível e outro imediatamente anterior ou posterior a resolução de uma mesma atividade. Além disso, embasa também a discussão trazida por Nasser e Sant'Anna (2010) ao argumentarem que um aluno também pode raciocinar em um nível sem ter atingido completamente o nível anterior. Ou seja, esses resultados corroboram a primeira crítica apresentada ao modelo de van Hiele acerca acerca do caráter hierárquico de seus níveis, discutida em Oliveira (2012) e apresentada na seção 2.4 do Capítulo 2.

Percebemos também que, dependendo do período em que o licenciando se encontra no curso, há esquecimento maior do que estudou nas disciplinas, em especial na de Tópicos em Geometria I. Por exemplo, as Duplas 03, 04 e 05 possuem sujeitos que estão entre o 8º e 10º período do curso e nessa atividade eles elaboraram provas do tipo *empirismo ingênuo*, *experiência crucial* e *exemplo genérico*, que estão dentro das *provas pragmáticas* ou estão na transição, em que os licenciandos buscam verificar a validade de determinada afirmação por meio de testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos, como também podem considerar exemplos bem particulares para validar a afirmação. Além disso, a contradição que notamos é que esses licenciandos, estando próximos de concluir o curso, não conseguiram elaborar, nessa atividade, provas do tipo *experiência mental*, pois diziam que já sabiam que os teoremas e afirmações eram verdadeiros.

Nessa atividade verificamos que apenas a Dupla 01 estava no nível 4 de van Hiele, pois podia entender e escrever provas formais e algumas vezes utilizar figuras específicas apenas para ajudar a selecionar as propriedades adequadas para a elaboração da prova, uma vez que já está ciente de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário desenvolver uma sequência de implicações com base em propriedades já estabelecidas. Por conta disso, essa dupla foi a única que conseguiu elaborar provas do tipo *experiência mental*, validando a afirmação de forma genérica.

A Dupla 02 estava no nível 1 de van Hiele, pois a identificação das figuras é feita apenas pelas suas características físicas globais, tais como aspecto, tamanho dos elementos, posição, etc. e ainda não são capazes de ler uma definição matemática, como também ainda não são capazes de aceitar quaisquer relações entre duas famílias diferentes. Por conta disso, não há indícios de prova nesse nível, já que não sentem a necessidade de validar as afirmações.

A Dupla 03 e L05 estavam no nível 2 de van Hiele, pois podiam provar a afirmação a partir da verificação experimental de um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, esses licenciandos podiam se convencer apenas com um exemplo especial ou podiam precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Por conta disso, esses licenciandos conseguiram elaborar provas do tipo *experiência crucial*, uma vez que verificaram o teorema a partir de um caso bem especial, geralmente não familiar.

As Duplas 04 e 05 estavam oscilando entre os níveis 2 e 3, pois podiam provar a afirmação a partir da verificação experimental de um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, esses licenciandos podiam se convencer apenas com um exemplo especial ou podiam precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado, como também podiam fazer deduções e provas informais, mas seu raciocínio lógico ainda continua apoiado pela manipulação. Por conta disso, essas duplas conseguiram construir dois tipos de prova, uma do tipo *experiência crucial*, pois verificou a afirmação a partir de um caso bem especial, relacionando o teorema de Pitágoras à soma das medidas das áreas construídas sobre os lados de um triângulo retângulo bem específico, e a outra do tipo *empirismo ingênuo*, verificando a afirmação a partir da aplicação do próprio teorema em um triângulo retângulo bem específico. Embora essas duplas tenham construído provas dentro do nível 2, consideramos que elas estão oscilando entre esses dois níveis pois já começam a compreender que exemplos não justificam a validade de determinadas afirmações e que por isso as provas construídas nessa atividade não satisfazem a todos os triângulos retângulos, uma vez que elas utilizaram um bem específico, conseguindo com isso distinguir corretamente casos particulares de casos genéricos, ao analisarem a estrutura de uma prova.

Portanto, conseguimos averiguar concretamente as articulações estabelecidas no Capítulo 4, verificando que os licenciandos que estavam efetivamente no nível 1 de van Hiele não elaboraram nenhum tipo de prova, pois não lembraram dos conceitos necessários para validar o teorema de Pitágoras. Os licenciandos que estavam efetivamente no nível 2 de van Hiele elaboraram provas do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, utilizando um ou alguns exemplos ou exemplos bem particulares para validar as afirmações. E os licenciandos que estavam efetivamente no nível 4 de van Hiele conseguiram elaborar provas do tipo *experiência mental*, utilizando o raciocínio lógico formal e os conceitos teóricos corretamente.

6.2.7 Análise da atividade 7

A seguir são apresentadas as análises *a priori* e *a posteriori* da atividade 7 (Figura 105), que diz respeito ao teorema da base média de um triângulo.

Figura 105 - Atividade 7

7) (adaptado de ORDEM, 2015) Considerem a seguinte propriedade dos triângulos e respondam o que se pede:

"O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro e sua medida é metade desse terceiro lado".

a. Formulem a mesma propriedade começando por: "Se…., então…"

b. Na sua formulação, o que vocês estão assumindo como conhecido e o que se deve provar?

c. Que conhecimentos são necessários mobilizar para provar essa propriedade?

d. Como vocês apresentariam aos seus alunos uma prova dessa propriedade.

Fonte: adaptado de Ordem (2015)

6.2.7.1 Análise *a priori* da atividade 7

A atividade tem por objetivo explorar os conhecimentos que os licenciandos possuem acerca do teorema da base média de um triângulo. Os conhecimentos matemáticos envolvidos são: triângulo, ponto médio de um segmento, paralelismo e a relação entre medidas de segmentos em um determinado contexto. Além disso, é necessário entender que a tese é composta de dois elementos que devem ser provados: o primeiro, o segmento determinado pelos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e o segundo, a medida do segmento determinado pelos pontos médios de dois lados de um triângulo é metade da medida do terceiro lado do triângulo. Para construir a prova desse teorema, é necessário que os licenciandos lembrem de um conceito anterior associado a seguinte proposição: *Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então o quadrilátero é um paralelogramo*.

Aqui a dificuldade se encontra inicialmente na leitura da atividade sem ter o desenho para auxiliar no entendimento do enunciado e, logo após, na reformulação do enunciado de forma condicional, como também pode estar presente no reconhecimento do que é hipótese e tese de um teorema. Além disso, pode surgir dificuldade na percepção dos conhecimentos ligados a essa prova e na sua elaboração e construção.

O *item a)* tem como objetivo verificar a forma como os licenciandos escrevem o enunciado direto na forma condicional, devendo possuir sentidos equivalentes. Para isso, é preciso que eles consigam identificar corretamente qual é a hipótese e quais são as teses desse teorema. A escrita correta do enunciado na forma condicional deve ser *"se um segmento de reta une os pontos médios de dois lados de um triângulo, então esse segmento é paralelo ao terceiro lado e sua medida é metade da medida desse lado"*.

Já o *item b)* tem como objetivo verificar a forma como os licenciandos identificam os dados (hipótese) e o que se deve provar (tese) da propriedade. Caso eles consigam, no item anterior, escrever corretamente o enunciado na forma condicional, então aqui eles conseguirão identificar corretamente quem é a hipótese e quais são as teses. Caso não, a identificação estará incorreta.

Nesses dois itens os licenciandos não produzirão uma prova, mas deverão ter claro conhecimento da forma condicional de um teorema, reconhecendo qual é a hipótese e quais são as teses da propriedade. Então, só observaremos o seu nível de pensamento geométrico. A partir do que foi discutido nos Capítulos 2 e 4, pode-se afirmar que os licenciandos que estejam no nível 1 não entendem o conceito de prova, fazem atribuições físicas globais das figuras e não são capazes de usar determinadas definições matemáticas. Caso estejam no nível 2, já poderão verificar experimentalmente a verdade de uma propriedade, pois já compreendem que as figuras geométricas são formadas por partes e que são dotadas de propriedades matemáticas, mas ainda não são capazes de relacionar algumas propriedades a outras. Os licenciandos que estejam no nível 3 já são capazes de fazer deduções e provas informais, pois a sua capacidade de raciocínio formal (matemático) começa a ser desenvolvida, mas ainda está apoiada na manipulação. Caso estejam no nível 4, eles já podem entender e escrever provas formais, pois essas provas já têm significado para eles e sentem sua necessidade como um dos meios de verificar a validade da afirmação de forma genérica (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994; GUTIÉRREZ e JAIME, 1998).

Ao analisarmos as justificativas e/ou argumentações utilizadas nos itens *a)* e *b)*, os licenciandos que estejam no nível 1 de van Hiele não conseguirão compreender o que está sendo pedido nos itens e podem deixá-los em branco, pois ainda não conseguem identificar a hipótese e as teses da propriedade. Àqueles que estejam no nível 2 podem compreender o que está sendo pedido nos itens, mas identificam de forma errada, adotando duas hipóteses e uma tese. Os licenciandos que estejam nos níveis 3 e 4, havendo distinção apenas na linguagem adotada, poderão construir corretamente o enunciado na forma condicional, conseguindo identificar corretamente a hipótese e as teses da propriedade (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

O *item c)* tem como objetivo verificar a forma como os licenciandos identificam os conhecimentos necessários para provar a propriedade. A identificação desses conhecimentos dependerá do nível de pensamento geométrico dos licenciandos e do tipo de prova que eles utilizarão para validar a afirmação. Assim, os licenciandos podem utilizar ferramentas de provas empíricas (baseadas em medições ou casos particulares) ou ferramentas teóricas (baseadas em propriedades matemáticas).

Nesse item os licenciandos não produzirão uma prova, mas deverão lembrar quais conhecimentos serão necessários para provar essa propriedade. Então, observaremos o seu nível de pensamento geométrico e as possíveis provas que eles poderão construir. A partir do que foi discutido nos Capítulos 2 e 4, pode-se afirmar que os licenciandos que estejam no nível 1 irão fazer atribuições físicas globais dos triângulos, mas essas atribuições têm um significado apenas visual, pois ainda não são capazes de usar determinadas definições matemáticas e não sentem a necessidade de provar os resultados. Caso estejam no nível 2, já serão capazes de utilizar e reconhecer propriedades matemáticas, mas podem ter dificuldades ao usar algumas expressões lógicas. Nesse nível, os licenciandos poderão provar a afirmação a partir da verificação experimental de um ou alguns casos particulares (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994; GUTIÉRREZ e JAIME, 1998).

Os licenciandos que estejam no nível 3 já são capazes de utilizar e reconhecer propriedades matemáticas, podendo estabelecer relações lógicas entre as propriedades, mas ainda não entendem a estrutura axiomática da Matemática. Nesse nível, os licenciandos já são capazes de fazer deduções e provas informais, como também são capazes de dar razões informais para a verdade das propriedades. Caso estejam no nível 4, os licenciandos poderão utilizar e reconhecer propriedades matemáticas e já possuem uma melhor compreensão da estrutura lógica da Matemática, podendo entender e escrever provas formais e já estando cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário desenvolver uma sequência de implicações com base em propriedades já estabelecidas (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994; GUTIÉRREZ e JAIME, 1998).

Ao analisarmos as justificativas e/ou argumentações utilizadas no item *c)*, os licenciandos que estão no nível 1 de van Hiele não conseguirão identificar claramente quais conhecimentos são necessários mobilizar para provar a propriedade, pois ainda não conseguem identificar quais propriedades, teoremas e conceitos são importantes, nem sentem a necessidade de provar determinada afirmação. Àqueles que estão no nível 2 irão utilizar ferramentas de provas empíricas, já que possuem conhecimento das propriedades e conceitos necessários e consequentemente, estabelecendo articulação com Balacheff (2000), produzirão provas do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial* (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

Os licenciandos que estão no nível 3, embora ainda sejam incapazes de realizar o raciocínio lógico-formal, já possuem conhecimentos de propriedades, teoremas e definições (exclusivas e inclusivas) e consequentemente, estabelecendo articulação com Balacheff (2000), poderão justificar a partir do *exemplo genérico*, podendo construir um exemplo bem geral (ainda manipulativo) para provar a afirmação, o que poderia ter sido feito por meio de conceitos e propriedades. Enquanto que no nível 4, os licenciandos já são capazes de utilizar ferramentas de provas teóricas, sendo, por isso, possível construir provas do tipo *experiência mental*, pois a validação é apenas teórica (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

Para os licenciandos que estejam nos níveis 3 e 4, eles precisarão:

- saber que duas retas são paralelas se a distância de qualquer ponto de uma reta à outra é sempre constante;
- saber a distância de um ponto a uma reta e como se determina essa distância;
- saber utilizar régua e esquadro para traçar paralelas ou perpendiculares, como também conhecer o conceito de ponto médio de um segmento.

Além disso, de natureza teórica, eles deverão lembrar: retas paralelas, casos de congruência de triângulos, propriedades dos lados de um paralelogramo, relação entre ângulos correspondentes ou alternos internos em retas paralelas e ângulos opostos pelo vértice.

Por fim, o *item d)* tem como objetivo verificar a forma como os licenciandos apresentariam a seus alunos a prova para essa propriedade. Ou seja, aqui eles deverão construir e elaborar uma possível prova da propriedade.

A partir do que foi discutido nos Capítulos 2 e 4, pode-se afirmar que os licenciandos que estejam no nível 1 não entendem o conceito de prova e por isso não sentem a necessidade de validar as afirmações. Caso estejam no nível 2, eles poderão provar a afirmação a partir da verificação experimental de um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, os licenciandos podem se convencer apenas com um exemplo especial ou podem precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Os licenciandos que estejam no nível 3 já são capazes de fazer deduções e provas informais, como também são capazes de dar razões informais para a verdade das propriedades. Caso estejam no nível 4, poderão entender e escrever provas formais. Além disso, algumas vezes os licenciandos podem utilizar figuras específicas apenas para ajudar a selecionar as propriedades adequadas para a prova, mas eles já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário desenvolver uma sequência de implicações com base em propriedades já estabelecidas (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994; GUTIÉRREZ e JAIME, 1998).

Ao analisarmos as justificativas e/ou argumentações utilizadas no item *d)*, os licenciandos que estão no nível 1 não desenvolvem uma prova, pois não a reconhece como necessária, uma vez que já sabem que é válida e afirmam que seus alunos não se interessariam pela prova. Àqueles que estão no nível 2 podem verificar a validade da afirmação a partir de casos particulares de triângulos, confirmando assim a veracidade da afirmação. Os licenciandos que estão no nível 3 podem construir um exemplo bem geral (ainda manipulativo) para provar a afirmação, o que poderia ter sido feito por meio de conceitos e propriedades. Àqueles que estão no nível 4 podem provar que é verdade apenas utilizando conceitos teóricos (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

Estabelecendo uma articulação com os tipos de prova de Balacheff (2000), os licenciandos que estão no nível 1 não produzirão provas, deixando a questão em branco ou afirmando que não apresentariam a seus alunos, uma vez que eles não se interessam por esse tipo de validação. Àqueles que estão no nível 2, podem produzir provas do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, utilizando um ou alguns exemplos de triângulos para validar a afirmação, ou ainda um exemplo bem especial de triângulo para confirmar a propriedade. Os licenciandos que estão no nível 3 justificarão a partir do *exemplo genérico*, validando informalmente a afirmação, pois seu raciocínio lógico ainda continua apoiado pela manipulação. Àqueles que estão no nível 4, escreverão provas do tipo *experiência mental*, validando a afirmação de forma genérica.

6.2.7.2 Análise das produções dos licenciandos na atividade 7

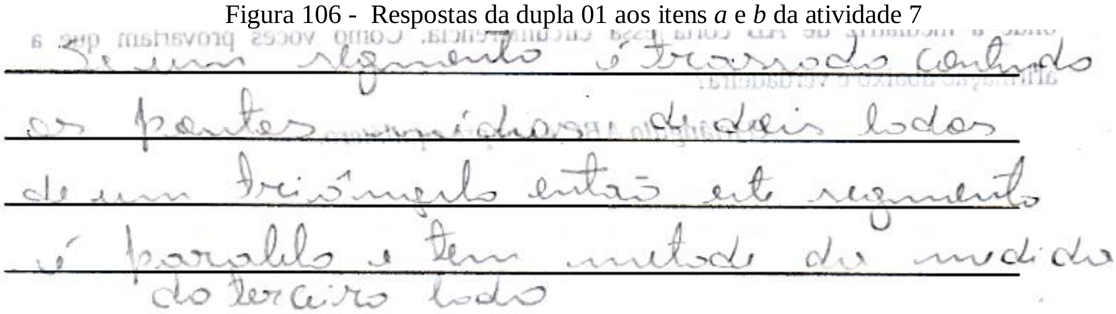
A atividade não fornecia figura e para responde-la os sujeitos pesquisados poderiam ou não fazer a sua construção. Pede-se para considerar a seguinte propriedade dos triângulos e responder ao que se pede: *"O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro e sua medida é metade desse terceiro lado".* Podemos perceber que poucos licenciandos associaram essa atividade ao teorema da base média de um triângulo.

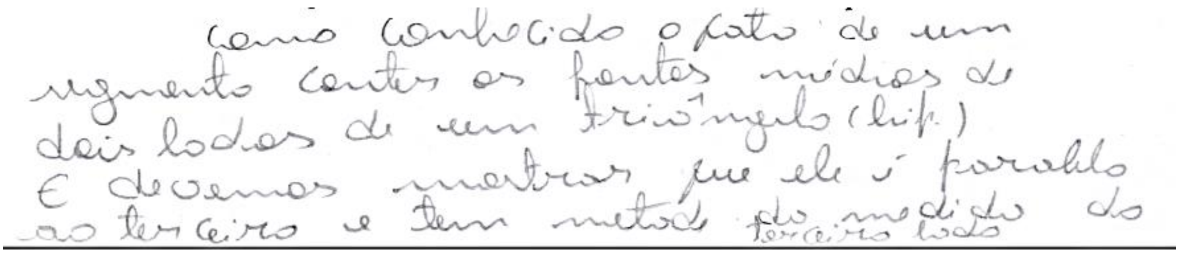
No item *a)*, a pergunta era: *Formulem a mesma propriedade começando por: "Se..., então..."*. Percebemos que a maioria dos licenciandos não compreendeu corretamente qual a hipótese e quais as teses da propriedade e por isso formulou erroneamente a propriedade na forma condicional. Já no item *b)*, a pergunta era: *Na sua formulação, o que vocês estão assumindo como conhecido e o que se deve provar?*. Ou seja, aqui os licenciandos deveriam identificar a hipótese e as teses da forma condicional feita no item anterior.

Percebemos que aqueles que formularam erroneamente a propriedade na forma condicional, também erraram na identificação da hipótese e das teses, assim como aqueles que acertaram, identificaram corretamente. Nas entrevistas pedimos para os licenciandos que erraram reformularem a mesma propriedade, sem visualizarem o que haviam feito anteriormente, e notamos que alguns conseguiram responder corretamente, acertando a escrita da propriedade na forma condicional e a identificação da hipótese e teses da propriedade.

A Dupla 01 (Figura 106) conseguiu formular corretamente essa propriedade e identificou corretamente a hipótese e as teses da propriedade a partir da forma condicional.

Figura 106 - Respostas da dupla 01 aos itens *a* e *b* da atividade 7


Se um segmento é traçado contendo
os pontos médios de dois lados
de um triângulo então este segmento
é paralelo e tem metade da medida
do terceiro lado

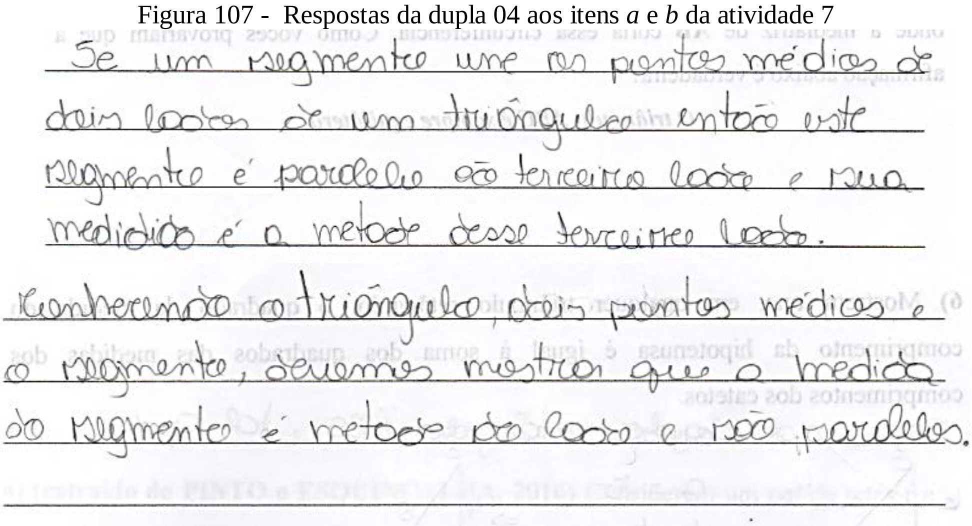

como conhecido o fato de um segmento conter os pontos médios de dois lados de um triângulo (hip.) E devemos mostrar que ele é paralelo ao terceiro e tem metade do medida do terceiro lado

Fonte: dados da pesquisa

Nas filmagens, percebemos que os licenciandos compreenderam que a propriedade diz respeito ao teorema da base média de um triângulo. Ao compararmos com o que os licenciandos definiram por hipótese e tese de um teorema no questionário, percebemos que, na prática, eles sabem o que significam cada um. L10 definiu apenas hipótese e explicou corretamente, ao afirmar que hipótese é uma base para a demonstração e que para provar algo se começa com uma hipótese. Já L11 afirmou que hipótese é algo que assume como verdade para concluir outras coisas e a relaciona com o "se", enquanto que tese é definida como o enunciado, o que o teorema mostra e a relaciona com o "se, e somente se". Ou seja, L11 relaciona corretamente a hipótese, mas a tese seria apenas uma parte do "se, e somente se". Como também, podemos inferir que ele quis afirmar que a tese é o que se deve demonstrar, a conclusão do teorema.

A Dupla 04 (Figura 107) também conseguiu formular corretamente essa propriedade e identificou corretamente a hipótese e as teses da propriedade a partir da forma condicional.

Figura 107 - Respostas da dupla 04 aos itens *a* e *b* da atividade 7


Se um segmento une os pontos médios de dois lados de um triângulo então este segmento é paralelo ao terceiro lado e sua medida é a metade desse terceiro lado.

Conhecendo o triângulo, dois pontos médios e o segmento, devemos mostrar que a medida do segmento é metade do lado e são paralelos.

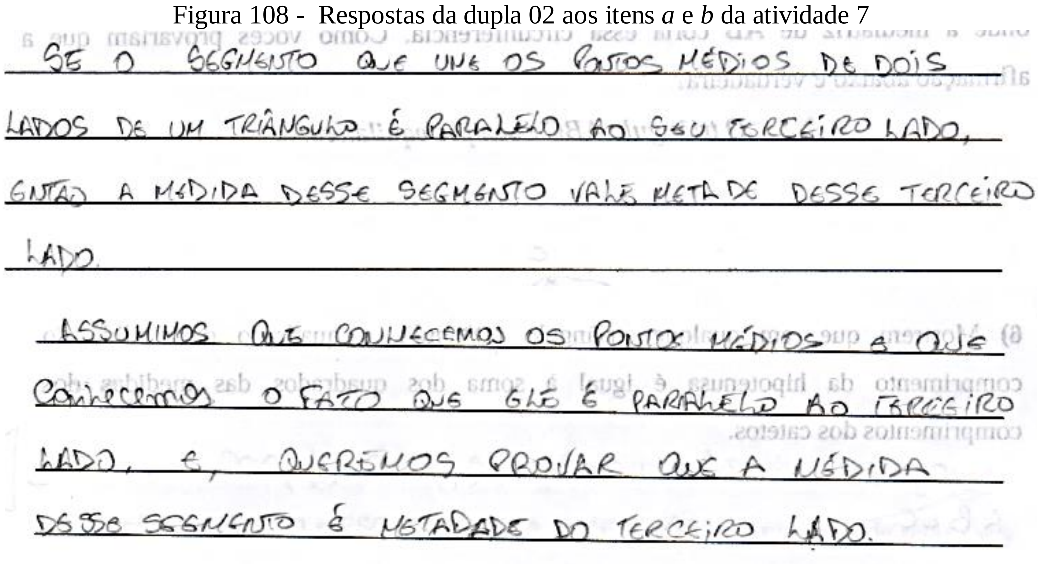
Fonte: dados da pesquisa

Nas filmagens, percebemos que os licenciandos questionaram se era apenas para formular e a pesquisadora afirmou que sim. L03 elabora a frase e L02 concorda com o que foi feito. Ao compararmos com o que os licenciandos definiram por hipótese e tese de um teorema no questionário, percebemos que apenas L03 soube definir corretamente. L02 afirmou que hipótese é o ponto de partida para provar um teorema e que a tese também é um ponto de partida, seguindo o mesmo sentido da hipótese. Já L03 afirmou que hipóteses são as condições para a tese que no caso é o que queremos demonstrar. O que nos leva a inferir que, na prática, eles conseguem identifica-las mais facilmente.

A partir das justificativas encontradas nos itens *a* e *b* pelas Duplas 01 e 04, podemos afirmar que, segundo Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), elas oscilam entre os níveis 3 e 4, pois conseguem construir corretamente o enunciado na forma condicional, já que a capacidade de raciocínio formal (matemático) dos alunos começa a ser desenvolvida e iniciam o entendimento da estrutura axiomática da Matemática, compreendendo o significado e a utilidade de termos indefinidos, axiomas e teoremas. O que corrobora as ideias apresentadas por Oliveira (2012) ao afirmar que licenciandos podem oscilar de um nível para outro na mesma atividade.

A Dupla 02 (Figura 108) não conseguiu formular corretamente no item *a* a propriedade na forma condicional e por isso no item *b* considerou duas hipóteses e uma tese. Ou seja, os licenciandos consideraram como hipótese o que seria uma tese, que deveria ser provada.

Figura 108 - Respostas da dupla 02 aos itens *a* e *b* da atividade 7


SE O SEGMENTO QUE UNE OS PONTOS MÉDIOS DE DOIS LADOS DE UM TRIÂNGULO É PARALELO AO SEU TERCEIRO LADO, ENTÃO A MEDIDA DESSE SEGMENTO VALE METADE DESSE TERCEIRO LADO.

ASSUMIMOS QUE CONHECEMOS OS PONTOS MÉDIOS E QUE CONHECEMOS O FATO QUE ELE É PARALELO AO TERCEIRO LADO, E, QUEREMOS PROVAR QUE A MEDIDA DESSE SEGMENTO É METADE DO TERCEIRO LADO.

Fonte: dados da pesquisa

Nas filmagens, percebemos que L01 afirma que não lembra mais dessa propriedade e que adorava fazer a prova desse teorema. Além disso, notamos que eles quase não dialogaram e que L01 respondeu e L06 concordou com o que foi feito. Já para o item *b* notamos que eles discutem um pouco acerca do que é conhecido e do que se quer provar, identificando erroneamente duas hipóteses e uma tese, que são escritas por L01.

Na entrevista, a pesquisadora cobre a resposta dada ao item *a* pela Dupla 02 e pede para eles identificarem a hipótese e as teses da propriedade, ao fazerem isso, os licenciandos conseguiram reler corretamente, identificando uma hipótese e duas teses. Ao final, eles afirmam que erraram devido à pressa. Segue o extrato da entrevista:

> **L01 vê o item *a* da atividade 7.**
> **Pesquisadora:** leia aqui em cima.
> **L01 lê a frase.**
> **Pesquisadora:** qual a hipótese? A partir daqui...
> **L01:** Se existe um segmento que une dois pontos médios de dois lados de um triângulo...
> **Pesquisadora:** certo...
> **L01:** então... isso já é a tese, não é?
> **Pesquisadora:** é.
> **L01:** a hipótese é se tem um segmento que liga os pontos médios de dois lados de um triângulo.
> **Pesquisadora:** isso.
> **L01:** isso é o se.
> **Pesquisadora:** então...
> **L01:** então... ele é paralelo ao terceiro lado e tem metade desse terceiro lado.
> **Pesquisadora:** isso.
> **L01:** e a gente não colocou isso não?
> **Pesquisadora:** não.
> **L06:** foi, foi errado. Foi o inverso.
> **Pesquisadora:** não, vocês pegaram uma parte da tese como hipótese.
> **L06:** foi.
> **L01:** ah... e agora eu falei certo.
> **L06:** foi, agora você falou certo.
> **Pesquisadora:** por isso que eu não queria que você lesse aqui.
> **L01:** ah...
> **Pesquisadora:** eu queria que você lesse aqui (indicando a propriedade).
> **L01:** foi a pressa, professora.

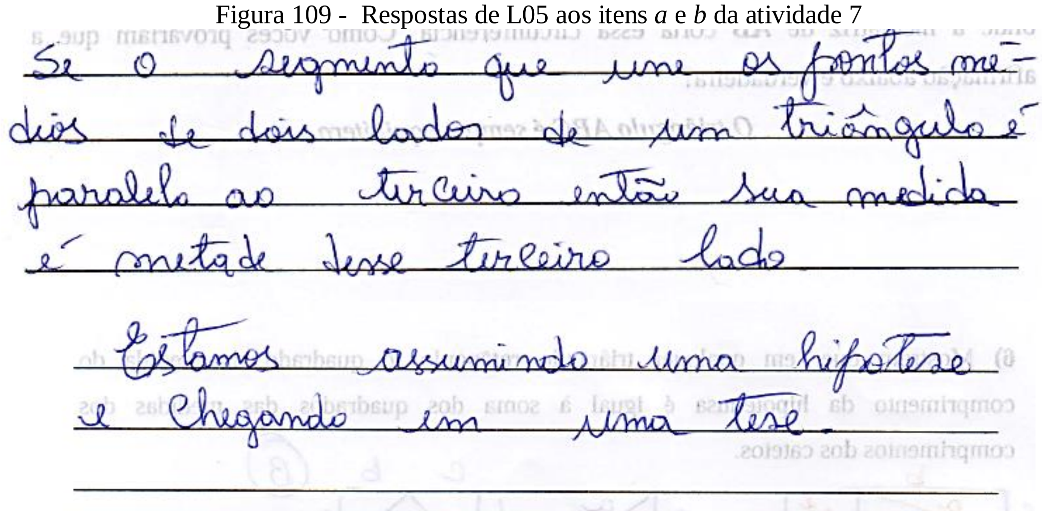
Notamos então que como eles perceberam que haviam escrito errado a frase na forma condicional, então eles identificaram errado a hipótese e as teses, argumentando que foi desatenção. Ao formularem corretamente a sentença condicional durante a entrevista, os licenciandos perceberam que a hipótese é *um segmento que liga os pontos médios de dois lados de um triângulo*, enquanto que as teses são *ele é paralelo ao terceiro lado e tem metade desse terceiro lado*.

Ao compararmos com o que os licenciandos definiram por hipótese e tese de um teorema no questionário, percebemos que apenas L01 soube definir corretamente. L01 afirmou que são partes de uma demonstração, em que a hipótese é o que você vai supor que acontece e irá argumentar até chegar na tese, ou seja, na conclusão do teorema. Já L06 não soube definir corretamente, uma vez que afirmou que a(s) hipótese(s) são leis que podem ser provadas e demonstradas, podendo ser um axioma e tese(s) são os complementos dessas leis, podendo ou não ser feito a ida e a volta das leis, ou seja, tese virar hipótese. O que nos leva a inferir que, na prática, eles conseguem identifica-las mais facilmente.

A partir das justificativas encontradas nos itens *a* e *b* e na entrevista, podemos afirmar que, segundo Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), a Dupla 02 oscila entre os níveis 2 e 3, pois não consegue formular corretamente, na atividade, o enunciado de forma condicional, mas que, na entrevista, consegue fazê-lo de maneira correta. Com isso, os licenciandos já reconhecem as propriedades matemáticas observando as figuras e seus elementos, podendo deduzir outras propriedades e generalizá-las a partir da experimentação, como também a capacidade de raciocínio formal (matemático) dos alunos começa a ser desenvolvida. O que corrobora as ideias apresentadas por Oliveira (2012) ao afirmar que licenciandos podem oscilar de um nível para outro na mesma atividade.

O licenciando 05 (Figura 109) não conseguiu formular corretamente no item *a* a propriedade na forma condicional, pois considera duas hipóteses e uma tese. Já no item *b*, ele não respondeu ao que estava sendo pedido, associando apenas o que estamos assumindo à hipótese e o que se deve provar à tese. Ou seja, ele explicou o que queríamos que fosse identificado a partir da sentença condicional.

Figura 109 - Respostas de L05 aos itens *a* e *b* da atividade 7


Se o segmento que une os pontos mé-
dios de dois lados de um triângulo é
paralelo ao terceiro então sua medida
é metade desse terceiro lado

Estamos assumindo uma hipótese
e chegando em uma tese.

Fonte: dados da pesquisa

Na entrevista, a pesquisadora cobre a resposta dada ao item *a* por L05 e pede para ele identificar a hipótese e as teses da propriedade, ao fazer isso, o licenciando formula a mesma coisa que foi feita anteriormente. Ou seja, ele não conseguiu ver que a propriedade possui duas teses que devem ser verificadas, só percebendo isso quando a pesquisadora fala. Segue o extrato da entrevista:

> **Pesquisadora:** eu vou cobrir aqui a sua resposta... leia essa frase de novo, por favor.
> **L05 lê a frase.**

> **Pesquisadora:** qual é a hipótese?
> **L05:** cadê, cadê, cadê...
> **Pesquisadora:** deixa eu colocar assim para você não ficar olhando a resposta.
> **L05 fica olhando a frase.**
> **L05:** é essa não a hipótese?
> **Pesquisadora:** qual?
> **L05:** o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro. Aí vem a tese, sua medida é metade do terceiro lado.
> **Pesquisadora:** ok.
> **L05:** não é aquele se... que... não é?!
> **Pesquisadora:** se..., então... você colocou a mesma coisa... eu queria ver se haveria alguma alteração.
> **L05:** ah... é se..., então... (lendo o item novamente)
> **Pesquisadora:** mas teria somente uma hipótese e esses dois seriam a tese.
> **L05:** quais dois? Paralelo ao terceiro e...
> **Pesquisadora:** e a medida é metade.
> **L05:** duas teses.

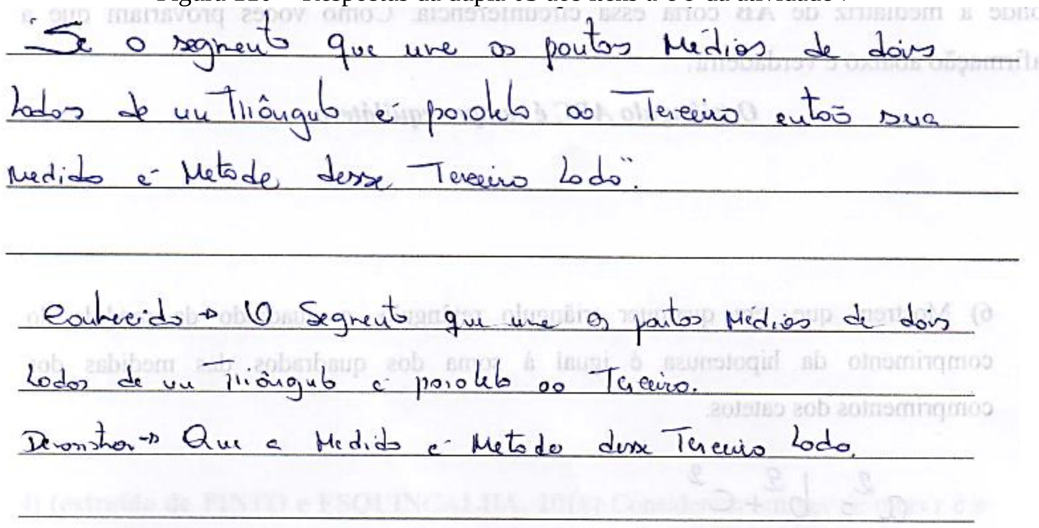
Quanto ao item *b*, pedimos que o licenciando identificasse qual a hipótese e a tese a partir da sentença condicional elaborada por ele no item anterior, mas ele queria especificar a partir do que foi relatado pela pesquisadora. Então orientamos que deveria ser feito de acordo com o que ele escreveu e explicamos novamente que, nesse item, ele deveria identificar a hipótese e a tese e não enfatizar o que significa a pergunta. Segue o extrato da entrevista:

> **Pesquisadora:** No item b você colocou *estamos assumindo uma hipótese e chegando em uma tese*.
> **L05:** hum.
> **Pesquisadora:** mas era para identificar a partir do que você escreveu... *se o segmento que une dois pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro, então sua medida é metade desse terceiro lado*... o que você está assumindo como conhecido e o que deve demonstrar...
> **L05:** hum.
> **Pesquisadora:** o que você está assumindo como conhecido?
> **L05:** hipótese e tese não?
> **Pesquisadora:** então... qual? Era para identificar... a partir do que você fez item *a*, no item *b* era para identificar qual era a hipótese e qual era a tese...
> **L05:** ah sim... no caso são essas duas teses não é!?
> **Pesquisadora:** não... isso seria o correto... mas a partir do que você fez... qual seria a hipótese?
> **L05:** o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro.
> **Pesquisadora:** pronto... e a tese?
> **L05:** sua medida é metade desse terceiro lado.
> **Pesquisadora:** pronto... foi porque você não especificou... na *b* era para especificar.

Ao compararmos com o que L05 definiu por hipótese e tese de um teorema no questionário, percebemos que ele definiu quase que corretamente, pois considerou hipótese a que deduzimos e a tese como a conclusão defendida do teorema. A hipótese não é algo que deduzimos, uma vez que a consideramos como verdadeira e é a partir dela que iniciamos a prova de um teorema. Esse fato nos leva a inferir que, na prática, L05 consegue identifica-las mais facilmente, embora não tenha entendido o que estava sendo pedido no item.

A Dupla 03 (Figura 110) também não conseguiu formular corretamente no item *a* a propriedade na forma condicional e por isso no item *b* considerou duas hipóteses e uma tese. Ou seja, os licenciandos consideraram como hipótese o que seria uma tese, que deveria ser provada.

Figura 110 - Respostas da dupla 03 aos itens *a* e *b* da atividade 7


"Se o segmento que une os pontos Médios de dois lados de um Triângulo é paralelo ao Terceiro então sua medida é Metade desse Terceiro lado".

Conhecido → O Segmento que une os pontos Médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao Terceiro.
Demonstrar → Que a Medida é Metade desse Terceiro lado.

Fonte: dados da pesquisa

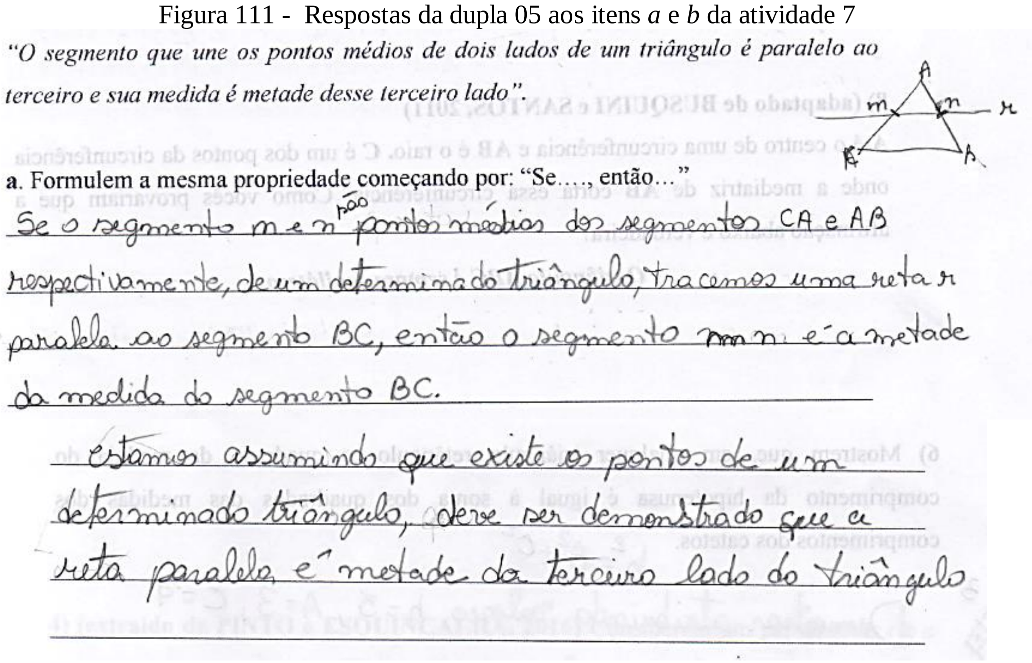
Nas filmagens, notamos que os licenciandos dialogaram pouco e L07 respondeu ao item e L08 concordou com o que foi feito. Na entrevista, a pesquisadora cobre a resposta dada ao item *a* e pede para os licenciandos identificarem a hipótese e as teses da propriedade, ao fazer isso, eles formulam a mesma coisa que foi feita anteriormente. Ou seja, eles não conseguiram ver que a propriedade possui duas teses que deveriam ser verificadas. Segue o extrato da entrevista:

Pesquisadora: aqui... deixa ver se é isso mesmo.
L07: colocando se... então...
Pesquisadora: é a sete...
L07 lê a frase da atividade 7.
Pesquisadora: lê aqui em cima.
L07 faz a leitura.
Pesquisadora: qual a hipótese?
L07: não é essa primeira parte não?
Pesquisadora: qual?
L07: o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo? Não?
Pesquisadora: não... não... aqui você colocou essa primeira parte e a segunda parte você colocou que era a tese não é!?
L07: isso.
Pesquisadora: que a sua medida é metade desse terceiro lado.
L07: foi isso que eu tentei fazer.
Pesquisadora: mas é isso mesmo?
L07: eu acho que é.

Como eles não identificaram que fizeram de forma errada o item *a*, então também fizeram de forma incorreta o item *b*. Ao compararmos com o que os licenciandos definiram por hipótese e tese de um teorema no questionário, percebemos que apenas L08 soube definir corretamente. L07 definiu apenas hipótese argumentando que é algo que se quer demonstrar, o que não é verdade, pois essa definição é a da tese. Já L08 afirmou que hipóteses são os dados que usaremos para demonstrar a tese, que é o que queremos mostrar. O que nos leva a inferir que, na prática, eles conseguem identifica-las mais facilmente, embora não tenham identificado corretamente que a propriedade possui duas teses.

A Dupla 05 (Figura 111) também não conseguiu formular corretamente no item *a* a propriedade na forma condicional e por isso no item *b* não identificou corretamente a hipótese e as teses. Além disso, percebemos que na identificação, a dupla não separa corretamente a hipótese e as teses da propriedade, assumindo que existe os pontos de um triângulo, sem especificar que são os pontos médios de dois lados de um triângulo e o segmento formado por eles, como também afirma que deve provar que a reta paralela é metade do terceiro lado, ou seja, a dupla já considera como verdadeira uma das teses da propriedade. Para facilitar o entendimento da formulação da escrita feita no item *a*, deixamos a figura feita na parte superior do item.

Figura 111 - Respostas da dupla 05 aos itens *a* e *b* da atividade 7


"O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro e sua medida é metade desse terceiro lado".

a. Formulem a mesma propriedade começando por: "Se…, então…"

Se o segmento m e n são pontos médios dos segmentos CA e AB respectivamente, de um determinado triângulo, tracemos uma reta r paralela ao segmento BC, então o segmento mn é a metade da medida do segmento BC.

estamos assumindo que existe os pontos de um determinado triângulo, deve ser demonstrado que a reta paralela é metade do terceiro lado do triângulo

Fonte: dados da pesquisa

Na entrevista, a pesquisadora cobre a resposta dada ao item *a* e pede para os licenciandos identificarem a hipótese e as teses da propriedade, contudo, L09 não entende o que deve ser feito e então a pesquisadora pede para eles falarem a frase dada no início do item na forma condicional. Ao fazer isso, eles formulam a mesma coisa que foi feita anteriormente. Ou seja, eles não conseguiram ver que a propriedade possuía duas teses que deveriam ser verificadas. Segue o extrato da entrevista:

> **Pesquisadora:** pronto... agora deixa eu esconder aqui embaixo. Leiam essa frase.
> **L09 faz a leitura.**
> **Pesquisadora:** Qual a hipótese?
> **L09:** como assim, mulher?
> **Pesquisadora:** não... espera... eu pulei logo para o item *b*... o item *a* pedia para vocês escreverem essa frase a partir do se... então... de forma condicional...
> **L04:** sim.
> **Pesquisadora:** então como é que ficaria? Usando se... então...
> **L04:** se o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado, então sua medida é metade desse terceiro lado.
> **Pesquisadora:** ok.

Após isso, a pesquisadora perguntou qual seria a hipótese e os licenciandos afirmaram que seria *o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro* e que a tese seria *sua medida é metade desse terceiro lado*. Embora tenham identificado de forma incorreta a hipótese e as teses da propriedade durante a entrevista, essa identificação ficou mais apresentável do que a que foi escrita na atividade. Ao compararmos com o que os licenciandos definiram por hipótese e tese de um teorema no questionário, percebemos que nenhum dos dois souberam definir corretamente. L04 afirmou que hipótese é a condição para que a tese aconteça e o teorema seja válido. Já L09 afirmou que são suposições que serve de base para gerar indagação. O que nos leva a inferir que, na prática, eles conseguem identifica-las mais facilmente, embora não tenham identificado corretamente que a propriedade possui duas teses.

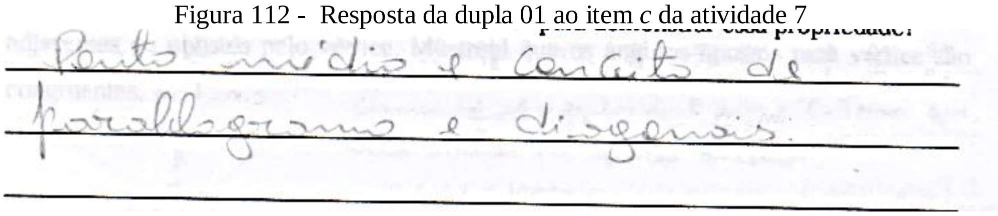
A partir das justificativas encontradas nos itens *a* e *b* e nas entrevistas, podemos afirmar que, segundo Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), L05 e as Duplas 03 e 05 oscilam entre os níveis 1 e 2, pois não conseguiram formular corretamente nem na atividade nem durante a entrevista. Assim, esses licenciandos percebem as figuras geométricas em sua totalidade e ainda não são capazes de generalizar as características que reconhecem em uma figura para outras de sua mesma classe, como também já reconhecem as propriedades matemáticas observando as figuras e seus elementos, podendo deduzir outras propriedades e generalizá-las a partir da experimentação. O que corrobora as ideias apresentadas por Oliveira (2012) ao afirmar que licenciandos podem oscilar de um nível para outro na mesma atividade, assim como podem ser enquadrados em níveis diferentes, executando as mesmas atividades, dependendo do critério usado.

No item *c)*, a pergunta era: *Que conhecimentos são necessários mobilizar para provar essa propriedade?*. Ou seja, aqui os licenciandos deveriam lembrar dos conceitos de retas paralelas, casos de congruência de triângulos, propriedades dos lados de um paralelogramo, relação entre ângulos correspondentes ou alternos internos em retas paralelas e ângulos opostos pelo vértice. Notamos que as respostas foram bem diversificadas, como também citaram apenas os conceitos mais fáceis de serem visualizados a partir da frase dada na atividade.

Já no item *d)*, a pergunta era: *Como vocês apresentariam a seus alunos uma prova para essa propriedade?*. Ou seja, aqui os licenciandos deveriam construir e elaborar uma possível prova que apresentariam a seus alunos. Notamos que a maioria dos licenciandos entendeu que ou era para dizer se apresentaria ou não a seus alunos, ou era para escrever o passo a passo de como fariam essa apresentação. Apenas a Dupla 01 iniciou uma construção de prova do tipo *experiência mental*, mas não conseguiu concluir devido ao tempo.

A Dupla 01 (Figura 112) afirmou no item *c* que os conhecimentos necessários para a prova dessa propriedade são ponto médio, conceito de paralelogramo e diagonais. Percebemos que os licenciandos tinham um pouco mais de conhecimento quanto ao desenvolvimento da prova para essa propriedade, pois eles sabiam que seria necessário utilizar o conceito de paralelogramo.

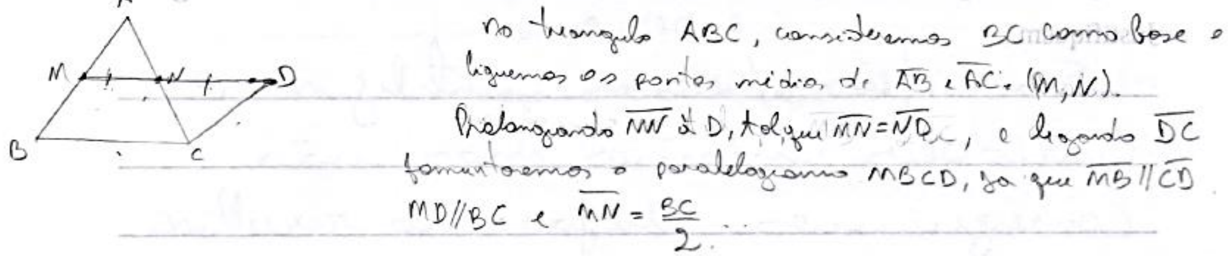
Figura 112 - Resposta da dupla 01 ao item *c* da atividade 7


Ponto médio e Conceito de paralelogramo e diagonais.

Fonte: dados da pesquisa

Essa dupla não lembrou de todos os conhecimentos necessários para a prova e no item *d* (Figura 113) conseguiu iniciar a construção de uma prova, utilizando os conceitos necessários para isso. Contudo, algumas afirmações não foram verificadas devido ao tempo, mas foram questionadas a partir da entrevista.

Figura 113 - Resposta da dupla 01 ao item *d* da atividade 7



No triangulo ABC, consideremos BC como base e liguemos os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ (M,N). Prolongando $\overline{MN}$ à D, tal que $\overline{MN}=\overline{ND}$, e ligando $\overline{DC}$ formaremos o paralelogramo MBCD, já que $\overline{MB}//\overline{CD}$ MD//BC e $\overline{MN}=\frac{BC}{2}$.

Fonte: dados da pesquisa

Durante a resolução desse item, percebemos que os licenciandos conversaram bastante acerca do passo a passo para a elaboração da prova, pois L11 percebeu que a propriedade da atividade 7 dizia respeito ao teorema da base média e então explica para L10. Devido ao tempo, pois o ônibus dos licenciandos estava chegando, eles apenas colocaram alguns passos da prova e entregaram. Por isso que tem algumas indicações, principalmente as três últimas, que não foram verificadas, mas notamos que eles sabiam como fazer e compreendiam quais conceitos estavam envolvidos para fazer a sua elaboração.

Na entrevista, notamos que os licenciandos só não conseguiram desenvolver com maiores detalhes o item *d* devido ao tempo. Além disso, como L11 já sabia que a propriedade dizia respeito ao teorema da base média, ele acabou utilizando esse conceito para afirmar que os lados são paralelos e que vale metade. Segue o extrato da entrevista:

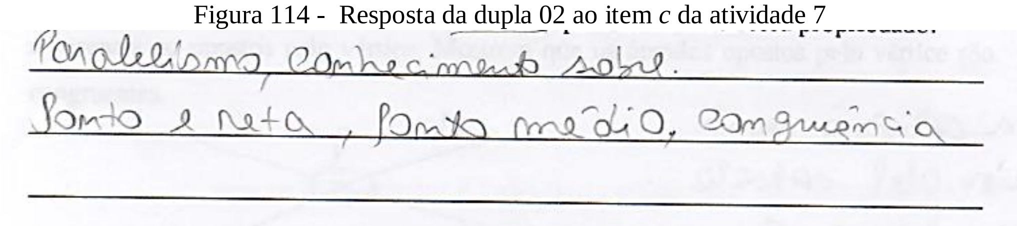
> **Pesquisadora:** na sete... você fez bem direitinho, só faltou justificar algumas coisas...
> **L11:** aqui foi o tempo mesmo, professora.
> **Pesquisadora:** foi, mas você ainda conseguiu montar a estrutura de uma prova...
> **L11:** foi.
> **Pesquisadora faz a leitura da resposta e pergunta:** essa parte aqui... a gente tem um paralelogramo, por que eu posso dizer que é um paralelogramo?
> **L11:** por que eu posso dizer que é um paralelogramo?
> **Pesquisadora:** isso.
> **L11:** porque...
> **Pesquisadora:** MBCD é um paralelogramo.
> **L11:** MBCD é um paralelogramo... MB é paralelo a CD...
> **Pesquisadora:** você diz que esse é paralelo a esse e (MB e CD)... esse é paralelo a esse (MD e BC).
> **L11:** esse é paralelo a esse.
> **Pesquisadora:** está certo?
> **L11:** espera aí que eu acho que me excedi um pouquinho. Não foi?
> **Pesquisadora:** não, eu só quero que você justifique.
> **L11:** não, é porque falta alguma coisa aqui...
> **Pesquisadora:** qual é a justificativa? O que acontece... para um quadrilátero ser um paralelogramo?
> **L11:** para um quadrilátero ser um paralelogramo?
> **Pesquisadora:** sim.
> **L11:** (pensando) eu não lembro não... espera aí, eu sei... tem umas... eu vi umas cinco propriedades que cabia, só que eu estou vendo aqui se eu estou analisando as coisas certo. Espera aí, deixa eu ver de novo o que foi que eu fiz. (lendo a resolução)... ou seja, quando eu liguei os dois pontos médios, ele já é paralelo à BC... não é? MN é um segmento que é ligado por pontos médios, então ele é paralelo à BC.
> **Pesquisadora:** certo.
> **L11:** querendo ou não ele é uma base média.
> **Pesquisadora:** é.
> **L11:** uma base média relacionada à BC. Então ele é paralelo.
> **Pesquisadora:** hum.
> **L11:** não é isso? (...) se eu prologar *b*... aí... (lendo) era para eu ter colocado outra condição não era?
> **Pesquisadora:** não, eu estou só querendo...
> **L11:** fica até mais interessante.
> **Pesquisadora:** é... qual?

L11: a condição de que... eu ia... aumentar MN, de uma forma que... MN é igual... não... MN igual a ND.
Pesquisadora: já está aqui.
L11: é... a condição que eu tinha pensado é que... CD ficasse paralelo a MB... só que... porque... tem dois lados iguais e paralelos, aí é um paralelogramo. É uma das propriedades que eu estava pensando... é porque eu me lembrei agora... é que a base média, isso aqui não é metade da metade? Esse segmento MN é a metade da base, se eu aumentei a metade, uma metade, então é um inteiro. Então eu tenho dois lados iguais e paralelos, é um paralelogramo.
Pesquisadora: eu ia te perguntar agora porque metade... Mas você já falou.
L11: é o teorema da base média.
Pesquisadora: não, não quero que use isso.
L11: eu só chutei.
Pesquisadora: porque você já sabia... MN é metade de BC justamente por isso que você falou.
L11: é.
Pesquisadora: esse segmento todo aqui é a mesma medida do de baixo. E como N é o ponto médio disso aqui... então esse aqui é metade daqui...
L11: isso... aqui como são paralelos, é um paralelogramo... eu só precisava de mais um pouquinho de tempo. Se eu tivesse tido mais um pouquinho de tempo...
Pesquisadora: mas você conseguiu iniciar uma prova...
L11: mais um pouquinho de tempo, eu conseguia fazer todinho. Mas o negócio é tempo.

A partir das respostas dadas aos itens *c* e *d* e como a Dupla 01 não utilizou formalidade e rigor para mostrar a validade da afirmação, consideramos que ela fez uma prova do tipo *experiência mental*. Segundo Balacheff (2000), os alunos, ao utilizarem esse tipo de prova, afirmam a validade de uma proposição de forma genérica e não fazem mais referência a casos particulares, como também a validação é sustentada pela teoria. Devido a isso, inferimos que esses licenciandos já possuem um melhor entendimento das definições e na capacidade de provar a equivalência de diferentes definições do mesmo conceito, assim como já entendem e executam o raciocínio lógico formal e as provas formais possuem significado para eles, pois sabem que é um dos meios de verificar a validade de uma afirmação de forma genérica. De acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), a Dupla 01 encontra-se no nível 4 de van Hiele, uma vez que já é capaz de realizar provas formais e as figuras são usadas apenas algumas vezes para ajudar a escolher as propriedades adequadas para a sua prova.

A Dupla 02 (Figura 114) afirmou no item *c* que os conhecimentos necessários para a prova são paralelismo, conhecimento sobre ponto e reta, ponto médio e congruência. Percebemos que os licenciandos tinham um pouco mais de conhecimento quanto ao desenvolvimento da prova, pois sabiam que seria necessário utilizar o conceito de congruência.

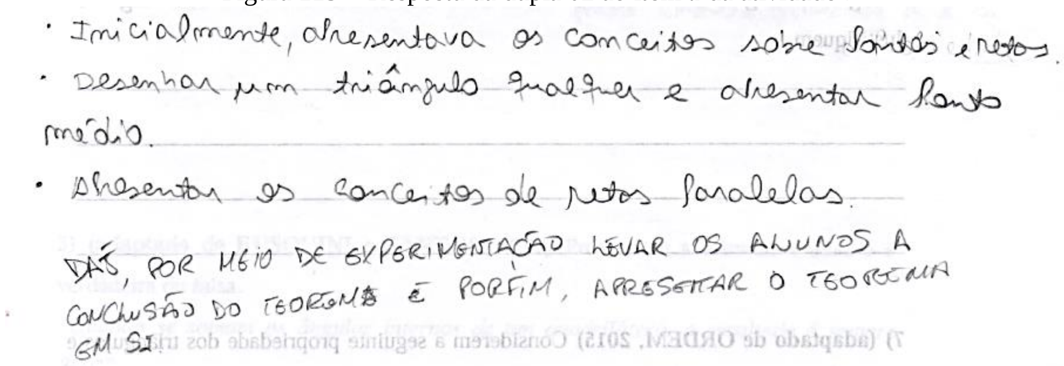
Figura 114 - Resposta da dupla 02 ao item *c* da atividade 7


Paralelismo, conhecimento sobre
ponto e reta, ponto médio, congruência

Fonte: dados da pesquisa

Com as filmagens, percebemos que esse item é respondido por L06 e L01 apenas concorda com o que foi feito. A Dupla 02 não lembrou de todos os conhecimentos necessários para a prova e no item *d* (Figura 115) escreveu apenas o passo a passo de como iriam apresentar a prova a seus alunos. Percebemos que essa dupla não sabia como deveria elaborar uma prova para essa propriedade, pois ela escreveu conceitos soltos, afirmando que iria apresentar os conceitos de pontos, retas e de retas paralelas. A partir disso e por meio da experimentação, ela iria levar os alunos a concluírem o teorema.

Figura 115 - Resposta da dupla 02 ao item *d* da atividade 7


· Inicialmente, apresentava os conceitos sobre pontos e retas.
· Desenhar um triângulo qualquer e apresentar ponto médio.
· Apresentar os conceitos de retas paralelas.
DAÍ, POR MEIO DE EXPERIMENTAÇÃO LEVAR OS ALUNOS A CONCLUSÃO DO TEOREMA E PORFIM, APRESENTAR O TEOREMA EM SI.

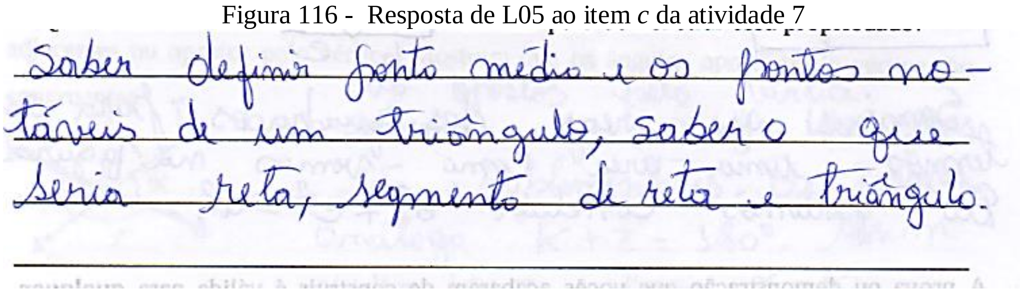
Fonte: dados da pesquisa

Durante a resolução desse item, percebemos que L06 anota algumas coisas no item e depois passa para L01 finalizar a resposta, como também notamos que L06 conversa com L01 sobre as suas dificuldades na disciplina de Tópicos em Geometria I. Na entrevista não foi possível a construção e elaboração de uma prova, pois esses licenciandos também estavam com o tempo limitado e afirmaram que não haviam se preparado para isso. Assim, os licenciandos afirmaram que só não fizeram uma prova para a propriedade devido ao tempo, mas que também tinham entendido que era somente para escrever o passo a passo, já que o item pedia para escrever como eles apresentariam a seus alunos a prova dessa propriedade. Além disso, os licenciandos sabiam que não tinham elaborado nenhuma prova, pois estava sem a fomentação.

A partir das respostas dadas aos itens *c* e *d* e como a Dupla 02 não lembrou de todos os conhecimentos necessários para a elaboração da prova e também só anotaram o passo a passo para a apresentação a seus alunos, percebemos que os licenciandos poderiam elaborar provas do tipo *experiência crucial* ou *exemplo genérico*, uma vez que não há explicitação das propriedades e conceitos inerentes a prova, como também eles utilizariam exemplos bem específicos, por meio da experimentação, para levantar afirmações, podendo ter desenvolvido de forma genérica. De acordo com Balacheff (2000), os licenciandos utilizariam um caso especial, geralmente não familiar, como também realizariam experiências e começariam a tomar consciência de que buscam por um resultado geral.

O licenciando 05 (Figura 116) afirmou no item *c* que os conhecimentos necessários para a prova da propriedade são ponto médio e pontos notáveis de um triângulo, reta, segmento de reta e triângulo. Percebemos que L05 não sabe quais conhecimentos são necessários para fazer tal prova, pois há conhecimentos citados por ele que não serão utilizados. Além disso, percebemos, a partir das filmagens, que ele não sabia que essa propriedade se tratava do teorema da base média de um triângulo, como também afirmava que não lembrava mais de nada.

Figura 116 - Resposta de L05 ao item *c* da atividade 7

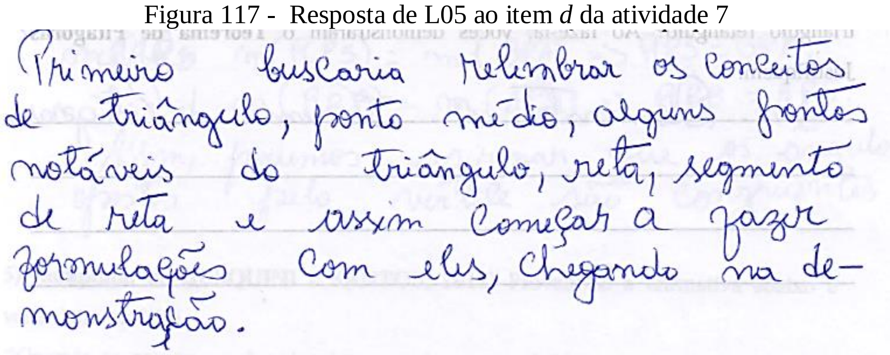


Saber definir ponto médio e os pontos notáveis de um triângulo, saber o que seria reta, segmento de reta e triângulo.

Fonte: dados da pesquisa

L05 não lembrou de todos os conhecimentos necessários para a prova e no item *d* (Figura 117) também não fez uma prova para a propriedade, apresentando apenas o passo a passo para a sua construção. Percebemos que esse licenciando também escreve os conceitos sem nenhuma fomentação, indicando que buscaria relembrar os conceitos de triângulo, ponto médio, alguns pontos notáveis do triângulo, reta, segmento de reta e a partir disso iria começar a fazer formulações com seus alunos, chegando na prova da propriedade.

Figura 117 - Resposta de L05 ao item *d* da atividade 7



Primeiro buscaria relembrar os conceitos de triângulo, ponto médio, alguns pontos notáveis do triângulo, reta, segmento de reta e assim começar a fazer formulações com eles, chegando na demonstração.

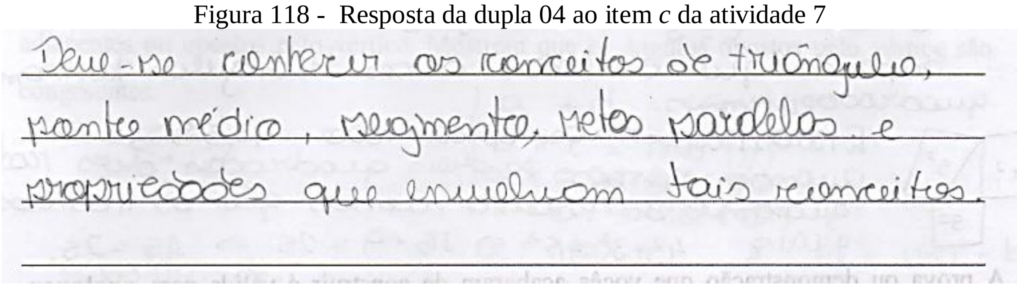
Fonte: dados da pesquisa

Na entrevista não foi possível a construção e elaboração de uma prova, pois esse licenciando também estava com o tempo limitado e afirmou que não havia se preparado para isso. Conversamos acerca da resposta dada e L05 afirmou que é geralmente o que ele faz para provar determinada afirmação a seus alunos. Percebemos então que ele faz toda uma revisão inicial dos conceitos necessários, para posteriormente construir a prova.

A partir das respostas dadas aos itens *c* e *d* e como L05 não lembrou de todos os conhecimentos necessários para a construção da prova e também só registrou o passo a passo para a apresentação a seus alunos, percebemos que o licenciando poderia elaborar provas do tipo *experiência crucial* ou *exemplo genérico*, uma vez que não há explicitação das propriedades e conceitos inerentes a prova, como também ele utilizaria exemplos bem específicos para levantar afirmações.

A Dupla 04 (Figura 118), inicialmente, não entende o que está sendo pedido no item *c* e pergunta a pesquisadora o que seria mobilizar, então a pesquisadora explica que são os conhecimentos necessários (ou conhecimentos prévios) para que se possa elaborar a prova dessa propriedade. Os licenciandos afirmam que se deve conhecer os conceitos de triângulo, ponto médio, segmento, retas paralelas e propriedades que envolvam tais conceitos. Ao discutirem os conceitos, L03 afirma que também seriam necessários os conceitos envolvendo as retas paralelas cortadas por uma transversal.

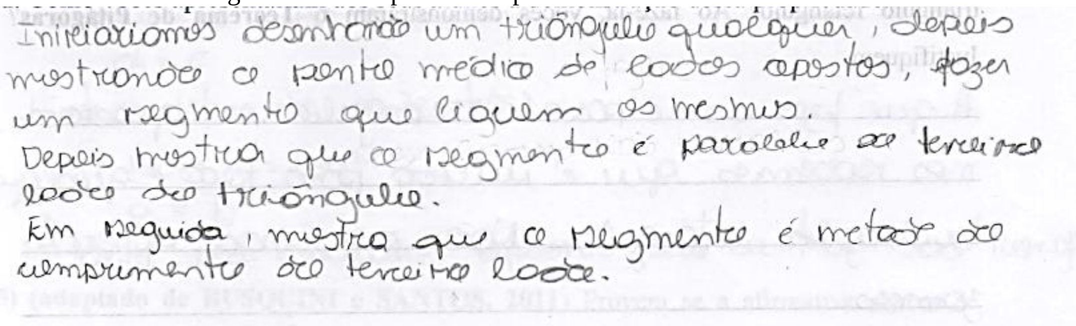
Figura 118 - Resposta da dupla 04 ao item *c* da atividade 7


Deve-se conhecer os conceitos de triângulo, ponto médio, segmento, retas paralelas e propriedades que envolvam tais conceitos.

Fonte: dados da pesquisa

A Dupla 04 não lembrou de todos os conhecimentos necessários para a prova da propriedade e no item *d* (Figura 119) escreveu apenas o passo a passo, sem fomentação, de como iria apresentar a prova a seus alunos. Percebemos que os licenciandos iniciariam com o desenho de um triângulo qualquer para em seguida fazer os pontos médios dos lados e construir o segmento que os liguem. Após isso, eles iriam mostrar que o segmento é paralelo ao terceiro lado e que vale metade desse terceiro lado. Contudo, não há muitas indicações dos conceitos necessários para fazer tal prova nem de como iria ser feita essa construção.

Figura 119 - Resposta da dupla 04 ao item *d* da atividade 7



Iniciaríamos desenhando um triângulo qualquer, depois mostrando o ponto médio de lados opostos, fazer um segmento que liguem os mesmos.
Depois mostrar que o segmento é paralelo ao terceiro lado do triângulo.
Em seguida, mostrar que o segmento é metade do comprimento do terceiro lado.

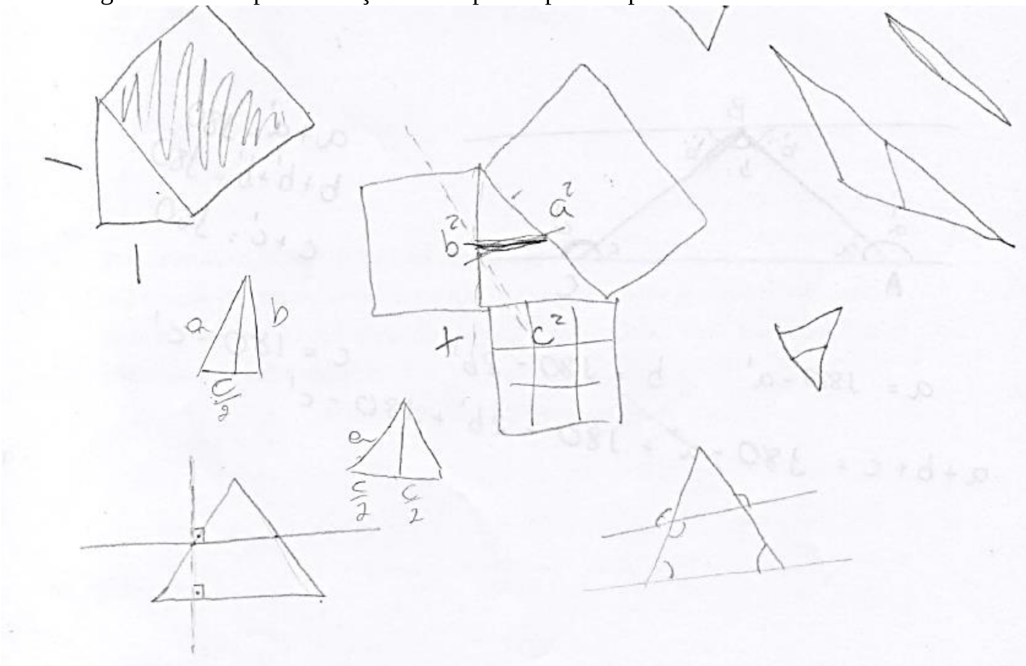
Fonte: dados da pesquisa

Durante a resolução, percebemos que essa dupla não sabia como responder e a pesquisadora alertou que ela deveria elaborar uma prova, o que também a levou a afirmar que não sabia. Além disso, os licenciandos estavam conversando e a pesquisadora falou que a propriedade diz respeito ao teorema da base média e notamos que eles não tinham percebido que tal propriedade dizia respeito a isso, afirmando inclusive que a prova não é vista na Educação Básica, apenas na universidade. A pesquisadora percebeu que os licenciandos não estavam conseguindo desenvolver uma prova e pediu para eles escreverem pelo menos o passo a passo de como fariam para seus alunos. Segue o extrato do diálogo:

Pesquisadora: de base média?
L02: é base média é? Eu também não sabia não.
L03: que um é metade do terceiro.
Pesquisadora: é base média.
L02: eu vi aqui na universidade, na escola não. Na escola a pessoa não vê não. O professor já diz é tal coisa e ...
Pesquisadora: e pronto.
L02: e segue. (...) mas isso é assunto de que?
L03: Geometria.
L02: deve ser para que... para terceiro ano? Não, segundo ano né? Ensino médio.
L03 não sabe.
Pesquisadora: oitavo ano vê.
L02: em que escola? Só se for particular, não é?
(...)
L03: a questão não é a prova, mas como a gente vai apresentar aos alunos. Seria dessa forma? Eu não iria fazer não.
L02 confirma.
L03: professora, eu não sei não.
L02 confirma e fala: é difícil professora (...) essa daqui e essa outra...
(...)
L02: você não sabe os passos para provar não?
L03: sei não... eu teria que estudar antes para saber como eu iria apresentar para eles.
Pesquisadora: se vocês quiserem pelo menos escrever os passos de como apresentariam... teve gente que escreveu os passos...
L03 fica refletindo.
Pesquisadora: senão deixa em branco mesmo.
L02 vai dizendo para L03 copiar.
L03: pronto.

Na folha de rascunho encontramos algumas experimentações utilizadas (Figura 120) na tentativa de levantar algumas conjecturas quanto à prova que deveria ser elaborada. Contudo, somente encontramos esses desenhos, não havendo nenhuma fomentação.

Figura 120 - Experimentações da dupla 04 para responder o item *d* da atividade 7



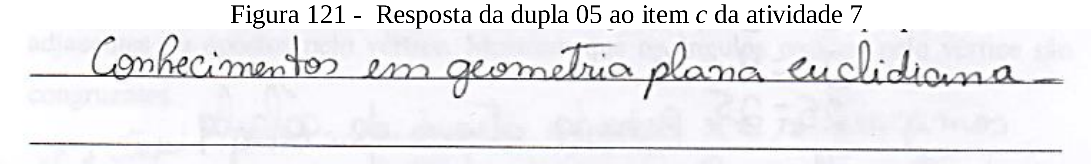
Fonte: dados da pesquisa

Na entrevista não foi possível a construção e elaboração de uma prova, pois esses licenciandos também estavam com o tempo limitado e afirmaram que não haviam se preparado para isso. Assim, conversamos acerca da resposta dada e L02 afirmou que foi L03 quem fez o passo a passo e que ele não lembrava nem da propriedade nem da prova. Já L03 não quis discutir muito, afirmando apenas que até então faria isso, não faria diferente. O que nos leva a inferir que eles realmente não sabiam de uma elaboração para prova dessa propriedade, como também tinham que rever se seria possível fazer isso para os seus alunos.

A partir das respostas dadas aos itens *c* e *d* e como a Dupla 04 não lembrou de todos os conhecimentos necessários para a construção da prova e também só registrou o passo a passo, a pedido da pesquisadora, para a apresentação a seus alunos, percebemos que os licenciandos poderiam elaborar provas do tipo *experiência crucial* ou *exemplo genérico*, uma vez que não há explicitação das propriedades e conceitos inerentes a prova, como também eles utilizariam exemplos bem específicos, por meio da experimentação, para levantar afirmações, podendo ter desenvolvido de forma genérica.

A Dupla 05 (Figura 121) afirma no item *c* que os conhecimentos necessários para a prova da propriedade são os de Geometria Euclidiana Plana, não especificando quais. Por isso, na entrevista, buscamos questionar aos licenciandos quais seriam e eles afirmaram que seriam necessários os conhecimentos de ponto, reta, ponto médio, paralelas e o conceito de ângulos quando são traçadas essas retas, para a partir disso saber como utilizar durante a prova e se ela é possível ou não.

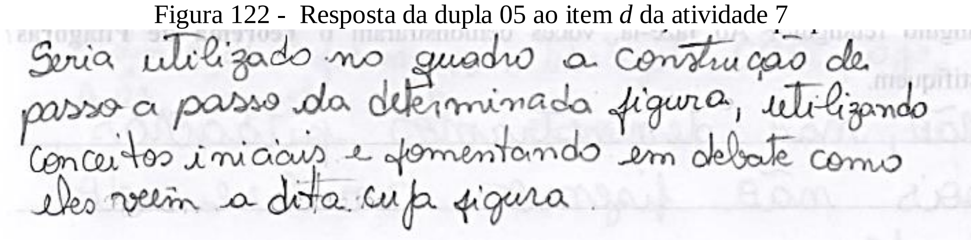
Figura 121 - Resposta da dupla 05 ao item *c* da atividade 7


Conhecimentos em geometria plana euclidiana

Fonte: dados da pesquisa

A Dupla 05 não lembrou de todos os conhecimentos necessários para a construção da prova e no item *d* (Figura 122) também não elaborou uma prova para a propriedade, apenas escreveu o passo a passo de como a apresentaria a seus alunos. Percebemos que essa dupla apresenta algo bem limitado, sem muita discussão ou exposição dos conceitos relacionados à construção, uma vez que ela apenas afirma que utilizaria o quadro para construir o passo a passo de determinada figura, utilizando conceitos iniciais e fomentando um debate de como os alunos veem a figura. Ou seja, os licenciandos não sabem quais conceitos são necessários para elaborar a prova dessa propriedade e como deveriam fazer a sua construção.

Figura 122 - Resposta da dupla 05 ao item *d* da atividade 7


Seria utilizado no quadro a construção de passo a passo da determinada figura, utilizando conceitos iniciais e fomentando em debate como eles veem a dita cuja figura.

Fonte: dados da pesquisa

Outro fato importante é que os licenciandos afirmam que iriam fomentar um debate, o que nos leva a inferir que o processo de construção e elaboração da prova faria com que os alunos participassem mais desse momento, fazendo com que eles percebam a importância disso para a construção de conhecimentos matemáticos, como também os estimulando a pensar e raciocinar matematicamente por meio da figura construída.

Na entrevista também não foi possível a construção e elaboração de uma prova para a propriedade, pois a dupla também estava com o tempo limitado e afirmou que não havia se preparado para isso. Assim, conversamos acerca da sua resposta e percebemos que os licenciandos não tinham entendido o que estava sendo pedido no item, uma vez que L09 afirmou que não sabia que a resposta deveria ser feita com relação à propriedade da atividade

7 e achava que tinha que escrever como eles iriam apresentar qualquer prova a seus alunos. Segue o extrato da entrevista:

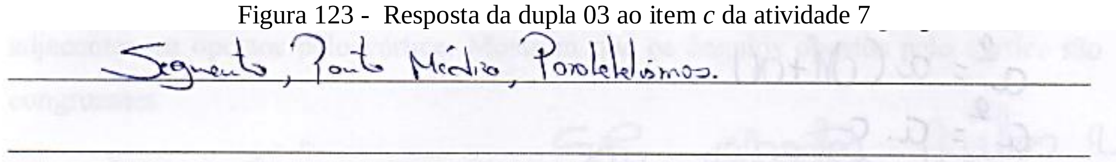
> **Pesquisadora:** no item *d*, a pergunta era como vocês apresentariam a seus alunos a prova... então vocês explicaram que... iria fazer a construção passo a passo, utilizando os conceitos, fomentando um debate... mas como é que seria a prova mesmo?
> **L09:** como assim?
> **Pesquisadora:** como é que vocês provariam essa afirmação?
> **L09:** oxen... fazendo no quadro, não é?! A senhora queria saber como seria a construção feita?
> **Pesquisadora:** era.
> **L09:** porque eu interpretei assim... como seria explicado ao aluno... então eu trabalharia por construção... a construção que eu falo é assim... elaborar a imagem, a figura para fixar, ponto a ponto e exemplificando passo a passo.... como se fosse fazer o passo a passo...
> **Pesquisadora:** isso... como é que seria esse passo a passo?
> **L09:** aí é o que? Sobre o assunto? Depende da demonstração... qual é a demonstração?
> **L04:** eu acho que primeiro tinha que explicar o que é ponto médio... identificar o ponto médio na figura... e depois fazer essa paralela ao terceiro lado...
> **L09:** era com relação a isso?
> **Pesquisadora:** era... era com relação a essa propriedade...
> **L09:** eu imaginei que era algo geral...
> **Pesquisadora:** aí depois?
> **L04:** aí começaria a fazer a demonstração... eu desenharia a figura para facilitar o entendimento também.

A partir das respostas dadas aos itens *c* e *d* e como a Dupla 05 não lembrou de todos os conhecimentos necessários para a prova e também só anotou superficialmente o passo a passo para a apresentação a seus alunos, pois não entenderam o que estava sendo pedido no item *d*, percebemos que essa dupla poderia elaborar provas do tipo *experiência crucial* ou *exemplo genérico*, uma vez que não há explicitação das propriedades e conceitos inerentes a prova, como também ela utilizaria exemplos bem específicos, por meio da experimentação, para levantar afirmações, podendo ter desenvolvido de forma genérica. De acordo com Balacheff (2000), os licenciandos utilizariam um caso especial, geralmente não familiar, como também realizariam experiências e começariam a tomar consciência de que busca por um resultado geral.

Com as justificativas dadas aos itens *c* e *d*, percebemos que a possível construção da prova elaborada por L05 e pelas Duplas 02, 04 e 05 se encontra ou dentro das *provas pragmáticas* (*experiência crucial*) ou na transição entre *elas* e as *intelectuais* (*exemplo genérico*), por isso esses licenciandos ainda trabalham com exemplos ou casos bem particulares e já sabem que buscam por uma generalização, ainda baseada em exemplos, mas procurando justifica-la com os conceitos relacionados ao teorema proposto. Inferimos que eles já são capazes de fazer tais experimentações, porque já conseguem interpretar e declarar definições, estando conscientes das condições necessárias e suficientes de uma propriedade. Além disso, eles procuram por alguma explicação informal baseada em propriedades matemáticas ou os exemplos utilizados são bem selecionados. De acordo com Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), esses licenciandos encontram-se entre os níveis 2 e 3 de van Hiele, pois a prova construída dentro desse nível consiste em alguma verificação experimental por meio de um ou mais casos, como também ainda não compreendem as provas formais em sua totalidade e por isso não conseguem organizar uma sequência de raciocínio lógico que justifique suas observações.

Já a Dupla 03 (Figura 123) afirma no item *c* que os conhecimentos necessários para provar a propriedade são segmento, ponto e paralelismo. Percebemos que os licenciandos conseguiram identificar tais conceitos a partir da frase dada na atividade, ou seja, eles não sabem quais são os conhecimentos extras que devem ser mobilizados para elaborar a prova.

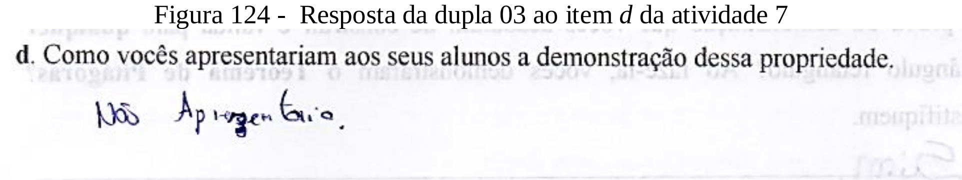
Figura 123 - Resposta da dupla 03 ao item *c* da atividade 7



Fonte: dados da pesquisa

No item *d* (Figura 124) essa dupla não elaborou uma prova para a propriedade, como também não colocou o passo a passo de como apresentaria a seus alunos. Os licenciandos apenas afirmaram que não apresentariam a prova.

Figura 124 - Resposta da dupla 03 ao item *d* da atividade 7



Fonte: dados da pesquisa

Durante a resolução desse item, percebemos que a Dupla 03 dialoga sobre a resposta e os licenciandos concordam que não fariam tal apresentação, questionando a pesquisadora se poderiam responder assim. A pesquisadora pede para eles responderem do jeito deles, então L08 fala para L07 escrever que eles não apresentariam a prova dessa propriedade a seus alunos. Na entrevista, questionamos novamente se eles realmente não apresentariam e eles afirmaram que sim, justificando que os alunos não se interessam por isso e que muitas vezes pedem para eles irem logo aplicando a propriedade. Segue o extrato da entrevista:

Pesquisadora: e aqui você não provaria?

> **L07:** não... não adianta fazer demonstração para os meninos... eles não aprendem demonstração... um dia desses eu estava fazendo de que, meu Deus... pronto, foi até a relação de ângulo interno com ângulo externo...
> **Pesquisadora:** sei.
> **L11:** aí eu usei letras, não é?! Geralmente a gente usa letras... aí eles ficaram: o que é isso? Eu vou usar isso em que? Aí tem que ir logo para um exemplo... para eles tentarem ver a solução.

A partir das respostas dadas aos itens *c* e *d*, inferimos que a Dupla 03 se encontra entre os níveis 1 e 2 de van Hiele, segundo Ontário (2006), Dall'Alba (2015), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998), justamente porque não conseguiu lembrar dos conceitos necessários, como também por afirmar que não iria construir e elaborar a prova para os seus alunos, pois eles não se interessam e já sabem que é verdade e pedem logo a aplicação. O que corrobora as ideias apresentadas por Oliveira (2012) ao afirmar que licenciandos podem oscilar de um nível para outro na mesma atividade, assim como podem ser enquadrados em níveis diferentes, executando as mesmas atividades, dependendo do critério usado.

De modo geral, percebemos que dentro da mesma atividade os licenciandos oscilaram de um nível para outro. Ou seja, notamos que a Dupla 01 oscilou entre os níveis 3 e 4; a Dupla 02 entre os níveis 2 e 3; L05 oscilou entre os níveis 1 e 2 nos itens *a* e *b* e entre os níveis 2 e 3 nos itens *c* e *d*; a Dupla 03 oscilou entre os níveis 1 e 2; a Dupla 04 oscilou entre os níveis 3 e 4 nos itens *a* e *b* e entre os níveis 2 e 3 nos itens *c* e *d*; e a Dupla 05 oscilou entre os níveis 1 e 2 nos itens *a* e *b* e entre os níveis 2 e 3 nos itens *c* e *d*. A oscilação pode apontar para o fato de os licenciandos estarem em um momento de transição entre um nível e outro, uma vez que eles já possuem as características do nível mais baixo completas, faltando fortalecer as demais características do nível superior.

Além disso, percebemos que, em comparação da atividade 6 para a 7, três duplas e o licenciando oscilaram de níveis de uma atividade para outra. A Dupla 02, na atividade 6 se encontrava no nível 1 e por isso não construiu uma prova para o teorema de Pitágoras, enquanto que nessa atividade, encontra-se entre os níveis 2 e 3 podendo construir provas do tipo *experiência crucial* ou *exemplo genérico*. Já L05, na atividade 6 se encontrava no nível 2 construindo provas do tipo *experiência crucial*, e nessa atividade encontra-se oscilando em níveis diferentes (2 e 3), podendo construir provas do tipo *experiência crucial* ou *exemplo genérico*.

A Dupla 03, na atividade 6 se encontrava no nível 2 construindo provas do tipo *experiência crucial* e nessa atividade, especificamente no item *d*, ela se encontra no nível 1 e por isso não construiu uma prova para o teorema da base média de um triângulo. A Dupla 05 esteve, nas duas atividades, oscilando entre os níveis 2 e 3, porém na atividade 6 essa dupla construiu provas do tipo *empirismo ingênuo*, enquanto na atividade 7 poderia construir provas do tipo *experiência crucial* ou *exemplo genérico*. Isto quer dizer que em atividades diferentes esses licenciandos estiveram em níveis de pensamento geométrico diferentes e, consequentemente, elaboraram provas de tipos diferentes.

Esses resultados vêm a corroborar as ideias apresentadas por Nasser (1992) e Andrade e Nacarato (2004) ao afirmarem que um determinado aluno pode apresentar características de dois níveis diferentes em tópicos distintos da Geometria, sendo possível transitar entre um nível e outro imediatamente anterior ou posterior a resolução de uma mesma atividade. Além disso, embasa também a discussão trazida por Nasser e Sant'Anna (2010) ao argumentarem que um aluno também pode raciocinar em um nível sem ter atingido completamente o nível anterior. Ou seja, esses resultados corroboram a primeira crítica apresentada ao modelo de van Hiele acerca do caráter hierárquico de seus níveis, discutida em Oliveira (2012) e apresentada na seção 2.4 do Capítulo 2.

Percebemos também que, dependendo do período em que o licenciando se encontra no curso, há esquecimento maior do que estudou nas disciplinas, em especial na de Tópicos em Geometria I. Por exemplo, as Duplas 03, 04 e 05 possuem sujeitos que estão entre o 8º e 10º período do curso e nessa atividade eles elaboraram somente provas do tipo *empirismo ingênuo*, *experiência crucial* e *exemplo genérico*, que estão dentro das *provas pragmáticas* ou estão na transição, em que os licenciandos buscam verificar a validade de determinada afirmação por meio de testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos, como também podem considerar exemplos bem particulares para validar a afirmação. Além disso, a contradição que notamos é que esses licenciandos, estando próximos de concluir o curso, quase não realizaram, nessa atividade, provas do tipo *experiência mental*, pois diziam que já sabiam que os teoremas e afirmações eram verdadeiros.

Nos itens *a* e *b* percebemos que apenas as Duplas 01 e 04 se encontravam entre os níveis 3 e 4, pois conseguiram formular corretamente a propriedade na forma condicional e consequentemente identificaram a hipótese e as teses de forma correta. A Dupla 02 respondeu errado os dois itens, mas na entrevista conseguiram perceber que a propriedade possuía uma hipótese e duas teses e por isso a dupla se encontrava entre os níveis 2 e 3 de van Hiele. Já L05 e as Duplas 03 e 05 responderam errado os dois itens e na entrevista não conseguiram perceber que a propriedade apresentava apenas uma hipótese e duas teses e por isso se encontravam entre os níveis 1 e 2 de van Hiele.

Nos itens *c* e *d*, apenas a Dupla 01 estava no nível 4 de van Hiele, pois podia entender e escrever provas formais, como também podia utilizar figuras específicas apenas para ajudar a selecionar as propriedades adequadas para a prova. Por conta disso, essa dupla foi a única que esboçou uma possível prova do tipo *experiência mental*, validando a afirmação de forma genérica.

As Duplas 02, 04 e 05 e L05 estavam oscilando entre os níveis 2 e 3, pois podiam provar a afirmação a partir da verificação experimental de um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, esses licenciandos podiam se convencer apenas com um exemplo especial ou podiam precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado, como também podiam fazer deduções e provas informais, mas seu raciocínio lógico ainda continua apoiado pela manipulação. Por conta disso, esses licenciandos poderiam construir dois tipos de prova, uma do tipo *experiência crucial*, podendo verificar a afirmação a partir de um caso bem especial de triângulo para confirmar a propriedade, e a outra do tipo *exemplo genérico*, validando informalmente a afirmação, pois seu raciocínio lógico ainda continua apoiado na manipulação.

A Dupla 03 citou genericamente no item *c* os conhecimentos necessários para a elaboração da prova da propriedade e no *d* afirmou que não a apresentaria a seus alunos, pois eles não se interessam por esse tipo de trabalho. Por isso inferimos que essa dupla se encontrava entre os níveis 1 e 2 de van Hiele, pois a identificação das figuras é feita apenas pelas suas características físicas globais, tais como aspecto, tamanho dos elementos, posição, etc. e ainda não é capaz de ler uma definição matemática, como também ainda não é capaz de aceitar quaisquer relações entre duas famílias diferentes. Por conta disso, no item *d* não há indícios de prova, já que não sentiu a necessidade de validar as afirmações matemáticas.

Portanto, conseguimos averiguar concretamente as articulações estabelecidas no Capítulo 4, verificando que os licenciandos que estavam efetivamente no nível 1 de van Hiele não elaboraram nenhum tipo de prova, pois não lembraram dos conceitos necessários para validar o teorema da base média e afirmaram que seus alunos não se interessam por isso. Os licenciandos que estavam oscilando entre os níveis 2 e 3 de van Hiele podem elaborar provas do tipo *experiência crucial* ou *exemplo genérico*, utilizando alguns exemplos bem específicos ou construindo provas por meio de exemplos particulares, podendo fazer de forma genérica. E os licenciandos que estavam efetivamente no nível 4 de van Hiele poderiam elaborar provas do tipo *experiência mental*, utilizando o raciocínio lógico formal e os conceitos teóricos corretamente.

6.2.8 Comentários

Os resultados encontrados nos ajudam a inferir que esses licenciandos aprendem ou estudam os conceitos geométricos e as provas matemáticas apenas para as disciplinas, ficando pouco conhecimento posterior a elas e não reconhecendo a importância do que estão aprendendo para a sua formação enquanto futuro professor. Sabemos que o entendimento ocorre, pois futuramente, quando eles forem ministrar aulas sobre esses conteúdos, irão revisar novamente e planejar para assim irem dar aula e então saberão como explicar, contudo, não saberemos se irão ou não fazer o trabalho com justificações, argumentações e provas com os seus alunos.

Notamos que os licenciandos oscilaram muito de um nível de pensamento para outro, em que muitas vezes estavam em níveis superiores em determinada atividade e na seguinte voltava para um nível inferior. Como consequência, nas atividades que exigiam uma prova para determinada afirmação também foi observado a modificação na linguagem adotada por eles e por isso as provas diferiam de acordo com os níveis de pensamento em que eles se encontravam. Jaime e Gutiérrez (1990) destacam essa estreita ligação entre linguagem e níveis ao afirmar que as diferentes habilidades de raciocínio associadas aos níveis de van Hiele não se refletem apenas na maneira de o aluno resolver os problemas propostos, mas também na maneira de ele se expressar e no significado dado a um determinado vocabulário.

Não estamos interessados em fazer uma análise detalhada da questão da oscilação aqui, pois está além do escopo desta tese, mas queremos discuti-la sucintamente para que os pesquisadores e professores que desejem trabalhar com o modelo de van Hiele em suas aulas não se sintam confusos. Sendo assim, a oscilação percebida entre os níveis próximos de van Hiele nas Atividades 1, 2, 5, 6 e 7 pode significar o fato de os licenciandos estarem em um momento de transição entre um nível e outro, pois possuindo as características do nível mais baixo completas, falta fortalecer as características incompletas do nível superior. Por exemplo, na Atividade 1 a Dupla 04 já possuía as características do nível 3, sendo capaz de reconhecer que algumas propriedades são deduzidas de outras, descobrindo essas implicações e elaborando deduções e provas informais, pois começava a desenvolver a sua capacidade de raciocínio formal (matemático) ainda apoiada na manipulação, contudo quando foi necessário entender e executar o raciocínio lógico formal e elaborar provas formais, características do nível 4, a dupla não conseguiu executá-las nessa atividade, pois ainda não estava com elas sedimentadas.

Isto quer dizer que a passagem de um nível para o próximo ocorre mais lentamente e de forma contínua. Conforme Jaime e Gutiérrez (1990), a transição de um nível de pensamento para o próximo ocorre gradualmente e que, por algum tempo, o aluno estará em um período de transição no qual ele combinará o raciocínio de um nível e de outro. A evidência desse período ocorrerá quando um aluno demonstrar o desejo de usar o nível superior, mas, quando encontrar dificuldades ou dúvidas, tenderá a se refugiar na segurança do nível inferior, no qual se sente mais à vontade.

Além disso, esses pesquisadores também ressaltam que o nível de pensamento dos indivíduos é local, ou seja, podemos ver o desempenho de um aluno em diferentes níveis de pensamento, se propusermos atividades baseadas em diferentes áreas da Matemática. Ou seja, para eles não é ilógico encontrar essa diversidade de níveis de pensamento, pois o desenvolvimento da capacidade de raciocínio de uma pessoa é fundamentalmente alcançado graças à experiência e por isso é normal que os alunos tenham mais experiência em algumas áreas da Matemática do que em outras. Eles afirmam que essa diversidade de níveis é mais fácil de encontrar em alunos que não raciocinaram no nível 4 em nenhuma área, corroborando os resultados encontrados em nossa pesquisa. Por outro lado, quando um aluno é capaz de desenvolver o raciocínio lógico formal em algumas partes da Matemática e começa a estudar outro campo, é normal que ele passe pelos três primeiros níveis de raciocínio nesse campo muito rapidamente e alcancem o quarto nível (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990).

A interação também foi percebida como algo importante na resolução dessas atividades, pois o diálogo existente entre os licenciandos durante a resolução os ajudaram a refletir sobre os conceitos geométricos presentes nas atividades e a apresentar seus conhecimentos, buscando argumentar sobre aquilo que considerava certo. Van Hiele (1957) considera que o contato pessoal com outras pessoas ajuda na aquisição da compreensão e que um aluno que possui um nível superior de pensamento pode ajudar o outro a alcança-lo. Entretanto, ele ressalta que essa compreensão não é diretamente transferível de uma pessoa para outra, pois é preciso que esse aluno queira entender. Além disso, o pesquisador afirma que essa ajuda não pode ser fornecida em um nível muito alto, pois pode causar desânimo, nem pode ser fornecida em um nível muito baixo, uma vez que envolve uma mecanização muito cedo. Também não pode acontecer que a pessoa que está dando a ajuda resolva todo o problema, pois o aluno pode perder todo o interesse.

É importante, portanto, que os alunos saibam trabalhar em grupo e que os que possuam um nível superior de pensamento saibam motivar e ajudar os demais a adquiri-lo, compreendendo que não deve resolver os problemas por eles, mas sim auxiliá-lo no desenvolvimento do seu raciocínio. Por isso a interação entre os licenciandos foi tão essencial nesse momento da resolução das atividades, uma vez que quando um licenciando teve dúvidas, tinha o outro para discutir e tentar saná-la. Assim, a interação entre os licenciandos veio a ser importante no sentido de ser um elo entre aquilo que já foi aprendido e aquilo que ele poderá aprender com ajuda do outro colega, como aconteceu por exemplo com a Dupla 04, em que L02 ajudou L03 a perceber que o teorema de Pitágoras estava relacionado com as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo. Levantamos a questão de que caso mudássemos os integrantes das duplas, possivelmente as respostas, os níveis de pensamento e as provas construídas seriam diferentes.

Ao compararmos os resultados encontrados nessa seção com os objetivos geral e específicos do curso de Licenciatura da instituição B que os licenciandos fazem parte, notamos que não está ocorrendo uma sólida formação matemática, já vez que mais de 50% dos sujeitos pesquisados estavam sempre afirmando que não lembravam dos conceitos geométricos presentes nas sete atividades, pois fazia muito tempo que tinham estudado ou porque o professor os haviam traumatizado. Além disso, esses licenciandos estão se formando sem senso crítico, raciocínio lógico e capacidade de desenvolver atividades relacionadas ao ensino-aprendizagem em Matemática, principalmente as atividades associadas à justificação e prova de afirmações matemáticas.

Também foi percebido que não está ocorrendo um fortalecimento do domínio dos conteúdos matemáticos básicos relacionados à atividade docente, uma vez que alguns desses licenciandos não lembravam e não sabiam trabalhar com os seguintes conceitos geométricos: área de um quadrado e de um triângulo, produtos notáveis, potenciação, radiciação, retas paralelas, teorema das retas paralelas cortadas por uma transversal, ângulos suplementares, relações entre os ângulos de um triângulo, soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e de um quadrilátero, ponto médio de um segmento, base média de um triângulo, diagonais de um quadrilátero qualquer, casos de congruência de triângulos, ângulos adjacentes, sistema de equações, propriedades dos quadriláteros (paralelogramos, quadrados, retângulos, etc.), relações métricas de um triângulo retângulo, entre outros.

Inferimos que os onze licenciandos dessa instituição estão saindo ou sairão com conhecimento matemático inadequado para a prática docente, pois percebemos muitas dificuldades com relação ao trabalho com os conceitos geométricos, o que corrobora a fala de Lorenzato (1995) acerca do *círculo vicioso,* em que os alunos que não estudaram Geometria, voltam a Educação Básica para ensiná-la e, consequentemente, não sabem como ensiná-la. Ou seja, percebemos que quem não sabe ensina do jeito que sabe o pouco que sabe, e quem aprende,

aprende mal. Além disso, esses licenciandos estão saindo ou sairão sem terem sedimentado corretamente a capacidade de formular, modelar, argumentar e validar as soluções de situações-problema variadas. Ademais, sairão da Licenciatura em Matemática sem terem sedimentado corretamente a capacidade de comunicar-se matematicamente, como também sem terem o domínio do raciocínio lógico-dedutivo na área de Geometria.

Notamos que a maioria das justificativas apresentadas nas atividades estava associada a observação/visualização de figuras geométricas ou de exemplos bem específicos, pois os licenciandos não lembravam dos conceitos necessários para a elaboração de provas formais e por conta disso utilizavam apenas as experimentações. Além disso, os licenciandos tiveram muita dificuldade em expor as suas ideias, não sabendo justificar o que pensavam ou não sabendo construir uma frase adequadamente. Esses resultados corroboram os resultados apresentados no ENADE 2014, em que os licenciandos também possuem muita dificuldade em expressar seus pensamentos ou ideias nas questões discursivas, como também tiveram dificuldades de encaminhar uma reflexão mais profunda acerca da resolução de problemas e não costumam perceber os passos de uma construção geométrica sem o apoio de figuras.

Os resultados encontrados destoam das orientações da SBEM (2003), que recomenda que o futuro professor seja levado a explorar situações-problema; a procurar regularidades; a fazer conjecturas; a fazer generalizações; a pensar de maneira lógica; a comunicar-se matematicamente utilizando diferentes linguagens; compreender noções de conjectura, teorema, demonstrações; entre outros. O que nos leva a crer que o conhecimento de axiomas, definições, teoremas e demonstrações desses licenciandos na instituição B do estado da Paraíba foi adquirido de forma acrítica e reprodutiva, não sendo suficiente para que eles sejam capazes de utilizá-los em qualquer situação ou problema. Isso foi relatado pelos licenciandos a partir do questionário, em que abordaram que os professores não refletem sobre as construções das demonstrações, apenas repassam tal como estão nos livros-texto.

Destoam também das Diretrizes Curriculares para os Cursos de Matemática (BRASIL, 2001) ao esperar que os licenciandos desenvolvam a capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão; identifiquem, formulem e resolvam problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema; desenvolvam estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos alunos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos; entre outros.

Esperávamos que a maioria desses licenciandos conseguisse construir provas formais, uma vez que sete deles estavam entre o 8º e 10º período do curso de Licenciatura em Matemática (63,6%). Contudo, foi percebido que seis dos onze licenciandos só conseguiram desenvolver provas do tipo *empirismo ingênuo*, *experiência crucial* e *exemplo genérico*, corroborando assim os resultados encontrados por Nasser e Tinoco (2003) ao observarem que a maioria dos licenciandos não domina as habilidades de demonstrar determinada afirmação durante o curso, nem quando se formam e nem durante os primeiros anos de docência, e por Ramassoti (2015) ao alertar para o fato de os licenciandos estarem saindo do curso de Matemática sem saberem provar formalmente. Percebemos que as provas construídas por eles validavam as afirmações matemáticas por meio de testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos, como também consideravam exemplos bem particulares para validar a afirmação, o que poderia ter sido feito de forma genérica.

Isso só acontece devido ao nível de pensamento geométrico deles estarem entre os níveis 2 e 3 de van Hiele, ou seja, nesses níveis, os alunos ainda não sentem a necessidade da demonstração propriamente dita, como também se satisfazem com a construção de *provas pragmáticas*, conforme as articulações feitas no Capítulo 4. Esses resultados corroboram as ideias apresentadas por Jaime e Gutiérrez (1990) ao argumentarem que alunos que estão no nível 3 de van Hiele ou abaixo, quando o professor pede para eles mostrarem a veracidade de determinadas propriedades, eles o repreendem questionando o porquê de se provar isso, uma vez que já sabem que é verdade. Essa reação aconteceu principalmente com a Dupla 03 e a maioria das suas justificativas estava entre os níveis 2 e 3 de van Hiele.

Notamos que a Dupla 01 oscilou entre os quatro primeiros níveis de van Hiele, contudo esteve no nível 4 em seis (2 a 7) de sete atividades, nas quais ela sabia utilizar e reconhecer propriedades matemáticas, possuía uma melhor compreensão da estrutura lógica da Matemática e sabia entender e escrever provas formais, uma vez que essas provas já faziam sentido para ela e sentia a sua necessidade como um dos meios de verificar a validade de uma afirmação de forma genérica. Por conta disso, conseguiu elaborar provas do tipo *experiência mental* nessas seis atividades, validando as afirmações matemáticas de forma genérica. A partir dos resultados encontrados pela Dupla 01, conseguimos confirmar a articulação entre o nível 4 de van Hiele e a construção de provas do tipo *experiência mental* de Balacheff.

As Duplas 02, 03 e 05 oscilaram entre os três primeiros níveis de pensamento geométrico de van Hiele nas atividades 1, 2 e 7; oscilaram também entre os níveis 2 e 3 nas atividades 2, 5, 6 e 7; estiveram efetivamente no nível 2 nas atividades 3, 4 e 6; e efetivamente no nível 3 na atividade 5. Com isso, foi percebido que elas já começavam a entender que as figuras geométricas são dotadas de propriedades matemáticas, mas ainda declaravam essas propriedades de maneira informal, generalizando-as a partir da experimentação. Como também a capacidade de raciocínio formal desses licenciandos começava a ser desenvolvida, mas ainda era apoiada pela manipulação. Para eles, a verificação de uma determinada afirmação é feita a partir de alguns casos particulares ou de argumentos ainda informais, baseados na observação de exemplos bem específicos.

Por conta disso, as provas contruídas pelas Duplas 02, 03 e 05 nas atividades 2, 3, 4 e 5 foram do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, estando enraizadas nas *provas pragmáticas,* em que esses licenciandos recorriam a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar determinado resultado. Também observamos nessas atividades provas do tipo *exemplo genérico*, estando na transição entre as *provas pragmáticas* e as *intelectuais*, em que eles buscavam uma generalização ainda baseada em exemplos, porém procurando justifica-la com a teoria relacionada às afirmações. Além disso, a Dupla 02 esteve efetivamente no nível 1 na atividade 6 e a Dupla 03 oscilou entre os níveis 1 e 2 na atividade 7 e como consequência não sentiram a necessidade de provar as afirmações matemáticas, pois faziam atribuições físicas globais das figuras geométricas, tendo um significado apenas visual, uma vez que ainda não eram capazes de utilizar determinadas definições matemáticas e perceber que as figuras são dotadas de propriedades.

A Dupla 04 e L05 oscilaram entre os quatro primeiros níveis de van Hiele, contudo L05 esteve no nível 4 em três atividades (2, 3 e 4) e a Dupla 04 esteve nesse nível em cinco atividades (1, 2, 4, 5 e 7), nas quais eles sabiam utilizar e reconhecer propriedades matemáticas, possuíam uma melhor compreensão da estrutura lógica da Matemática e sabiam entender e escrever provas formais. Entretanto, das três atividades em que L05 esteve no nível 4, apenas nas atividades 3 e 4 conseguiu elaborar provas do tipo *experiência mental*, validando as afirmações de forma genérica, e a Dupla 04 elaborou esse mesmo tipo de prova apenas nas atividades 4 e 5.

Na maioria das atividades (1, 2, 3, 5, 6 e 7), L05 e a Dupla 04 estiveram entre o segundo e terceiro nível, na qual eles já começavam a perceber que as figuras geométricas são dotadas de propriedades matemáticas, mas ainda declaravam essas propriedades de maneira informal, generalizando-as a partir da experimentação. Como também a capacidade de raciocínio formal desses licenciandos começava a ser desenvolvida, ainda apoiada pela manipulação. Para eles, a verificação de uma determinada afirmação é feita a partir de alguns casos particulares ou de argumentos ainda informais, baseados na observação de exemplos bem específicos.

Por conta disso, as provas construídas nas atividades 2, 3, 6 e 7 foram do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, estando enraizadas nas *provas pragmáticas*, em que esses licenciandos recorreram a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar determinado resultado. Também observamos provas do tipo *exemplo genérico* nas atividades 5 e 7, estando na transição entre as *provas pragmáticas* e as *intelectuais*, em que eles buscavam uma generalização ainda baseada em exemplos, porém procurando justifica-la com a teoria relacionada a esta proposição.

A partir dos resultados encontrados por L05 e pelas Duplas 02, 03, 04 e 05, conseguimos confirmar a articulação entre o nível 2 de van Hiele e a construção de provas do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, como também a articulação existente entre o nível 3 de van Hiele e as provas do tipo *exemplo genérico* de Balacheff. O que nos leva a confirmar a hipótese levantada no início da pesquisa de que somente com o pensamento geométrico desenvolvido, os licenciandos são capazes de trabalhar com os mais variados tipos de prova, podendo chegar a desenvolver futuramente uma demonstração.

6.3 DISCUSSÃO

Esta pesquisa buscou estabelecer articulações entre os níveis de pensamento geométrico discutidos por van Hiele (1957) e os tipos de prova propostos por Balacheff (2000), a partir dos referenciais Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998). Para isso, realizamos um trabalho em uma universidade pública do estado da Paraíba com onze licenciandos do curso de Matemática, que, durante a aplicação das atividades, se dividiram em cinco duplas e um licenciando, com o intuito de averiguarmos as articulações estabelecidas teoricamente no Capítulo 4.

Esta seção apresenta a discussão acerca dos comentários apresentados nas seções anteriores. A seção *Perfil dos licenciandos em Matemática da Instituição B* objetivou traçar o perfil desses onze licenciandos, a partir da aplicação do questionário, em relação aos aspectos das provas e demonstrações matemáticas, buscando destacar os pontos que mais nos chamaram atenção em suas escritas. Para isso, analisamos dois aspectos: os resultados encontrados acerca de o conhecimento específico dos licenciandos sobre alguns termos matemáticos e os resultados encontrados acerca de as vivências dos licenciandos com provas e demonstrações na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática e o trabalho pedagógico delas na Educação Básica.

A seção *Análise a priori e a posteriori das atividades com provas matemáticas* objetivou analisar os tipos de prova elaborados pelas duplas, como também o nível de pensamento em que eles se encontram. Para isso, consideramos as características gerais dos níveis de pensamento geométrico discutidos por van Hiele (1957), De Villiers (2010), Nasser (1991), Kaleff *et al*. (1994), Dall'Alba (2015), Ontário (2006), Battista e Clements (1995), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), entre outros. Como também, consideramos os aspectos gerais dos tipos de prova propostos e discutidos por Balacheff (2000). Além disso, a aplicação dessas atividades teve como objetivo a concretização das articulações estabelecidas entre os níveis de pensamento geométrico e os tipos de prova elaboradas no Capítulo 4, a partir das discussões feitas por Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), Gutiérrez e Jaime (1998) e Balacheff (2000).

Diante dos resultados encontrados na primeira seção, percebemos que a maioria dos licenciandos não conhece a diferenciação entre as palavras *prova* e *demonstração*, feita a partir de estudos de educadores matemáticos, tais como Balacheff (2000), Pietropaolo (2005), Ferreira (2016), Grinkraut (2009), Stylianides e Stylianides (2017), entre outros. Essa diferenciação torna-se importante na medida em que pode vir a provocar um obstáculo à pesquisa e por isso Balacheff (2000) defende que deve haver uma distinção entre as noções de prova e demonstração. Somente com essa diferenciação, poderemos considerar como justificativas: casos particulares, exemplos específicos, desenhos, entre outros. Ou seja, a distinção entre esses termos implica aceitar, a depender do contexto, outras produções dos alunos com o intuito de estabelecer a validade de uma afirmação.

Percebe-se também que a maioria dos licenciandos está terminando o curso sem conhecer corretamente o significado de teorema, hipótese, tese e corolário, termos muito utilizados na linguagem matemática. Balacheff (2004) pontua que as provas e a linguagem matemática estão rigorosamente relacionados, ou seja, para se construir adequadamente provas formais é necessário saber que elas consistem na utilização tanto da linguagem materna como da linguagem matemática, como afirma Morais Filho (2010). Dessa forma, é necessário que professores e alunos percebam a importância da escrita no ensino e aprendizagem da Matemática, pois saber expressar com clareza suas ideias de forma escrita é uma das ferramentas didáticas básicas requeridas de um docente, como também é um excelente exercício de Lógica (MORAIS FILHO, 2009).

Todos os onze licenciandos não vivenciaram atividades com provas e demonstrações na Educação Básica, afirmando que seus professores de Matemática apenas trabalhavam com conceitos e alguns problemas, se detendo quase exclusivamente ao livro didático. Já na

Licenciatura, a maioria dos sujeitos investigados não teve uma experiência boa com as demonstrações na Licenciatura em Matemática, afirmando que teve muitas dificuldades e que não viam a sua importância, assim como alguns não se identificam com essa área. Sobre essa questão, van Hiele (1957) ressalta que a falha mais séria no ensino de Matemática, sendo uma das principais razões das objeções feitas a ela e a sua crescente impopularidade, diz respeito ao esforço de forçar os alunos a terem uma precisão para a qual eles ainda não estão prontos ou talvez nunca estejam.

Por fim, foi percebido também que a maioria dos licenciandos acredita ser necessário e importante demonstrar alguns teoremas, com a justificativa de que existem teoremas, a maioria dentro da Geometria Plana, que deixam mais claro o entendimento de determinado assunto, como também quando os alunos estudam de onde veio as coisas, eles acabam aprendendo melhor. Além disso, encontramos relatos de licenciandos que consideram necessário esse trabalho, desde que os alunos consigam acompanhar o raciocínio. Ressaltamos que é importante que esses licenciandos não ensinem a demonstração aos alunos por meio de sua apresentação e dedução, esperando que eles façam o mesmo, sem saber quais dificuldades eles poderão ter. É preciso conhecer o nível de raciocínio dos seus alunos, tendo em mente a sua racionalidade, que antes do advento da demonstração, possuem meios para *fazer matemática*, utilizando a investigação, a argumentação, os testes de validade, a busca de regularidades, o levantamento de conjecturas e as provas empíricas (BALACHEFF, 2000).

Os resultados discutidos na primeira seção, encontrados e analisados a partir da aplicação do questionário a onze licenciandos em Matemática de uma universidade pública do estado da Paraíba vem a corroborar as ideias e resultados de pesquisas de vários educadores matemáticos citados anteriormente, que alertam para o fato de melhorarmos o ensino e aprendizagem da Matemática tanto na Educação Básica, como no Ensino Superior, buscando motivar os alunos a pensar e raciocinar matematicamente, por meio de atividades que os levem a *fazer matemática* e que estejam de acordo com o seu nível de conhecimento.

Diante dos resultados encontrados na segunda seção e ao analisarmos o perfil de egresso que se encontra no PPC do curso de Licenciatura em Matemática da instituição B que os onze licenciandos fazem parte, notamos que, possivelmente, eles estarão saindo sem uma visão histórica e crítica da Matemática, tanto no seu estado atual como ao longo de sua evolução, como também não terão uma bagagem bem sedimentada para atuar nos conteúdos geométricos. Nos pontos elencados quanto ao perfil desejado e o que o curso desenvolve, notamos que mais de 50% dos licenciandos participantes não possuem o domínio do raciocínio lógico dedutivo na área de Geometria, a capacidade de compreender os processos de construção do conhecimento matemático e de se comunicar matematicamente por meio de diferentes linguagens.

Os resultados encontrados na segunda seção corroboram as ideias de Gazire (2000) ao afirmar que ainda é possível encontrar professores que aprenderam pouco ou nada de Geometria nos cursos de Licenciatura e que por isso têm medo de ensiná-la na Educação Básica. Reforçam também as discussões de Sérgio Lorenzato trazidas em uma palestra durante o VI Congresso Nacional de Educação (VI CONEDU), em outubro de 2019, ao apresentar algumas consequências reais e atuais sobre a Geometria, a saber: a Geometria está ausente da formação de professores; professor não sabe Geometria; professor não ensina Geometria; poucas são as pesquisas sobre ensino de Geometria; raras são as publicações sobre Geometria; a matemática visual é quase ausente na sala de aula; crescem as dificuldades de aprendizagem em Aritmética e em Álgebra; são superficiais os conhecimentos geométricos presentes nos livros didáticos e na BNCC; os alunos recebem fraca formação geométrica (LORENZATO, 2019).

A partir das Atividades 1, 2 e 6, foi possível observar que os sujeitos investigados já compreendem que exemplos não constituem efetivamente uma justificativa para uma afirmação e que por isso é necessário a generalização. Com isso, eles compreendem a diferença entre casos particulares e casos genéricos dentro da Matemática. Entretanto, seis dos onze licenciandos ainda não compreendiam as provas formais em sua totalidade e devido a isso não conseguiram organizar, na maioria das atividades, uma sequência de raciocínio lógico formal que justificasse as suas observações. Dessa forma, nas atividades que exigiam a construção de provas para validar as afirmações matemáticas, eles acabavam recorrendo as *provas pragmáticas*, utilizando casos particulares, exemplos bem específicos ou desenhos para validar as afirmações.

Isto quer dizer que mais de 50% dos sujeitos pesquisados, que estavam entre o 8º e 10º período do curso, desenvolveram provas do tipo *empirismo ingênuo*, *experiência crucial* e *exemplo genérico*, verificando a validade das afirmações por meio de testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos, como também podiam considerar exemplos bem particulares para validar a afirmação, o que poderia ter sido feito de forma genérica. Esses resultados reforçam as discussões trazidas por Kaleff *et al*. (1994) ao afirmarem que nos cursos de graduação em Matemática, os alunos dos últimos semestres apresentam dificuldades no desenvolvimento do pensamento abstrato em Geometria e em sistematizar o pensamento dentro da própria Geometria Euclidiana.

Ao compararmos as atividades que demandavam alguns conceitos geométricos semelhantes, percebemos que as atividades 1 e 6, por envolverem os conceitos de teorema de Pitágoras, áreas de figuras geométricas, produtos notáveis, potenciação e radiciação, casos de congruência de triângulos e noções acerca de casos particulares e casos genéricos na Matemática, há diferenças de níveis de pensamento e tipos de prova construídos. Na atividade 1, apenas a Dupla 05 conseguiu construir, no item *a)*, uma prova do tipo *exemplo genérico* para validar que o quadrilátero ABCD era um quadrado e apenas a Dupla 04 conseguiu responder corretamente os itens *b)* e *c)* percebendo que o quadrilátero maior MNPQ é composto por outras figuras geométricas (quadrados e triângulos). O que nos leva a afirmar que essas duas duplas estavam, nesses itens, no nível 3 de van Hiele.

Na atividade 1 encontramos muitas oscilações entre os níveis, pois havia cinco itens a serem respondidos, e por isso encontramos as Duplas 01, 02, 03 e 05 oscilando entre os três primeiros níveis de van Hiele, L05 oscilando entre os dois primeiros níveis e a Dupla 04 oscilando entre os quatro primeiros níveis de van Hiele. Já na atividade 6 encontramos que apenas a Dupla 01 esteve no nível 4 de van Hiele, construindo uma prova do tipo *experiência mental* para validar o teorema de Pitágoras; a Dupla 02 esteve no nível 1 de van Hiele e não soube construir uma prova para esse teorema; L05 e a Dupla 03 estiveram no nível 2, construindo provas do tipo *experiência crucial*; e as Duplas 04 e 05 oscilaram entre os níveis 2 e 3 construindo, respectivamente, provas do tipo *experiência crucial* e *empirismo ingênuo*.

As atividades 3 e 7 apresentavam alguns conceitos geométricos semelhantes, tais como ponto médio de um segmento, paralelismo e base média de um triângulo. Na atividade 3 apenas L05 e a Dupla 01 estiveram no nível 4 de van Hiele construindo provas do tipo *experiência mental* para validar o teorema de Varignon; as demais duplas (02, 03, 04 e 05) estiveram no nível 2 de van Hiele construindo provas do tipo *empirismo ingênuo* e *experiência crucial*. Já na atividade 7 apenas a Dupla 01 esteve oscilando entre os níveis 3 e 4 construindo uma possível prova do tipo *experiência mental* para validar o teorema da base média de um triângulo. A Dupla 05 e L05 oscilaram entre os três primeiros níveis, a Dupla 02 oscilou entre o segundo e terceiro nível, e a Dupla 04 oscilou entre os níveis 2, 3 e 4 de van Hiele, em que esses licenciandos poderiam construir provas do tipo *experiência crucial* ou *exemplo genérico*. Nessa atividade apenas a Dupla 03 esteve entre os dois primeiros níveis de van Hiele e por isso afirmou que não apresentaria a prova do teorema da base média de um triângulo a seus alunos, não construindo, portanto, uma prova para esse teorema.

Por fim, as atividades 2, 4 e 5 apresentavam alguns conceitos geométricos semelhantes tais como: ângulos suplementares, sistema de equações e soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Na atividade 2 apenas a Dupla 01 conseguiu elaborar uma prova do tipo *experiência mental* para a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Essa dupla e L05 oscilaram nessa atividade entre os níveis 2, 3 e 4, contudo L05 construiu uma prova do tipo *experiência crucial*. As Duplas 02 e 05 oscilaram entre os três primeiros níveis de van Hiele construindo, respectivamente, provas do tipo *exemplo genérico* e *provas pragmáticas*. A Dupla 03 oscilou entre o segundo e terceiro níveis construindo provas do tipo *experiência crucial*. E a Dupla 04 oscilou entre os quatro primeiros níveis de van Hiele construindo *provas pragmáticas*.

Na atividade 4 apenas L05 e as Duplas 01 e 04 estiveram no nível 4 de van Hiele e por isso construíram provas do tipo *experiência mental* para validar a congruência nos ângulos opostos pelo vértice. As demais duplas (02, 03 e 05) estiveram no nível 2 construindo provas do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*. Já na atividade 5 apenas as Duplas 01 e 04 estiveram no nível 4 de van Hiele construindo provas do tipo *experiência mental* para validar a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero ser sempre 360º. L05 e as Duplas 02 e 05 estiveram no nível 3 construindo provas do tipo *exemplo genérico*. E a Dupla 03 oscilou entre os níveis 2 e 3 construindo dois tipos de prova, uma *experiência crucial* e a outra *exemplo genérico*.

Com isso, percebemos que as atividades que demandavam alguns conceitos semelhantes revelaram que os licenciandos se encontravam em níveis de pensamento geométrico diferentes e por isso construíram tipos de prova diferentes, uma vez que eles não se lembravam dos conceitos necessários para a construção da prova ou não sentiam a necessidade de provar as afirmações. Além disso, notamos que apenas a Dupla 01 conseguiu se manter em seis de sete atividades no nível 4 de van Hiele, construindo provas do tipo *experiência mental*. As demais duplas e L05 oscilaram bastante de níveis de pensamento, apresentando com isso diferentes tipos de prova nessas atividades que demandavam os mesmos conceitos.

As atividades que os sujeitos, de forma geral, estavam em níveis mais baixos de pensamento geométrico eram aquelas em que eles não lembravam de forma alguma dos conceitos geométricos e por isso deixavam em branco, ou então porque não sentiam a necessidade de provar as afirmações matemáticas, pois já sabiam que era verdadeiro. Na medida em que lembravam dos conceitos e de exemplos de provas para as afirmações, eles iam alcançando níveis mais altos, contudo quando surgiam dificuldades ou dúvidas, eles retornavam para os níveis mais baixos, pois se sentiam mais seguros neles. Os licenciandos (L05 e Duplas 01 e 04) que conseguiram estar no nível 4 de van Hiele já sabiam trabalhar adequadamente com as definições e propriedades matemáticas, possuíam uma melhor compreensão da estrutura lógica da Matemática, sabiam executar o raciocínio lógico formal, mas ainda não sentiam a necessidade do rigor. Por conta disso, já aceitavam a possibilidade de alcançar o mesmo resultado a partir de premissas diferentes e elaboravam provas formais, pois sabiam que é um dos meios de verificar a validade de uma afirmação de forma genérica.

Os resultados discutidos na segunda seção, encontrados e analisados a partir da aplicação das atividades com provas matemáticas e da entrevista semiestruturada a onze licenciandos em Matemática de uma universidade pública do estado da Paraíba, nos ajudaram a responder a nossa questão de pesquisa, conseguindo, portanto, concretizar as articulações estabelecidas no Capítulo 4 entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff. Resumidamente, apresentamos o quadro abaixo (Quadro 12) com o intuito de simplificar essas articulações, com as respectivas justificativas.

Quadro 12 – Articulações entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff, com as respectivas justificativas

Articulações	**Justificativa**
Nível 1 Não há construção de provas.	Os alunos fazem apenas atribuições físicas globais das figuras geométricas, atribuindo um significado apenas visual, pois ainda não são capazes de usar determinadas definições matemáticas e de reconhecer as figuras por suas propriedades. Consequentemente, eles *não entendem o conceito de prova e de demonstração* e por isso nesse nível não produzem nenhum tipo de construção empírica ou formal.
Nível 2 Construção de *provas pragmáticas* do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*.	Os alunos já reconhecem que as figuras geométricas são dotadas de propriedades matemáticas, mas ainda não relacionam as famílias de figuras com base nos atributos fornecidos nas definições. Com isso, eles buscam uma verificação experimental da verdade da propriedade, utilizando um ou alguns exemplos. Dependendo do grau de aquisição dessas habilidades pelos alunos, a verificação pode ser feita por meio de um ou mais exemplos específicos, ou de um exemplo especial ou por meio de um conjunto de exemplos mais elaborado.
Nível 3 Construção de provas que estão na transição entre as *pragmáticas* e as *intelectuais* do tipo *exemplo genérico.*	Os alunos já relacionam as figuras entre si de acordo com suas propriedades, mas ainda não dominam o processo dedutivo. Eles começam a desenvolver a capacidade de raciocínio formal (matemático), mas ainda é apoiada pela manipulação. Esses alunos já podem deduzir e provar informalmente as afirmações. Por conta disso, eles verificam a propriedade a ser provada em um ou alguns

	exemplos, mas também procuram por alguma explicação informal baseada em propriedades matemáticas, ou os exemplos são bem selecionados.
Nível 4 Construção de *provas intelectuais* do tipo *experiência mental.*	Os alunos já compreendem o processo dedutivo, a recíproca de um teorema, mas ainda não sentem necessidade de usar o rigor matemático. Eles já podem entender e realizar provas dedutivas formais e entendem a sua necessidade como um dos meios de verificar a verdade de uma afirmação de forma genérica. Por conta disso, eles utilizam as figuras apenas para ajudar a escolher as propriedades adequadas para a construção de sua prova formal.

Fonte: autoria própria

Os resultados encontrados a partir do questionário e das atividades com provas matemáticas alertam para o fato de que os licenciandos em Matemática devem compreender o papel e o uso das demonstrações na Matemática e no ensino e aprendizagem dela, buscando contribuir para a constituição do desenvolvimento do raciocínio dedutivo dos alunos da Educação Básica, utilizando as argumentações, justificações e os diferentes tipos de prova. Para que isso aconteça na Educação Básica, é necessária uma discussão sobre essa importância na formação inicial e/ou continuada dos professores de Matemática.

Conforme recomendação de Nasser e Tinoco (2003) é preciso auxiliar os licenciandos a desenvolverem o raciocínio lógico-dedutivo e a habilidade de argumentar. Para isso, conforme Caldato, Utsumi e Nasser (2017), há a recomendação de que as demonstrações nos cursos de Matemática sirvam tanto para a compreensão da Matemática, como para refletir a evolução do pensamento matemático por meio de uma perspectiva didática, curricular e histórica. Ou seja, é preciso apresentar a Matemática como uma ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como uma ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

Portanto, é preciso utilizar as provas e demonstrações de modo a propiciar aos alunos o *fazer matemática*, envolvendo experimentações, conjecturas, refutações, argumentações, justificações, provas e, por fim, chegar a uma demonstração. A ideia de se trabalhar com as argumentações, provas e demonstrações, tanto na Educação Básica como nas Licenciaturas em Matemática, é que os alunos sejam levados, a partir de procedimentos empíricos ou não, a refletirem e conjecturarem por meio da intuição, observação, analogia, experimentação, indução e dedução.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve por objetivo estabelecer articulações entre os níveis de pensamento geométrico discutidos por van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff, a partir das discussões trazidas por Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), Gutiérrez e Jaime (1998) e Balacheff (2000). A questão central da pesquisa foi: *Que articulações podemos identificar entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff quando analisarmos as argumentações/justificações produzidas por licenciandos em Matemática?*

Iniciamos um estudo no Capítulo 1 com uma discussão sobre a Geometria e seu ensino, buscando fazer uma revisão de literatura acerca do percurso histórico da Geometria, das dificuldades ainda presentes na aprendizagem da Geometria na Educação Básica e nas Licenciaturas em Matemática, apresentando também uma análise sucinta das ementas de disciplinas que contém a Geometria em universidades públicas do estado da Paraíba e Pernambuco. Esse levantamento nos ajudou a perceber que a maioria das disciplinas obrigatórias nas Licenciaturas dessas instituições diz respeito à Geometria Plana e por isso nossa pesquisa abarcou alguns assuntos dessa área. Além disso, possibilitou a discussão de que o letramento geométrico está acontecendo de forma insatisfatória nesses dois segmentos da Educação, pois os alunos ainda estão recebendo uma fraca formação geométrica e as licenciaturas ainda não estão dando conta de suprir as dificuldades de aprendizagem nessa área, devido a isso alguns professores não sabem e não ensinam a Geometria na Educação Básica.

Nos Capítulos 2 e 3 trazemos o nosso referencial teórico, em que apresentamos no segundo capítulo discussões acerca do modelo de van Hiele e no terceiro, discussões sobre os tipos de prova propostos por Balacheff. As discussões por van Hiele (1957) e também por outros pesquisadores (NASSER, 1991; KALEFF *et al*., 1994; ONTÁRIO, 2006; DALL'ALBA, 2015; JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994), apresentando perspectivas diferentes sobre o seu modelo, foram fundamentais para classificar as justificativas/argumentações apresentadas pelos licenciandos durante a resolução das atividades com provas matemáticas. Como também as discussões propostas por Balacheff (2000) sobre os tipos de prova também foram fundamentais para classificar as provas construídas pelos sujeitos pesquisados segundo os procedimentos de validação ou as estratégias utilizadas para verificar as afirmações matemáticas.

Para não provocarmos um obstáculo à pesquisa sobre o tema, consideramos em nossa pesquisa uma distinção entre as palavras *prova* e *demonstração*, defendida por Balacheff

(2000), com o intuito de aceitarmos, a depender do contexto, outras produções dos licenciandos para estabelecer a validade de uma afirmação. Embora algumas vezes termos utilizado essas duas palavras como sinônimas, principalmente no questionário e nas entrevistas semiestruturadas, devido ao fato de esses licenciandos não conhecerem a sua distinção e considera-las com o mesmo significado.

No segundo capítulo também apresentamos algumas discussões sobre as críticas ao modelo de van Hiele que nos ajudaram a perceber que a passagem de um nível para o próximo se dá gradualmente, de forma lenta e contínua e que por conta disso o calendário escolar/acadêmico não dá conta de nos auxiliar a desenvolver o pensamento geométrico dos alunos, pois é necessário um tempo maior para alcançar os níveis superiores. Além disso, nos ajudou a perceber que há poucas chances de encontrarmos alunos que tenham atingido esse nível 5, pois ele só se desenvolve em alunos que possuam boa capacidade e preparo em Geometria.

No terceiro capítulo também apresentamos as dificuldades dos licenciandos em demonstrar, sinalizando a partir de Balacheff (2000) que o fracasso dos alunos nessa prática decorre da exigência de uma racionalidade e um estado específico de conhecimentos que eles ainda não possuem. Por conta disso, os licenciandos ainda apresentam dificuldades no desenvolvimento do pensamento abstrato em Geometria, sem conseguirem relacionar sistemas axiomáticos diversos e em sistematizar o pensamento dentro da própria Geometria Euclidiana, como consequência, eles estão finalizando a Licenciatura sem terem dominado as habilidades em demonstrar determinada afirmação (KALEFF *et al*., 1994; NASSER e TINOCO, 2003).

Discutimos inicialmente no Capítulo 4 acerca da relação existente entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e o processo de justificar e provar na Matemática, apresentada genericamente pelos pesquisadores Usiskin (1982), Senk (1985, 1989), De Villiers (1987), Jaime e Gutiérrez (1990, 1994), Battista e Clements (1995), Gutiérrez e Jaime (1998), Nasser e Tinoco (2003) e Pietropaolo (2005). As discussões apresentadas principalmente por Jaime e Gutiérrez (1990, 1994) e Gutiérrez e Jaime (1998) nos ajudaram a estabelecer uma articulação mais específica entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff.

Para alcançar o objetivo do nosso trabalho, após estabelecermos as articulações teoricamente no Capítulo 4, optamos por recorrer a uma pesquisa de natureza quali-quantitativa, caracterizada como estudo de caso, por termos notado, a partir das discussões trazidas nos Capítulos 1 a 4, que pouco ou nada foi escrito sobre a existência dessas possíveis articulações entre os níveis de pensamento de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff. Utilizamos como procedimentos metodológicos: questionário, atividades com provas matemáticas e entrevista semiestruturada. O questionário nos foi útil pois conseguimos traçar o perfil dos onze licenciandos que participaram da nossa pesquisa, investigando seus conhecimentos acerca de alguns termos matemáticos e sobre as suas vivências com as provas e demonstrações na Educação Básica e Licenciatura, e se consideravam importante o trabalho pedagógico delas no ensino básico.

As atividades com provas matemáticas também nos foram utéis pois conseguimos analisar o nível de pensamento geométrico dos licenciandos e os tipos de prova construídos, como também confirmar as articulações estabelecidas no Capítulo 4 e verificar o que esses sujeitos entendem por casos particulares e casos genéricos ao analisarem argumentações, justificativas e provas de afirmações matemáticas. Por fim, a entrevista semiestruturada nos foi útil pois conseguimos tirar as nossas dúvidas quanto às argumentações, justificações e estratégias utilizadas pelos licenciandos ao responderem atividades que exigiam provas matemáticas, como também em confirmar o nível do pensamento em que eles se encontram e o tipo de prova construído.

Tomando em consideração a checagem dos resultados encontrados no questionário por meio da Análise Textual Discursiva, observamos que sete dos onze licenciandos se encontravam entre o 8º e 10º período do curso e poucos já trabalhavam como professores de Matemática. Além disso, foi percebido que mais de 50% desses licenciandos não sabiam definir corretamente teorema e corolário, como também não sabiam diferenciar as palavras *prova* e *demonstração*, nem hipótese e tese de um teorema. Notamos também que todos não tiveram contato com atividades com justificações, argumentações, provas e demonstrações durante a Educação Básica e o trabalho com as demonstrações na Licenciatura não foi satisfatório, pois eles tiveram e ainda possuem muita dificuldade para elaborar e construir uma demonstração. Embora não tenham tido uma reflexão quanto à pertinência ou não do trabalho pedagógico com as provas e demonstrações na Educação Básica, a maioria concorda que é importante fazer esse trabalho, pois é preciso que os alunos percebam de onde vêm as fórmulas e para que servem.

Tomando em consideração a checagem dos resultados encontrados nas atividades com provas matemáticas e nas entrevistas semiestruturadas por meio da triangulação de dados e de método, observamos que a maioria dos licenciandos (seis em um total de onze) está saindo sem o domínio das habilidades de provar formalmente determinadas afirmações, assim como está saindo com dificuldades na visualização de figuras decompostas por outras menores e em alguns conteúdos da Geometria Plana, compreendendo que não é necessário realizar as validações dos teoremas pois os alunos já sabem que é verdade e só esperam sua aplicação.

Retomando a questão central da pesquisa, identificamos que os licenciandos que estavam no nível 1 de van Hiele percebiam as figuras geométricas em sua totalidade, compreendendo-as como objetos individuais e não sendo capazes de generalizar as características que reconheciam em uma figura para outras de sua mesma classe. Por conta disso, a palavra prova não tinha significado para eles, traduzindo-se no raciocínio mais disparatado. Consequentemente, esses licenciandos não registraram as justificações nem elaboraram diferentes tipos de prova, deixando os itens ou as atividades em branco.

Os licenciandos que se encontravam no nível 2 de van Hiele já começavam a perceber que as figuras geométricas são dotadas de propriedades matemáticas, mas ainda declaravam essas propriedades de maneira informal, generalizando-as a partir da experimentação. Por conta disso, a verificação de uma afirmação era feita a partir de um ou alguns casos, podendo se convencer apenas com um exemplo especial ou precisando de um conjunto de exemplos mais elaborado. Consequentemente, as provas elaboradas pelos licenciandos que se encontravam nesse nível nas atividades foram do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, estando enraizadas nas *provas pragmáticas*, em que eles recorriam a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar determinado resultado.

Os licenciandos que se encontravam no nível 3 de van Hiele já eram capazes de reconhecer que algumas propriedades são deduzidas de outras e começavam a desenvolver a capacidade de raciocínio formal, mas esse raciocínio ainda era apoiado na manipulação. Por conta disso, a verificação de uma afirmação era feita a partir de alguns casos particulares ou de argumentos ainda informais, baseados na observação de exemplos bem específicos. Consequentemente, as provas construídas pelos licenciandos que se encontravam nesse nível nas atividades foram do tipo *exemplo genérico*, estando na transição entre as *provas pragmáticas* e as *intelectuais*, em que eles buscavam uma generalização ainda baseada em exemplos, porém procurando justifica-la com a teoria relacionada à proposição.

Por fim, os licenciandos que se encontravam no nível 4 de van Hiele foram capazes de entender e executar o raciocínio lógico formal e as provas formais já tinham significado para eles, pois compreendiam que elas são um dos meios de verificar a validade de uma afirmação de forma genérica. Consequentemente, as provas construídas pelos licenciandos que se encontravam nesse nível nas atividades foram do tipo *experiência mental*, em que eles afirmaram a validade das proposições de forma genérica, não fazendo mais referência a casos particulares e a validação era sustentada apenas pela teoria.

Ao retomarmos nosso objetivo geral, a discussão apresentada acima mostra que foi atingido, ou seja, conseguimos estabelecer, teórica e experimentalmente, articulações entre os níveis de pensamento geométrico discutidos por van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff. Quanto aos objetivos específicos, o estudo mostrou que:

1. Os licenciandos não sabiam a distinção entre as palavras *prova* e *demonstração*, não tiveram uma vivência com as provas e demonstrações na Educação Básica e o trabalho com as demonstrações na Licenciatura não foi satisfatório, pois eles ainda têm muita dificuldade em escrevê-las e entende-las, e não se identificam com a área;
2. Os licenciandos, em sua maioria, apresentaram argumentações e justificações dentro das *provas pragmáticas*, sem um embasamento matemático adequado, apenas validando as afirmações por meio da experimentação. Apenas a Dupla 01 conseguiu em seis de sete atividades construir provas do tipo *experiência mental*, validando as suas estratégias de forma genérica;
3. Foi percebido que os licenciandos oscilaram muito de um nível de pensamento para outro, principalmente nas atividades que envolviam os mesmos conceitos. Devido a isso, eles construíam diferentes tipos de prova;
4. Verificamos que os licenciandos, em sua maioria, compreendem a diferença entre casos particulares e casos genéricos na Matemática ao analisarem as suas argumentações, justificativas e provas de afirmações matemáticas, principalmente nas atividades 1, 2 e 6.

Isto quer dizer que os resultados encontrados nos dão indícios de que os quatro objetivos foram atingidos. Por fim, retomando a nossa hipótese, o estudo mostrou que apenas com o pensamento geométrico desenvolvido, é possível que os licenciandos possam construir e elaborar diferentes tipos de prova, podendo também chegar a elaborar demonstrações.

Os resultados da pesquisa são de certa maneira preocupantes quando recordamos que os licenciandos serão futuros professores e que sete, dos onze licenciandos, estavam nos semestres finais do curso de Matemática. Os resultados mostram que é preciso modificar o ensino da Geometria, tanto na Educação Básica quanto nas Licenciaturas em Matemática, habituando esses alunos a pensar geometricamente, ao invés de simplesmente aplicar fórmulas e teoremas para a obtenção dos resultados esperados. Ou seja, é preciso que os professores conheçam o nível de pensamento em que seus alunos se encontram, tendo em mente a sua racionalidade que, antes do advento da demonstração, já possui meios para *fazer matemática* utilizando a investigação, a argumentação, a analogia, a busca por regularidades, a experimentação e a dedução.

Nossa pesquisa, portanto, contribui para as discussões acerca da pertinência ou não do trabalho com as provas e demonstrações matemáticas na Educação Básica e nas Licenciaturas em Matemática, no sentido de trazer uma perspectiva de construção dos conhecimentos geométricos, em que o professor estimula o desenvolvimento do raciocínio dos alunos por meio de atividades que mobilizem a argumentação, a justificação, as provas empíricas, as provas formais e as demonstrações. Ou seja, que o aluno seja ativo e também responsável pela sua aprendizagem, compreendendo a Matemática como uma ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como uma ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos. Além disso, traz uma contribuição para as pesquisas em Educação Matemática ao estabelecer articulações mais específicas entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova propostos por Balacheff, as quais ainda não foram discutidas na literatura.

As limitações encontradas no decorrer do nosso estudo foram o aceite e a participação dos licenciandos em nossa pesquisa, os dias livres disponíveis por eles, a falta de ônibus em sua cidade e o tempo disponibilizado para a aplicação das atividades com provas matemáticas, o que nos levou a reduzir a resolução até a sétima atividade. Não conseguirmos aprofundar as análises das ementas das disciplinas de Geometria da instituição B do estado da Paraíba, buscando investigar também a metodologia adotada pelo docente e a sua prática em sala, para podermos dizer com mais certeza como é feito o trabalho com as demonstrações nessa instituição. Além disso, as articulações estabelecidas entre os níveis de pensamento geométrico de van Hiele e os tipos de prova de Balacheff foram averiguadas por meio da aplicação das atividades com esses onze licenciandos. Para uma análise mais detalhada, essas atividades podem ser aplicadas em outras licenciaturas em Matemática e com um número maior de licenciandos que estejam disponíveis a participar voluntariamente da pesquisa.

Uma das perspectivas futuras que se apresenta diz respeito aos resultados encontrados acerca das oscilações entre os níveis de pensamento geométrico nos licenciandos, principalmente naqueles que não conseguiram raciocinar no nível 4 em nenhuma atividade. Não pudemos investigar com mais detalhes e aprofundamento por não ser escopo da nossa pesquisa. Diante disso, deixamos a primeira questão para pesquisas futuras: o que essas oscilações realmente indicam? Acontecem devido às atividades aplicadas ou aos conceitos geométricos? É devido ao estado psicológico dos licenciandos? Indicam um desenvolvimento do pensamento geométrico ou é devido à “memória fresca”?

Compreendemos que trabalhar com as provas e demonstrações de forma eficiente não é uma tarefa fácil, pois é preciso que os docentes conheçam as diferenciações entre as palavras *prova* e *demonstração*, saibam que não é necessário exigir de seus alunos que demonstrem determinados teoremas, mas que instiguem neles a curiosidade, buscando desenvolver o pensamento matemático a partir de atividades que os levem a justificar, buscar por regularidades, levantar conjecturas, experimentar, investigar, provar e até demonstrar as afirmações. Diante disso, surge nossa segunda questão para pesquisas futuras: que tipos de atividades devem ser utilizadas para auxiliar no desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, a partir do trabalho com provas e demonstrações matemáticas?

Outros resultados também nos inquietaram, nos levando a propor outras questões para futuras pesquisas. Por exemplo, os licenciandos não conhecerem a diferenciação entre as palavras *prova* e *demonstração*, como também não conhecerem como pode ser feito esse trabalho na Educação Básica, compreendendo que existem variados tipos de prova que possibilitariam o desenvolvimento do pensamento do aluno e os ajudariam a argumentar, conjecturar, investigar, justificar e provar suas ideias. Por conta disso, achamos pertinente deixar as seguintes questões de pesquisa em aberto: como poderia ser feito uma nova abordagem das provas e demonstrações nas Licenciaturas em Matemática? Esse trabalho deve ser desenvolvido em uma disciplina específica ou deve-se criar um tópico dentro de alguma já existente?

Além da formação inicial, devemos também refletir sobre a formação continuada, em que os professores devem estudar assuntos que não foram vistos no decorrer da graduação, de forma a auxiliá-lo a melhorar o ensino da Matemática. É preciso também criar essa reflexão na formação continuada de professores de Matemática acerca da pertinência ou não do trabalho pedagógico com as provas e demonstrações na Educação Básica. Para isso, deixamos a seguinte questão para pesquisas futuras: que contribuições um grupo de estudo colaborativo pode trazer ao desenvolvimento profissional de professores de Matemática no que se refere às provas e demonstrações matemáticas?

Caso tenhamos um tempo maior disponibilizado para pesquisa, onde possamos trabalhar com diversas atividades com provas e demonstrações, que venham a incentivar o desenvolvimento do pensamento dos alunos e onde possamos acompanhar a sua eventual evolução, deixamos por fim mais uma questão para pesquisas futuras: será que um trabalho eficiente com as provas e demonstrações vem a auxiliar no desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos?

Para que tudo isso seja possível, é preciso conhecer a diferenciação entre as palavras *prova* e *demonstração*, ampliando o conceito de prova para argumentações e justificações a partir de casos particulares, exemplos específicos e desenhos, construídos por meio da experimentação. Além disso, é preciso um trabalho mais eficiente com as demonstrações nas Licenciaturas em Matemática, em que elas não sejam vistas prontas e acabadas, mas que os docentes possam estimular nos seus alunos a investigação, a experimentação, o levantamento de hipóteses, a formação de conjecturas e a construção e elaboração de uma sequência de raciocínio lógico formal, finalizando com a escrita de uma demonstração. Somente assim conseguiremos alcançar as recomendações sugeridas pelas Diretrizes Curriculares para os Cursos de Matemática (2001), pela SBEM (2003) e pelos objetivos pretendidos por cada Instituição de Ensino Superior (IES).

Além desses fatores, é preciso também que o ensino de Geometria, tanto na Educação Básica como na Licenciatura em Matemática, ganhe um enfoque diferente, em que os alunos sejam incentivados a visualização e ao desenvolvimento do letramento geométrico, conforme orientação da BNCC (BRASIL, 2017, 2018). É preciso também que se discuta nos cursos de Licenciatura em Matemática acerca do modelo de van Hiele e que os licenciandos conheçam e trabalhem com atividades que venham a estimular o pensar geometricamente. Somente assim os licenciandos irão compreender como pode ser feito esse trabalho em sala de aula, entendendo que os problemas e tarefas apresentadas aos seus alunos devem possuir linguagem e conhecimentos de acordo com o nível de pensamento deles.

Portanto, defendemos que é preciso valorizar o caminho percorrido no desenvolvimento do pensamento geométrico, caminho esse que deve ser iniciado pela manipulação e pela curiosidade, acarretando na investigação e nos porquês, uma das palavras mais importantes na Matemática. Quando esse percurso é valorizado, o aluno passa a aprender a Geometria de forma significativa, em que ele não mais decora fórmulas ou teoremas, mas desenvolve a capacidade ou habilidade de comprovar, argumentar e justificar as suas ideias, ajudando na formação do cidadão crítico e possibilitando o desenvolvimento do seu raciocínio e de sua capacidade expressiva. Assim, quando esse trabalho passa a ser significativo para professor e aluno, teremos uma melhor e mais clara compreensão da Geometria e do pensamento geométrico.

REFERÊNCIAS

AGUILAR JR, C. A.; NASSER, L. Analisando justificativas e argumentação matemática de alunos do ensino fundamental. **Vidya**, Santa Maria, v. 32, n. 2, p. 133-147, jul./dez. 2012.

_________________. Argumentação e prova de professores dos níveis fundamental e médio de Matemática. *In:* CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2013. **Actas del VII CIBEM**. Montevidéu, Uruguai, 2013, p. 432-439. Disponível em: http://cibem.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/334.pdf. Acesso em: 20 jun. 2018.

ALMOULOUD, S. A. *et al*. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, n. 27, p. 94-108, set./out./nov./dez. 2004.

ALMOULOUD, S. A. Prova e demonstração em Matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. *In:* 30ª Reunião da Anped, 2007, Caxambu/MG. **GT 19 - Educação Matemática**, 2007, p. 1-18. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/prova.pdf. Acesso em: 08 jul. 2017.

ALMOULOUD, S. A.; REGNIER, J. C.; FUSCO, C. A. S. Resolver problemas envolvendo prova e demonstração: uma dificuldade para professores de ensino básico. *In:* INTERNATIONAL COUNCIL FOR MIDDLE EAST STUDIES, 2009. **Anais do ICMES**, Curitiba, 9-11 Dezembro, 2009. Disponível em: https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00506497/document. Acesso em 15 abr 2017.

ANDRADE, J. A. A.; NACARATO, A. M. Tendências Didático-Pedagógicas para o Ensino de Geometria. *In:* 27ª Reunião da Anped, 2004, Caxambu/MG. **GT 19 - Educação Matemática**, Caxambu, 2004, p. 1-18. Disponível em: http://www.anped.org.br/sites/default/files/t197.pdf. Acesso em 10 ago. 2018.

ARAÚJO, J. de L.; BORBA, M. de C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. *In:* Borba & Araújo (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica (Coleção: Tendências em Educação Matemática), p. 27-47, 2006.

ARAÚJO, R. A. S; BORTOLOTI, R. D. M. Analisando possíveis erros de Geometria a partir das resoluções dos alunos do 6º semestre do curso de Licenciatura em Matemática da UNEB Campus Alagoinhas. *In:* X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010. **Anais do X ENEM**, Salvador, 2010. Disponível em: http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/CC/T9_CC2112.pdf. Acesso em 10 maio 2018.

ARSAC, G. Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. **Recherches em didactique des Mathématiques**, vol. 9, n. 3, p. 247-280, La Pensée Sauvage Grenoble, 1988.

ÁVILA, G. Reflexões sobre o Ensino da Geometria. **Revista do Professor de Matemática**, SBM, n. 71, ano 28, 1º quadrimestre/2010. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/71/1.html. Acesso em: 02 set. 2019.

AZEVEDO, C. E. F. *et al*. Estratégia de Triangulação: Objetivos, Possibilidades, Limitações e Proximidades com o Pragmatismo. *In:* **Anais do IV Encontro de Ensino e Pesquisa em Administração e Contabilidade**, Brasília/ DF, 3 a 5 de novembro de 2013. p. 1-16. Disponível em: http://www.anpad.org.br/diversos/trabalhos/EnEPQ/enepq_2013/2013_EnEPQ5.pdf. Acesso em: 10 set 2015.

BALACHEFF, N. Processus de Preuve et Situations de Validation. **Educational Studies in Mathematics**. n.18. p. 147-176, 1987.

_____________. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas**. Bogotá: Universidad de los Andes, 2000.

_____________. **A epistemologia do pesquisador:** a prova como impasse na pesquisa educacional. Tradução Chang Kuo Rodrigues. 2004. Disponível em: www.pucsp.br/pensamentomatematico/resumo_balacheff_chang.doc. Acesso em 16 jan. 2014.

BATTISTA, M. T.; CLEMENTS, D. H. Geometry and proof. **Mathematics Teacher**, n. 88(1), p. 48-54, 1995.

BELEI, R. A. *et al*. O uso de entrevista, observação e videogravação em pesquisa qualitativa. **Cadernos de Educação**, 30, p. 187 - 199, jan. /jun. 2008.

BICUDO, I. Demonstração em Matemática. **BOLEMA**, ano 15, nº 18, p. 79-90. Rio Claro: UNESP, 2002.

BOGDAN, R. e BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução a teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 2003.

BOYER, Carl. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática: primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental. Secretaria de Educação Fundamental do Ministério da Educação e do Desporto. MEC-SEF. Brasília. 1997. 142p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 13 maio 2018.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Secretaria de Educação Fundamental do Ministério da Educação e do Desporto. MEC-SEF. Brasília. 1998. 148p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 13 maio 2018.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Ensino Médio – Parte 1 – Bases Legais, Brasília, MEC, 2000. 109p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf. Acesso em: 13 maio 2018.

_______. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Ensino Médio – Parte 3 – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Brasília, MEC, 2000. 58p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 13 maio 2018.

________. Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES 1.302/2001. **Diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura**. Diário Oficial da União, Brasília, 05 mar. 2002, Seção 1, p. 15. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 13 maio 2018.

_______. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio** – Vol. 2 - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Brasília, MEC, 2006. 135p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em 13 maio 2018.

________. **Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura/Secretaria de Educação Superior**. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Superior, 2010. Disponível em: https://www.dca.ufrn.br/~adelardo/PAP/ReferenciaisGraduacao.pdf. Acesso em: 20 maio 2018.

________. Ministério da Educação – MEC/ Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP (2014). **ENADE 2014 Relatório Síntese – Matemática**. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/relatorio_sintese/2014/2014_rel_matematica.pdf. Acesso em 13 jun. 2018.

_________. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 11 mar. 2019

_________. **Base Nacional Comum Curricular:** Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 11 mar. 2019

BRASIL ESCOLA, **Demonstrações do Teorema de Pitágoras**. Disponível em: https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/demonstracoes-teorema-pitagoras.htm. Acesso em: 03 set. 2019.

BUSQUINI, J. A.; SANTOS, V. M. Demonstração em geometria: significados de alunos. *In:* XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011. **Anais do XIII CIAEM**. Recife, 2011. Disponível em: http://www.lematec.net.br/CDS/XIIICIAEM/artigos/821.pdf. Acesso em: 20 jun. 2018.

CALDATO, J.; UTSUMI, M. C.; NASSER, L. Argumentação e demonstração em matemática: a visão de alunos e professores. **Revista Triângulo**, Uberaba, MG, v. 10, n. 2, p. 74-93, jul./dez. 2017.

CARVALHO, M. A. S; TUCCI, A. M. F. O ensino de Geometria não-Euclidiana na Educação Básica. *In:* XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011. **Anais do XIII CIAEM**. Recife, 2011. Disponível em: http://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2625/816. Acesso em: 15 jun. 2018.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.

CRESCENTI, E. P. A formação inicial do professor de Matemática: aprendizagem da Geometria e atuação docente. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 3, n. 1, p. 81-94, jan. /jun. 2008.

CRESWELL, J. W. CLARK, V. L. P. **Designing and conducting mixed methods research**. Thousand Oaks, CA, US: Sage Publications, Inc. 2007.

DALL'ALBA, C. S. **Possibilidade de utilização do software GeoGebra no desenvolvimento do pensamento geométrico de um grupo de alunos do sexto ano do ensino fundamental**. 188f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2015.

D'AMBRÓSIO, U. Prefácio (2004). *In:* BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

DAMICO, A. Conhecimentos prévios dos alunos ingressantes em cursos de Licenciatura em Matemática: um elemento a ser considerado na discussão, elaboração e implementação de um currículo de formação inicial de professores de Matemática. *In:* X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010. **Anais do X ENEM.** Salvador, 2010. Disponível em: http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/CC/T18_CC670.pdf. Acesso em: 15 jun. 2018.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Tradução de João B. Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

DE VILLIERS, M. **Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the Van Hiele Theory:** Some critical comments. University of Stellenbosch: RUMEUS, 1987. Disponível em: http://math.kennesaw.edu/~mdevilli/VanHieleCritique-87.pdf. Acesso em: 15 jun. 2018.

______________. Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad*. **Revista Educação e Matemática**, Portugal, n. 62, mar./abr. de 2001. p. 31-36. Tradução de Eduardo Veloso.

_______________. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 400-431, 2010. Tradução de Celina A. A. P. Abar.

DIAS, M. S. S. **Um Estudo da Demonstração no Contexto da Licenciatura em Matemática:** uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico. 214f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

DÍAZ, M. A; GUTIÉRREZ, A; JAIME, A. Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. **Enseñanza de las Ciencias**, 34.1, p. 107-128, 2016.

DOLCE, O; POMPEO, J. N. **Fundamentos da Matemática Elementar, 9:** Geometria Plana: exercícios resolvidos, exercícios propostos com resposta, teste de vestibular com resposta. 7ª Ed. São Paulo: Atual, 1993.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 4ª ed. São Paulo: Atual, 2003.

EVES, H. **Geometria:** Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Tradução Higino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

FERNANDES BALIEIRO FILHO, I. Concepção de Futuros Professores de Matemática sobre as Origens da Demonstração. **Revista Tecné, Episteme y Didaxis**: TED, p. 927-933, Bogotá, 2016.

FERREIRA FILHO, J. L. **Um estudo sobre argumentação e prova envolvendo o Teorema de Pitágoras**. 189f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FERREIRA, I. G. *et al*. Diagnóstico do conhecimento geométrico de alunos do Ensino Médio como ação do PIBID. *In:* XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2013. **Anais do XI ENEM**. Curitiba, 2013. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/2541_1705_ID.pdf. Acesso em: 13 jun. 2018.

FERREIRA, M. B. C. Concepções de alunos de Licenciatura em Matemática sobre provas e demonstrações geométricas em uma universidade do estado da Bahia. *In:* XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016. **Anais do XII ENEM.** São Paulo, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/8235_4247_ID.pdf. Acesso em: 14 jun. 2018.

FIORENTINI, D. Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino de Matemática no Brasil. **ZETETIKÉ**. Campinas: UNICAMP, ano 3, n. 4, p. 1-36, 1995.

FIORENTINI, D; OLIVEIRA, A. T. C. C. O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **BOLEMA**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 917-938, dez. 2013.

FREIXO, M. J. **Metodologia Científica:** Fundamentos, Métodos e Técnicas. 3. Ed. Lisboa: Instituto PIAGET, 2011.

FUYS, D. *et al*. **An investigation of the van Hiele model of thinking in geometry among adolescents** (final report). Brooklyn College, City Univ. of N. York: N. York, 1985.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

____________. Decorar é preciso, demonstrar também é. **Revista do Professor de Matemática**, SBM, n. 68, 1º semestre de 2009. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/68/1.html. Acesso em: 02 set. 2019.

___________. C. Q. D. **Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GARNICA, A. V. M. Lakatos e a filosofia do Provas e Refutações: contribuições para a educação matemática. **Educação & Sociedade**, ano XVII, n. 56, p. 431-451, 1996.

_________________. As demonstrações em educação matemática: Um ensaio. **BOLEMA**, 18, p. 91-122, 2002.

GAZIRE, E. S. **O não resgate das Geometrias**. 238f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2000.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GONÇALVES, C. F. **Dificuldades em Matemática ao ingressar no Ensino Superior**. 74f. TCC (Licenciatura em Matemática) – Centro Universitário La Salle, Canoas, 2007.

GRINKRAUT, M. L. **Formação de professores envolvendo a Prova Matemática:** Um olhar sobre o Desenvolvimento Profissional. 349f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A. On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, *20*(2/3), p. 27-46, 1998.

HAMAZAKI, A. C. O Ensino da Geometria Sob a Ótica dos Van Hiele. *In:* VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004. **Anais do VIII ENEM**. Recife, 2004. Disponível em: http://docplayer.com.br/21736244-O-ensino-da-geometria-sob-a-otica-dos-van-hiele.html. Acesso em: 14 maio 2018.

HANNA, G. Some Pedagogical Aspects of Proof. **Interchange**. The Ontario Institute for Studies in Education, Ontario, Canadá. v. 21, n.1, p. 6-13, mar. 1990.

HERBST, P. G. (epíl.) ¿A dónde va la investigación sobre la prueba?. *In:* BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas**. Bogotá: Universidad de los Andes, 2000.

HUEB, M. C. Geometria, um balanço dos trabalhos publicados no ano de 2010 no Brasil. *In:* XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2013. **Anais do XI ENEM.** Curitiba, 2013. Disponível em:

http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/3476_1923_ID.pdf. Acesso em: 15 abr. 2018.

JAHN, A. P.; HEALY, L.; PITTA COELHO, S. Concepções de professores de Matemática sobre prova e seu ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa. *In:* 30ª Reunião da Anped, 2007, Caxambu/MG. **GT 19 - Educação Matemática**, 2007, p. 1-21. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/concepcoes.pdf. Acesso em: 24 jan. 2017.

JAHNKE, H.N. Theorems that admit exceptions, including a remark on Toulmin. **ZDM**, Essen, Germany, v. 40, n. 3, p. 363-371, 2008.

JAIME, A. **Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele:** La enseñanza de las isometrías en el plano. La Evaluación del nivel de razonamiento. 379f. Tesis Doctoral - Universidad de Valencia, España, 1993.

JAIME, A; GUTIÉRREZ, A. Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares; M. Sánchez, (Eds.), **Teoría y práctica en educación matemática.** Colección Ciencias de la Educación, *4*, p. 295-384. Sevilla, España: Alfar, 1990.

____________________. A model of test design to assess the Van Hiele levels. *In:* **Proceedings of the 18th PME Conference**, vol. 3, p. 41-48. Lisboa, Portugal: PME, 1994. Disponível em: https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut94a.pdf. Acesso em: 12 mar. 2019.

KALEFF, A. M. *et al*. Desenvolvimento do pensamento geométrico – o modelo de van Hiele. **BOLEMA**, Rio Claro - SP, v. 10, p. 21-30, 1994.

KALEFF, A. M. M. R. Geometrias não-Euclidianas na Educação Básica: utopia ou possibilidade? *In:* X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010. **Anais do X ENEM.** Salvador, 2010. Disponível em: http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/PA/Palestra21.pdf. Acesso em: 10 maio 2018.

KNECHTEL, M. do R. **Metodologia da pesquisa em educação:** uma abordagem teórico-prática dialogada. Curitiba: Intersaberes, 2014.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático:** provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber:** manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Porto Alegre: Artmed; Belo Horizonte: Editora UFMG, 1999.

LEIVAS, J. C. P. Geometria: ontem, hoje e amanhã. *In:* X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010. **Anais do X ENEM.** Salvador, 2010. Disponível em:

http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/MC/T12_MC2311.pdf. Acesso em: 10 maio 2018.

LIMA, M. L. S. **Sobre Pensamento Geométrico, Provas e Demonstrações Matemáticas de Alunos do 2º ano do Ensino Médio nos Ambientes Lápis e Papel e Geogebra**. 192f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015.

LIMA, M. L. S; LINS, Abigail F; PEREIRA, P. S. Provas e Demonstrações Matemáticas e o aplicativo GeoGebra: incentivo à visualização para alunos do 2º ano do Ensino Médio. **VIDYA (SANTA MARIA. ONLINE)**, v. 38, p. 199-221, 2018.

LINS, A. F. **Towards an Anti-Essentialist View of Technology in Mathematics Education**. Tese (Doutorado (PhD)), University of Bristol, 2003.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista** – *SBEM*, n. 4, p. 3-13, 1995.

______________. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

______________. **Letramento geométrico:** consequências de sua ausência. *In:* VI Congresso Nacional de Educação (IV CONEDU), Fortaleza/CE, 2019. Disponível em: http://edicoes.conedu.com.br/pdf/CONEDU-LETRAMENTO-GEOM%C3%89TRICO-25OUT19.pdf. Acesso em: 28 out. 2019.

LOVIS, K. A; FRANCO, V. S. As concepções de Geometrias não-Euclidianas de um grupo de professores de Matemática da Educação Básica. **BOLEMA**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 369-388, abr. 2015.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: E P U, 1986.

LUJAN, M. L. S. **A Geometria da 1ª série do 1º grau:** um trabalho na perspectiva de van Hiele. 181f. Dissertação (Mestrado em Educação) – UNICAMP, Campinas, 1997.

MARCONI, A, M; LAKATOS, E, M. **Fundamentos de metodologia científica.** 6ª ed. 4ª reimpressão. São Paulo: Atlas, 2008.

MARQUES, N. L. R. **Teorias da aprendizagem**. 2015. Disponível em: www.nelsonreyes.com.br/Ensino_Aprendizagem_Aulas_Mest_2015.pdf. Acesso em 16 jul. 2017.

MARTIN, W. G; HAREL, G. Proof Frames of Teachers Elementary Teachers. **Journal for Research in Mathematics Education**, vol. 20, n. 1, p. 41-51, 1989.

MARTINS, H. G; SILVA, M. A. R; PUGGIAN, C. Geometria finita como uma alternativa metodológica para o desenvolvimento do pensamento geométrico: uma experiência com alunos do Ensino Médio. *In:* XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA, 2013. **Anais do XI ENEM.** Curitiba, 2013. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/3566_2050_ID.pdf. Acesso em: 18 abr. 2018.

MATEUS, M. E. A. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de noções concernentes às demonstrações e provas na Educação Básica**. 269 f. Tese de Doutorado em Educação Matemática - Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo: 2015.

MATEYA, M. **Using the van Hiele theory to analyse geometrical conceitualisation in grade 12 students:** a namibian perspective. 154f. Dissertação (Master in Education) - Rhodes University, South Africa, 2008.

MINAYO, M. C. S; SANCHES, O. Quantitativo-qualitativo: oposição ou complementaridade?. **Cadernos de Saúde Pública**, Rio de Janeiro, v. 9, n. 3, p. 239-262, jul./set. 1993.

MONROY, A. A.; ASTUDILLO, M. T. G. Construcción social de los procesos de definer y demostrar. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 2, p. 527-549, 2016.

MORAES, R; GALIAZZI, M. C. **Análise Textual Discursiva**. 3ª ed. rev. ampl. Ijuí: Unijuí, 2016.

MORAIS FILHO, D. C. **Manual de redação matemática:** com um dicionário etimológico-explicativo de palavras usadas na matemática e um capítulo especial sobre como se escreve uma dissertação. 1ª Ed. Campina Grande: Fábrica de Ensino, 2009.

______________. **Um Convite à Matemática**. 3ª Ed. Campina Grande: Fábrica de Ensino, 2010.

NAGAFUCHI, T.; BATISTA, I. L. O que é demonstração? Aspectos filosóficos. *In:* XII ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2008. **Anais do XII EBRAPEM**. Rio Claro, 2008. Disponível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/69-1-A-gt2_nagafuchi_ta.pdf. Acesso em: 14 abr. 2018.

NASCIMENTO, E. G. A. Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de Geometria: reflexão da prática na escola. *In:* GEOGEBRA URUGUAY 2012. **Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra**. Uruguay, 2012, p. 125-132. Disponível em: http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/67.pdf. Acesso em: 16 jun. 2018.

NASSER, L. Níveis de Van Hiele: uma explicação definitiva para as dificuldades em Geometria?. **Boletim GEPEM**, n. 29, p. 21-25, 1991.

__________. **Using the van Hiele theory to improve secondary school geometry in Brazil.** 307f. Tese (Doutorado) - University of London, King's College, Centre for Educational Studies, London, 1992.

NASSER, L.; SANT’ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de van Hiele**. 2 Ed. Rio de Janeiro. Projeto Fundão: Editora do IM/UFRJ, 2010.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. A. **Argumentação e provas no ensino de Matemática**. 2ª Ed. Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão, 2003.

NEVES, R. S. P; BACCARIN, S. A. O; SILVA, J. C. A formação geométrica de Licenciandos em Matemática: uma análise a partir da replicação de questões do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE). **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 34, p. 169-186, 2013.

NEVES, R. S. P; SILVA, J. C; BACCARIN, S. A. O. A formação geométrica de licenciandos em Matemática de uma instituição pública. *In:* V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2012. **Anais do V SIPEM.** Petrópolis, Rio de Janeiro, 2012.

OLIVEIRA, M. C. **Ressignificando conceitos de Geometria Plana a partir do estudo de sólidos geométricos**. 279f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

ONTÁRIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. **Guide d’enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année**. Géométrie et sens de l’espace: Formes géométriques. Fascicule 1. Toronto, le Ministère, p.12, 2006.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em geometria plana:** concepções de estudantes da licenciatura em ensino de Matemática em Moçambique. 341 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2015.

ORDEM, J.; ALMOULOUD, S. A. Concepções de prova e de demonstração em Educação Matemática – o caso de estudantes de Licenciatura em Ensino de Matemática da Universidade Pedagógica na Beira e Nampula, Moçambique. **Revista Educação Matemática em Foco**, Campina Grande, v. 6, n. 1, p. 4-36, jan./jun. 2017.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**. Ano I, n. 1, p. 7-18, 1993.

_____________. O ensino da geometria no brasil nas últimas décadas: algumas preocupações a partir de pesquisas. *In*: IV IBEROAMERICAN CONFERENCE ON COMPLEX GEOMETRY/ I SEMINÁRIO DE ENSINO DE GEOMETRIA, 2007, Ouro Preto. **Anais do I Seminário de Ensino de Geometria.** Ouro Preto: UFOP. v. 1, p. 1-17, 2007.

PIASESKI, C. M. **A Geometria no Ensino Fundamental**. 36f. TCC (Licenciatura em Matemática) – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões URI, Erechim, 2010.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re)Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores da educação básica**. 388f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

PIETROPAOLO, R. C.; MATEUS, M. E. A. Concepções de estudantes de licenciatura em Matemática sobre o papel das demonstrações na formação do professor e sobre seu ensino na Educação Básica. *In:* VII CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2013. **Actas del VII CIBEM**. Montevidéu, Uruguai, 2013, p. 4326-4334. Disponível em: https://semur.edu.uy/cibem.org/7/actas/pdfs/530.pdf. Acesso em: 13 jun. 2018.

PINTO, G. M. F.; ESQUINCALHA, A. C. Concepções de licenciandos em Matemática sobre demonstração em Geometria. **Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 46, p. 90-106, jun. 2016.

PIRES, C. M. C. A formação matemática dos professores. *In:* V CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2005. **Anais do V CIBEM**. Porto: APM, 2005.

_____________. Educação Matemática e sua Influência no Processo de Organização e Desenvolvimento Curricular no Brasil. **BOLEMA**, Rio Claro (SP), ano 21, n. 29, p. 13-42, 2008.

PIROLA, N. **Solução de problemas geométricos:** dificuldades perspectivas. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas/SP, 2003.

PONTE, J. P.; PEREIRA, J. M.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. **Práxis Educativa**, Paraná, v. 7, n. 2, p. 355-377, jul./dez. 2012.

RAMASSOTI, L. C. **A Geometria Euclidiana na Licenciatura em Matemática do ponto de vista de professores formadores**. 179f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, São Paulo, 2015.

SALES, A.; PAIS, L. C. Argumentação e demonstração em uma atividade de Geometria em um curso de Licenciatura em Matemática. *In:* X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010. **Anais do X ENEM**. Salvador, 2010. Disponível em: http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/CC/T18_CC719.pdf. Acesso em: 12 jul. 2018.

SBEM. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. **Subsídios para a discussão de propostas para os cursos de Licenciatura em Matemática:** uma contribuição da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Brasília, 2003. Disponível em: https://www.academia.edu/4256113/SUBS%C3%8DDIOS_PARA_A_DISCUSS%C3%83O_DE_PROPOSTAS_PARA_OS_CURSOS_DE_LICENCIATURA. Acesso em: 20 maio 2018.

SCHNEIDER, C; LUNKES, M. E; REISDOEFER, D. N. A relevância do ensino da Geometria em cursos de Licenciatura-Matemática. *In:* XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2013. **Anais do XI ENEM**. Curitiba, 2013. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/2078_1148_ID.pdf. Acesso em: 12 jul. 2018.

SENA, R. M, DORNELES, B. V. Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011). **REVEMAT**, Florianópolis, v. 08, n. 1, p. 138-155, 2013.

SENK, S. L. How well do students write geometry proof's? **The Mathematics Teacher**, vol. 78, n. 6, p. 448-456, 1985.

__________. Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. **Journal for Research in Mathematics Education**, 20(3), p. 309-321, 1989.

SERRALHEIRO, T. D. **Formação de professores:** conhecimentos, discursos e mudanças na prática de demonstrações. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SILVA FILHO, A. F. **Desenvolvimento de uma sequência didática sobre quadriláteros e suas propriedades:** contribuições de um grupo colaborativo. 178f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

STAKE, R. E. **Pesquisa qualitativa:** estudando como as coisas funcionam. Porto Alegre: Penso, 2011.

STYLIANIDES, A. J. Proof and proving in school mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, 38, p. 289–321, 2007.

STYLIANIDES, G. J.; STYLIANIDES, A. J. Research-based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. **Educational Studies in Mathematics (Special Issue)**, 96, p. 119-127, 2017.

TREVISAN, E. P. Contribuições da lógica do desenvolvimento matemático de Imre Lakatos ao trabalho com provas e demonstrações no ensino de Matemática. **ECS**, Sinop/MT, v. 3, n. 1, p. 136-148, jan. /jun. 2013.

USISKIN, Z. **Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry**. CDASSG Project. The University of Chicago. Chicago (USA). 1982.

VAN HIELE, P. M. **El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares em el aprendizaje de la geometria)**. (Tese de Doutorado em Matemática e Ciências Naturais). Tradução Rosa Corberán *et al*., 1990. Universidade de Utrecht: Utrecht, Holanda, 1957.

VARGAS, G. V; ARAYA, R. G. El modelo de van Hiele e la enseñanza de la Geometría. **UNICIENCIA**, vol. 27, n. 1, p. 74-94. jan./jun. 2013.

YIN, R. K. **Estudo de caso:** planejamento e métodos. 3. ed. Tradução de Daniel Grassi. Porto Alegre: Bookman, 2001.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO

Universidade Federal Rural de Pernambuco

Departamento de Educação

Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências

Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática

Doutoranda: Marcella Luanna da Silva Lima

Orientador: Marcelo Câmara dos Santos

Questionário[5]

Licenciando: ____

Data: _____/______/_______

- **Parte I**

  1) Qual é a sua idade? _________________________

  2) Na Educação Básica, você estudou em escola pública ou particular? ____

  3) Em que ano você terminou o Ensino Médio? ___________________

  4) Você tem experiência no magistério? Se sim, em que série (ano)? As aulas eram referentes a Álgebra ou Geometria? ____

  5) Você trabalha atualmente? Se sim, em qual função? ____

- **Parte II**

  1) Para você, o que são provas e demonstrações matemáticas?
  ____
  ____

[5]Adaptado de MATEUS (2015).
Recomenda-se deixar mais espaços para que os alunos tenham mais áreas livres para expressar suas ideias.

2) Para você, o que são hipóteses e tese de um teorema?

____

____

3) O que é um teorema?

____

____

4) O que é um corolário?

____

____

5) Na Educação Básica, seu professor de Matemática trabalhava com provas e demonstrações? Se sim, descreva sua experiência enquanto aluno e como era a forma trabalhada pelo professor.

____

____

____

6) Na Licenciatura em Matemática, sabemos que os docentes trabalham muito, nas disciplinas específicas, com as demonstrações de teoremas de várias áreas da Matemática. Assim, descreva sua experiência com as provas e demonstrações durante o curso.

____

____

____

7) Você demonstraria algum teorema para seus alunos da Educação Básica? Se sim, qual(is)? Justifique sua resposta.

____

____

____

8) Dos vários teoremas vistos durante a Educação Básica, quais você considera mais importantes para que um aluno egresso desse segmento saiba a sua demonstração? Justifique.

____

____

____

9) Caso você julgue que não é necessário demonstrar teoremas na Educação Básica, justifique.

____

____

____

APÊNDICE B – ATIVIDADES COM PROVAS MATEMÁTICAS[6]

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências
Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática
Doutoranda: Marcella Luanna da Silva Lima
Orientador: Marcelo Câmara dos Santos

Atividades

Dupla: ____

____

Data: _____/______/_______

As questões abaixo referem-se às provas de teoremas que provavelmente são familiares a vocês. Dessa forma, tentem resolvê-las com calma, lembrando que vocês não estão sendo avaliados e que esse teste não vale nota. Em nossa pesquisa, vocês não serão identificados, por isso procurem resolver com calma, utilizando a argumentação que julgarem mais adequada e deixem todas as suas produções registradas, tentando não apagar os seus registros, pois eles também nos ajudarão na análise.

1) (adaptado de FERREIRA FILHO, 2007)

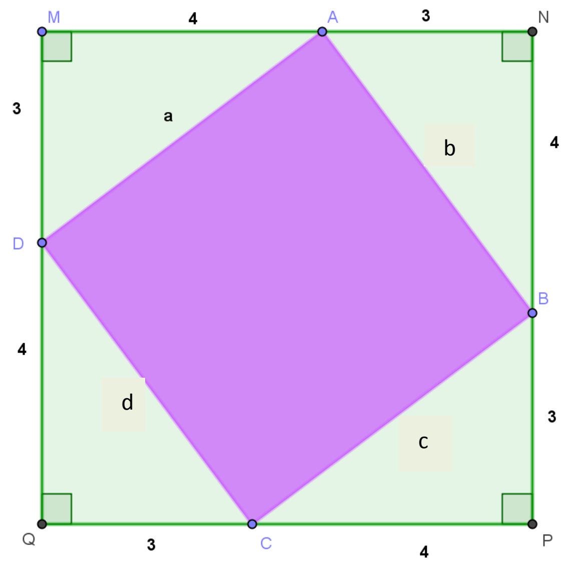
a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem sua resposta.

____

____

____

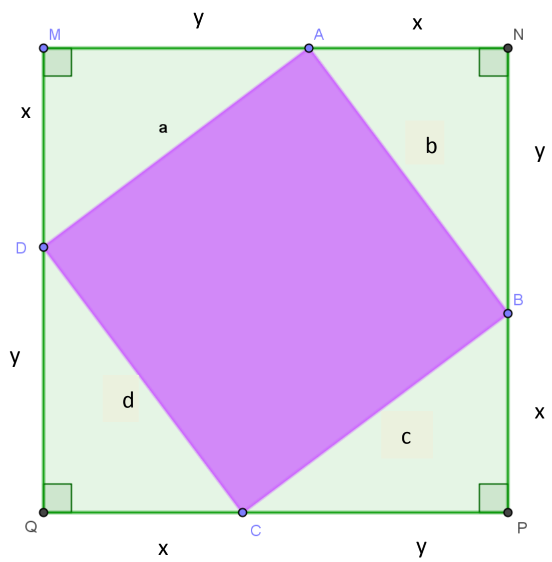
[6] Após a defesa, os enunciados dessas atividades foram corrigidos a partir das sugestões dos membros da banca. Recomenda-se deixar mais espaços para que os alunos tenham mais áreas livres para expressar suas ideias.



b) Calculem a medida do lado *a*, do item anterior, utilizando as áreas da figura acima. Expliquem como vocês fizeram.

---

c) Utilizando as áreas da figura abaixo, calculem a medida do lado *a* em função das medidas dos lados *x* e *y*. Justifiquem sua resposta.



---

d) Comparem a conclusão obtida na letra b com a conclusão obtida na letra c. O que vocês observam?

____

____

e) A partir dessa conclusão, respondam:

- ✓ As duas conclusões são equivalentes (iguais)? Justifiquem sua resposta.

  ____

  ____

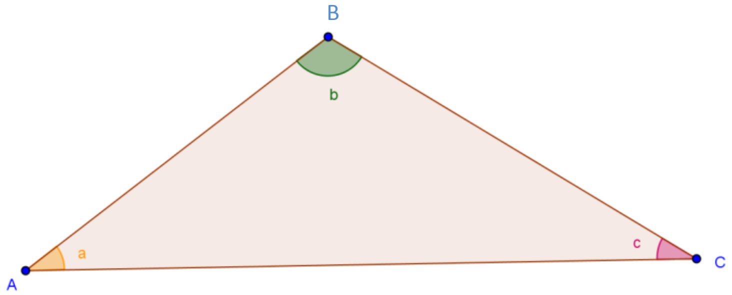
- ✓ Em qual dos dois processos (item *b* ou item *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem sua resposta.

  ____

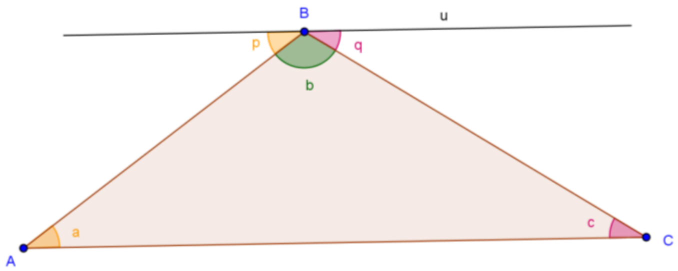
  ____

2) (Elaborada pelos membros da Equipe Provas e Demonstrações Matemáticas – Projeto CAPES/OBEDUC/UFMS/UEPB/UFAL Edital 2012 - adaptada)

Considerem um triângulo ABC, no qual estão assinalados os ângulos internos:



Traçando a reta *u*, paralela ao lado AC e que passa pelo vértice B:



Sabemos que p = a e q = c.

Como p + b + q = 180º, concluímos que a + b + c = 180º.

Observando essa prova, respondam o que se pede:

a) Por que podemos afirmar que *p* = *a* e *q* = *c*? Justifiquem sua resposta.

b) Por que podemos afirmar que $p + b + q = 180^o$? Justifiquem sua resposta.

c) O que podemos concluir com essa prova?

d) Essa afirmação vale para qualquer triângulo? Justifiquem sua resposta.

e) Provem essa afirmação de maneira diferente da que foi apresentada acima.

3) (extraído AGUILAR JR e NASSER, 2013) Seja um quadrilátero qualquer ABCD. Tracem sobre seus lados seus pontos médios M, N, O, P. O que se pode afirmar a respeito do quadrilátero MNOP? Justifiquem sua resposta.

4) (adaptado de PINTO e ESQUINCALHA, 2016) Considerem um par de retas *r* e *s* concorrentes em um ponto P e os ângulos formados por elas. Esses ângulos são adjacentes ou opostos pelo vértice. Provem que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

5) (adaptado de BUSQUINI e SANTOS, 2011) Provem se a afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

"Quando se somam as medidas dos ângulos internos de um quadrilátero, o resultado é sempre 360°".

6) Provem que, em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos comprimentos dos catetos.

A prova que vocês acabaram de construir é válida para **qualquer** triângulo retângulo? Ao fazê-la, vocês provaram o **Teorema de Pitágoras**? Justifiquem.

____

____

7) (adaptado de ORDEM, 2015) Considerem a seguinte propriedade dos triângulos e respondam o que se pede:

"O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro e sua medida é metade desse terceiro lado".

a. Formulem a mesma propriedade começando por: "Se…., então…"

____

____

b. Na sua formulação, o que vocês estão assumindo como conhecido e o que se deve provar?

____

____

c. Que conhecimentos são necessários mobilizar para provar essa propriedade?

____

____

d. Como vocês apresentariam a seus alunos uma prova para essa propriedade.

8) (adaptado de BUSQUINI e SANTOS, 2011)

A é o centro de uma circunferência e **AB** é o raio**. C** é um dos pontos da circunferência onde a mediatriz de **AB** corta essa circunferência. Como vocês provariam que a afirmação abaixo é verdadeira?

O triângulo ABC é sempre equilátero.

9) Provem que todo ângulo reto inscrito subentende uma semicircunferência.

10) Provem que em um triângulo qualquer, se um dos lados for prolongado, a medida do ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

APÊNDICE C – ANÁLISE *A PRIORI* DAS ATIVIDADES 8, 9 E 10

Análise *a priori* da atividade 8

A atividade (Figura 125) tem por objetivo estudar as estratégias que os licenciandos irão utilizar para provar que o triângulo ABC é sempre equilátero, utilizando as propriedades da mediatriz do raio de uma circunferência.

Figura 125 - Atividade 8

8) (adaptado de BUSQUINI e SANTOS, 2011)

A é o centro de uma circunferência e **AB** é o raio. **C** é um dos pontos da circunferência onde a mediatriz de **AB** corta essa circunferência. Como vocês provariam que a afirmação abaixo é verdadeira?

O triângulo ABC é sempre equilátero.

Fonte: adaptada de Busquini e Santos (2011)

Os conhecimentos matemáticos envolvidos são: construção e propriedades da mediatriz de um segmento, casos de congruência de triângulos e definição de triângulo equilátero. Aqui a dificuldade pode estar associada aos licenciandos não interpretarem corretamente a atividade sem possuir um desenho para auxilia-los no entendimento, como também a não lembrarem dos conceitos necessários para provar a afirmação e como se deve construir e elaborar uma prova para ela.

A partir do que foi discutido nos Capítulos 2 e 4, pode-se afirmar que os licenciandos que estejam no nível 1 não entendem o conceito de prova e por isso não sentem a necessidade de validar as afirmações. Caso estejam no nível 2, eles poderão provar a afirmação a partir da verificação experimental de um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, os licenciandos podem se convencer apenas com um exemplo especial ou podem precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Os licenciandos que estejam no nível 3 já são capazes de fazer deduções e provas informais, como também são capazes de dar razões informais para a verdade das propriedades. Caso estejam no nível 4, poderão entender e escrever provas formais. Além disso, algumas vezes os licenciandos podem utilizar figuras específicas apenas para ajudar a selecionar as propriedades adequadas para a prova, mas eles já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário desenvolver uma sequência de implicações com base em propriedades já estabelecidas (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994; GUTIÉRREZ e JAIME, 1998).

Ao analisarmos as justificativas e/ou argumentações utilizadas nessa atividade, os licenciandos que estão no nível 1 não desenvolvem uma prova, pois não a reconhece como necessária, uma vez que eles já sabem que é sempre um triângulo equilátero. Àqueles que estão no nível 2 podem verificar a validade da afirmação a partir de casos particulares de triângulos equiláteros, utilizando ferramentas de medição para confirmar a veracidade da afirmação. Os licenciandos que estão no nível 3 podem construir um exemplo bem geral (ainda manipulativo) para provar a afirmação, o que poderia ter sido feito por meio de conceitos e propriedades. Àqueles que estão no nível 4 podem provar que é verdade a partir de conceitos teóricos (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

Estabelecendo uma articulação com os tipos de prova de Balacheff (2000), os licenciandos que estão no nível 1 não produzirão provas, deixando a questão em branco. Àqueles que estão no nível 2, podem produzir provas do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, utilizando um ou alguns exemplos de triângulos equiláteros para validar a afirmação, ou ainda um exemplo bem especial de triângulo equilátero para confirmar a propriedade. Os licenciandos que estão no nível 3 justificarão a partir do *exemplo genérico*, validando informalmente a afirmação, pois seu raciocínio lógico ainda continua apoiado pela manipulação. Àqueles que estão no nível 4, escreverão provas do tipo *experiência mental*, validando a afirmação de forma genérica.

Análise *a priori* da atividade 9

A atividade (Figura 126) tem por objetivo estudar as estratégias que os licenciandos irão utilizar para provar que todo ângulo reto inscrito subentende uma semicircunferência.

Figura 126 - Atividade 9

9) Provem que todo ângulo reto inscrito subentende uma semicircunferência.

Fonte: autoria própria

Os conhecimentos matemáticos envolvidos são: ângulo inscrito em uma circunferência, ângulo central de um arco e o teorema do ângulo inscrito em uma circunferência, que afirma que *todo ângulo inscrito em uma circunferência é congruente com a metade do ângulo central correspondente ao arco determinado pelos pontos da circunferência pelos quais passam os lados de tal ângulo inscrito*. Aqui a dificuldade pode estar associada ao enunciado sem um desenho para um melhor esclarecimento, a não conseguir identificar qual a hipótese e o que se pretende provar e a construção e elaboração de uma prova para essa afirmação. Além disso, se os licenciandos não se lembrarem do teorema do ângulo inscrito em uma circunferência, será muito difícil construir uma prova para o que é pedido, que diz respeito a um dos primeiros teoremas demonstrados por Tales de Mileto.

A partir do que foi discutido nos Capítulos 2 e 4, pode-se afirmar que os licenciandos que estejam no nível 1 não entendem o conceito de prova e por isso não sentem a necessidade de validar as afirmações. Caso estejam no nível 2, eles poderão provar a afirmação a partir da verificação experimental de um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, os licenciandos podem se convencer apenas com um exemplo especial ou podem precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Os licenciandos que estejam no nível 3 já são capazes de fazer deduções e provas informais, como também são capazes de dar razões informais para a verdade das propriedades. Caso estejam no nível 4, poderão entender e escrever provas formais. Além disso, algumas vezes os licenciandos podem utilizar figuras específicas apenas para ajudar a selecionar as propriedades adequadas para a prova, mas eles já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário desenvolver uma sequência de implicações com base em propriedades já estabelecidas (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994; GUTIÉRREZ e JAIME, 1998).

Ao analisarmos as justificativas e/ou argumentações utilizadas nessa atividade, os licenciandos que estão no nível 1 não desenvolvem uma prova, pois não a reconhece como necessária, uma vez que eles já sabem que em uma semicircunferência pode-se inscrever um triângulo retângulo. Àqueles que estão no nível 2 podem verificar a validade da afirmação a partir de um ou alguns casos particulares de triângulos, utilizando ferramentas de medição para confirmar a veracidade da afirmação. Ou ainda podem utilizar um exemplo bem especial de triângulo para confirmar o resultado. Os licenciandos que estão no nível 3 podem construir um exemplo bem geral (ainda manipulativo) para provar a afirmação, o que poderia ter sido feito por meio de conceitos e propriedades. Àqueles que estão no nível 4 podem provar que é verdade a partir de conceitos teóricos (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

Estabelecendo uma articulação com os tipos de prova de Balacheff (2000), os licenciandos que estão no nível 1 não produzirão provas, deixando a questão em branco. Àqueles que estão no nível 2, podem produzir provas do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, utilizando um ou alguns exemplos de triângulos para validar a afirmação, ou ainda um exemplo bem especial de triângulo para confirmar a propriedade. Os licenciandos que estão no nível 3 justificarão a partir do *exemplo genérico*, validando informalmente a afirmação, pois seu raciocínio lógico ainda continua apoiado pela manipulação. Àqueles que estão no nível 4, escreverão provas do tipo *experiência mental*, validando a afirmação de forma genérica.

Análise *a priori* da atividade 10

A atividade (Figura 127) tem por objetivo estudar as estratégias que os licenciandos irão utilizar para provar que a medida do ângulo externo de um triângulo qualquer é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Figura 127 - Atividade 10

10) Provem que em um triângulo qualquer, se um dos lados for prolongado, a medida do ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Fonte: autoria própria

Os conhecimentos matemáticos envolvidos são: ângulos adjacentes, ângulo interno, ângulo externo, retas paralelas e o teorema das paralelas cortadas por uma transversal. Aqui a dificuldade pode se restringir a identificação da hipótese e o que se pretende provar, a não lembrar dos conceitos necessários para a prova e na construção e elaboração dela.

A partir do que foi discutido nos Capítulos 2 e 4, pode-se afirmar que os licenciandos que estejam no nível 1 não entendem o conceito de prova e por isso não sentem a necessidade de validar as afirmações. Caso estejam no nível 2, eles poderão provar a afirmação a partir da verificação experimental de um ou alguns casos e dependendo do grau de aquisição dessas habilidades, os licenciandos podem se convencer apenas com um exemplo especial ou podem precisar de um conjunto de exemplos mais elaborado. Os licenciandos que estejam no nível 3 já são capazes de fazer deduções e provas informais, como também são capazes de dar razões informais para a verdade das propriedades. Caso estejam no nível 4, poderão entender e escrever provas formais. Além disso, algumas vezes os licenciandos podem utilizar figuras específicas apenas para ajudar a selecionar as propriedades adequadas para a prova, mas eles já estão cientes de que uma figura é apenas um caso e que para provar uma afirmação é necessário desenvolver uma sequência de implicações com base em propriedades já estabelecidas (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994; GUTIÉRREZ e JAIME, 1998).

Ao analisarmos as justificativas e/ou argumentações utilizadas nessa atividade, os licenciandos que estão no nível 1 não desenvolvem uma prova, pois não a reconhece como necessária, uma vez que eles já sabem que é verdadeiro. Àqueles que estão no nível 2 podem verificar a validade da afirmação a partir de um ou alguns casos particulares de triângulos, ou ainda podem considerar um exemplo bem especial de triângulo para confirmar a veracidade da afirmação. Os licenciandos que estão no nível 3 podem construir um exemplo bem geral (ainda manipulativo) para provar a afirmação, o que poderia ter sido feito por meio de conceitos e propriedades. Àqueles que estão no nível 4 podem provar que é verdade a partir de conceitos teóricos (JAIME e GUTIÉRREZ, 1990, 1994).

Estabelecendo uma articulação com os tipos de prova de Balacheff (2000), os licenciandos que estão no nível 1 não produzirão provas, deixando a questão em branco. Àqueles que estão no nível 2, podem produzir provas do tipo *empirismo ingênuo* ou *experiência crucial*, utilizando um ou alguns exemplos de triângulos para validar a afirmação, ou ainda um exemplo bem especial de triângulo para confirmar a propriedade. Os licenciandos que estão no nível 3 justificarão a partir do *exemplo genérico*, validando informalmente a afirmação, pois seu raciocínio lógico ainda continua apoiado pela manipulação. Àqueles que estão no nível 4, escreverão provas do tipo *experiência mental*, validando a afirmação de forma genérica.