UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS - MESTRADO

ANÁLISE DAS PRAXEOLOGIAS MATEMÁTICAS EM LIVROS DIDÁTICOS DOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO: O CASO DA FUNÇÃO AFIM

AVEILSON JOSÉ DE SANTANA

RECIFE
2016

AVEILSON JOSÉ DE SANTANA

ANÁLISE DAS PRAXEOLOGIAS MATEMÁTICAS EM LIVROS DIDÁTICOS DOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO: O CASO DA FUNÇÃO AFIM

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Ensino das Ciências.
Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Drº Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade

Coorientador: Drº Ross Alves Nascimento

Recife
2016

Ficha catalográfica

S232a Santana, Aveilson José de

Análise das praxeologias matemáticas em livros didáticos dos ensinos fundamental e médio: o caso da função afim / Aveilson José de Santana. – Recife, 2016.

137 f. : il.

Orientador: Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade.

Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Educação, Recife, 2016.

Inclui referências, anexo(s) e apêndice(s).

1. Livros didáticos 2. Praxeologia 3. Função Afim 4. Matemática – Estudo e ensino 5. Material didático – Análise I. Andrade, Vladimir Lira Veras Xavier de, orientador II. Título

CDD 510.7

AVEILSON JOSÉ DE SANTANA

ANÁLISE DAS PRAXEOLOGIAS MATEMÁTICAS EM LIVROS DIDÁTICOS DOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO: O CASO DA FUNÇÃO AFIM

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Ensino das Ciências.
Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Aprovada em ____ de_________ 2016.

Banca examinadora

____
Prof. Dr. Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade - UFRPE
(Orientador)

____
Dr. Ross Alves do Nascimento - UFRPE
(Coorientador)

____
Dr. Abraão Juvêncio de Araújo - UFPE
(Avaliador externo)

____
Dr. Marcus Bessa de Menezes – UFCG
(Avaliador externo)

____
Dra. Anna Paula de Avelar Brito Lima - UFRPE
(Avaliadora interna)

RESUMO

No contexto da educação matemática, algumas pesquisas têm mostrado que os estudantes dos ensinos fundamental e médio possuem dificuldades quando estão trabalhando com situações que envolvem a função afim. Quando falamos dos ensinos fundamental e médio, vários pesquisadores consideram o livro didático como sendo o principal recurso utilizado pelo professor em sala de aula. Nesse sentido, nos propomos a analisar as abordagens de função afim realizadas em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio. Para termos uma ideia sobre o que está sendo produzido na área de educação matemática no Brasil, analisamos algumas pesquisas que trabalharam com a função afim. Com base nessa análise, fizemos uma síntese das dificuldades que os estudantes dos ensinos fundamental e médio, que participaram dessas pesquisas, enfrentaram ao lidarem com a função afim. Verificamos que dificuldades para analisar e construir o gráfico de função afim ocorre com alunos, tanto do Ensino Fundamental como no Ensino Médio. Também constatamos que as abordagens sobre função afim nos quatro livros didáticos analisados não dão conta de superar parte das dificuldades apontadas nas pesquisas. Para aprofundar nosso estudo, analisamos também uma sequência sobre função afim desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da UFRPE. Optamos por analisar os livros e a sequência didática porque queríamos saber quais eram os aspectos comuns entre as abordagens dos livros didáticos e da sequência didática. Para isso utilizamos como ferramenta de análise a Teoria Antropológica do Didático que com a noção de praxeologia nos deu subsídios para alcançarmos nossos objetivos. Desse modo, fizemos uma análise praxeológica das atividades desenvolvidas pelos livros e também pela sequência didática. Como ferramenta de análise adotamos a noção de praxeologia matemática desenvolvida por Chevallard, na Teoria Antropológica do Didático. Constatamos que existem divergências entre as abordagens dos livros didáticos e da sequência didática. Verificamos ainda que os livros didáticos dão mais importância aos aspectos relacionados ao bloco prático técnico da praxeologia matemática, em detrimento dos aspectos relacionados ao bloco tecnológico teórico. Com essa pesquisa, apresentamos alguns resultados sobre o ensino de função afim que podem subsidiar pesquisas futuras, bem como o professor a ter um olhar mais atento às abordagens propostas nos livros didáticos.

Palavras-chave: Função Afim, Teoria Antropológica do Didático; Livro didático; Praxeologia.

ABSTRACT

In the mathematics educational context some researches have showed that learners in both elementary and high school have difficulties when it comes to working in situations that involve affine function. When we talk about elementary school and high school researchers consider textbooks as being the main resource used by teachers in the classroom scenario. With this focus in mind we decided to assess this approach on the affine function carried on in mathematics books in the 9th grade of elementary school and the 1st year of high school. In order to have an idea about what is being produced in the educational field in Brazil we analyzed some researches that deal with the affine function. Based on the analysis result we summarized some of the difficulties presented by the students, in the grades mentioned above, who participated in those researches had to face and deal with the affine function. We observed that difficulties to analyze and build the function of the graphic of the affine function occurred with both elementary and high school students. It was also confirmed that the approach on the affine function in four textbooks assessed during the research were not enough to overcome some of the difficulties pointed out in the research. To increase knowledge on the case study we also investigated a sequence about the affine function carried out on the UFRPE's science teaching post graduation program. We decided to analyze the textbooks and the didactic sequences because we wanted to know what were the common aspects between them and what were the outcomes. To achieve this goal, we used as analyzing tool the didactic anthropological theory on workbooks that provided us with the praxeology knowledge to guide us in order to achieve our objectives. This way we carried an praxeological analysis in the activities proposed by textbooks and didactic sequences. As analyzing tools, we adopted the mathematics praxeology notion proposed by Chevallard in the anthropological textbook theory. It was confirmed that there are some major divergences among textbook approaches and the didactic sequences. It was also confirmed that textbooks emphasize more practical aspects related to technical mathematics praxeological blocks, as opposed to the aspects related to the technological theoretical ones. As a result of this research, we present some results about affine function teaching that will be able to support forthcoming researches as well as help teacher have a more accurate view towards all the activities and approaches in textbooks.

Key-words: affine function, workbook anthropological theory, textbook; praxeology.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante a minha vivência como professor de matemática do ensino básico, pude observar, entre outros aspectos, que os estudantes tinham muitas dificuldades quando estavam trabalhando com situações que envolviam a álgebra. Em particular, no trabalho com modelos matemáticos que exigiam o estabelecimento de regularidades e dependência entre grandezas.

Pesquisas como as de Braga (2009), Lopes (2003) e Oliveira (1997), apontam para as dificuldades que os estudantes enfrentam quando se deparam com questões que envolvem o conceito de função. Dornelas (2007) e Delgado (2010) mostram como muitas dessas dificuldades se refletem no trabalho com a função afim.

Nesse trabalho, fizemos um levantamento de pesquisas que trabalharam com a função afim para identificar quais são as principais dificuldades apontadas pelos pesquisadores.

Dentre elas, chamou-nos atenção o trabalho de Dornelas (2007) que foi desenvolvido no Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências da UFRPE, pois essa pesquisa tem um olhar atento para algumas questões que consideramos importante para a aprendizagem da função afim. Além disso, o trabalho de Dornelas (2007) não só apontou para as dificuldades que os estudantes enfrentaram quando trabalharam com a função afim, mas também foram utilizadas estratégias para tentar minimizar essas dificuldades.

Diante do exposto, nossa pesquisa se propõe a responder alguns questionamentos: Quais as principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes que trabalharam com a função afim? As abordagens de função afim realizadas nos livros didáticos de matemática possibilitam a superação das dificuldades apontadas nas pesquisas? As abordagens de função afim realizadas pelos livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio aprovados no PNLD[1] 2014/2015, se aproximam da abordagem realizada na sequência didática proposta por Dornelas (2007)?

Para responder a esses questionamentos, fizemos um levantamento de onze pesquisas, entre artigos e dissertações, sobre função afim e analisamos um total de

[1] De acordo com o Ministério da Educação, PNLD é a sigla de Programa Nacional do Livro Didático. Esse programa tem como principal objetivo subsidiar o trabalho dos professores por meio da distribuição de livros didáticos aos estudantes da educação básica.

treze livros didáticos de matemática dos ensinos Fundamental e Médio. No entanto, escolhemos quatro deles para aprofundar a nossa análise e verificar em que medida as abordagens propostas nessas obras superam as dificuldades apontadas nas pesquisas e consideram os parâmetros defendidos por Dornelas (2007). Para analisar os quatro livros didáticos e a sequência didática, recorremos à Teoria Antropológica do Didático, mas precisamente à noção de Praxeologia Matemática, que detalharemos no capítulo a seguir.

1.1 OBJETIVOS DE PESQUISA

Em função das questões descritas em nossa pesquisa, apresentamos a seguir os objetivos do nosso trabalho.

OBJETIVO GERAL

Analisar as abordagens de função afim realizadas em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para alcançar o objetivo geral proposto, desenvolvemos os seguintes objetivos específicos:

- ✓ Identificar as principais dificuldades dos alunos apontadas nas pesquisas que trabalharam com o conceito de função afim.
- ✓ Verificar se os livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio aprovados no PNLD 2014/2015 trazem tarefas que envolvem as dificuldades apontadas pelas pesquisas.Caracterizar as Organizações Matemáticas presentes nas abordagens de função afim realizadas em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio aprovados no PNLD 2014/2015.
- ✓ Caracterizar e analisar a Organização Matemática presente na sequência didática desenvolvida por Dornelas (2007).
- ✓ Analisar em que medida as organizações matemáticas existentes nos livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do

Ensino Médio aprovados no PNLD 2014/2015 estão em sintonia com a organização matemática presente na sequência didática desenvolvida por Dornelas (2007).

1.1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Tendo em vista o desenvolvimento do nosso trabalho, organizamos a nossa pesquisa em seis capítulos, são eles: introdução; fundamentação teórica; percurso metodológico; resultados; discussão dos resultados e considerações finais.

A nossa fundamentação teórica foi dividida em sete partes. São elas: breve panorama histórico do desenvolvimento do conceito de função; a função afim; algumas pesquisas sobre o conceito de função e função afim; o livro didático; as orientações oficiais no Brasil; teoria antropológica do didático; transposição didática.

Na metodologia detalhamos como fizemos o levantamento das pesquisas que utilizamos para identificar as dificuldades dos alunos ao trabalhar com a função afim. Nessa etapa de nosso trabalho também realizamos uma caracterização dos livros didáticos e da sequência didática desenvolvida por Dornelas (2007).

A nossa análise foi dividida em cinco etapas. São elas: caracterização dos livros didáticos e da sequência didática de Dornelas (2007); análise dos livros didáticos em relação às dificuldades que envolvem a função afim; análise praxeológica dos livros didáticos; análise praxeológica da sequência didática de Dornelas (2007); comparar as organizações matemáticas dos livros didáticos com a da sequência didática de Dornelas (2007).

A seguir, apresentamos a fundamentação teórica que embasa a nossa dissertação.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção apresentaremos os pressupostos teóricos utilizados para fundamentar a nossa pesquisa. Inicialmente, fazemos uma abordagem histórica do conceito de função. Também caracterizamos o objeto matemático função afim e realizamos uma síntese de algumas pesquisas que falam sobre dificuldades referentes à aprendizagem desse conteúdo.

Nessa exposição, também iremos abordar o que alguns especialistas dizem sobre a importância do livro didático para o processo de ensino e aprendizagem, por último apresentaremos a teoria Antropológica do Didático e a noção de Transposição Didática.

2.1 BREVE PANORAMA HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Nesse tópico iremos apresentar um breve panorama histórico do desenvolvimento do conceito de função. Com esse estudo histórico, temos como objetivo mostrar como surgiu esse importante conceito matemático e também como se deu seu desenvolvimento ao longo dos séculos.

Quando estamos falando do conceito de função, podemos pensar inicialmente numa relação entre duas variáveis. Nesse sentido, Boyer (1996), diz que os registros de correspondência entre valores datam aproximadamente de 2000 a. C.. Eves (2007) complementa dizendo que, muitas das tabelas de correspondência fazem referência à civilização babilônica e que nesse material, estão diversos registros referentes ao conhecimento de geometria e de álgebra.

Para Roque e Carvalho (2012), as tabelas babilônicas e egípcias, já traziam algumas ideias atribuídas ao conceito de função, pois relacionava um número ao resultado das operações que o envolvia. Nesse contexto, Boyer (1996), diz que é atribuída a esse povo a construção de uma tabela de valores de $n^3 + n^2$ quando n é um número natural. Dessa forma, usando uma linguagem mais atual podemos dizer que a correspondência que foi utilizada pelos babilônios é uma função que possui lei de formação $f(n) = n^3 + n^2$, onde n pertence aos números naturais.

No século II d. C., Ptolomeu de Alexandria, no livro intitulado *Almagesto*, que numa tradução atual significa “*o maior”,* desenvolveu na Grécia antiga, um importante trabalho para a astronomia que continha a primeira tabela trigonométrica. Para Roque e Carvalho (2012, p. 264), “as tabelas de correspondência de Ptolomeu, similares às nossas tabelas de senos, também estabeleciam correspondências que consideramos hoje de natureza funcional”.

Roque e Carvalho (2012) dizem que apesar de existir uma relação de dependência entre variáveis, esses povos não tinham como objetivo propor uma noção de função para a compreensão de suas tabelas relacionais. Para esses autores, alguns conceitos centrais ainda não estavam presentes nessas situações como, por exemplo, a ideia de variação. Apesar disso algumas correspondências que são atribuídas aos povos antigos, traziam a ideia de relação entre variáveis.

Continuando com esse percurso histórico, no século XIV, Nicole Oresme desenvolveu uma teoria chamada de latitude de formas, que Segundo Boyer (1996), é uma ideia inicial para traçar uma figura ou gráfico que traz uma representação pela qual as coisas variam. Dessa forma, segundo Boyer (1996, p. 180) Oresme escreveu que “tudo que é mensurável, é imaginável na forma de quantidade contínua”. Nesse contexto, Oresme traçou um gráfico que relacionava velocidade e tempo para um corpo que se movimenta com aceleração constante:

> Ao longo de uma reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para ele traçou perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade (Boyer 1996, p. 180).

Podemos perceber que as latitudes e longitudes utilizadas por Oresme no século XIV, representam hoje, respectivamente, os eixos das ordenadas e abscissas do plano cartesiano. Para Boyer (1996), Oresme deu um passo importante quando percebeu que pode representar funções de uma variável através de uma curva.

Outro passo importante em relação ao conceito de função foi dado por François Viète (1540-1603), que com o desenvolvimento da linguagem algébrica contribuiu para o estudo das funções. Para Roque e Carvalho (2012 p. 265) “a partir de Viète a representação de uma quantidade desconhecida através de símbolos, permitia que as relações fossem representadas por fórmulas algébricas”.

Esse período da historia da matemática, também foi marcado pelos experimentos de Galileu. Muitas de suas experiências e coleta de dados resultaram em leis utilizadas na física, onde segundo Iezzi et al (2006), muitas delas eram traduzidas em forma de função.

É importante destacar que, de acordo com Roque e Carvalho (2012), o cálculo infinitesimal partia do estudo de curvas, que desde René Descartes (1596-

1650), eram expressas por equações. Essas equações eram representadas por uma associação entre x e y.

Para Roque e Carvalho (2012), faltava ainda um termo geral que representasse quantidades quaisquer quando uma variável dependia de outra. Segundo esses pesquisadores, isso motivou a definição de função e foi numa correspondência entre Leibniz e Johann Bernoulli que essa definição apareceu pela primeira vez.

Desse modo, Roque e Carvalho (2012, p. 301) dizem que “no final do século XVII, Johann Bernoulli já empregava a palavra função relacionando-a indiretamente a quantidades formadas usando quantidades indeterminadas e constantes”. Nesse contexto, é atribuída a Bernoulli, num artigo publicado em 1718, a definição de uma nova noção de função. Essa definição, encontramos em Roque e Carvalho (2012, p. 301), e diz o seguinte: “Definição. Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes”.

Alguns anos mais tarde o matemático suíço Leonard Euler, introduziu o notação f(x) para representar uma função de x. Em 1748, na obra *Introductio,* Euler também define o que é função de uma quantidade variável, dizendo que “é qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes” (Boyer, 1996).

Na visão de Roque e Carvalho (2012) o matemático Lejeune-Dirichlet (1805 – 1859) se aproximou da definição de função que conhecemos hoje, pois formulando a ideia de variável ele caracterizou o conceito central de função, quando disse que uma variável y se diz uma função de x, quando para todo valor atribuído a x, por meio de alguma regra, corresponde um único valor para y.

Atualmente temos uma definição formal para o conceito de função. Nessa linha, trazemos a definição de Lima (2013), que além de definir matematicamente o que é uma função, também fala sobre domínio, contradomínio e imagem, para ele:

> Dados os conjuntos X, Y, uma função $f: X \to Y$ (lê-se “uma função de X em Y”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se “y igual a f de x”). O conjunto X chama-se o domínio e Y é o contradomínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \to f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em f(x) (LIMA, 2013, p. 40).

Nessa passagem podemos observar que a definição de função utiliza uma linguagem algébrica mais rebuscada e elementos da Teoria dos conjuntos de Georg Cantor (1845 – 1918).

Diante do exposto, é importante destacar que o conceito de função foi fruto de uma construção histórica e contextualizada em que várias vezes esteve relacionado à resolução de problemas. Nessa perspectiva, Perrin (1940) apud (CARAÇA, 1952, p. 138) diz que “Toda a noção acaba por perder a sua utilidade, a sua própria significação, à medida que nos afastamos das condições experimentais que ela teve a sua origem”.

Portanto, nesse breve percurso histórico tentamos mostrar como o conceito de função foi sendo desenvolvido até chegarmos à sua ideia atual. Caraça (1952, p. 209) contribui dizendo que “esse conceito não teve sempre a generalidade que lhe damos hoje. Surgindo lentamente da necessidade de estudar leis naturais”.

Dando continuidade à nossa fundamentação teórica, apresentamos a seguir alguns pontos que julgamos relevantes para caracterizar a função afim.

2.2 A FUNÇÃO AFIM

Com o propósito de caracterizar a função afim e de fundamentar as discussões a respeito de nosso objeto de estudo, abordaremos a seguir, algumas definições, propriedades e características desse tipo de função.

Inicialmente destacaremos uma observação feita por Lima et al (2006) sobre a terminologia utilizada quando estamos trabalhando com esse modelo matemático. Esse matemático diz que muitas vezes os termos função afim e função do 1º grau são utilizados como sinônimos. Para Lima et al (2006, p. 92) “essa nomenclatura sugere a pergunta: o que é o grau de uma função? Função não tem grau. O que possui grau é polinômio. (Quando $a \neq 0$, a expressão $f(x) = a \cdot x + b$ é um polinômio do primeiro grau)”.

Desse modo, conforme indicam esses pesquisadores, não iremos utilizar os termos função do primeiro grau e função afim como sinônimos, embora alguns autores como Morettin, Hazzan e Bussab (2003) os considerem como tal.

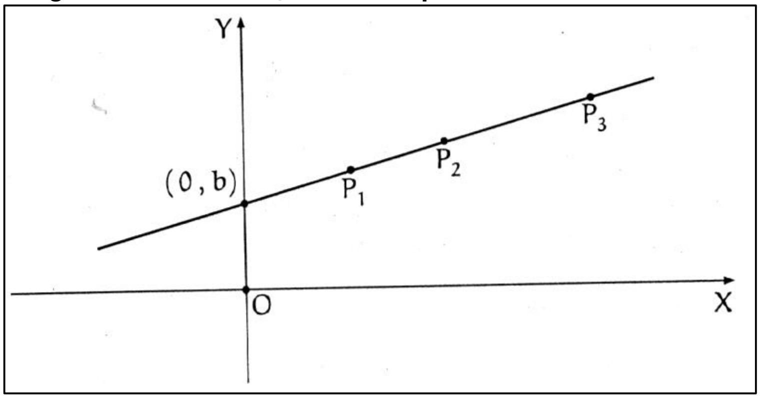
Para Lima et al (2006), uma função **f: R → R** chama-se afim quando existem constantes reais a e b tais que $f(x) = ax + b$ para todo x pertencente aos números reais. De acordo com esses matemáticos, o gráfico de uma função afim é sempre uma reta não vertical, para provar isso Lima et al (2006) dizem que basta mostrar que três pontos quaisquer P_1, P_2 e P_3 pertencentes à função afim são colineares.

Desse modo, considerando a função f(x) = ax + b e os pontos $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$, que pertencem a essa função, Lima et al. (2006) dizem que para esses pontos estarem alinhados é necessário que a distância de P_1 a P_3 seja igual à soma das distâncias de P_1 a P_2 e de P_2 a P_3. Nesse caso, os autores estão considerando que $x_1 < x_2 < x_3$.

A fórmula para calcular a distancia entre dois pontos fornece:

$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 + b) - (ax_1 + b)]^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$. De modo análogo tem-se, $d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$ e $d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$. Assim, tem-se que $(x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} + (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} = [(x_3 - x_2) + (x_2 - x_1)]\sqrt{1 + a^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$, ou seja, $d(P_1, P_3) = d(P_2, P_3) + d(P_1, P_2)$, consequentemente os pontos P_1, P_2 e P_3 são colineares. A figura a seguir ilustra esse fato.

Figura 1 - Pontos P_1, P_2 e P_3 no plano cartesiano.



Fonte: Lima et al (2006, p.89).

Conforme acabamos de ver, o gráfico da função afim é uma reta e Lima et al (2006) dizem que a recíproca dessa afirmação é verdadeira, ou seja, toda reta não vertical r representa o gráfico de uma função afim. Para provar essa afirmação, esses matemáticos dizem que,

> [...] tomemos dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ na reta r. Como r não é vertical, temos necessariamente $x_1 \neq x_2$, logo existe uma função afim f: R → R tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. O gráfico de f é uma reta que passa pelos pontos P_1 e P_2 logo essa reta coincide com r (LIMA et al, 2006, p. 91).

De acordo com essas demonstrações podemos afirmar que o gráfico da função afim é uma reta não vertical e que toda reta não vertical representa o gráfico de uma função afim.

2.2.1 COEFICIENTE LINEAR E TAXA DE VARIAÇÃO DA FUNÇÃO AFIM.

Conforme verificamos, uma função é afim quando é do tipo f(x) = ax + b com a e b sendo números reais. De acordo com Iezzi e Murakami (1993), o número real b é denominado coeficiente linear e representa o valor onde a reta corta o eixo das ordenadas. Já o número ***a*** representa, na definição de Lima et al (2006), inclinação, taxa de variação ou coeficiente angular.

Segundo Lima et al (2006), a taxa de variação de uma função afim pode ser determinada observando somente a equação que define a função, ou através de dois pontos distintos pertencentes ao seu gráfico. Desse modo, considerando dois pontos x_1 e x_2 que pertencem à função f(x) = ax + b, temos que $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$. Observando essas duas expressões, temos que $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$. Logo podemos dizer que $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Ainda de acordo com Lima et al (2006), a taxa de variação significa que para cada acréscimo de uma unidade no domínio da função, o valor da imagem, cresce ou decresce ***a*** unidades. Na tabela 2, trouxemos um exemplo que ilustra essa afirmação.

Tabela 1 - Valores das funções f(x) = 2x + 1 e f(x) = -2x + 1, para x = -2, -1, 0, 1, 2

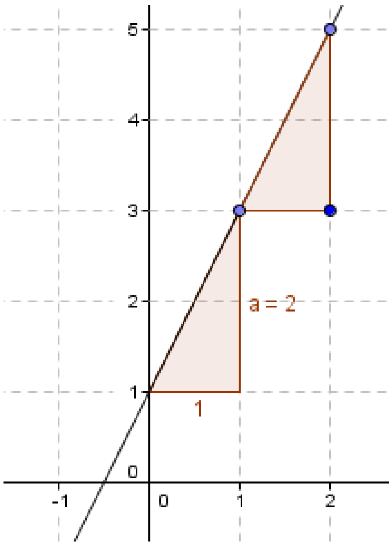
x	f(x) = 2x + 1	f(x) = -2x + 1
- 2	- 3	5
- 1	- 1	3
0	1	1
1	3	-1
2	5	-3

Fonte: construído pelo autor da pesquisa.

Podemos observar na tabela 1, que para cada aumento de uma unidade da variável x, a imagem da função f(x) = 2x + 1 aumenta constantemente de duas unidades. Consequentemente, a imagem da função f(x) = -2x + 1, diminui de 2 unidades. Nesses casos as taxas de variação de cada função são iguais a 2 e – 2, respectivamente.

Na figura 2, ilustramos esse fato geometricamente para o caso da função f(x) = 2x + 1.

Figura 2 - Taxa de variação da função f(x) = 2x + 1



Fonte: construído pelo autor da pesquisa.

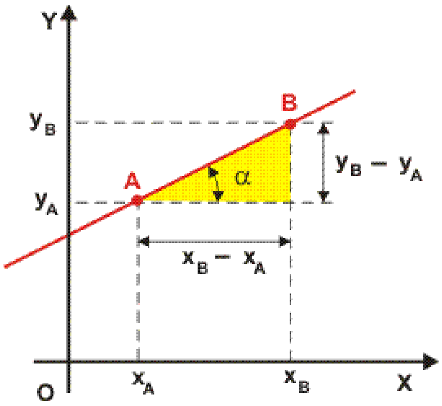
Na figura 2 quando os valores do domínio da função aumentam uma unidade a imagem da função f(x) = 2x + 1 aumenta duas unidades, conforme podemos visualizar na tabela 1.

Para Lima et al (2006), na função f(x) = ax + b não é adequado chamar o número ***a*** de coeficiente angular, visto que muitas vezes não há ângulo no problema estudado e também considerando o gráfico dessa função, o ângulo formado com o eixo horizontal depende das unidades que serão trabalhadas no problema. Dessa forma, esses autores defendem que é mais apropriado usar o termo taxa de variação para uma função e coeficiente angular para uma reta.

Apesar da observação feita por Lima et al (2006), encontramos na literatura alguns autores como Stewart (2008), Iezzi e Murakami (1993) que usam o termo *coeficiente* angular ao invés de taxa de variação quando estão trabalhando com a função afim. Em nosso trabalho, utilizaremos o termo taxa de variação.

Além disso, no caso de manutenção de uma mesma escala adotada tanto na representação dos elementos do domínio da função quanto na representação dos elementos da imagem, a taxa de variação da função afim pode ser calculada através da tangente do ângulo que é formado entre a reta que representa o seu gráfico e o eixo x. A seguir, temos uma ilustração da taxa de variação da função afim.

Figura 3 – Taxa de variação da função afim



Fonte: Página do professor Fernando Boze[2].

Observando a figura 3 temos que a taxa de variação da função f(x) = ax + b é igual a tangente do ângulo α, ou seja, $tg\alpha = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = a$.

2.2.2 CRESCIMENTO OU DECRESCIMENTO DA FUNÇÃO AFIM.

Segundo Iezzi e Murakami (1993), uma função é crescente quando para todo $x_1 < x_2$ pertencentes ao domínio da função, temos $f(x_1) < f(x_2)$ e é decrescente se quando $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$. Considerando a função afim, Iezzi e Murakami (1993) dizem que ela é crescente quando $(\forall\ x_1, x_2)\ (x_1 \neq x_2 \rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0)$ e decrescente quando $(\forall x_1, x_2)\ (x_1 \neq x_2 \rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0)$.

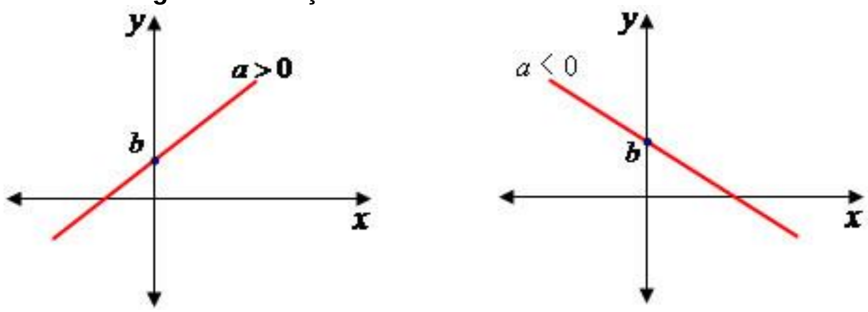
De acordo com as definições de função afim crescente e decrescente trazidas por Iezzi e Murakami (1993), podemos dizer que para observar o comportamento desse tipo de função basta observarmos o valor da taxa de variação, já que $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Em síntese, a função f(x) = ax + b será crescente quando a > 0 e

[2] Disponível em < http://www.fernandoboze.com/sugestoes-de-atividades/3o-ano---em/geometria-analitica/inclinacao-de-uma-reta> Acesso em Março de 2015.

decrescente quando a < 0. Assim, segundo Lima et al (2006, p. 90), “quanto maior o valor de ***a*** mais a reta se afasta da posição horizontal”.

Na figura 4, trazemos um exemplo de função afim crescente e um de função afim decrescente.

Figura 4 - Funções afim crescente e decrescente



Fonte: Página do Portal Mundo Educação[3].

2.2.3 CASOS PARTICULARES DE FUNÇÃO AFIM.

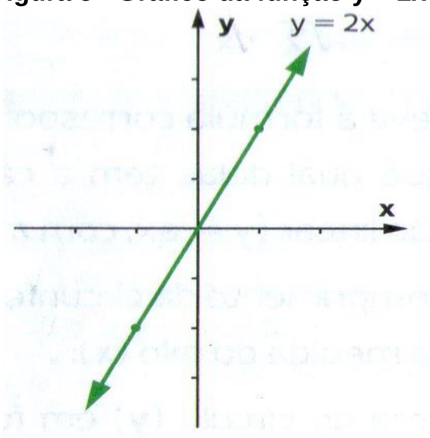
A definição de função afim trazida por Lima et al (2006) diz que em f(x) = ax + b, com a e b números reais. Dessa forma, conforme os valores de a e b variam nos números reais, podemos ter os seguintes casos particulares de função afim:

- ✓ **Função linear**

Para Iezzi e Murakami (1993) uma função é linear quando cada elemento x do seu domínio está associado a um número real ax, onde a ≠ 0, ou seja f(x) = ax. Nesse caso, considerando a função afim f(x) = ax + b, temos que b = 0 e a ≠ 0.

A figura 5 ilustra o exemplo de um gráfico representativo de função linear.

Figura 5 - Gráfico da função y = 2x



Fonte: Dante (2012, p.87).

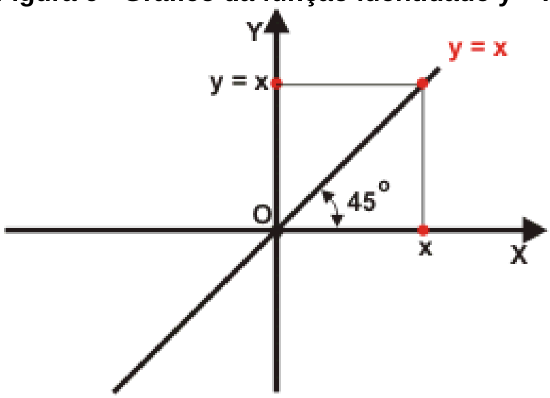
[3] Disponível em <http://www.mundoeducacao.com/matematica/funcao-1-grau.htm> Acesso em Março de 2015.

Podemos observar na figura 6 que o gráfico da função y = 2x é uma reta que passa pela origem do plano cartesiano. Como todas as funções lineares são do tipo f(x) = ax, com a ≠ 0 e b = 0, temos que seu gráfico é uma reta que passa pela origem, ou seja, o ponto (0, 0) pertencente ao gráfico de qualquer função linear.

Ainda utilizando os modelos lineares, temos um caso particular, que é a função identidade. Para Iezzi e Murakami (1993), uma função recebe o nome de identidade quando é do tipo f(x) = x, para todo x pertencente aos números reais. Nesse sentido, observando a forma geral da função afim, que é f(x) = ax + b, para que se tenha a função identidade é necessário que a = 1 e b = 0.

A figura 6, descrita a seguir, mostra o gráfico da função identidade.

Figura 6 - Gráfico da função identidade y = x



Fonte: Página alfaconnection[4].

O gráfico da função identidade é uma reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares.

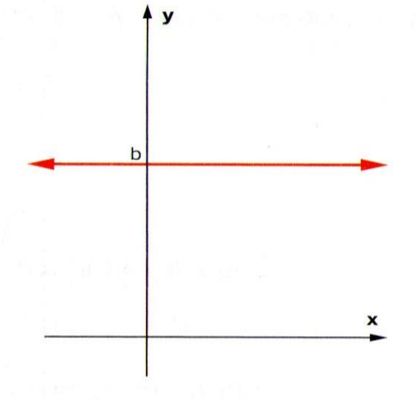
- ✓ **Função constante**

Uma função é dita constante quando associa a cada elemento x pertencente aos reais o mesmo número b. Em outras palavras a função constante é do tipo f(x) = b, nesse caso temos a taxa de variação igual a zero.

O gráfico da função f(x) = b é uma reta horizontal que passa sempre pelo ponto de coordenadas (0, b). Na figura 8, temos um exemplo de gráfico para esse tipo de função.

[4] Disponível em < http://alfaconnection.net/pag_avsm/fun0203.htm> Acesso em Março de 2015.

Figura 7 - Gráfico da função constante f(x) = b



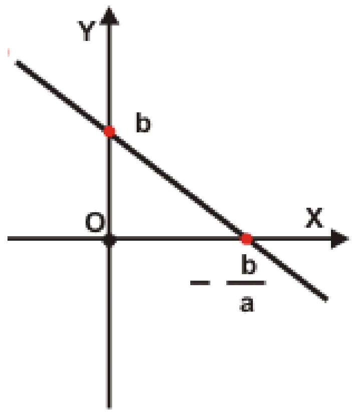
Fonte: Dante (2012, p.85)

Na figura 7, observamos que b > 0 e por isso temos a imagem da função sempre positiva. Também podemos observar que a reta que representa o gráfico dessa função é paralela ao eixo x do plano cartesiano.

2.2.4 ZERO OU RAIZ DA FUNÇÃO AFIM.

O zero de uma função é um número x de seu domínio que possui imagem nula, ou seja, f(x) = 0. Considerando uma função afim f(x) = ax + b e fazendo ax + b = 0, teremos $x = \frac{-b}{a}$, como raiz ou zero da função. Nessa situação estamos considerando $a \neq 0$. Geometricamente o zero da função representa o número no qual a reta corta o eixo das abcissas.

Figura 8 - Zero da função afim



Fonte: Página alfaconnection[5].

[5] Disponível em < http://alfaconnection.net/pag_avsm/fun0203.htm> Acesso em Março de 2015.

Com base no que foi descrito até aqui, podemos dizer que a reta que representativa do gráfico da função afim, sempre passa pelos pontos (0, b) e ($\frac{-b}{a}$, 0), para $a \neq 0$. Esses pontos são os interceptos da reta com os eixos y e x, respectivamente.

2.5 SINAL DA FUNÇÃO AFIM.

De acordo com Iezzi e Murakami (1993) quando estamos trabalhando para verificar qual o sinal da função afim, procuramos resposta para a seguinte indagação: considerando a função a f(x) = ax + b, para quais valores de x tem-se f(x) = 0, f(x) > 0 e f(x) < 0?. Em outras palavras, para estudar o sinal da função é preciso saber para quais valores do domínio a função possui imagens positivas, negativas ou iguais a zero.

Dessa forma, considerando que a raiz da função f(x) = ax + b é $x = \frac{-b}{a}$, iremos verificar quando temos f(x) > 0 (positiva) e f(x) < 0 (negativa).

- ✓ **Considerando a > 0**

$f(x) = ax + b > 0 \leftrightarrow ax > -b \leftrightarrow x > \frac{-b}{a}$

$f(x) = ax + b < 0 \leftrightarrow ax < -b \leftrightarrow x < \frac{-b}{a}$

- ✓ **Considerando a < 0**

$f(x) = ax + b > 0 \leftrightarrow ax > -b \leftrightarrow x < \frac{-b}{a}$

$f(x) = ax + b < 0 \leftrightarrow ax < -b \leftrightarrow x > \frac{-b}{a}$

Nessa parte do nosso trabalho, verificamos alguns pontos que julgamos ser importantes para o estudo da função afim. Os elementos trazidos nessa apresentação irão nos dar subsídios para compreender alguns aspectos referentes à função afim e às atividades propostas pelos livros didáticos que foram analisados em nossa pesquisa.

Trazemos a seguir uma breve revisão de literatura que envolve pesquisas que trabalharam com os conceitos de função e de função afim.

2.3 ALGUMAS PESQUISAS SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO E FUNÇÃO AFIM

Com o objetivo de verificar o que está sendo produzido na área de educação matemática no Brasil e também de embasar a nossa pesquisa, analisamos alguns trabalhos que abordam o conceito de função e também o de função afim. Procuramos identificar nessas pesquisas, as principais dificuldades encontradas pelos alunos em relação à aprendizagem desses dois conceitos.

Antes de abordamos os trabalhos que falam especificamente de nosso objeto de estudo, achamos importante trazer algumas publicações que trabalharam com o conceito de função. Apresentamos essas publicações por acreditar que as dificuldades apontadas pelos pesquisadores que trabalharam com o conceito de função também refletir no processo de ensino e aprendizagem da função afim.

Braga (2009), investigou e avaliou como ocorre o processo de compreensão do conceito de função e percebeu que as dificuldades dos alunos no trabalho com esse conteúdo, em muitos casos, dizem respeito à articulação entre os registros gráfico, tabular e algébrico. Esse entrave também é relatado na pesquisa de Lopes (2003).

Para Braga (2009), as representações de uma função, muitas vezes ficam restritas a apenas uma forma e isso traz dificuldades na aprendizagem desse conteúdo. Na realização de suas atividades, esse pesquisador se apoiou na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval.

Oliveira (1997) também investigou os entraves enfrentados pelos alunos ao fazer a conversão entre as formas de registro gráfico, algébrico e tabular de uma função e também as variações e dependência de grandezas que estavam associadas ao conceito de função. Para essa autora, alguns estudantes não conseguem perceber que a função pode ser representada para além da sua forma algébrica. Oliveira (1997) também enfatizou a importância de um trabalho que tenha como objetivo desenvolver nos estudantes a percepção de que uma função pode ser representada de diversas formas.

Acrescentando a essa discussão, Ardenghi (2008) realizou uma pesquisa sobre os trabalhos realizados no Brasil no período de 1970 a 2005, que envolviam o ensino e a aprendizagem do conceito de função. Essa pesquisa teve como objetivo compreender quais são as dificuldades enfrentadas por alunos e professores que trabalharam com o conceito de função.

Para nos situarmos em relação às dificuldades enfrentadas pelos alunos que foram sujeitos de pesquisa, Ardenghi (2008) elaborou um quadro resumo que apresentamos a seguir.

Quadro 1 - Dificuldades de alunos e professores com o conceito de função. Parte 1

	AUTOR	DIFICULDADES
01	MENDES, Maria Helena Monteiro	Univalência; restrição da manipulação; restrição da quantidade; restrição da continuidade; restrição da unicidade do *input* para um dado *output;* confusão entre as noções de função e equação; não entendimento dos conectivos lógicos; noção de arbitrariedade; pré-requisitos necessários à aprendizagem do conceito de função.
02	SIMÕES, Maria Helena Pinedo	Usar como coeficiente dos monômios o valor absoluto do número; esboçar gráficos com seus ramos terminando na maior ou menor altura obtida na tabela; confusão de representação de pontos no plano cartesiano.
03	SCHWARZ, Osmar	Não dominar a simbologia de representação algébrica de função; confusão entre domínio e contradomínio; função constante não fez parte do repertório dos alunos; dificuldades em passar do quadro algébrico para o geométrico.
04	OLIVEIRA, Nanci de	Os alunos confundem função com equação; incluem noção de continuidade ao conceito de função; muitos não reconhecem a função constante; alguns não compreendem os registros de representação.
05	MACHADO, Airton Carrião	Trabalhar em conjuntos discretos; usar a ideia de proporção para resolver problemas; interpretar problemas na forma de texto
06	RÊGO, Rogéria Gaudêncio do	Manipular valores fracionários nas equações; baixa compreensão e domínio da linguagem algébrica; localização de pontos no sistema de coordenadas; trabalhar com números negativos.
07	ZUFFI, Edna Maura	Utilizar o termo dependência como sinônimo de função; a relação ou correspondência deve ser expressa por uma regra ou lei; ambiguidade na atribuição de significados para as notações das variáveis dependentes e independentes e aos conjuntos domínio e imagem; considerar um “domínio de validade” que atenda a situação do problema; não observar o caso de tratamento de não funcionalidade; apresentar exemplos apenas com expressões algébricas dadas por uma lei de formação.
08	SANTOS FILHO, Constantino Veríssimo dos	A construção de gráficos está condicionada à utilização de tabelas de valores; interface entre a representação algébrica e visual.

Fonte: ARDENGHI (2008, p.62)

Quadro 2 - Dificuldades de alunos e professores com o conceito de função. Parte 2

09	SOUZA, Roberta Nara Sodré de	Conversão de registros gráficos para o algébrico
10	DUBINSKY & HAREL	Restrição de manipulação; restrição de quantidade; restrição de continuidade em relação à representação gráfica da função.
11	SIERPINSKA, Anna	Obstáculo ligado a uma filosofia matemática que não diz respeito a problemas práticos; técnicas computacionais usadas para produzir tabelas de relações numéricas não são válidos como objetos de estudo da matemática; referindo-se às mudanças como fenômenos, focar como as coisas mudam, ignorando o que muda; pensar em termos de equações e desconhecidos a serem extraídos delas; considerar a ordem das variáveis como irrelevante; concepção heterogênea do conceito de número; uma filosofia pitagórica do conceito de número: tudo é número; lei em física e função em matemática não tem nada em comum, pertencem a domínios diferentes de pensamento; proporção é um tipo privilegiado de relação; forte crença no poder de operações formais em expressões algébricas; somente relacionamentos descritíveis por fórmulas analíticas são dignas de serem chamadas de funções; definição é uma descrição de um objeto. A definição não determina o objeto, e sim, o objeto determina a definição; funções são sequências; coordenadas de um ponto são segmentos de retas, não números; o gráfico de uma função é um modelo geométrico de uma relacionamento funcional; as mudanças de uma variável são mudanças no tempo.
12	MARKOVITS, EYLON & BRUCHEIMER	Localizar pré-imagens e imagens nos eixos em representações gráficas: os alunos localizam incorretamente pré-imagens e imagens nos gráficos; identificar imagens e pares (pré-imagem, imagem) para funções dadas na forma algébrica: os alunos não conseguem obter imagens e pares para funções na forma algébrica; distinguir entre o conjunto imagem e o contradomínio: muitas vezes os alunos não distinguem o conjunto imagem do conjunto contradomínio; concepções erradas: toda função é uma função linear na concepção de muitos alunos; com certos tipos de funções: os alunos têm dificuldades com a função constante; causadas por manipulações técnicas: os alunos apresentam dificuldades em que a regra de correspondência contém funções, pois é mais difícil encontrar as pré-imagens, dadas as imagens, do que vice-versa.

FONTE: ARDENGHI (2008, p.62)

As pesquisas que foram levantadas por Ardenghi (2008), também mostraram que, de uma maneira geral, os livros didáticos ainda trazem à noção de função associada a uma linguagem que não é acessível aos alunos. Para tentar minimizar esse impasse, os diversos autores, apontam não só para a necessidade de trabalhar esse conceito através de situações contextualizadas, mas também como uma ferramenta para a resolução de problemas.

Conforme mencionamos anteriormente, também trouxemos no decorrer desse capítulo algumas pesquisas que tratam especificamente sobre a função afim. Dentre os trabalhos publicados, procuramos trazer aqueles que falam um pouco das dificuldades enfrentadas pelos alunos quando eles estavam trabalhando com esse tipo de função.

Dornelas (2007), Delgado (2010) e Ferreira (2013), mostram em suas pesquisas que as dificuldades em fazer a conversão entre os registros de representação de uma função, também estão presentes na aprendizagem de função afim. Para tanto, Dornelas (2007), formulou e aplicou uma sequência didática com momentos baseados na Teoria das Situações Didáticas, que segundo ela propiciou aos alunos situações de aprendizagens com o conceito de função afim. Essa pesquisadora propôs atividades que envolviam a conversão entre os registros de representação em linguagem natural, na forma gráfica, tabular e algébrica.

Dornelas (2007) relata algumas dificuldades enfrentadas pelos alunos, entre elas estão àquelas relacionadas ao registro em linguagem natural. Esse tipo de situação foi proposta em alguns problemas, para que os alunos se desvinculem um pouco da linguagem algébrica. Outra dificuldade relatada por essa pesquisadora consiste na conversão da representação algébrica para a gráfica.

Desta maneira, durante o levantamento que fizemos para desenvolver esse capítulo, verificamos também que os pesquisadores falam de outras limitações enfrentadas pelos estudantes. Postal (2009) propôs aos sujeitos que fizeram parte de sua pesquisa, algumas questões que envolviam a identificação da taxa de variação e do coeficiente linear da função afim. Essa pesquisadora, também trabalhou com situações que envolviam a modelização relativas à função afim.

Para Fonseca (2011), o trabalho com a função afim, para muitos alunos, se reduz a operações, atribuindo valores numéricos à variável independente presente na lei de formação. De acordo com esse pesquisador, os sujeitos se depararam com situações que envolviam a representação de uma situação matemática e não conseguiram compreender que os fenômenos que possuíam um comportamento regular, podem ser generalizados através de uma lei de formação.

Dornelas (2007), Delgado (2010), Ferreira (2013) e Fonseca (2011) também verificaram que os alunos encontravam dificuldades quando precisaram fazer a conversão entre os diversos registros (gráfico, algébrico, tabular e linguagem natural) de representação da função afim.

Vale salientar que algumas dificuldades encontradas nas pesquisas em relação ao conceito de função também estão presentes no trabalho com a função afim. Podemos citar o trabalho de Maciel (2011), que deixa claro que as dificuldades encontradas pelos alunos se referem à generalização de situações que envolviam o conceito de função. Esse mesmo entrave também é encontrado em outros trabalhos que trataram da função afim, como foi visto anteriormente. Nessa abordagem se inserem os estudos de Fonseca (2011), Dornelas (2007), Delgado (2010), Ferreira (2013) e Postal (2009).

Para Dornellas (2007), as dificuldades dos estudantes em generalizar situações que envolvem a função afim, podem estar relacionadas ao fato de o registro numérico ter sido o recurso mais explorado na resolução de problemas durante o percurso da vida escolar dos alunos.

Dornellas (2007) ainda complementa dizendo que vários alunos não conseguem observar o crescimento ou decrescimento da função afim e nem organizar esses dados por meio de uma tabela. Para ela, alguns estudantes, somente conseguiram determinar o comportamento da função afim através da reta que representa o seu gráfico.

Para Delgado (2010), a abstração exigida dos alunos ao lidarem com representações algébricas, é um dos aspectos que contribui para a dificuldade no trabalho com a função afim, já que os estudantes não possuem o hábito de trabalhar com situações que contribuam para desenvolver a capacidade de abstração.

Seja em relação ao conceito geral de função ou de função afim, nas pesquisas que foram citadas no decorrer dessa seção, chamou-nos a atenção a quantidade de trabalhos que citam a análise gráfica como sendo um dos principais entraves encontrados pelos estudantes. É importante deixar claro que analisar o gráfico da função afim se refere à análise e interpretação de informações apresentadas na forma gráfica, como, por exemplo, observar o seu comportamento, identificar pontos onde a reta intercepta os eixos e a determinação de sua lei de formação.

Essa mesma dificuldade também é relatada nas pesquisas de Delgado (2010), Ferreira (2013), e Delgado, Friedmann e Lima (2010), Luz (2010), Cardoso et al (2013) e Magalhães (2009). Dessa forma,

> Em relação à forma gráfica, muitos alunos conseguem fazer a conversão da forma tabular para a gráfica com alguma facilidade, mas o inverso não ocorre da mesma maneira. Eles não conseguem analisar um gráfico de forma satisfatória. Em questões que envolveram interpretação de gráfico, a maioria dos erros ocorreu por não associar as variáveis, derivadas da situação-problema, com os valores representados por cada ponto pertencente à curva, no Plano Cartesiano (DELGADO, FRIEDMANN e LIMA, 2010, p. 8).

Nos trabalhos citados anteriormente, identificamos outras dificuldades associadas ao ensino e aprendizagem de função afim. Essas limitações dizem respeito à: marcação de pontos no plano cartesiano; construção de gráficos somente vinculados a uma tabela; traçado de retas no plano; diferenciação entre as funções afim, constante e linear; marcação de pontos nos quais as ordenadas ou abscissas são nulas; verificação do sinal da função. Algumas dessas limitações estão presentes nos trabalhos de Menezes e Filho (2010).

Para Delgado (2010), o fato de a função permitir ao estudante trabalhar com diversas representações, e também por esse conceito envolver situações que estão em outras áreas do conhecimento, trazem dificuldades extras ao seu entendimento.

Para Andrade (2006), é preciso que os alunos trabalhem com situações que envolvam a resolução de problemas que tenham a função afim como modelo matemático. Esses pesquisadores concordam com Delgado (2010) quando dizem que uma parte dos estudantes não enxerga esse conceito como uma ferramenta que pode ser aplicada em diversos contextos.

Nas pesquisas que foram abordadas anteriormente, verificamos que várias delas abordam questões relativas à conversão entre os registros de representação da função afim. O estudo da conversão entre registros de representação de um objeto matemático foi desenvolvido por Raymond Duval.

Segundo Almouloud (2007), Duval (1995) diz que para um sujeito aprender é necessário levar em consideração o modo de funcionamento do seu sistema cognitivo através da coordenação dos registros de representação, onde deve ser realizada ao menos a conversão de dois registros de um mesmo objeto. Para Duval (2005, p. 22), É a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso [...]”

De acordo com Duval (2005) é importante que existam vários registros de representação de um objeto matemático, assim como a articulação entre esses diversos registros, pois isso é importante para que os estudantes desenvolvam o pensamento matemático. É importante deixar claro que para Duval (2005), há dois tipos de representações semióticas, as conversões e os tratamentos. As conversões dizem respeito à transformação de representações e se caracterizam por mudar de registro mantendo o mesmo objeto. Já os tratamentos seriam transformações de representações, como por exemplo, resolver uma equação ou um sistema de equações.

Nesse contexto, abordando o nosso objeto de estudo que é a função afim, podemos pensar em diversos registros de representação para esse objeto matemático. Esses registros podem ser representados pelas formas gráfica, algébrica, tabular, linguagem natural, entre outras. Assim, de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica, para que o aluno compreenda o conceito de função afim, seria necessário que ele fizesse a conversão entre as diferentes formas de representação desse tipo de função afim.

Para Duval (2005) vários alunos possuem dificuldade quando mudam de uma representação para outra. Segundo Duval (2005, p. 20) “Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido”. Nesse contexto, percebemos que esse pesquisador defende que a conversão entre os registros de representação aconteça nos dois sentidos. Podemos citar como exemplo a construção do gráfico de uma função a partir da forma algébrica. Nesse caso, de acordo com o que defende Duval (2005), seria importante que o professor também representasse a mesma função na forma algébrica, partindo do registro gráfico.

Nas pesquisas que trouxemos ao longo desse capítulo, verificamos que alguns autores, como Maggio, Soares e Nehring (2010) citam as atividades propostas pelos livros didáticos e falam sobre suas limitações e perspectivas.

Com o objetivo de aprofundar um pouco mais a nossa discussão sobre o livro didático, trouxemos a seguir algumas considerações a respeito desse recurso didático.

2.4 O LIVRO DIDÁTICO

Embora exista uma gama de ferramentas que possam ser utilizadas pelo professor, a presença do livro didático (LD) é muito forte no cotidiano escolar. Essa visão é defendida por alguns autores, como Dante (1996, p. 83), para ele “o livro didático passou a ser o principal e, em muitos casos, o único instrumento de apoio ao trabalho docente”.

Delizoicov et al (2002) também vê o livro didático como norteador da prática docente, pois afirma que sendo ou não utilizado pelos alunos, o livro é seguramente a principal referencia de grande parte dos professores. Essa visão também é defendida por Mesquita, Carvalho e Guerra (2010), que enxergam o LD como sendo ainda o principal material de apoio de professores e alunos.

Nesse contexto de influência do LD, Teixeira (2009) diz que,

> Ao estabelecer parte destas condições materiais para o ensino e a aprendizagem nas salas de aula, o livro didático se constitui como elemento da cultura escolar, organizando a seleção de conteúdos, interferindo e guiando as práticas pedagógicas e contribuindo, ao seu modo, para as formas de construção do conhecimento no ambiente escolar (TEIXEIRA, 2009, p. 47).

Podemos perceber que o LD não só influencia, mas muitas vezes orienta a forma de trabalho do professor.

Lajolo (1996) também enxerga o LD como um auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, para essa autora,

> Como sugere o adjetivo *didático,* que qualifica e define um certo tipo de obra, o livro didático é instrumento específico e importantíssimo de ensino e de aprendizagem formal. Muito embora não seja o único material de que professores e alunos vão valer-se no processo de ensino e aprendizagem, ele pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado resultante das atividades escolares (LAJOLO, 1996, p. 04).

Para que o LD passe a ser um importante material de apoio didático, conforme defende Lajolo (1996), é necessário também que o professor perceba a importância de utilizá-lo de forma crítica e consciente.

Câmara dos Santos e Lima (2002) também defendem que o professor deve utilizar o livro de uma forma consciente. Esses pesquisadores acrescentam dizendo que é importante enriquecer com outras fontes as atividades propostas pelos livros didáticos.

Para Carvalho e Lima (2010), o LD possui algumas funções que são importantes para o processo de ensino e aprendizagem. Segundo eles, podemos olhar para a funcionalidade do LD no contexto do aluno ou do professor. Dessa forma, em relação ao trabalho docente, o LD pode auxiliar no planejamento das aulas, pode favorecer uma formação didática pedagógica e também contribuir com a avaliação da aprendizagem dos estudantes. Em relação aos alunos, o LD tem a função de consolidar e integrar os conhecimentos e também contribuir com a formação de competências e habilidades.

Outros autores, como Mantovani (2009), também falam da importância do LD para a prática pedagógica, no que se refere tanto ao professor quanto aos alunos que estão envolvidos nesse processo. Para essa pesquisadora a relevância do livro didático se dá também pelo fato dele fazer uma sistematização dos conteúdos que devem ser trabalhados em sala de aula e também por ser um instrumento de suporte teórico e prático para o aluno.

De acordo com o que foi exposto, percebemos que o LD tem bastante influência nas tarefas escolares, mais especificamente no trabalho de professores e alunos. Para que o LD favoreça a aprendizagem, segundo Carvalho e Lima (2010), é necessário que as atividades propostas estejam de acordo com as necessidades dos estudantes, contribuindo para a atividade coletiva de sala de aula.

A seguir trazemos algumas questões referentes sobre os programas oficiais de ensino no Brasil. É importante deixar claro que os documentos que citamos no próximo capítulo da nossa pesquisa nos deu subsídios para compreender algumas questões relativas ao trabalho com a função afim em sala de aula.

2.5 ORIENTAÇÕES OFICIAIS NO BRASIL

As orientações oficiais no Brasil têm como objetivo principal orientar o trabalho do professor e dar algumas diretrizes sobre questões que norteiam as diversas áreas do conhecimento que fazem parte da educação básica. Nesse capítulo iremos abordar algumas questões que envolvem os Parâmetros Curriculares Nacionais, Orientações Curriculares para o Ensino Médio e Parâmetros da Educação Básica do Estado de Pernambuco.

2.5.1 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais é um documento de referência para o Ensino Fundamental no Brasil. Seu principal objetivo é garantir e orientar os investimentos que são realizados na educação básica, de modo a socializar pesquisas, orientações e discussões, dando apoio à participação dos professores. Podemos dizer que o PCN faz parte do primeiro nível de uma aplicação curricular se tornando uma referência para o Ensino Fundamental no Brasil. O PCN,

> Têm como função subsidiar a elaboração ou a revisão curricular dos Estados e Municípios, dialogando com as propostas e experiências já existentes, incentivando a discussão pedagógica interna das escolas e a elaboração de projetos educativos, assim como servir de material de reflexão para a prática de professores (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1997, p. 29).

O PCN não é um currículo oficial em que as secretarias estaduais e municipais de educação do Brasil têm que seguir, mas é um documento que serve para dar diretrizes à educação básica de uma forma geral, sem necessariamente se sobrepor às decisões regionais no âmbito educacional. Desse modo, o PCN é uma proposta flexível que foi construída de modo a respeitar a diversidade sociocultural das diversas regiões do Brasil.

O PCN traz algumas orientações que norteiam as diversas áreas do conhecimento. Referente à matemática, observamos que esse documento aborda algumas questões que consideramos relevantes para a nossa pesquisa, como por exemplo, o conhecimento matemático e também aprender e ensinar matemática no ensino fundamental.

Verificamos que o PCN de matemática trabalha com alguns objetivos gerais para o ensino fundamental. Alguns desses objetivos são:

- Identificar os conhecimentos relativos à matemática como meios de compreender e transformar o mundo que cerca o estudante.
- Utilizar o conhecimento matemático para fazer observações referentes aos aspectos quantitativos e qualitativos presentes no dia a dia.
- Concatenar elementos que estão presentes em diferentes áreas da matemática com conhecimentos de outras áreas curriculares.

Conforme podemos verificar os objetivos propostos para a matemática do Ensino Fundamental, estabelece que os elementos dessa área do conhecimento devem ser trabalhados de modo a contribuir para que os estudantes tenham subsídios para utilizar a matemática como ferramenta de resolução de situações vivenciadas no dia a dia. Outro aspecto importante que podemos verificar, é que nesses objetivos também verificamos a utilização da matemática em conjunto com outras áreas do conhecimento. Isso mostra que o professor deve ter a preocupação de utilizar os conhecimentos das diversas áreas para resolver problemas do cotidiano.

Em relação ao trabalho com funções, verificamos que a orientação contida no PCN diz que o trabalho com esse conhecimento matemático deve se dar a partir da generalização de padrões e do estudo da variação entre grandezas. Desse modo, percebemos que o trabalho com a função no Ensino Fundamental deve ser realizado utilizando as ideias intuitivas que fazem parte desse importante conceito matemático.

Em síntese, o PCN é um documento que orienta as diretrizes que devem ser seguidas na elaboração de currículos e no trabalho com conteúdos de matemática. não observamos especificamente orientações sobre os elementos de matemática que devem ser trabalhados em cada fase do Ensino Fundamental. No entanto, percebemos que esse documento possui orientações gerais que permite ao professor ter uma ideia não só sobre os elementos de sua disciplina especifica, mas também sobre diversas questões pedagógicas.

2.5.2 ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO

Segundo o Ministério da Educação as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio foram elaboradas através de uma grande discussão com os técnicos dos sistemas estaduais de educação, alunos da rede pública, professores e comunidade acadêmica. O objetivo principal desse documento é cooperar para que exista um diálogo entre as escolas e os professores, sobre a prática docente.

Esse documento preconiza que as situações de ensino e aprendizagem devem desenvolver habilidades que caracterizem o pensamento matemático. Nessa linha, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, deixam claro que o mais importante é qualidade e não a quantidade de assuntos que são trabalhados.

Os conteúdos básicos que são trabalhados na matemática do Ensino Médio estão divididos em quatro blocos. São eles: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade. É importante deixar claro que assim como defende o PCN (1998), esses conteúdos estão divididos em blocos somente por uma questão didática e não para ser trabalhados de forma separada, sem que haja uma articulação entre eles.

É importante deixar claro que trouxemos esse documento para a nossa fundamentação teórica, porque além de ser uma orientação geral sobre os conteúdos de matemática que são trabalhados no Ensino Médio, também traz algumas questões que julgamos relevante para o ensino de funções. Nesse sentido, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, defende que o estudo das funções pode iniciar-se com a relação existente entre diversas grandezas, e cita como exemplo, idade e altura e também a relação entre o círculo e seu raio. Desse modo, percebemos que nesse documento há uma preocupação com a natureza funcional de vários objetos matemáticos.

Essa diretriz para o Ensino Médio, também defende que no trabalho com as funções é apropriado o professor pedir que os alunos expressem, utilizando a linguagem corrente, uma função na forma algébrica. Segundo o documento, esse tipo de trabalho pode facilitar a assimilação do conceito de função pelos estudantes.

Outro ponto que julgamos importante é que as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio também defendem que é importante que o trabalho com as funções prossiga considerando as diversas áreas do conhecimento, pois isso mostra que a função pode ser utilizada em outras áreas do conhecimento.

Em síntese, o que esse documento defende é que os conteúdos de matemática sejam trabalhados de forma articulada com outras áreas do conhecimento, utilizando a matemática não como um conteúdo em si mesmo, mas sim como ferramenta de resolução de problemas do dia a dia.

A seguir abordamos trazemos algumas considerações sobre os Parâmetros da Educação Básica do Estado de Pernambuco.

2.5.3 PARÂMETROS PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA DO ESTADO DE PERNAMBUCO

Os Parâmetros da Educação Básica do Estado de Pernambuco trabalham com expectativas de aprendizagens de diversas disciplinas em cada etapa da educação básica. Esse documento é um recurso auxiliar ao professor, pois contribui não só com as expectativas de aprendizagens dos alunos, mas também com questões referentes à prática de sala de aula.

Esse documento traz orientações que a nosso ver são importantes para o trabalho com os conteúdos de matemática. Os parâmetros se tornam um importante instrumento de acompanhamento pedagógico e nesse contexto, podemos dizer que esse documento tem como objetivo principal contribuir com o trabalho do professor, no que se refere à elaboração, execução e avaliação do processo de ensino.

Nos Parâmetros da Educação Básica, os conteúdos de matemática aparecem separados em cinco blocos. Esses blocos são compostos pelas partes de geometria, estatística e probabilidade, álgebra e funções, grandezas e medidas, números e operações. De acordo com esse documento, essa divisão dos conteúdos em blocos, tem somente o objetivo didático de modo a facilitar a compreensão das expectativas de aprendizagens que devem ser alcançadas pelos alunos.

Em relação ao trabalho com os conteúdos de matemática, verificamos que os parâmetros orientam o professor a trabalhar os blocos de conteúdos de forma articulada, contribuindo para que os estudantes compreendam que os elementos que fazem parte da matemática, são utilizados em consonância para resolver diversos problemas do cotidiano.

A função afim, que é nosso objeto de estudo, está presente no bloco álgebra e funções, e os Parâmetros trazem orientações tanto para o Ensino Fundamental, como para o Ensino Médio. É importante ressaltar que levamos em consideração as orientações contidas nesse documento para analisar e discutir as atividades de função afim propostas pelos livros didáticos que foram analisados ao longo do nosso trabalho.

Os Parâmetros da Educação Básica do Estado de Pernambuco trazem diretrizes importantes para o trabalho com as funções. Esse documento diz que, as atividades que envolvem o estudo das funções devem partir de fenômenos naturais presentes no dia a dia do aluno. Dessa forma, percebemos que há um alinhamento entre o que defende o PCN e as Organizações Curriculares para o Ensino Médio, pois esses documentos também defendem que o conceito de função deve ser trabalhado considerando o contexto dos estudantes.

Na próxima etapa de nosso trabalho, traremos algumas questões referentes à Teoria Antropológica do Didático. Essa Teoria nos deu subsídios para analisar os livros didáticos e também a sequência didática de Dornelas (2007).

2.5.4 PLANO NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO (PNLD)

O PNLD é vinculado ao Ministério da Educação (MEC) e tem como principal objetivo, auxiliar o trabalho dos professores da rede básica de ensino, através da aquisição e distribuição de livros didáticos para as escolas públicas. Além do LD, também são distribuídos obras literárias e complementares, como dicionários de língua portuguesa.

Nesse programa são contemplados, alunos do nível Fundamental, Médio, Educação Infantil, assim como aqueles que fazem parte da Educação de Jovens e Adultos (EJA). O percurso para que o LD chegue até à sala de aula, passa pela adesão das escolas que desejam participar do programa, divulgação de editais, inscrição das editoras, avaliação dos livros, confecção do guia do livro, escolha, pedido, aquisição, produção, análise da quantidade física, distribuição até chegar ao recebimento.

Durante a avaliação que é feita pelo PNLD, alguns critérios são estabelecidos como o que observa se os materiais possuem coerência e adequação teórico-metodológica. Também são avaliadas as propostas didáticas pedagógicas e também se elas apresentam correção e atualização de informações, conceitos e procedimentos. Dessa forma, antes de se apresentar na sala de aula, o LD passa constantemente por avaliações que aferem a sua qualidade.

No caso específico de matemática, foram observados, no PNLD de 2014 para o Ensino Fundamental, se os livros apresentam os conceitos de modo a dar subsídios para a resolução de problemas. Dessa forma, foram reprovados os LD que valorizam apenas o trabalho mecânico com algoritmos e também aqueles que priorizam o trabalho individual em detrimento daquele que é realizado em conjunto.

É importante ressaltar que são enviadas às escolas resenhas sobre as obras que foram aprovadas no PNLD, nelas são abordados pontos positivos e negativos dos LD dentro das respectivas áreas do conhecimento. Nesse momento cabe à escola, junto com seu corpo docente, fazer a escolha do material que se adequa ao seu projeto político pedagógico.

Em relação ao seu funcionamento, o PNLD é realizado em períodos alternados a cada três anos, desse modo a cada ano o FNDE compra e distribui LD para os estudantes que estão regularmente matriculados. Os livros distribuídos podem ser consumíveis ou não, na primeira opção, os materiais que são recebidos pelos alunos, são entregues ao final do ano letivo, para que sejam utilizados por outros estudantes.

Segundo dados do portal do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), foram distribuídos no PNLD de 2014 mais de 31 milhões de livros, onde foram atendidos alunos dos ensinos fundamental e médio. Quando observamos esses números podemos perceber o tamanho e a abrangência desse programa. Vale ressaltar que nessa quantidade mostrada ainda não está inserido os LD que fazem parte da EJA.

Nessa breve exposição, percebemos o longo processo pelo qual passa o livro didático até ele chegar à escola. Na próxima etapa de nosso trabalho, abordamos a principal teoria que norteia essa pesquisa, conforme mostramos ao longo da nossa dissertação, foi a Teoria Antropológica do Didático que nos deu subsídios para fazer a análise dos livros didáticos dos ensinos fundamental e médio.

2.6 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

De acordo com Almouloud (2007), a Teoria Antropológica do Didático (TAD) traz uma importante contribuição para a didática da matemática, porque insere a didática dentro da antropologia e também porque permite o estudo das Organizações Matemáticas e Didáticas que podem ser colocadas em prática.

A TAD permite modelar as práticas sociais em geral e em particular as atividades matemáticas. Segundo Bosch e Chevallard (1999), essa teoria parte de três postulados fundamentais:

1. As práticas institucionais podem ser analisadas de diversas maneiras e pontos de vista por meio de tarefas bem circunscritas que são realizadas nas práticas sociais.
2. A realização de uma tarefa é o resultado da aplicação de uma técnica.
3. A ecologia das tarefas e das técnicas, ou seja, as condições e restrições que permitem ou não a sua produção e utilização no interior das instituições.

Para Bosch e Chevallard (1999, p. 08) a ecologia das tarefas “trata-se de uma restrição institucional mínima para permitir o controle e garantir a eficácia das tarefas, que são geralmente *cooperativas*, supondo a colaboração de vários atores”.

Para Almouloud (2007, p. 111) “a TAD estuda as condições de possibilidade e funcionamento de sistemas didáticos, entendidas como relações entre o sujeito-instituição-saber”. É importante destacar que a TAD não levanta hipóteses específicas sobre aprendizagem, tem como foco o saber, isto é, como ele se insere dentro das diversas instituições.

Chevallard (1997) faz uma abordagem “quase axiomática”[6] no desenvolvimento dessa teoria. Segundo esse autor, alguns conceitos são considerados primitivos dentro da TAD e é a partir deles que outras ideias são desenvolvidas. Desse modo, para Chevallard (2003), os conceitos de *objetos (O), relação pessoal R(X, O), pessoas e instituições (I),* são considerados elementos fundamentais.

[6] Definição de Chevallard (1996, p. 127)

De acordo com Chevallard (2003), *objeto* é uma entidade que pode ser material ou não e que existe pelo menos para um individuo. Do ponto de vista da teoria apresentada os objetos tem uma posição privilegiada, pois na visão de Chevallard (2003, p. 01) “qualquer produto intencional da atividade humana é um objeto”. Nesse sentido podemos dizer que as pessoas e as instituições são tipos particulares de objetos.

Outro conceito primitivo da TAD é o de *relação pessoal* de um individuo (X) com um objeto (O). Essa relação que é indicada por *R(X,O),* é definida como sendo todas as interações existentes entre o individuo e o objeto (CHEVALLARD, 2003). É importante destacar que um objeto existe para um determinado indivíduo a partir do momento que sua relação pessoal com esse objeto não é vazia, isto é, $R(X,O) \neq \emptyset$.

O conceito de pessoa é o terceiro elemento fundamental da TAD. A pessoa é definida como sendo o conjunto formado pelas relações pessoais de um individuo (X) com um objeto (O). Chevallard (2003) diz que ao longo do tempo essas relações pessoais mudam, ou seja, com o passar do tempo, objetos que não existiam para o individuo podem passar a existir, assim como outros objetos também podem deixar de existir.

Vale salientar que os termos individuo e pessoa não são considerados sinônimos, pois para Chevallard (2003) a pessoa (relação pessoal do individuo com o objeto) sofre alterações ao longo do tempo, já o individuo é considerado como invariante.

O conceito de instituição é outro elemento primitivo da TAD. Para Chevallard (2003), uma instituição é um dispositivo social que impõem aos seus sujeitos maneiras próprias de fazer e de pensar. Desse modo, temos várias instituições, como por exemplo os livros didáticos e a sala de aula.

Para Chevallard (1996), as instituições possuem uma relação própria com o objeto, definida por $R_I(O)$. Desse modo, a partir do momento que uma pessoa deseja se inserir numa instituição, é preciso que ela se submeta à relação institucional $R_I(O)$. Quando isso acontece, a pessoa passa a ser sujeito da instituição e a partir do momento que a relação pessoal do individuo com o objeto R(X,O) é alterada, pode-se dizer que houve aprendizagem.

Desse modo, no desenvolvimento da TAD, Chevallard (1996) também define quando o sujeito é adequado ou desadequado dentro de uma instituição,

> Uma pessoa X revela-se um sujeito adequado de I, relativamente a um objeto institucional O, quando a sua relação pessoal R(X,O) é considerada conforme à relação institucional $R_I(O)$. Poderá igualmente revelar-se um sujeito desadequado, incapaz de entrar no contrato institucional C_I e talvez acabe por ser expulso de I. É aqui que engrena um desenvolvimento relativo à avaliação institucional, isto é, relativo aos mecanismos segundo os quais I é levada a se pronunciar, através de alguns dos seus agentes, um veredicto de conformidade (ou de não conformidade) de R(X,O) com $R_I(O)$ (CHEVALLARD, 1996, p. 131).

Nessa linha, podemos destacar que a aprendizagem individual está diretamente relacionada à aprendizagem institucional, o que nos traz uma reflexão sobre o processo de avaliação. Nesse contexto, para Araújo (2009, p. 36) “não se pode entender os fracassos dos indivíduos sem considerar a recusa de conhecer de certas instituições”.

Além disso, é importante frisar que as instituições são didáticas, ou seja, têm a intenção de ensinar alguma coisa para alguém. Nesse aspecto, a intenção didática de uma instituição é definida por Chevallard (1996) como um sistema didático. A escola é um exemplo de sistema didático e, em seu interior os indivíduos ocupam determinadas posições, como a de professor ou de aluno. Segundo Chevallard (1996) para a constituição de um sistema didático é preciso que exista o professor, o aluno e o investimento didático[7].

É importante destacar que para haver um ou vários investimentos didáticos é necessário que os objetos de ensino existam para o aluno. Segundo Chevallard (1996), esse é um dos problemas clássicos do ensino, já que grande parte dos investimentos didáticos que são praticados pela escola acontece sem que os objetos de ensino façam sentido para os estudantes.

A TAD situa as atividades de estudo no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais. Essa teoria tem como premissa o fato de que qualquer atividade humana, que é realizada regularmente, pode ser modelada através da noção de praxeologia (CHEVALLARD, 1998b).

2.6.1 A NOÇÃO DE PRAXEOLOGIA

A palavra praxeologia é composta por dois termos gregos *práxis* e *logos,* que significam prática e razão, respectivamente. Segundo Almouloud (2007) essa noção

[7] De acordo com Chevallard (1996) esse termo é definido como o conjunto de ações que são desenvolvidas para ensinar algo a um individuo.

se refere ao fato de que a prática do homem dentro de uma determinada instituição está sempre acompanhada de um discurso que o justifica e que lhe dá razão.

Para Chevallard (1998b), a noção de praxeologia envolve as noções de tarefa (t) e de tipo de tarefa (T). De acordo com esse pesquisador, na maioria das vezes uma tarefa é expressa por um verbo e nesse caso ele cita alguns exemplos como dividir um número por outro e integrar a função de x. De acordo com esse pesquisador um tipo de tarefa é um objeto relativamente preciso como subir escadas ou calcular o valor de uma função em determinado ponto.

Uma tarefa é realizada por meio de uma técnica (τ), que é justificada racionalmente por uma tecnologia (θ), que por sua vez é justificada e esclarecida através de uma teoria (Θ). Para Bosch e Chevallard (1999, p. 06, tradução nossa), “Essas noções permitem construir modelos das práticas sociais em geral e em particular da atividade matemática”.

Desse modo, uma praxeologia ou organização praxeológica [T, τ, θ, Θ] envolve dois blocos, o prático técnico [T, τ] e o tecnológico teórico [θ, Θ]. O primeiro deles engloba as tarefas e as técnicas e está relacionado ao saber fazer, ou seja, aos tipos de tarefas e de como executá-las. Já o segundo bloco está relacionando ao saber e se insere no nível de justificação das técnicas e das tecnologias. É nesse nível onde acontece a produção de técnicas e tecnologias para a realização de tarefas.

Na base do conceito de praxeologia está a noção de tarefa (t) e de tipos de tarefa (T). Uma tarefa ou um tipo de tarefa é expresso, na maioria das vezes, por um verbo, como por exemplo, abrir uma porta, calcular a raiz de uma equação, esboçar o gráfico de uma função ou calcular o perímetro de um quadrado de lado 2 cm.

Uma tarefa é um objeto bem definido. Assim, conforme abordamos anteriormente, construir o gráfico da função $y = x - 2$ seria uma tarefa. No entanto, se escrevemos somente construir, ou seja, apenas o verbo que expressa a ação, a tarefa não estaria bem delimitada, nesse caso teríamos um gênero de tarefa.

Segundo Chevallard (1998b), um determinado gênero de tarefa pode representar tarefas distintas ao longo de um período. Esse autor cita como exemplo o gênero de tarefa calcular, que segundo ele está relacionado a vários tipos de tarefas como calcular o valor numérico de uma função ou o valor de uma integral definida.

Em relação às tarefas, Chevallard (1998b), introduz na teorização sobre a TAD a noção de subtipo de tarefa e traz esse conceito de uma forma resumida. Foi no trabalho de Araújo (2009) que encontramos essa noção um pouco mais desenvolvida e isso nos deu subsídios para utilizarmos a noção de subtipo de tarefa em nossa pesquisa.

Conforme abordamos anteriormente, uma técnica (τ) é uma maneira própria de realizar uma tarefa (t). Para Chevallard (1998b), existem diversos tipos de técnica que não precisam necessariamente ser de natureza algorítmica. Esse autor cita como exemplo a técnica que está associada aos tipos de tarefas “pintar uma paisagem” ou “começar uma família”, em que claramente não há a necessidade da utilização de um algoritmo.

Além disso, uma mesma tarefa (t) pode ser realizada por meio de técnicas (τ) distintas. Por exemplo, consideremos o caso onde é pedido para um aluno calcular as raízes de uma equação do segundo grau. Nesse contexto, a técnica (τ), associada a essa tarefa (t), pode ser realizada numa instituição (I) substituindo os coeficientes da equação na fórmula de Bháskara e em outra instituição (I’), essa mesma tarefa, pode ser executada utilizando-se o método de completar quadrados. Assim, de acordo com Chevallard (1998b), sobre um determinado tipo de tarefa (T), geralmente existe uma única técnica (τ), ou um conjunto de técnicas que são institucionalmente reconhecidas.

Chevallard (1998b) faz outras observações importantes sobre o uso das técnicas. Para esse pesquisador uma determinada técnica (τ) pode não dar conta de resolver determinadas tarefas, sendo necessário o desenvolvimento de técnicas mais sofisticadas e, consequentemente, de novas.

A tecnologia (θ) é definida por Chevallard (1998b), como uma maneira de justificar racionalmente uma técnica (τ) que, permite realizar determinadas tarefas. Sua finalidade é contribuir para que a técnica funcione adequadamente e também explicar porque a técnica é realizada de uma determinada forma.

Nessa linha, a tecnologia ainda possui um terceiro objetivo,

> [...] uma terceira função corresponde a um emprego mais atual do termo tecnologia: função de produção de técnicas. Dessa forma, existem as tecnologias potenciais a espera de técnicas, que não são ainda tecnologia de nenhuma ou de poucas técnicas. A este respeito, destacamos o fenômeno da subutilização das tecnologias disponíveis, tanto do ponto de vista da justificação ou explicação da produção (CHEVALLARD, 1998b, p. 04, tradução nossa).

Chevallard (1998b), diz que o discurso que justifica a técnica, pode ser considerado racional ou irracional dependendo do meio institucional. Para Andrade (2013) essas diferenças devem ser levadas em consideração durante a análise de livros didáticos, pois cada autor pode apresentar uma técnica, que a seu ver, é a mais adequada e isso pode gerar divergências em relação às outras publicações.

O próximo elemento que compõe a praxeologia é a teoria (Θ) que serve para esclarecer uma tecnologia (θ). Para Chevallard (1998b), o discurso tecnológico pode exigir de maneira mais ou menos explícita a sua justificação em um nível superior que consiste em justificar, explicar e produzir. Poderíamos pensar que a utilização de elementos praxeológicos poderiam progredir indefinidamente, mas as tarefas, técnicas e tecnologias geralmente já dão conta de analisar uma atividade.

Chevallard (1998b) classifica as praxeologias em quatro tipos, pontual, local, regional e global. Esse pesquisador destaca que numa *praxeologia pontual* $[T, \tau, \theta, \Theta]$ as técnicas, tecnologias e teorias são organizadas em torno de um tipo de tarefa, já na *praxeologia local* $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$ os seus elementos estão associados a um tipo de tecnologia. Uma praxeologia é dita regional $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$ quando é desenvolvida em torno de uma teoria e quando a organização praxeológica resulta da agregação de várias teorias é chamada de praxeologia global $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k]$.

Para deixar mais claro a classificação das organizações praxeológicas, trazemos um exemplo de Bosch e Chevallard (1999),

> Se considerarmos o ensino da matemática em nível do colégio, na França, podemos falar de uma organização praxeológica *pontual* em torno da resolução do tipo de problemas de proporcionalidade – organização que virá responder a questão: Como resolver um problema desse tipo? – de uma organização *local* em torno da resolução de diferentes tipos de problemas de proporcionalidade, isto é, do *tema* proporcionalidade, em fim de uma organização *regional* em torno, por exemplo, da noção de função numérica, que corresponde a um dos *setores* ensinados em nível do secundário (BOSCH e CHEVALLARD, ano, p. 09).

Na classificação uma praxeologia local está associada a um tipo de tecnologia, mas também essa organização praxeológica pode surgir a partir da agregação de várias organizações praxeológicas pontuais, conforme podemos verificar na citação anterior de Bosch e Chevallard (1999).

Para deixar mais claro, podemos dizer que uma praxeologia pontual $[T, \tau, \theta, \Theta]$ é desenvolvida em torno de um único tipo de tarefa, como classificar a função afim em crescente ou decrescente.

Numa praxeologia local $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$ temos a agregação de várias organizações pontuais e no trabalho delas fica em evidencia a utilização da tecnologia. Podemos citar como exemplo a resolução de vários tipos de tarefas que envolvem a classificação de uma função afim em crescente ou decrescente.

Para que tenhamos uma praxeologia regional $[T_i, \tau_i, \theta_i, \Theta]$ é necessário que haja um agrupamento de várias praxeologias locais em torno de uma teoria. Como, por exemplo, o estudo das funções crescentes e decrescentes.

2.6.1.1 PRAXEOLOGIA MATEMÁTICA

Uma praxeologia matemática ou organização matemática diz respeito à realidade matemática que se pode construir para desenvolver um tema de estudo. Para Chevallard (1997), essa organização se situa em torno de tarefas matemáticas (t), que exigem a criação de técnicas (τ) matemáticas justificadas por tecnologias (θ) também matemáticas que se desenvolveram em torno de uma teoria (Θ) de ordem matemática.

Nessa discussão, Chevallard (1997) diz que a partir dos programas oficiais de ensino, a primeira tarefa do professor consiste em determinar as organizações matemáticas, citando o conteúdo a estudar, em torno das tarefas matemáticas e a partir de então, desenvolver componentes técnicos, tecnológicos e teóricos.

Chevallard (1998b) define alguns critérios para analisar os tipos de tarefas, técnicas e tecnologias que estão presentes numa organização matemática. Nesse contexto, no trabalho com a realidade que pode ser praticada em relação a determinado tema, o professor deve levar em consideração os seguintes critérios para avaliar os tipos de tarefas:

- ✓ **Critério de identificação**: as tarefas são claramente apresentadas? São bem identificadas?
- ✓ **Critério das razões de ser**: quais as razões de ser dos tipos de tarefa que são explicitadas? Esses tipos de tarefas aparecem com ou sem motivos válidos?
- ✓ **Critério de pertinência**: os tipos de tarefas consideradas representam as situações matemáticas que são comumente encontradas? São pertinentes, considerando as necessidades dos alunos em relação à matemática? Ou aparecem isolados sem conexão real com o resto da atividade?

Nessa perspectiva, Chevallard (1998b) enfatiza que são assumidos os mesmos critérios descritos anteriormente para avaliar as técnicas presentes numa organização matemática e desse modo o professor deve buscar respostas para as seguintes indagações: as técnicas são somente esboçadas ou efetivamente elaboras? São fáceis de utilizar? São indispensáveis para o cumprimento das tarefas que são propostas? Tem confiabilidade considerando suas condições de utilização na realização das tarefas que são propostas?

Ainda segundo Chevallard (1998b), as observações que foram feitas anteriormente para o bloco prático técnico (saber), também podem ser realizadas para o bloco tecnológico-teórico (saber fazer). Segundo esse pesquisador, a avaliação de uma tecnologia deve partir das seguintes perguntas:

- ✓ Dado um enunciado, seu problema de justificação está somente posto ou é considerado como sendo pertinente, natural e bem conhecido?
- ✓ As justificativas que são utilizadas estão próximas daquelas que são válidas matematicamente?
- ✓ São adequadas considerando o problema matemático?
- ✓ Os argumentos utilizados para propor a tecnologia são válidos cientificamente? Essa tecnologia permite produzir novas técnicas de modo a resolver outras tarefas?

Conforme abordamos em nosso trabalho, a TAD tem como objetivo principal estudar as condições de possibilidade e funcionamento das relações existentes entre o sujeito, a instituição e o saber. Nesse sentido, para compreender algumas questões mais específicas em relação à transformação pela qual passa um conteúdo até ele chegar à sala de aula para ser ensinado pelo professor, trazemos a seguir a noção de Transposição Didática.

2.7 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

A noção de Transposição Didática foi desenvolvida por Yves Chevallard ao se preocupar com as transformações por que se passam o saber desde o momento em que é produzido nas academias, por exemplo, até ser ensinado numa instituição escolar.

Para Chevallard, (1998) é importante estudar as transformações por que passam o saber sábio, que é produzido pelas academias, e o saber escolarizado, uma vez que o ensino de determinado saber, muitas vezes, exige que este passe por certas adaptações. A partir do momento que um saber é designado como um saber a ensinar, ele sofre algumas deformações, para ocupar um lugar entre os objetos de ensino. Para Chevallard (1998a), o trabalho que transforma um objeto a ensinar em um objeto de ensino, é chamado de Transposição Didática.

O conceito de transposição não engloba somente o caminho percorrido pelo saber acadêmico até se tornar um saber ensinável na escola, pois esse fenômeno também se remete à distância obrigatória que separa esses dois tipos de saber (CHEVALLARD, 1998a).

Conforme aborda Chevallard (1998a), há dois tipos de Transposição Didática, uma é chamada de stricto senso e a outra de lato senso. A Primeira se refere à transformação de um conteúdo de determinado saber numa versão didática. Já a segunda, se refere ao estudo científico do processo de transposição. Pais (2002) complementa dizendo que na transposição didática stricto senso a evolução das ideias é analisada em relação a um determinado conceito, já na transposição didática lato senso a análise acontece num contexto mais abrangente, ou seja, não se refere somente a uma noção particular.

Nesse contexto, quando nos referirmos ao saber, é importante deixar claro que estamos nos referindo ao saber institucional produzido pelas academias. De acordo com D'Amore (2007, p.222) "trata-se de um saber da pesquisa matemática, aquele histórico, acadêmico". Pais (2002), diz que esse saber é chamado de saber científico e é desenvolvido nos institutos de pesquisas e que não está necessariamente vinculado ao ensino básico.

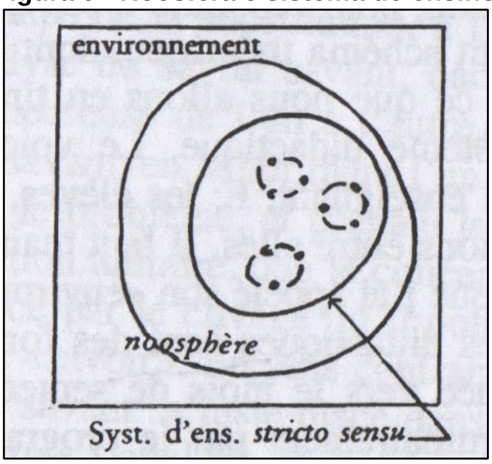
Dessa forma, quando Chevallard (1998a), fala em "saber sábio" entendemos que ele está se referindo ao saber científico. É importante destacar, conforme mostra Pais (2002), que o conceito de transposição e o saber científico estão interligados. Para esse pesquisador, o saber escolar, não é codificado e não deve ser ensinado como é o saber científico, pois a formalização precipitada através de uma linguagem carregada pode trazer obstáculos à aprendizagem do saber. Nesse contexto, enquanto o saber científico é apresentado através de artigos, teses, livros e relatórios; o saber escolar é apresentado através de livros didáticos, programas e de outros tipos de materiais.

Para Chevallard (1998a), existem os saberes que são mais voltados para a sala de aula, nesse contexto estão o saber a ensinar e o saber que é realmente ensinado pelo professor. Em síntese, o saber a ensinar é representado pelos conteúdos que fazem parte do currículo escolar. Já o saber ensinado é aquele que está no planejamento do professor, que é trabalhado com os alunos e não necessariamente coincide com os objetivos que foram descritos nos programas de ensino.

Sabendo-se que o saber escolar sofre influencias externas até ser trabalhado em sala de aula, podemos dizer que a transposição didática não é realizada somente pelo professor. Nesse sentido, segundo Chevallard (1998a), existe um meio que é o centro operacional do processo de transposição e que é responsável pela elaboração do texto do saber, esse meio é definido como NOOSFERA.

A figura a seguir, retirada de Chevallard (1991) mostra uma ilustração sobre a noosfera, o sistema de ensino e seu entorno.

Figura 9 - Noosfera e sistema de ensino



Fonte: CHEVALLARD (1991, p.24)

A noosfera é composta pelas pessoas que elaboram os programas, livros didáticos, os currículos, entre outros como, por exemplo, políticos, professores, os autores de livros, os didatas, o governo, etc. Desse modo,

> Tais “programas, currículos, livros didáticos” aparecem, então, como instrumentos reguladores, no sentido de que eles vão normatizar o que deve ser ensinado na escola, o *saber a ensinar*, consolidando uma primeira etapa da transposição didática e caracterizando a transposição didática externa (BRITO MENEZES, p. 76).

Assim, podemos dizer que o professor que recebe o LD e os programas resultantes da transposição didática, não necessariamente participa do processo de transposição didática externa, já que na elaboração dos materiais citados acima, outros agentes do sistema de ensino estão atuando.

De acordo com Chevallard (1998a), é nesse meio que é produzido todo o conflito entre sistema e entorno. Para esse autor, a noosfera tem um importante papel de atuação, pois deve buscar a organização para um “bom ensino” e definir estratégias de combate às dificuldades de aprendizagem.

Para Chevallard (1998a), quando os programas são preparados e adquirem força de lei, inicia-se o trabalho da transposição didática interna. Essa etapa da transposição acontece no interior da sala de aula e os sujeitos envolvidos são os professores e os alunos. Para Brito Menezes (2006), é nesse momento que acontece a fase final da transposição didática sofrida pelo saber científico.

O caminho percorrido pelo saber até ele se tornar uma versão didática faz com que alguns elementos que estavam presentes em sua forma original, sejam suprimidos. Isso acontece porque o saber científico é diferente do saber escolar, mas embora exista essa diferença, Chevallard (1998a) diz que o saber escolar não pode ser descaracterizado, isto é, afastado de suas origens.

Com a noção de Transposição Didática, percebemos algumas questões importantes que permeiam os livros didáticos. A seguir, trazemos algumas considerações sobre o registro de representação semiótica.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

Conforme tratamos anteriormente, o objetivo geral do nosso trabalho é analisar a abordagem de função afim realizada por livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio. Para alcançar o objetivo geral proposto, definimos cinco objetivos específicos: Identificar as principais dificuldades dos alunos apontadas nas pesquisas que trabalharam com o conceito de função afim; Verificar se os livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio aprovados no PNLD 2014/2015 trazem tarefas que envolvem as dificuldades apontadas pelas pesquisas; caracterizar as Organizações Matemáticas presentes nas abordagens de função afim realizadas em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio aprovados no PNLD 2014/2015; caracterizar e analisar as Organizações Matemáticas presentes na sequência didática desenvolvida por Dornelas (2007); analisar em que medida as organizações matemáticas existentes nos livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio aprovados no PNLD 2014/2015 estão em sintonia com a organização matemática presente na sequência didática desenvolvida por Dornelas (2007).

Dividimos a nossa análise em cinco etapas e em cada uma delas procuramos contemplar cada um dos objetivos específicos. As etapas de análise são: caracterização dos livros didáticos e da sequência didática de Dornelas (2007); análise dos livros didáticos em relação às dificuldades que envolvem a função afim; análise praxeológica dos livros didáticos; análise praxeológica da sequência didática de Dornelas (2007); comparação das organizações matemáticas dos livros didáticos com a da sequência didática de Dornelas (2007).

Para desenvolver a primeira etapa de análise, caracterizamos os quatro livros didáticos que foram utilizados para fazer a análise praxeológica. Nessa etapa levamos em consideração o total de páginas, tirando as que são dedicadas às respostas dos exercícios propostos, referências bibliográficas e ao manual do professor. Com essa análise verificamos como a função afim está inserida em cada obra analisada.

Em relação à caracterização que realizamos na pesquisa de Dornelas (2007), trouxemos um breve resumo, onde além das atividades propostas na pesquisa, também consta algumas informações gerais que contextualiza esse trabalho. Com isso, tivemos como objetivo mostrar alguns aspectos que consideramos relevantes na pesquisa de Dornelas (2007).

Na segunda etapa de análise, fizemos um levantamento de pesquisas que trabalharam com a função afim. Essa busca foi realizada no banco de dissertações e teses da CAPES, na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), no site do Centro de Estudos, Memória e Pesquisa em Educação Matemática (CEMPEM), no endereço eletrônico de algumas universidades públicas e privadas, assim como em alguns eventos como o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM – 2007/2010/2013) e o Simpósio Internacional de Educação Matemática (SIPEM – 2012/2009/2006).

Para analisar as pesquisas, consideramos as dificuldades que foram observadas por pesquisadores que trabalharam com a função afim. Essas dificuldades foram identificadas nos estudantes que foram sujeitos das pesquisas. Nesse contexto, encontramos outros trabalhos que abordaram o conceito de função afim, mas para a nossa dissertação, consideramos somente as pesquisas que deixavam claro quais eram as dificuldades dos alunos.

No quadro 3, temos um resumo das dificuldades que foram identificadas em cada uma das pesquisas que analisamos.

Quadro 3 - Dificuldades encontradas nas pesquisas sobre a aprendizagem de função afim.

Pesquisa	Autor (ano)	Dificuldades identificadas
Dissertação	Braga (2009)	1. Analisar o gráfico. 2. Localizar pontos nos eixos cartesianos.
Artigo	Cardoso et al (2013)	1. Analisar o gráfico 2. Localizar pontos nos eixos cartesianos.
Dissertação	Delgado (2010)	1. Analisar o gráfico. 2. Converter do registro algébrico para o gráfico. 3. Converter do registro algébrico para a natural. 4. Converter do registro algébrico para o tabular. 5. Generalizar resultados. 6. Manipular a expressão algébrica da função.
Dissertação	Filho (2011)	1. Analisar o gráfico 2. Localizar pontos nos eixos cartesianos.
Dissertação	Dornelas (2007)	1. Converter do registro natural para o tabular. 2. Estabelecer relações de dependência entre as variáveis. 3. Generalizar resultados. 4. Localizar pontos nos eixos cartesianos. 5. Observar o crescimento ou decrescimento da função a partir da relação entre o domínio e imagem da função.
Dissertação	Fonseca (2011)	1. Converter do registro natural para tabular. 2. Converter do registro numérico para a natural. 3. Generalizar resultados 4. Estabelecer relações de dependência entre as variáveis.
Dissertação	Lima (2013)	1. Analisar o gráfico 2. Construção de gráficos
Dissertação	Luz (2010)	1. Generalizar resultados.
Artigo	Menezes e Filho (2010)	1. Analisar o gráfico 2. Localizar pontos nos eixos cartesianos.
Dissertação	Postal (2009)	1. Generalizar resultados 2. Identificar a taxa de variação da função. 3. Identificar o domínio e a imagem.
Dissertação	Schonardie (2011)	1. Analisar o gráfico 2. Construção de gráficos 3. Generalizar resultados

Fonte: elaborado pelo autor da pesquisa.

É importante deixar claro que todas as pesquisas que trouxemos nos quadros três e quatro, trabalharam com a função afim nos Ensinos Fundamental ou Médio. Conforme podemos verificar temos um total de onze pesquisas, sendo dois artigos e nove dissertações.

A seguir apresentamos o quadro quatro, onde temos uma codificação das dificuldades apontadas pelas pesquisas. Vale ressaltar que fizemos esse quadro para identificar cada uma das dificuldades ao longo do nosso trabalho.

Quadro 4 - Codificação das dificuldades apontadas nas pesquisas.

Codificação	Dificuldade
D1	Analisar o gráfico.
D2	Construção de gráficos.
D3	Converter do registro algébrico para o gráfico.
D4	Converter do registro algébrico para a natural.
D5	Converter do registro algébrico para tabular.
D6	Generalizar resultados
D7	Identificar o domínio e a imagem.
D8	Identificar da taxa de variação da função.
D9	Localizar pontos nos eixos cartesianos.
D10	Estabelecer relações de dependência entre as variáveis.
D11	Converter do registro natural para o tabular.
D12	Observar o crescimento ou decrescimento da função a partir da relação entre o domínio e imagem da função.
D13	Manipular a expressão algébrica da função.

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa.

Na identificação das dificuldades apresentadas no quadro anterior, é importante deixar claro que não utilizamos as mesmas palavras descritas pelos pesquisadores. Podemos citar como exemplo a dificuldade em construir uma tabela a partir da lei de formação da função afim, assim descrita por Delgado (2010). Nesse caso, inferimos que essa dificuldade se enquadra na conversão do registro algébrico para tabular (D5). Escrevemos de outra forma porque constatamos que vários pesquisadores apesar de citarem o mesmo tipo de dificuldade, descrevem de formas diferentes.

Outra consideração importante em relação ao quadro anterior é que apesar das dificuldades D2 e D3 envolvem a forma gráfica da função afim, elas representam dificuldades distintas. Na dificuldade D2 consideramos todos aqueles casos que não envolviam a construção de gráficos a partir da fórmula que representa a função afim.

Também é importante destacar que a dificuldades D1 envolve a análise de informações sobre a função afim que está representada na forma gráfica. Essas informações podem ser identificar a raiz da função, observar se a função é crescente ou decrescente; etc.

Conforme já destacamos, analisamos treze livros didáticos para identificar se cada uma dessas obras trazem atividades que envolvem as dificuldades trazidas nas pesquisas que trabalharam com a função afim. Vale ressaltar que estamos fazendo esse paralelo porque acreditamos ser importante saber se as atividades propostas pelos livros estão de acordo com o que é apontado nas pesquisas.

Nesse sentido, apresentamos a seguir o quadro cinco, onde trazemos os livros didáticos que foram analisados e também a codificação que realizamos para identifica-los ao longo do nosso trabalho.

Quadro 5 - Identificação dos livros didáticos

Autor (ano)	**Título do Livro**	**Nível de escolaridade**	**Codificação**
Luiz Roberto Dante (2012)	Projeto Teláris	9º ano	LD1
Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos (2012)	Praticando matemática	9º ano	LD2
Luiz Roberto Dante (2013)	Matemática Contexto e Aplicações	1º ano	LD3
Joamir Souza (2013)	Novo Olhar Matemática	1º ano	LD4
Alceu dos Santos Mazzieiro e Paulo Antônio Fonseca Machado (2012)	Descobrindo e aplicando a matemática	9º ano	LD5
Marília Centurión e José Jakubovic (2012)	Matemática teoria e contexto	9º ano	LD6
Edwaldo Roque Bianchini (2011)	Matemática	9º ano	LD7
Dulce Satiko Onaga e Iracema Mori (2012)	Matemática ideias e desafios	9º ano	LD8
Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro (2012)	Vontade de Saber Matemática	9º ano	LD9
Obra coletiva desenvolvida pela editora Moderna (2013)	Conexões com a matemática	1º ano	LD10
Manoel Paiva (2013)	Matemática	1º ano	LD11
Organizado pela editora moderna (2010)	Projeto Araribá	9º ano	LD12
Antonio Lopes (Bigode) (2012)	Projeto Velear	9º ano	LD13

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa.

Em relação à escolha dos livros didáticos para nossa análise, utilizamos nove livros dos dez que foram aprovados no PNLD 2014, por falta de acesso a um deles. O mesmo aconteceu com os livros do 1º ano do Ensino Médio, pois analisamos somente quatro dos seis livros que foram aprovados.

Nessa etapa de análise também fizemos um quadro resumo no qual mostramos se cada um dos livros didáticos aborda ou não as dificuldades que são trazidas nas pesquisas. Esse quadro serviu para mostrar um panorama geral sobre a presença ou ausência das dificuldades nos livros que foram aprovados pelo PNLD 2014/2015 e também para facilitar a nossa discussão.

A escolha pelo 9º ano do Ensino Fundamental se deu pelo fato do conteúdo função afim, ser introduzido oficialmente nessa etapa do ensino básico e também porque é nesse ano onde os alunos trabalham com o primeiro modelo formal de uma função. Escolhemos analisar livros do 1º ano do Ensino Médio, porque acreditamos que as dúvidas que os alunos têm quando estão trabalhando com a função afim no 9º ano do ensino fundamental, podem acompanha-los também no ensino médio.

Na terceira etapa de análise, utilizamos a noção de praxeologia para analisar dois livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental (LD1 e LD2), dois do 1º ano do Ensino Médio (LD3 e LD4) e também as atividades propostas na sequência didática de Dornelas (2007). Nossa escolha por LD1 se deu pelo fato dele ter sido o livro adotado nas escolas em que sou professor de matemática e também porque ele foi um dos mais distribuídos, de acordo com dados do PNLD 2014. A opção pelos livros LD2, LD3 e LD4, se deu por serem os livros mais distribuídos na rede pública de ensino, segundo o PNLD 2014 e também de 2015.

Para caracterizar as Organizações Matemáticas presentes nos livros, identificamos os tipos e subtipos de tarefas, as técnicas utilizadas e também possíveis tecnologias associadas às técnicas. Também elaboramos alguns quadros e tabelas com o objetivo de fazer uma síntese dos elementos praxeológicos presentes nos livros didáticos. Elaboramos ainda alguns quadros, nos quais consta a frequência dos subtipos de tarefa e das técnicas presentes nos livros.

Criamos uma codificação para É importante deixar claro que fizemos uma classificação de modo a relacionar os subtipos com os tipos de tarefa. Podemos citar como exemplo o tipo de tarefa T_3, e o subtipo st3_1. Nesse contexto, o primeiro número indica que temos um subtipo de tarefa relativo ao tipo de tarefa T_3 e o segundo número, representa a classificação do subtipo de tarefa. Assim st3_1 indica o primeiro subtipo de tarefa associado ao terceiro tipo de tarefa.

Em relação à identificação dos outros elementos que compõem a praxeologia, também utilizamos o mesmo critério de classificação. Assim, associado ao tipo de tarefa st2_1, tem-se a técnica τ_{2_1} e, caso exista, a tecnologia que justifica essa técnica seria θ_{2_1}. Considerando esse mesmo exemplo, se houver mais de uma técnica que seja utilizada para resolver a tarefa proposta, representamos as mesmas da seguinte forma: τ_{2_1}, τ_{2_11}, τ_{2_111} e assim sucessivamente. Também iremos utilizar essa nomenclatura caso exista mais de uma tecnologia que justifique uma mesma técnica.

Na quarta etapa de nosso trabalho fizemos uma análise praxeológica da sequência didática de Dornelas (2007) e para classificar os elementos que fazem parte da praxeologia matemática, utilizamos os mesmos critérios adotados na análise dos livros didáticos.

Na quinta etapa de nossa análise, partimos das caracterizações realizadas nas duas etapas anteriores e comparamos as Organizações Matemáticas dos livros didáticos com e as que foram identificadas na sequência didática de Dornelas (2007). Com isso chegamos a algumas conclusões importantes que serão descritas posteriormente.

Conforme destacamos anteriormente, escolhemos o trabalho de Dornelas (2007) para fazer uma análise praxeológica. Nessa análise, verificamos quais foram os tipos e subtipos de tarefas propostos pela pesquisadora bem como as técnicas de resolução utilizadas pelos estudantes.

É importante deixar claro que optamos por fazer a análise praxeológica da sequência didática de Dornelas (2007) e comparar com as que estão presentes nos livros didáticos, porque os tipos de tarefa propostos por essa pesquisadora envolvem diversas dificuldades que foram apontadas por pesquisadores que trabalharam com a função afim.

Outros motivos também nos levaram a trabalhar com a sequência didática de Dornelas (2007), como o fato das atividades propostas envolverem elementos que os Parâmetros da Educação Básica do Estado de Pernambuco (2012), os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) e as orientações curriculares nacionais (2006), defendem como sendo importantes para a aprendizagem do conceito de função. Outro ponto importante, é que os tipos de tarefas propostos por Dornelas (2007) são vistos por alguns pesquisadores, como sendo importantes para o aprendizado das funções.

4 RESULTADOS

Apresentamos nesse capítulo os resultados da nossa pesquisa e conforme já destacamos, a nossa análise foi dividida em cinco etapas. A seguir temos os resultados da primeira etapa.

4.1 ETAPA 1: CARACTERIZAÇÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS E DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE DORNELAS (2007)

Em nossa pesquisa, analisamos treze livros didáticos para descobrir se as atividades propostas por eles abordam as dificuldades que são apontadas por algumas pesquisas que trabalharam com a função afim. Para aprofundar a nossa análise, fizemos uma análise praxeológica de quatro livros didáticos, dois do 9º ano do Ensino Fundamental que foram aprovados no PNLD 2014 e dois do 1º ano do Ensino Médio que foram aprovados no PNLD 2015.

É importante destacar que a nossa análise foi realizada no livro do professor, pois além deles conterem as resoluções dos exercícios propostos, eles também têm indicações de técnicas utilizadas para a realização das tarefas. Portanto, na identificação das técnicas, consideramos tanto os capítulos específicos de função afim como também o manual do professor.

Observamos também nesses livros, que a função afim aparece em outros capítulos, mas para o nosso trabalho nos detemos à parte que traz essa função como objeto de estudo e não como ferramenta.

O LD1 tem um total de 312 páginas, onde estão distribuídos nove capítulos. O terceiro, que é intitulado *Explorando a ideia de função*, traz um total de 36 páginas referentes a esse tema. Na abordagem que faz em seu livro, o autor inicia o capítulo com algumas questões que envolvem as ideias intuitivas de função e elas retratam situações do dia a dia. No decorrer do capítulo de funções há um total de 64 exercícios que são distribuídos entre as ideias iniciais de função, função afim e função quadrática.

A função afim somente aparece na seção 3, onde é abordada com um total de oito páginas. Nessa análise, pudemos perceber que o autor de LD1, dá um enfoque maior às ideias intuitivas que formam o conceito de função, para posteriormente abordar os modelos específicos, que são as funções, afim e quadrática. Nessa seção existem quarenta exercícios propostos e três respondidos que são distribuídos em três partes, são elas: o conceito de função afim; gráfico de uma função afim e caso particular de função afim.

No final do capítulo há uma seção intitulada de *outros contextos,* onde estão presentes mais três questões que envolvem a função afim, em síntese, LD1 traz um total de 46 exercícios sobre esse tipo de função.

Em relação à LD2, o autor traz todo o conteúdo de matemática do 9º ano em dez unidades que compõem um total de 258 páginas. Nessa abordagem, as funções aparecem na unidade quatro, que é composta por cinco capítulos e, diferentemente de LD1, verificamos que não existe um capítulo específico sobre função afim. Esse tipo de função é abordado ao longo dos capítulos sem que haja uma denominação específica para esse tipo de função.

No LD2, o estudo das funções está distribuído em trinta e oito páginas com um total de oitenta e oito exercícios propostos. Nessa quantidade estão incluídos os exercícios que estão presentes no final da seção e que são dedicados à auto avaliação. Nesse caso estão inseridos 18 exercícios sobre funções.

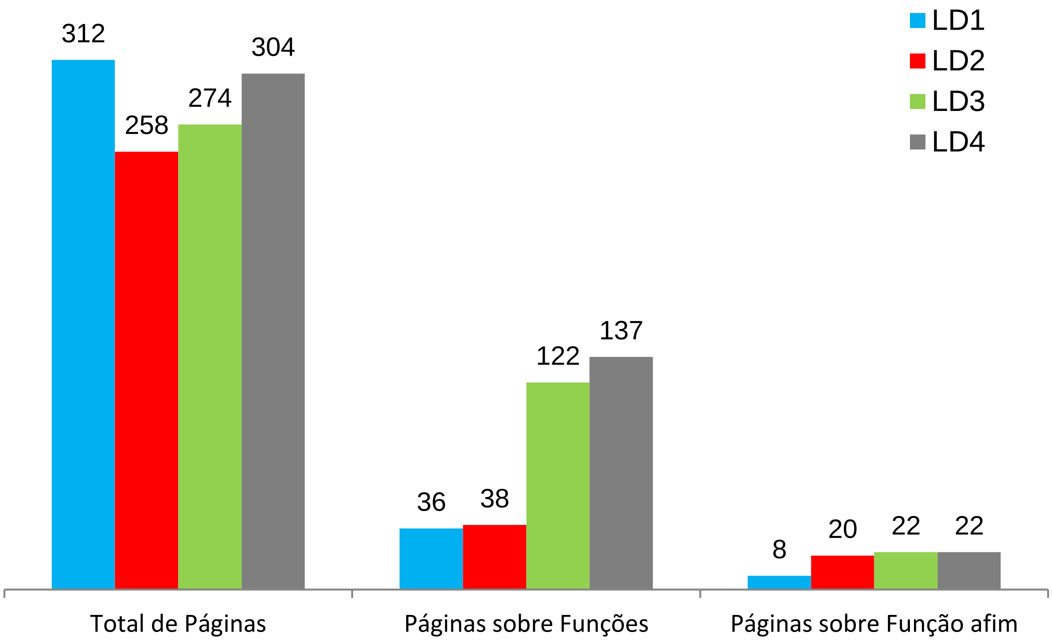
Em relação à função afim, verificamos que há um total de quarenta exercícios propostos e sete exercícios resolvidos sobre esse tipo de função. Observamos também que há um total de vinte páginas que abordam questões sobre a função afim.

(LD3) traz duzentos e setenta e quatro páginas, que formam oito capítulos, sendo o terceiro, quarto, quinto e sexto dedicados ao estudo das funções. Especificamente sobre funções, há um total de cento e vinte duas páginas e desse total, vinte e uma são destinas à função afim. Observamos também que LD_3 divide o terceiro capítulo em onze seções que abordam desde situações iniciais até à aplicação da função afim em outros contextos.

O quarto livro que foi analisado (LD4) tem um total de trezentos e quatro páginas onde estão nove capítulos. Às funções são trabalhadas nos capítulos dois, três, quatro, cinco seis e sete, formando um total de cento e trinta e sete páginas, das quais vinte e duas são sobre função afim.

Na figura 10 descrita a seguir, temos uma síntese da caracterização dos livros didáticos.

Figura 10 - Síntese da caracterização dos livros didáticos em relação à abordagem de função



Fonte: Construído pelo autor da pesquisa

Na figura 10, percebemos que os livros do Ensino Médio (LD4 e LD3) são os que mais dedicam páginas ao estudo das funções. Acreditamos que isso acontece porque é nesse nível de ensino são trabalhados outros tipos de funções. Ainda em relação aos livros do Ensino Médio e considerando somente as páginas destinadas às funções, temos que proporcionalmente LD3 possui uma quantidade de páginas voltadas ao estudo da função afim semelhante a LD4.

Nesse contexto, fazendo um comparativo entre os dois livros do ensino fundamental (LD1 e LD2) e as páginas destinadas ao estudo da função afim, percebemos que LD2 possui mais que o dobro da quantidade de páginas de LD1. Isso nos mostra que embora os livros sejam do mesmo nível e ano de ensino, o autor de LD2 dá mais ênfase à função afim de que o autor de LD1. Isso também é mostrado através da quantidade de questões voltadas à função afim que cada livro aborda, pois verificamos que enquanto LD1 traz somente 22 questões, LD2 traz um total de 47 exercícios.

Em síntese, observando somente o número de paginas destinadas ao estudo das funções e de função afim, percebemos que embora LD2 seja um livro do ensino fundamental, essa obra é a que mais trabalha com a função afim. Isso é um achado que julgamos importante, pois o fato de um livro do 9º ano do ensino fundamental dá importância à função afim, pode fazer com que os estudantes cheguem ao Ensino Médio com menos dificuldades para trabalhar com esse tipo de função.

Ainda observando proporcionalmente, LD4 e LD3 são os livros que dão menos ênfase ao estudo da função afim. Acreditamos que os livros do Ensino Médio poderiam dar mais atenção a situações que envolvam a função afim, isso porque essa função é a porta de entrada para o estudo de outros modelos matemáticos no Ensino Médio.

Dando continuidade a caracterização que realizamos, trazemos a sequência didática desenvolvida por Dornelas (2007). Essa pesquisadora formulou e aplicou uma sequência didática com momentos baseados na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. Com essa sequência didática, Dornelas (2007) tinha como objetivo trabalhar com os alunos situações de aprendizagens que envolviam o conceito de função afim. Nesse aspecto, a pesquisadora analisou as técnicas utilizadas pelos alunos na resolução de situações de contexto realístico[8]. Durante as observações que foram realizadas, foram consideradas as diferentes estratégias adotadas pelos alunos, assim como a interação entre os membros de cada grupo formado durante o experimento.

Para analisar as produções dos grupos, Dornelas (2007) considerou os seguintes aspectos: identificação da variação das grandezas em um problema de contexto realístico; reconhecer se a variação entre as grandezas envolvidas é ou não uma relação de dependência; mobilização das ideias de variável dependente e independente na compreensão do conceito de função afim e conversão entre os registros de representação da função afim.

Nessa linha, apresentamos a seguir as atividades com as respectivas questões que fizeram parte da sequência didática da pesquisa de Dornelas (2007).

[8] Segundo Dornelas (2007), questões de contexto realístico são representadas por situações cotidianas.

Figura 11– Primeira atividade da sequência didática de Dornelas (2007)

O salário base dos frentistas filiados ao Sindicato dos Trabalhadores do Comércio e Mineração de Derivados de Petróleo do Estado de Pernambuco é de R$ 300,00. Esses empregados têm seu trabalho realizado perigosamente, em razão dos produtos inflamáveis ou explosivos que manuseiam diariamente. Os frentistas realizam os trabalhos expostos aos agentes nocivos à integridade física, além do parâmetro de tolerância, com risco de vida acentuado. Assim, conforme artigo 193 da CLT terão direito em receber o adicional de periculosidade de 30% do salário base. No caso específico do Estado de Pernambuco esse valor é de R$ 100,00; ou seja, o salário fixo mensal é de R$ 400,00. Para incentivar o crescimento na venda de óleo lubrificante e aumentar o seu lucro, o proprietário de um Posto de Combustível da Região Metropolitana do Recife oferece aos seus frentistas uma comissão de R$ 0,50 por litro vendido deste produto.

Fonte: Dornelas (2007, p. 66)

Nessa atividade, podemos observar que Dornelas (2007) está trabalhando com uma situação do cotidiano que envolve o conceito de função afim. A seguir trazemos as questões relativas à primeira atividade.

Figura 12 - Questões da primeira atividade da sequência didática de Dornelas (2007)

(a) Se em um mês um frentista vender 10 litros de óleo lubrificante, que salário receberá no fim do mês?

(b) Escreva um bilhete ao contador do posto de combustível, explicando como um frentista qualquer deve fazer para calcular o seu salário mensal.

(c) João, um dos frentistas do posto, precisa faturar R$ 600,00 em janeiro, para cobrir os cheques pré-datados que ele fez no Natal. Quantos litros de óleo lubrificante ele deve vender para conseguir esse salário?

(d) Como no próximo mês, João ainda tem cheques pré-datados, precisará de um salário maior para cobri-los. Ele pede então, ao contador do posto, que lhe explique como calcular quantos litros de óleo lubrificante deve vender para receber o salário que precisa. Imagine que você seja o contador, e escreva um bilhete para João, explicando o que ele deve fazer.

(e) João contou aos colegas o pedido feito ao contador. Imediatamente, todos os outros frentistas, e são mais de 30 nesse posto, foram fazer o mesmo pedido informando ao contador quantos litros de óleo lubrificante cada um vendeu, até aquele momento. O contador quase enlouquece, e ficou pensando como fazer para atender a todos. Ajude-o, e invente uma maneira para que os frentistas do posto possam determinar, rapidamente, quanto será o salário dos mesmos, até aquele momento?

(f) Além disso, eles querem determinar quantos litros de óleo lubrificante cada um deverá vender para receber o salário que precisa. Como você poderá organizar estes dados de maneira que o contador possa explicar aos frentistas o salário a ser recebido por cada um deles?

(g) De que maneira o contador do posto poderá apresentar aos frentistas uma outra solução que possa ser entendida e aplicada por eles sem que seja necessário recorrer ao próprio contador, a cada vez que precisarem aumentar a sua receita mensal, ou ao uso de tabelas ou de cálculos numéricos?

Fonte: Dornelas (2007, p. 67, 68, 69, 71, 72 e 74)

Conforme já destacamos, a sequência didática parte de uma situação do cotidiano para trabalhar com elementos da função afim. A utilização da função afim como ferramenta para a resolução de situações do cotidiano é recomendada pelos Parâmetros da Educação Básica do Estado de Pernambuco (2012) e Parâmetros Curriculares Nacionais (1998).

Na figura a seguir apresentamos a segunda atividade da sequência didática de Dornelas (2007).

Figura 13 – Segunda atividade da sequência didática de Dornelas (2007)

Sr. André, dono do posto em que João trabalha, precisa transportar óleo combustível do Porto de SUAPE para abastecer seus quatro estabelecimentos comerciais. Ele tem as opções de transportar sua carga por trem ou caminhão. Nos dois casos, ele tem um custo fixo para preparar a carga (embalagem) e um custo variável por quilômetro transportado, que depende do meio de transporte utilizado. Em caminhões, o custo da embalagem é mais baixo, R$ 100,00, pois basta cobrir a carga com plástico. Para transportar o óleo combustível por trem, o custo da embalagem é mais caro, R$ 120,00, pois a carga precisa ser colocada em suportes metálicos, para ser acomodada nos vagões. Para o transporte em caminhões, a empresa transportadora cobra R$ 0,80 por quilômetro transportado para cobrir as despesas com o frete, enquanto para o transporte ferroviário o custo é de R$ 0,40 por quilômetro transportado.

Fonte: Dornelas (2007, p. 75)

A seguir trazemos a figura 14, onde temos as questões referentes à segunda atividade da sequência didática.

Figura 14 - Questões da segunda atividade da sequência didática de Dornelas (2007)

(a) Qual a forma mais barata de transportar o óleo combustível do Porto de SUAPE para os postos de gasolina do Sr. André?

(b) Escrevam um bilhete para o Sr. André ajudando-o a decidir qual a forma mais econômica de transportar o óleo combustível para os seus quatro postos de gasolina, por caminhão ou por trem?

(c) Sr. André precisa apresentar aos seus sócios, em transparência, as diferentes maneiras de transportar combustível para os seus quatro postos de gasolina para que decidam qual a forma mais econômica. Ele se enrolou todo ao tentar representar, através de uma tabela, os custos de todas as possíveis formas de transporte e pediu, novamente, a ajuda do contador da empresa para que ele inventasse uma maneira mais simples e prática de reunir todos esses resultados. Que idéia vocês dariam para o contador?

Fonte: Dornelas (2007, p. 76, 77 e 78)

Podemos verificar que as tarefas propostas não possuem somente a preocupação com cálculos e manipulações algébricas, mas também com a realização de conversões entre os registros de representação da função afim. Duval (2012) defende que o trabalho com situações que envolvem a conversão de registros contribuem para a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Nesse sentido, chamou a nossa atenção o fato da sequência didática trazer várias situações que envolvem a escrita em linguagem natural. Para Duval (2012), a resolução de questões utilizando a linguagem natural é importante porque contribui com o desenvolvimento de outros tipos de registros. Em síntese, a sequência didática de Dornelas (2007) procurou identificar as dificuldades dos alunos e também mostrar para os estudantes que a função afim pode ser utilizada como ferramenta para a resolução de questões do dia a dia.

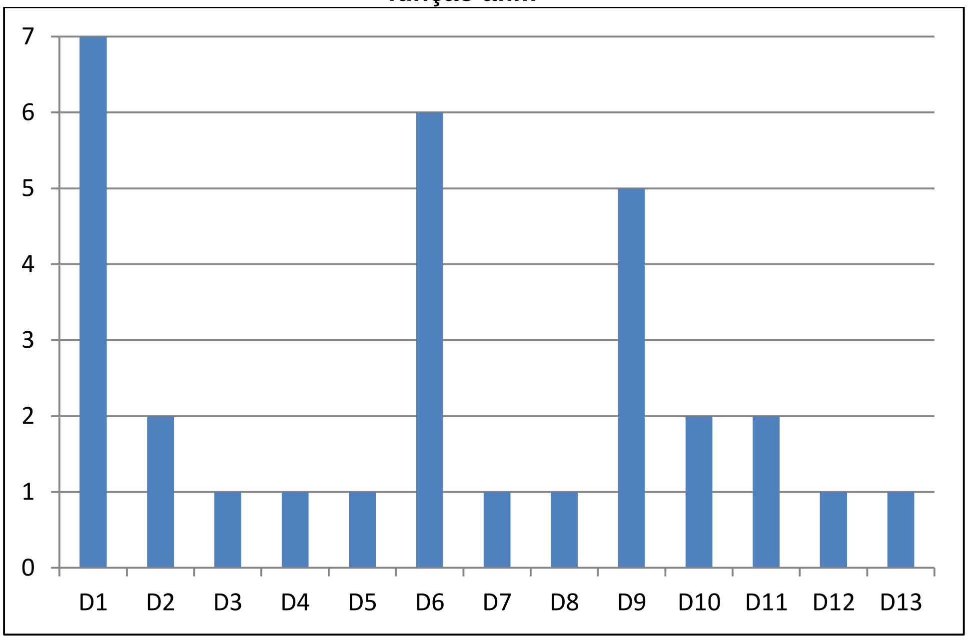
A sequência didática de Dornelas (2007) também envolvem elementos que foram apontados nas pesquisas de Fonseca (2011), Luz (2010), Postal (2009), Schornadie (2011), como sendo causadores de dificuldades nos alunos que trabalharam com a função afim. Isso mostra que as atividades da sequência didática possuem uma convergência com o que é mostrado em algumas pesquisas.

4.2 ETAPA 2: ANÁLISE DOS LIVROS EM RELAÇÃO ÀS DIFICULDADES QUE ENVOLVEM A FUNÇÃO AFIM

Em nossa fundamentação teórica, apresentamos algumas pesquisas que trabalharam com a função afim. Nosso objetivo com essas pesquisas era mostrar o que está sendo produzido no Brasil na área de educação matemática e também fazer uma síntese sobre as dificuldades que os estudantes enfrentaram quando estavam desenvolvendo atividades que envolviam a função afim.

Nesse contexto, apresentamos no capítulo anterior o quadro quatro que contém uma síntese das principais dificuldades identificadas nos alunos que trabalharam com a função afim. Considerando esse quadro, trazemos a seguir a figura 18, onde apresentamos a frequência das dificuldades apontadas pelos pesquisadores.

Figura 15 - Frequência das dificuldades apresentadas nas pesquisas que trabalharam com a função afim



Fonte: Construído pelo autor da pesquisa.

De acordo com a figura 15, podemos perceber que as três dificuldades que foram mais apontadas pelas pesquisas foram D1 (analisar o gráfico), D6 (generalizar resultados) e D9 (localizar pontos nos eixos cartesianos). Ainda de acordo com esse gráfico temos também que várias dificuldades foram citadas somente uma vez.

Durante a nossa análise, verificamos que várias dessas dificuldades são contempladas nas atividades propostas pelos livros didáticos. Em relação à presença ou ausência dessas dificuldades nos livros, apresentamos o quadro seis, onde temos um panorama geral sobre a presença ou não das dificuldades em cada um dos treze livros didáticos que foram analisados. Nesse contexto, assinalamos com um x os casos onde os livros propõem atividades que envolvem alguma dificuldade apontada pelas pesquisas.

Quadro 6 - Presença ou ausência das dificuldades nos livros didáticos.

Dificuldade	**Livros didáticos**												
	LD1	LD2	LD3	LD4	LD5	LD6	LD7	LD8	LD9	LD10	LD11	LD12	LD13
D1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
D2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
D3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
D4													
D5		X			X								
D6	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
D7													
D8		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
D9		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
D10	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
D11	X	X	X			X						X	X
D12													
D13	X		X					X	X				

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa.

Esse quadro nos mostra que todos os livros didáticos abordam alguma dificuldade que foi apontada pelos pesquisadores que trabalharam com a função afim e também que nenhum dos livros traz todas as dificuldades em seus exercícios propostos. Também percebemos que algumas dessas dificuldades se fazem presentes em todos os livros analisados.

Consideramos relevante o fato de todos os livros didáticos contemplarem as dificuldades D1 (analisar o gráfico), D2 (construção de gráficos), D3 (converter do registro algébrico para o gráfico), D6 (generalização de resultados) e D10 (estabelecer relações de dependência entre as variáveis), pois isso mostra que os autores dos livros que foram aprovados no PNLD 2014/2015 têm a preocupação de desenvolver atividades nesse sentido.

O quadro seis também nos mostra, que com exceção da dificuldade D3 (Converter do registro algébrico para o gráfico), poucos livros abordam a conversão de registros da função afim. Nesse contexto se enquadram as dificuldades D4 (Converter do registro algébrico para o natural), D5 (Converter do registro algébrico para o tabular), D11 (Converter do registro natural para o tabular), D12 (Converter da linguagem natural para tabular) e D13 (Converter da linguagem natural para a numérica).

Consideramos que é importante mais livros didáticos trabalhem com atividades que envolvam a conversão entre os registros de representação da função afim, pois Duval (2012) diz que a complexidade e diversidade das representações dos objetos matemáticos, trazem dificuldades para que os alunos compreendam matemática.

Nessa perspectiva os Parâmetros Educacionais do Estado de Pernambuco (2012) dizem que é consenso na comunidade educacional o trabalho com a matemática em diferentes quadros de representação incluindo o numérico, algébrico, geométrico, gráfico e etc, pois isso pode contribuir para que os estudantes façam conexões da matemática com outras áreas do conhecimento. Nesse aspecto, percebemos a importância dos livros didáticos trabalharem com questões que envolvam as diferentes formas de representação da função afim.

Embora alguns pesquisadores defendam que o registro em linguagem natural seja importante para o aprendizado em matemática, poucos livros didáticos trabalham com questões que envolvem as dificuldades D4 e D11. Nesse sentido, Duval (2012, p. 295), diz que “A língua natural deve ser considerada, ao mesmo tempo, um registro de partida e um registro de chegada. Mas, é aí que está o ponto importante: esta conversão interna não é feita diretamente, ela passa por representações intermediárias”.

Nesse contexto, Dornelas (2007) também destaca a importância do desenvolvimento de atividades que envolvam a conversão entre os registros de representação que contém a linguagem natural, pois contribuem para que os alunos se desvinculem um pouco da parte algébrica e também para que seja sanada a crença na qual as questões de matemática são somente resolvidas através de algoritmos pré-determinados.

Nessa perspectiva, como o trabalho com situações que envolvam a conversão entre os registros de representação da função afim pode contribuir para minimizar as dificuldades dos alunos, acreditamos que seja necessário que todos os livros didáticos desenvolvam atividades desse tipo.

A figura 18, nos mostra que a segunda maior ocorrência nas pesquisas está relacionada à dificuldade dos alunos em generalizar situações que envolvem a função afim (D6). Um dos trabalhos que trouxe esse obstáculo foi o de Fonseca (2011), de acordo com esse autor, muitos alunos não conseguem compreender que fenômenos que possuem comportamento regular podem ser generalizados e representados por uma lei de formação.

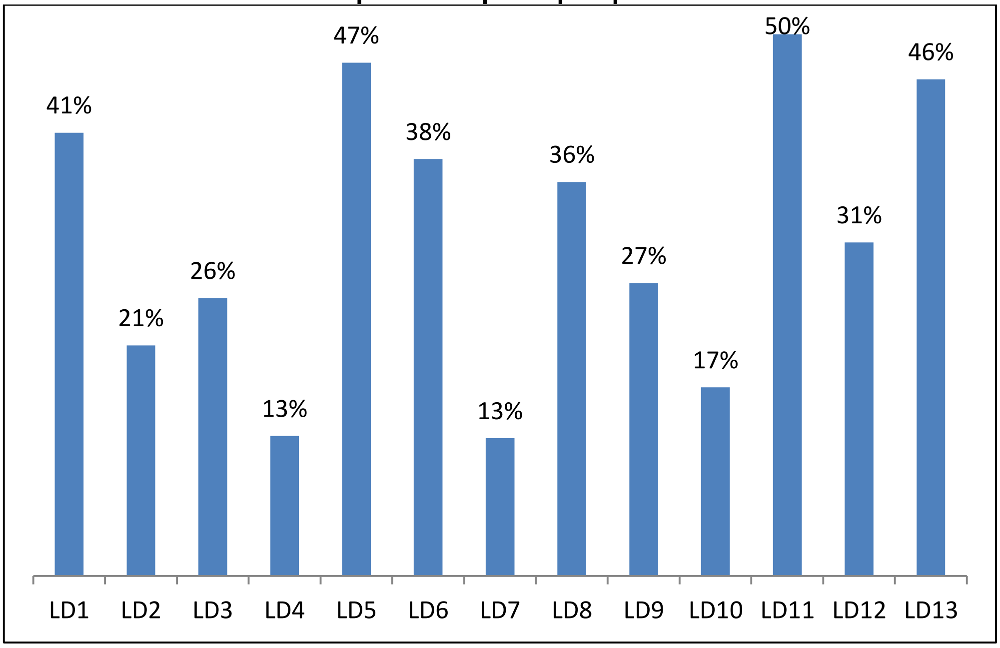
Em relação à dificuldade (D6), vale ressaltar que ela é abordada em todos os livros didáticos, o que mostra uma convergência entre a quantidade de livros que trazem essa dificuldade e o número de vezes em que ela é citada nas pesquisas. Para Azevedo (2009), o trabalho com as funções deve contemplar, desde cedo, as diversas relações entre variáveis, onde o aluno possa recorrer à identificação de regularidades, padrões e também aos procedimentos de particularização e generalização.

De acordo com os achados das pesquisas, percebemos também, que a dificuldade em analisar o gráfico da função afim (D1) foi a mais citada pelos pesquisadores (Figura 18) e que ela está presente em todos os livros didáticos. Consideramos importante o fato de todos os livros trabalharem com questões nesse sentido, pois Delgado, Friedmann e Lima (2010), dizem que os alunos não conseguem analisar o gráfico de uma função satisfatoriamente e vários deles não associam as variáveis que aparecem no problema com os valores que estão presentes no gráfico da função. Duval (2011, p. 96), também acrescenta a essa discussão, dizendo que “A leitura das representações gráficas requer dos alunos a discriminação das diferentes variáveis visuais pertinentes constituintes deste tipo de representação”.

Julgamos importante o fato dos livros didáticos estarem trabalhando com situações que envolvem as dificuldades apontadas por pesquisadores que trabalharam com a função afim, pois conforme destaca Delizoicov et al (2002), o livro didático ainda é o principal recurso didático utilizado pelo professor.

Trazemos a seguir a figura 16, onde mostramos a porcentagem de questões propostas nos livros didáticos que envolvem as dificuldades apontadas nas pesquisas.

Figura 16 - Porcentagem de questões dos livros didáticos que abordam as dificuldades apontadas pelas pesquisas



Fonte: elaborado pelo autor da pesquisa

A figura 16 nos mostra que dos quatro livros que mais abordam as dificuldades apontadas nas pesquisas, três são do 9º ano do Ensino Fundamental (LD1, LD5 e LD13). Isso é importante porque o fato dos alunos trabalharem com livros que abordam essas dificuldades já no Ensino Fundamental, pode fazer com que os estudantes cheguem ao Ensino Médio com mais conhecimentos prévios sobre o estudo da função afim.

De acordo com o que foi mostrado nessa etapa de nosso trabalho, consideramos que as atividades dos livros didáticos ainda não convergem com o que as pesquisas apontam como sendo as dificuldades dos estudantes. Porém, observamos que algumas das dificuldades apontadas pelos pesquisadores são trabalhadas em diversas situações abordadas nos livros didáticos e consideramos isso um ponto importante dos livros didáticos, mas também percebemos que a quantidade de questões trabalhadas ainda parece ser insuficiente.

Desse modo, acreditamos que as atividades propostas pelos livros deveriam convergir com as principais dificuldades observadas por pesquisadores que trabalharam com a função afim no sentido de ter mais questões que minimizassem as dificuldades enfrentadas pelos alunos, pois conforme defende Lajolo (1996) o LD é material didático importante no dia a dia de alunos e professores.

Em relação à função afim, percebemos que por um lado os livros didáticos trabalham com questões que são apontadas como importante por diversos pesquisadores, mas por outro, deixa de abordar alguns elementos que são igualmente importantes para o aprendizado dessa função. Nessa perspectiva, enxergamos como sendo uma limitação o fato dos livros didáticos darem pouca ênfase a questões que são vistas pelos pesquisadores como geradoras de dificuldades no aprendizado da função afim.

É importante destacar que a ausência ou presença, nos livros didáticos, de elementos que podem contribuir com o aprendizado da função afim, nos traz a reflexão de que é preciso que o professor tenha um olhar atento e que seja crítico às atividades propostas pelos livros didáticos, conforme defende Delizoicov et al (2002).

Nessa etapa de nosso trabalho, trouxemos algumas pesquisas que trabalharam com a função afim e que apontaram para algumas dificuldades enfrentadas pelos estudantes. Nesse sentido, verificamos que várias dessas dificuldades são comuns aos ensinos Fundamental e Médio. Também mostramos que a abordagem de função afim realizada pelos livros didáticos não estão de acordo com os achados das pesquisas. Nesse contexto, verificamos que várias dificuldades trazidas nas pesquisas não são abordadas nos livros e outras são abordadas numa quantidade que julgamos ser insuficiente.

Na próxima etapa de nosso trabalho, escolhemos quatro livros didáticos, dois do 9º ano do Ensino Fundamental e dois do 1º ano do Ensino Médio, para fazer uma análise praxeológica. Também utilizamos a noção de praxeologia para analisar a sequência didática desenvolvida por Dornelas (2007). Nesse contexto, iremos mostrar as técnicas, tecnologias e possíveis teorias utilizadas por essa pesquisadora e também pelos livros didáticos. Com a realização dessa etapa, temos como objetivo aprofundar a nossa análise utilizando os recursos da TAD.

4.3 ETAPA 3: ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DOS LIVROS DIDÁTICOS.

Na análise praxeológica dos livros didáticos, mostramos o gênero os tipos, os subtipos de tarefa, as técnicas e as tecnologias que foram identificadas. É importante deixar claro que não encontramos, nos livros didáticos nenhuma teoria que justifique as tecnologias. Também elaboramos algumas tabelas para mostrar a frequência dos tipos e subtipos de tarefas em cada livro didático.

4.3.1 GÊNERO, TIPOS, SUBTIPOS DE TAREFA, TÉCNICAS E TECNOLOGIAS

No quadro descrito a seguir, fizemos uma síntese dos tipos de tarefas que encontramos em LD1, LD2, LD3 e LD4.

Quadro 7 - Tipos de tarefa encontrados nos livros didáticos

(T_i): Tipos de tarefa
T_1: Associar o gráfico da função afim a uma questão[9].
T_2: Calcular o valor de uma constante na lei de formação da função afim.
T_3: Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano.
T_4: Classificar a função afim em crescente ou decrescente.
T_5: Construir o gráfico da função afim.
T_6: Construir uma tabela de dados para a função afim.
T_7: Determinar a posição relativa de retas no plano.
T_8: Determinar pontos da função afim.
T_9: Escrever a fórmula da função afim.
T_{10}: Escrever em linguagem natural a resposta de uma questão.
T_{11}: Identificar a função afim.
T_{12}: Identificar se o ângulo de declividade da reta é agudo ou obtuso.
T_{13}: Identificar pontos que pertencem à função afim.
T_{14}: Identificar se existe proporcionalidade.
T_{15}: Identificar o coeficiente linear da função afim.
T_{16}: Identificar a taxa de variação da função afim.
T_{17}: Identificar as variáveis dependentes e independentes da função afim.
T_{18}: Realizar o estudo do comportamento da função afim.
T_{19}: Realizar a comparação entre funções.

Fonte: construído pelo autor da pesquisa.

[9] Quando nos referimos a uma questão, estamos fazendo referencia a exercícios que são propostos nos livros didáticos.

Conforme podemos verificar, encontramos dezenove tipos de tarefa relacionados à função afim. Os tipos de tarefas que foram descritos englobam todos os exercícios resolvidos ou propostos sobre função afim observados nos quatro livros didáticos. Na tabela 2 temos a frequência dos tipos de tarefa por livro didático.

Tabela 2 - Frequência dos tipos de tarefas por livro didático

Tipos de tarefa	9º ano Ensino Fundamental				1º ano Ensino Médio				Total	
	LD1		LD2		LD3		LD4			
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
T_1	0	0	2	2,1	0	0,0	1	0,6	3	0,7
T_2	0	0	0	0,0	2	1,9	0	0,0	2	0,5
T_3	6	8,2	39	40,2	14	13,5	43	27,6	102	23,7
T_4	0	0	0	0,0	4	3,8	5	3,2	9	2,1
T_5	11	15,07	11	11,3	25	24,0	11	7,1	58	13,5
T_6	1	1,37	7	7,2	1	1,0	2	1,3	11	2,6
T_7	0	0	1	1,0	0	0,0	0	0,0	1	0,2
T_8	9	12,3	11	11,3	12	11,5	6	3,8	38	8,8
T_9	10	13,7	24	24,7	25	24,0	49	31,4	108	25,1
T_{10}	2	2,7	1	1,0	0	0,0	6	3,8	9	2,1
T_{11}	18	24,7	0	0,0	0	0,0	6	3,8	24	5,6
T_{12}	4	5,5	0	0,0	0	0,0	0	0,0	4	0,9
T_{13}	4	5,5	0	0,0	0	0,0	0	0,0	4	0,9
T_{14}	5	6,8	0	0,0	4	3,8	3	1,9	12	2,8
T_{15}	0	0	0	0,0	1	1,0	6	3,8	7	1,6
T_{16}	0	0	0	0,0	3	2,9	5	3,2	8	1,9
T_{17}	0	0	0	0,0	0	0,0	1	0,6	1	0,2
T_{18}	0	0	0	0,0	7	6,7	8	5,1	15	3,5
T_{19}	3	4,1	1	1,0	6	5,8	4	2,6	14	3,3
Total	73	100	97	100	104	100	156	100	430	100

Fonte: construído pelo autor da pesquisa.

Podemos perceber, de acordo com essa tabela, que os tipos de tarefa, T_3 (Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano), T_5 (Construir o gráfico da função afim), T_6 (Construir uma tabela de dados para a função afim), T_8 (Determinar pontos da função afim), T_9 (Escrever a fórmula da função afim), e T_{19} (Realizar a comparação entre funções) estão presentes nos quatro livros didáticos. Também é importante destacar que não observamos em nenhum dos livros a ocorrência de todos os tipos de tarefa.

Em relação ao total apresentado na frequência relativa, percebemos que há uma maior abordagem do tipo de tarefa T_9 (Escrever a fórmula da função afim), pois o mesmo representa 25,1% dos tipos de tarefas que foram encontrados. Julgamos importante que os livros didáticos trabalhem com questões que permitam ao aluno escrever a fórmula da função afim, já que alguns pesquisadores como Delgado (2010), Fonseca (2011), Dornelas (2007), Postal (2009), Schonardie (2011) e Braga (2009), dizem que a escrita da fórmula da função traz dificuldades aos alunos. Nesse contexto, Bahia (2013) defende que o professor deve estimular os alunos a estabelecer a relação entre grandezas e posteriormente induzir os estudantes a desenvolver a escrita da fórmula da função.

Observamos também que T_3 (calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano), é o segundo tipo de tarefa que mais aparece nos livros (23,7%). Para Dornelas (2007) é importante que os estudantes trabalhem com situações que envolvam questões de contexto realístico, pois isso pode contribuir para que eles percebam aplicações cotidianas desse tipo de função. Isso corrobora com o que traz os Parâmetros da Educação Básica do Estado de Pernambuco (Pernambuco, 2012, p. 114), que em relação à função afim diz que “as atividades propostas devem partir da observação de fenômenos naturais, presentes no cotidiano do estudante”.

Também queremos destacar o fato de alguns tipos de tarefas estarem pouco presente nos livros didáticos. Podemos citar como exemplo T_1 (associar o gráfico da função afim a uma questão) que é somente abordado em LD2 e LD4. Esse fato nos chamou a atenção porque T_1 envolve a dificuldade (D1) que foi citada em sete das onze pesquisas trazidas em nossa fundamentação teórica. Nesse caso, estamos considerando que para associar o gráfico a uma questão, é necessário que o estudante faça a análise o gráfico da função afim.

Outro tipo de tarefa T_4 (classificar a função afim em crescente ou decrescente) também é pouco abordado pelos livros didáticos. Nesse aspecto, verificamos que os Parâmetros da Educação Básica do Estado de Pernambuco (2012) fala da importância da observação do crescimento e decrescimento para o estudo das funções. De acordo com esse documento a visualização do comportamento da função permite que o estudante desenvolva o pensamento funcional. Embora o estudo do comportamento das funções seja importante para a aprendizagem de função, pouco mais de 2% das tarefas dos livros didáticos abordam esse tipo de situação.

O tipo de tarefa T_{10} (escrever em linguagem natural a resposta de uma questão) também está entre os tipos que são pouco abordados pelos livros didáticos. Conforme nos mostra a tabela 2, esse tipo de tarefa está presente somente em 2,1% das tarefas que são propostas pelos livros didáticos. Apesar dos livros didáticos não darem muita importância às tarefas propostas a partir do tipo T_{10}, Duval (2012) defende a introdução da linguagem natural na resolução de questões. Para esse pesquisador é importante que a linguagem natural não seja negligenciada do ensino da matemática, pois é importante para o desenvolvimento de outros tipos de registros, inclusive para aqueles que envolvem tratamentos com cálculos.

As Organizações Curriculares para o Ensino Médio também defendem o uso da linguagem natural no estudo das funções. Nesse documento consta que,

> É conveniente solicitar aos alunos que expressem em palavras uma função dada de forma algébrica, por exemplo, f(x) = 2 x + 3, como a função que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de três unidades; isso pode facilitar a identificação, por parte do aluno, da idéia de função em outras situações, como, por exemplo, no estudo da cinemática, em Física (Organizações Curriculares para o Ensino Médio, 2006).

Desse modo, embora os livros didáticos não deem muita importância para atividades que envolvam o registro em linguagem natural, percebemos que existe uma necessidade de desenvolver atividades nesse sentido, tato no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, pois conforme mostramos, a escrita em linguagem natural, causa dificuldades aos estudantes.

A seguir, trazemos os quadros 8, 9 e 10, onde fizemos um agrupamento dos tipos de tarefa por gênero. Nesse caso, apresentamos além do gênero, os tipos e subtipos de tarefa identificados em LD1, LD2, LD3 e LD4.

Quadro 8 - Gênero, tipo e subtipo de tarefa encontrado nos livros didáticos. Parte 1

Gênero de tarefa	Tipos de tarefa (T_i)	Subtipo de tarefa (st)
Associar	T_1: Associar o gráfico da função afim a uma questão.	st1_1 – Associar o gráfico da função afim a uma questão do cotidiano.
		st1_2 – associar o gráfico da função afim à sua lei de formação.
Calcular	T_2: Calcular o valor de uma constante na lei de formação da função afim.	st2_1 - Calcular o valor de uma constante na lei de formação da função afim de modo que seu gráfico passe por um ponto determinado.
	T_3: Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano.	st3_1 – Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano através da lei de formação da função afim.
		st3_2 – Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano através do gráfico da função afim.
		st3_3 – Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano através de uma tabela.
		st3_4 – Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano a partir dos dados fornecidos pelo enunciado de uma questão.

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Quadro 9 - Gênero, tipo e subtipo de tarefa encontrado nos livros didáticos. Parte 2

Classificar	T_4: Classificar a função afim em crescente ou decrescente.	st4_1 – Classificar a função afim em crescente ou decrescente a partir da lei de formação.
		st4_2 – Classificar a função afim em crescente ou decrescente a partir de dois pontos.
		st4_3 – Classificar a função afim em crescente ou decrescente a partir de seu gráfico.
		st4_4 – Classificar a função afim em crescente ou decrescente a partir do enunciado de uma questão.
Construir	T_5: Construir o gráfico da função afim.	st5_1 – Construir o gráfico da função a partir de pontos.
		st5_2 – Construir o gráfico da função a partir da lei de formação.
		st5_3 – Construir o gráfico da função a partir de uma tabela.
		st5_4 – Construir o gráfico da função a partir do enunciado de uma questão.
	T_6: Construir uma tabela de valores para a função afim.	st6_1 – Construir uma tabela de valores para a função afim a partir de sua lei de formação.
		st6_2 – Construir uma tabela de valores para a função afim a partir do enunciado de uma questão.
		st6_3 – Construir uma tabela de valores para a função afim a partir de seu gráfico.
Determinar	T_7: Determinar a posição relativa de retas no plano.	st7_1 – Determinar a posição relativa de retas no plano a partir de suas leis de formação.
	T_8: Determinar pontos da função afim.	st8_1 – Determinar pontos da função afim a partir da lei de formação.
		st8_2 – Determinar ponto de encontro de duas funções afim a partir da lei de formação.
		st8_3 – Determinar ponto de encontro de duas funções afim a partir de seus gráficos.
Escrever	T_9: Escrever a fórmula da função afim.	st9_1 – Escrever a fórmula da função afim a partir de uma questão do cotidiano.
		st9_2 – Escrever a lei de formação da função afim a partir de dois pontos.
		st9_3 – Escrever a lei de formação da função afim a partir de seu gráfico.
		st9_4 – Escrever a lei de formação da função afim a partir de uma tabela.
		st9_5 – Escrever a lei de formação da função afim a partir da taxa de variação e do coeficiente linear.
		st9_6 – Escrever a lei de formação da função afim que passa por um ponto e que possui a mesma taxa de variação de uma reta dada.
		st9_7 – Escrever a lei de formação da função afim a partir de uma figura geométrica.
		st9_8 – Escrever a lei de formação da função afim a partir de um ponto e da taxa de variação.
		st9_9 – Escrever a lei de formação da função afim a partir de um ponto.
		st9_10 – Escrever a lei de formação da função afim a partir de um ponto e do coeficiente linear.
	T_{10}: Escrever em linguagem natural a justificativa da resposta de uma questão.	st10_1 – Escrever em linguagem natural a justificativa da resposta de uma questão sobre função afim.

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Quadro 10 - Gênero, tipo e subtipo de tarefa encontrado nos livros didáticos. Parte 3

Gênero de tarefa	Tipos de tarefa (T_i)	Subtipo de tarefa (st)
Identificar	T_{11}: Identificar se a função é afim.	st11_1 – Identificar se a função é afim através da lei de formação.
		st11_2 – Identificar se a função é afim através do gráfico.
	T_{12}: Identificar se o ângulo de declividade da reta é agudo ou obtuso.	st12_1 – Identificar se o ângulo de declividade da reta é agudo ou obtuso através da equação da reta.
	T_{13}: Identificar pontos que pertencem à função afim.	st13_1 – Identificar se um ponto pertence a função afim partir da lei de formação.
		st13_2 – Identificar pontos que possuem uma coordenada desconhecida e que pertencem ao gráfico da função afim.
	T_{14}: Identificar se existe proporcionalidade.	st14_1 – Identificar se existe proporcionalidade a partir da lei de formação da função afim.
		st14_2 – Identificar se existe proporcionalidade a partir dos números de uma tabela.
		st14_3 – Identificar se existe proporcionalidade a partir do enunciado de uma questão.
	T_{15}: Identificar o coeficiente linear da função afim	st15_1 – Identificar o coeficiente linear da função afim a partir de sua lei de formação.
		st15_2 – Identificar o coeficiente linear da função afim a partir de seu gráfico.
	T_{16}: Identificar a taxa de variação da função afim.	st16_1 – Identificar a taxa de variação da função afim a partir de sua lei de formação.
		st16_2 – Identificar a taxa de variação da função afim a partir de seu gráfico.
	T_{17}: Identificar as variáveis dependente e independente da função afim.	st17_1 – Identificar as variáveis dependente e independente da função afim a partir do enunciado de uma questão.

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Podemos perceber que a maior quantidade de subtipos de tarefa está relacionada ao gênero identificar. A partir desse gênero temos os tipos de tarefa T_{11} (Identificar a função afim), T_{12} (Identificar o ângulo de declividade da reta), T_{13} (Identificar pontos que pertencem à função afim), T_{14} (Identificar se existe proporcionalidade), T_{15} (Identificar unidade de medida da taxa de variação), T_{16} (Identificar a taxa de variação) e T_{17} (Identificar as variáveis dependente e independente da função afim).

De acordo com o quadro nove, o tipo de tarefa T_9 (escrever a fórmula da função afim) foi o que mais produziu subtipos de tarefa e durante a nossa análise, percebemos que os livros didáticos dão bastante ênfase às tarefas que envolvem a escrita da fórmula da função afim. A nosso ver isso é importante porque, nesse caso, os livros estão de acordo com o que traz algumas pesquisas que trouxemos em nossa fundamentação teórica. Nesse contexto, as pesquisas de Dornelas (2007), Delgado (2010), Fonseca (2011), Luz (2010), Schonardie (2011) e Postal (2009) apontam para a escrita da fórmula da função afim como sendo causador de dificuldades nos estudantes.

Isso está de acordo com o que defende Guerreiro (2009), pois esse pesquisador diz que a escrita da fórmula da função traz dificuldades extras aos alunos e que por isso é fundamental o trabalho com a representação algébrica das funções. Nessa linha, Trindade (1999) também fala da importância dos estudantes trabalharem com situações que envolvam a linguagem algébrica, pois a escrita da fórmula que representa a função traz elementos importantes para o aprendizado desse conceito, pois ela produz uma síntese de um grande número de dados e também porque é uma representação comum a diversas áreas do conhecimento.

A seguir, detalhamos um pouco mais os tipos e subtipos de tarefas que foram encontrados, mostrando as técnicas que foram utilizadas para realizar as tarefas propostas, assim como algumas possíveis tecnologias que foram utilizadas para justificar as técnicas utilizadas.

4.3.2 IDENTIFICAÇÃO DAS TÉCNICAS, TECNOLOGIAS E TEORIAS.

Nessa etapa de nossa pesquisa, optamos por trazer algumas figuras que representam exercícios (tarefas) que estão nos livros didáticos. É importante ressaltar que trouxemos somente os exercícios resolvidos, porque eles contêm as técnicas que foram utilizadas durante a sua resolução. Conforme iremos verificar, existem vários subtipos de tarefa que são comuns aos quatro livros didáticos e, para esses casos, escolhemos as tarefas que deixam mais claro a técnica que foi utilizada.

Também queremos destacar, que as tarefas que não trouxemos exemplo não possuem exercícios resolvidos em nenhum dos livros didáticos. A seguir descrevemos cada um dos subtipos de tarefa encontrados e também trazemos uma tabela de frequência de acordo com o que foi identificado. Além disso, também apresentamos as técnicas de resolução das tarefas e as tecnologias que justificam as técnicas.

Considerando a classificação que apresentamos nos quadros 8, 9 e 10, apresentamos abaixo o primeiro tipo de tarefa.

T_1: Associar o gráfico da função afim a uma questão.

Esse tipo de tarefa se caracteriza por fazer uma associação do gráfico da função afim a uma questão. Identificamos para esse tipo de tarefa os subtipos descritos a seguir:

- st1_1– Associar o gráfico da função afim a uma questão do cotidiano.
- st1_2 – Associar o gráfico da função afim à sua lei de formação.

As tarefas associadas a st1_1 consistem em associar o gráfico da função afim a uma questão do cotidiano, e as relacionadas à st1_2, faz a correspondência entre a lei de formação e os gráficos da função afim. Na tabela 3, trazemos a distribuição desses subtipos de tarefa nos livros didáticos.

Tabela 3 – Frequência dos subtipos de tarefa relacionados a T_1

Subtipos de tarefas	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st1_1	0	1	0	1	2
st1_2	0	1	0	0	1
Total	0	2	0	1	3

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Conforme podemos perceber, encontramos o subtipo de tarefa st1_1 somente em dois dos quatro livros didáticos, enquanto que st1_2 aparece somente em LD2. Para resolver as tarefas propostas a partir de st1_1 e de st1_2, verificamos que em LD2 somente é apresentada a resposta correta. Em LD4, verificamos que a correspondência é feita, encontrando primeiramente a lei de formação, mas para isso não identificamos nenhuma técnica.

O segundo tipo de tarefa que identificamos é referente ao cálculo do valor de uma constante que está presente na lei de formação da função afim.

T_2: Calcular o valor de uma constante na lei de formação da função afim.

Esse tipo de tarefa engloba todos os subtipos de tarefas que envolvem o cálculo do valor de uma constante que está presente na lei de formação da função afim. Encontramos, para esse caso, somente o subtipo de tarefa a seguir:

- st2_1 - Calcular o valor de uma constante na lei de formação da função afim de modo que seu gráfico passe por um ponto determinado.

Na tabela 4, temos a frequência desse subtipo de tarefa.

Tabela 4 - Frequência dos subtipos de tarefas relacionados a T_2

Subtipos de tarefas	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st2_1	0	0	2	0	2
Total	0	0	2	0	2

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Essa tabela nos mostra que st2_1 está presente somente em LD3. Para resolver as tarefas associadas a partir desse subtipo, identificamos a utilização de uma técnica que chamamos de τ_{2_1}. Essa técnica consiste em substituir, na lei de formação da função afim, as coordenadas de um ponto que é dado na tarefa. Com isso é formada uma equação do primeiro grau cuja incógnita é o valor da constante. Em seguida, o valor da constante é calculado resolvendo-se a equação do primeiro grau. Para esse caso não encontramos em LD3 nenhuma tecnologia que justifique a técnica utilizada.

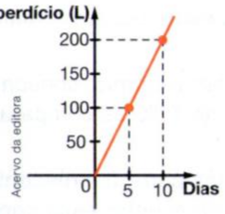
T_3: Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano.

O tipo de tarefa T_3 consiste no cálculo do valor desconhecido de uma situação do cotidiano que envolve a função afim. Na figura 17, temos um exemplo de tarefa proposta a partir de T_3.

Figura 17- Tarefa proposta por LD4 a partir do subtipo st3_2.

O Brasil é o país com a maior reserva aquífera do planeta, com aproximadamente 12% da água doce disponível na superfície terrestre, e é também um dos países onde há maior desperdício de água. Existem várias formas de evitar esse desperdício. Entre elas, não tomar banhos demorados, regar o jardim com moderação, verificar se as torneiras estão bem fechadas, lavar o carro ou a calçada somente se necessário e utilizando um balde, entre outras.

O gráfico a seguir representa a quantidade de água desperdiçada por uma torneira gotejando 25 gotas por minuto.



Se essa torneira permanecer gotejando, quantos litros de água serão desperdiçados ao final de 30 dias?

Resolução

Observando o gráfico, notamos que a reta passa pela origem, ou seja, é uma função linear do tipo $y = ax$.

Como o ponto $(5, 100)$ pertence ao gráfico, temos:

$$f(5) = 100 \Rightarrow a \cdot 5 = 100 \Rightarrow a = 20$$

Logo, $f(x) = 20x$.

Agora, basta calcular $f(30)$:

$$f(30) = 20 \cdot 30 = 600$$

Portanto, serão desperdiçados 600 L de água ao final de 30 dias.

Fonte: SOUZA (2013, p. 104)

Relacionados ao tipo de tarefa T_3 encontramos quatro subtipos de tarefas, são eles:

- st3_1 – Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano através da lei de formação da função afim.
- st3_2 – Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano através do gráfico da função afim.
- st3_3 – Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano através de uma tabela.
- st3_4 – Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano a partir dos dados fornecidos pelo enunciado de uma questão.

Na tabela 5, trazemos a frequência dos subtipos de tarefa nos livros didáticos.

Tabela 5 - Frequência dos subtipos de tarefas relacionados a T_3

Subtipos de tarefas	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st3_1	6	18	11	29	64
st3_2	0	6	1	2	9
st3_3	0	8	0	3	11
st3_4	0	7	2	9	18
Total	6	39	14	43	102

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

A tabela 5 nos mostra que dos subtipos de tarefa que foram encontrados, somente st3_1 aparece em todos os livros didáticos. Temos ainda que esses subtipos se concentram mais em LD2 e LD4 e também que há um total de cento e dois subtipos de tarefa, relacionados a T_3.

Nesse contexto, para resolver as tarefas propostas a partir de st3_1 (calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano através da lei de formação da função afim), identificamos a utilização de uma técnica que chamamos de τ_{3_1}. Essa técnica consiste em substituir diretamente números do domínio da função na lei de formação para encontrar os valores desconhecidos.

A técnica τ_{3_1} foi utilizada em LD1, LD3 e LD4, em LD2 não identificamos a utilização de nenhuma técnica, pois as respostas das tarefas são somente apresentadas. Identificamos em LD3 a presença de uma tecnologia que justifica a técnica τ_{3_1}. Essa tecnologia, chamamos de θ_{3_1} e ela consiste em utilizar o valor numérico de uma função afim, que para $x = x_0$ é dado por $f(x_0) = ax_0 + b$.

Encontramos também outras técnicas para resolver as tarefas propostas a partir de st3_1. Essas técnicas foram utilizadas em questões que solicitavam o cálculo do valor desconhecido, mas que não apresentavam a princípio a lei de formação da função afim. A primeira técnica que identificamos, chamamos de τ_{3_11} e ela consiste em primeiramente encontrar a lei de formação de uma função linear para depois calcular o valor desconhecido pedido na questão.

Nesse caso, foi calculado o valor da taxa de variação através da expressão $(y_2 – y_1) : (x_2 - x_1)$, onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são as coordenadas dos pontos dados na tarefa. Posteriormente o valor da taxa de variação foi substituído na lei de formação da função afim. Em seguida, foi novamente utilizada a técnica τ_{3_1} para encontrar o valor pedido na tarefa.

Durante a nossa análise, verificamos que a técnica τ_{3_11} foi utilizada em LD3 e LD4, mas encontramos a tecnologia que justifica essa técnica somente em LD3.

Chamamos essa tecnologia de θ_{3_11} e a mesma consiste em, no plano cartesiano, traçar a reta que passa por dois pontos distintos que pertencem a função e com isso formar um triângulo retângulo cuja hipotenusa é a distância entre os dois pontos fornecidos pela questão e que a base é paralela ao eixo x. A partir desse triângulo é encontrada a expressão que representa a tangente do ângulo formado pela base do triângulo e pela sua hipotenusa. A tangente desse ângulo representa a taxa de variação da função afim.

Também identificamos outra técnica para resolver algumas tarefas propostas a partir de st3_1. Chamamos essa técnica de τ_{3_111} e ela foi utilizada para calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano que envolvia uma função não linear. Essa técnica consiste em utilizar novamente a técnica τ_{3_11} para, a partir de dois pontos, encontrar a taxa de variação. Em seguida, são substituídos na lei de formação da função, as coordenadas do ponto fornecido na tarefa e a taxa de variação que foi calculada anteriormente. Com isso é formada uma equação do primeiro grau cuja incógnita é o coeficiente linear da função afim. Com a resolução dessa equação, o coeficiente linear é calculado e utilizando esse valor juntamente com a taxa de variação, a lei de formação é encontrada. A partir de então o valor desconhecido pedido na tarefa, é calculado utilizando a técnica τ_{3_1}. É importante destacar que identificamos a técnica τ_{3_111} somente em LD3 e LD4.

Ainda em relação às tarefas propostas a partir de st3_1, identificamos outra técnica, que nesse caso chamamos de τ_{3_1111}. Essa técnica se caracteriza por observar o maior ou menor valor que a função pode assumir dentro de um determinado intervalo.

Em síntese, essa técnica se resume a observar um intervalo e resolver uma inequação do primeiro grau. Vale ressaltar que identificamos a técnica τ_{3_1111} somente em LD4 e que não encontramos nenhuma justificativa para ela.

Verificamos que algumas tarefas associadas ao subtipo st3_1 (Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano através da lei de formação da função afim) pediam que o aluno calculasse o valor desconhecido, conhecendo-se somente dois pontos que pertencem à função afim.

A técnica utilizada para resolver as tarefas, consiste em substituir as coordenadas dos pontos na expressão $y = ax + b$ e com isso formar um sistema linear de duas equações cujas incógnitas são os valores de a e b. Com a resolução desse sistema linear, são calculados os valores da taxa de variação e do coeficiente linear da função afim. Utilizando esses valores, é encontrada a lei de formação da função afim e, novamente com a utilização da técnica τ_{3_1}, o valor desconhecido é encontrado. Chamamos essa técnica de τ_{3_11111} e verificamos que ela está presente somente em LD3 e LD4.

Para resolver as tarefas propostas a partir de st3_2 (calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano através do gráfico da função afim), foram novamente utilizadas as técnicas τ_{3_11} e τ_{3_111}. Verificamos que algumas tarefas propostas a partir do subtipo st3_2 envolvem o gráfico de uma função linear e nesse caso foi utilizada uma técnica que chamamos de τ_{3_2}.

Essa técnica consiste em substituir na lei de formação da função linear, as coordenadas de um ponto que está em seu gráfico e a partir de então formar uma equação do primeiro grau, cuja incógnita é o valor da taxa de variação. Em seguida, a equação é resolvida e com isso é calculado o valor da taxa de variação. Conhecendo-se o valor da taxa de variação da função linear, a sua lei de formação é formada e para calcular o valor desconhecido pedido na tarefa proposta, foi novamente utilizada a técnica τ_{3_1}.

Para resolver as tarefas propostas a partir de st3_3, verificamos a utilização de uma técnica que chamamos de τ_{3_3} e que consiste em descobrir a relação existente entre os números de uma tabela e com isso encontrar a lei de formação da função afim. Posteriormente, foi novamente utilizada a técnica τ_{3_1} para encontrar o valor desconhecido pedido na questão.

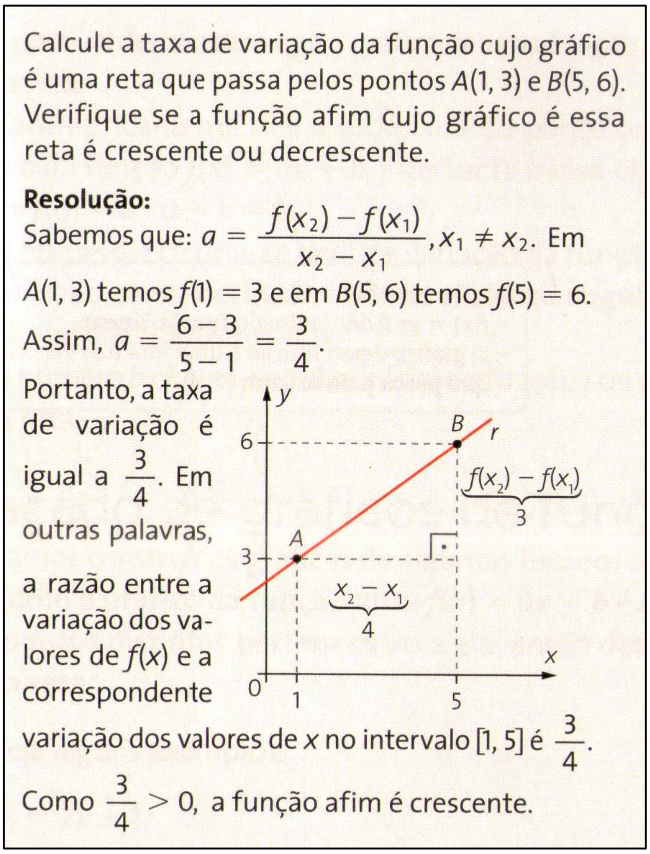
Em síntese, observamos que para resolver as tarefas propostas a partir de st3_3 o primeiro passo é encontrar a lei de formação da função afim para posteriormente ser calculado o valor desconhecido com a utilização da técnica τ_{3_1}. É importante destacar que a técnica τ_{3_3} é utilizada somente por LD4 e também que não encontramos tecnologia que a justifique.

O subtipo de tarefa st3_4 se caracteriza por calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano a partir dos dados fornecidos pelo enunciado de uma questão. Para esse subtipo de tarefa, não estamos considerando as tarefas que envolvem diretamente gráfico, tabela ou lei de formação da função afim. Nesse contexto, verificamos que para resolver as tarefas propostas a partir do subtipo st3_4, em alguns casos, foram novamente utilizadas as técnicas τ_{3_1}, τ_{3_11} e τ_{3_111}.

T_4: Classificar a função afim em crescente ou decrescente.

Esse tipo de tarefa está associado às tarefas que pedem para que o estudante classifique a função afim em crescente ou decrescente. Na figura 18, temos um exemplo de tarefa proposta a partir de T_4.

Figura 18 - Tarefa proposta por LD3 a partir do subtipo st4_2



Calcule a taxa de variação da função cujo gráfico é uma reta que passa pelos pontos $A(1, 3)$ e $B(5, 6)$. Verifique se a função afim cujo gráfico é essa reta é crescente ou decrescente.

Resolução:

Sabemos que: $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2$. Em $A(1, 3)$ temos $f(1) = 3$ e em $B(5, 6)$ temos $f(5) = 6$.

Assim, $a = \dfrac{6-3}{5-1} = \dfrac{3}{4}$.

Portanto, a taxa de variação é igual a $\dfrac{3}{4}$. Em outras palavras, a razão entre a variação dos valores de $f(x)$ e a correspondente variação dos valores de x no intervalo $[1, 5]$ é $\dfrac{3}{4}$.

Como $\dfrac{3}{4} > 0$, a função afim é crescente.

Fonte: DANTE (2013, p. 80)

Identificamos quatro subtipos de tarefa associados ao tipo T_4. Esses subtipos estão descritos a seguir:

- st4_1 – Classificar a função afim em crescente ou decrescente a partir da lei de formação.
- st4_2 – Classificar a função afim em crescente ou decrescente a partir de dois pontos.

- st4_3 – Classificar a função afim em crescente ou decrescente a partir de seu gráfico.
- st4_4 – Classificar a função afim em crescente ou decrescente a partir do enunciado de uma questão.

Na tabela 6, temos a frequência desses subtipos de tarefa.

Tabela 6 - Frequência dos subtipos de tarefas relacionados a T_4

Subtipos de tarefas	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st4_1	0	0	3	2	5
st4_2	0	0	1	0	1
st4_3	0	0	0	2	2
st4_4	0	0	0	1	1
Total	0	0	4	5	9

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Podemos perceber que os subtipos de tarefa relacionados à T_4, só aparecem nos livros do Ensino Médio (LD3 e LD4) e que em relação à frequência, há um total de nove ocorrências para esses subtipos de tarefa.

Para resolver as tarefas propostas a partir de st4_1, identificamos uma técnica que chamamos de τ_{4_1} e que consiste em classificar a função afim em crescente ou decrescente, a partir do valor da taxa de variação que está na lei de formação da função afim. Essa técnica está presente em LD3 e LD4 e é justificada pela tecnologia θ_{4_1}.

A tecnologia θ_{4_1} consiste em utilizar a definição de função crescente ($x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ou $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$) para concluir que essa sentença só será verdadeira se o valor de **a** em $f(x) = ax + b$, for positivo. De modo análogo é utilizada a definição de função decrescente ($x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ou $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$) para concluir que a função será decrescente se o valor de **a** for negativo. É importante frisar que identificamos a tecnologia θ_{4_1} em LD_3 e também em LD4.

Para resolver as tarefas que são propostas a partir do subtipo st4_2 (Classificar a função afim em crescente ou decrescente a partir de dois pontos), verificamos que primeiramente é encontrada a taxa de variação da função afim utilizando a técnica τ_{3_11} (encontrar a taxa de variação a partir da expressão $(y_2 – y_1) : (x_2 - x_1)$, onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são as coordenadas dos pontos dados na tarefa). Desse modo, conhecendo-se o valor da taxa de variação foi utilizada mais uma vez a técnica τ_{4_1} para classificar a função.

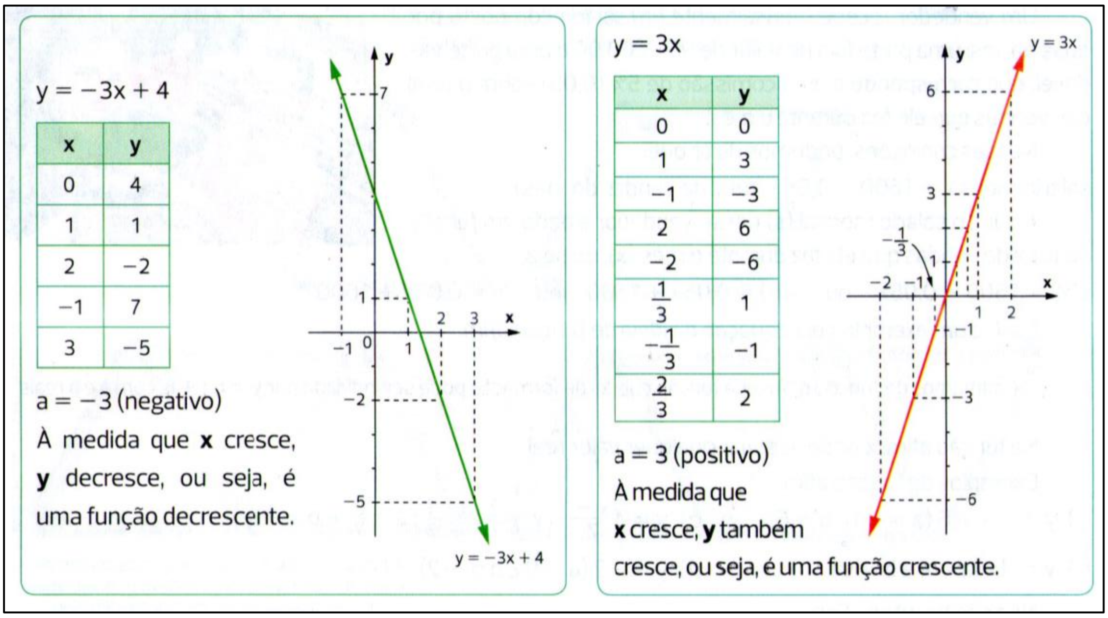
Para resolver as tarefas associadas ao subtipo st4_3 (classificar a função afim em crescente ou decrescente a partir de seu gráfico), foi utilizada uma técnica que consiste em classificar a função afim a partir da observação da medida do ângulo formado entre a reta e o eixo horizontal do plano cartesiano (sentido anti-horário). Nesse sentido, se o ângulo for agudo a função será crescente e se for obtuso será decrescente. Chamamos essa técnica de τ_{4_3} e ela está presente somente em LD4. Para esse caso, não identificamos a tecnologia que justifique a técnica.

Em relação ao subtipo de tarefa st4_4 (classificar a função afim em crescente ou decrescente a partir do enunciado de uma questão), não encontramos nenhuma técnica utilizada para resolver as tarefas propostas. Nesse caso a resposta da tarefa foi somente apresentada.

T_5: Construir o gráfico da função afim.

Esse tipo de tarefa envolve a construção do gráfico da função afim. Na figura 19, temos um exemplo de tarefa proposta a partir de T_5.

Figura 19 - Tarefa proposta por LD1 a partir do subtipo st5_2.



Fonte: DANTE (2012, p. 84)

Para o tipo de tarefa T_5 encontramos os subtipos a seguir:

- st5_1 – Construir o gráfico da função a partir de pontos.
- st5_2 – Construir o gráfico da função a partir da lei de formação.
- st5_3 – Construir o gráfico da função a partir de uma tabela.
- st5_4 – Construir o gráfico da função a partir do enunciado de uma questão.

Na tabela 7, temos a frequência de cada um dos subtipos de tarefas que foram identificados nos livros didáticos.

Tabela 7 - Frequência dos subtipos de tarefa relacionados a T_5

Subtipos de tarefas	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st5_1	2	0	3	0	5
st5_2	9	10	20	9	48
st5_3	0	1	2	0	3
st5_4	0	0	0	2	2
Total	11	11	25	11	58

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Observamos na tabela 7 que o subtipo de tarefa st5_2 é o que possui a maior frequência e também que ele está presente em todos os livros didáticos. Verificamos também que os subtipos de tarefa relacionados à T_5, têm um total de cinquenta e oito ocorrências.

Verificamos que para resolver as tarefas a partir de st5_1 é utilizada uma técnica que consiste em marcar dois pontos distintos no plano cartesiano e traçar a reta que passa por eles. Chamamos essa técnica de τ_{5_1} e a identificamos em LD1 e LD3.

Identificamos em LD4 a tecnologia que justifica a técnica θ_{5_1} e ela consiste em provar que o gráfico da função y = ax + b (a ≠ 0) afim é uma reta. Para isso, foram marcados, no plano cartesiano, três pontos distintos A (x_A, ax_A + b), B (x_B, ax_B + b) e P (x, ax + b), que pertencem à função afim. Em seguida, foram marcados mais dois pontos C e D, cujas coordenadas são respectivamente (x, ax_A + b) e (x_B, ax + b) e com isso foram formados os triângulos retângulos ACP e BDP. Com isso foi demostrado que os triângulos retângulos que foram formados são semelhantes, pois eles possuem dois lados proporcionais e um ângulo reto e que isso só pode acontecer se os pontos A, B e P pertencerem à mesma reta.

Também verificamos que para resolver as tarefas propostas a partir de st5_2 (Construir o gráfico da função a partir da lei de formação) foi utilizada uma técnica que chamamos de τ_{5_2}. Essa técnica está presente em todos os livros didáticos e consiste em construir uma tabela com duas colunas, onde na primeira delas estão alguns valores do domínio da função e na segunda estão as respectivas imagens. Em seguida, os pontos que estão na tabela são marcados no plano cartesiano e com isso é traçada a reta que passa por eles. Vale ressaltar que para preencher a tabela de valores foi utilizada a técnica τ_{3_1}.

Para resolver as tarefas associadas a st5_3 (construir o gráfico da função a partir de uma tabela), verificamos que são retiradas da tabela as coordenadas dos pontos da função e a partir deles foi utilizada a técnica τ_{5_1} para a construção do gráfico da função.

Nas tarefas propostas a partir de st5_4 (construir o gráfico da função a partir do enunciado de uma questão), é solicitado que seja construído o gráfico da função afim sem que sejam fornecidos diretamente pontos, uma tabela de valores ou lei de formação. Nesse contexto, constatamos que através do enunciado da questão foram retirados valores que representam pontos pertencentes à função e com eles foi utilizada novamente a técnica τ_{5_1} para a construção do gráfico.

A seguir apresentamos o próximo tipo de tarefa.

T_6: Construir uma tabela de valores para a função afim.

Nesse tipo de tarefa temos a construção de uma tabela de valores que faz a relação entre duas grandezas. Na figura 20, apresentada a seguir, temos um exemplo de tarefa que pertence ao tipo T_6.

Figura 20 - Tarefa proposta por LD2 a partir do subtipo st6_2

1. Marcela foi comprar bombons na confeitaria. Cada bombom custa R$1,80. A quantia que ela pagará (*y*) será função do número de bombons que levar (*x*), pois, para cada quantidade de bombons, há um único preço a ser cobrado.

Número de bombons (*x*)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	etc.
Preço a pagar (*y*)	0	1,80	3,60	5,40	7,20	9,00	10,80	12,60	14,40	16,20	18,00	

Os valores de *x* para essa função são números naturais. Não se compra 2,3 bombons ou algo assim.

Dizemos que o **domínio** dessa função é o conjunto dos números naturais. Nessa função, *x* pode ser qualquer número natural, como $x = 320$ ou $x = 1\,000$, mas *x* não pode ser uma fração ou número negativo, por exemplo.

Observando a tabela, vemos que quando $x = 3$, por exemplo, temos $y = 5,40$. Diremos que 5,40 é a **imagem** de 3 por esta função.

Fonte: ANDRINI (2012, p.100)

Encontramos para o tipo de tarefa construir uma tabela de valores para a função afim quatro subtipos de tarefa, são eles:

- st6_1 – Construir uma tabela de valores para a função afim a partir de sua lei de formação.
- st6_2 – Construir uma tabela de valores para a função afim a partir do enunciado de uma questão.
- st6_3 – Construir uma tabela de valores para a função afim a partir de seu gráfico.

Na tabela 8, temos a frequência desses subtipos de tarefa.

Tabela 8 - Frequência do subtipo de tarefa relacionado a T_6

Subtipos de tarefas	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st6_1	1	1	0	2	4
st6_2	0	5	1	0	6
st6_3	0	1	0	0	1
Total	1	7	1	2	11

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Observando essa tabela, temos que o subtipo de tarefa st6_2 é o que aparece com maior frequência. Verificamos também que nenhum desses subtipos está presente em todos os livros didáticos.

Para resolver as tarefas propostas a partir de st6_1, constatamos que mais uma vez foi utilizada a técnica τ_{5_2} (construir uma tabela com duas colunas, onde na primeira delas estão alguns valores do domínio da função e na segunda estão as respectivas imagens). Verificamos também que para encontrar os valores da imagem para preencher a tabela, foi utilizada a técnica τ_{3_1} (substituir valores do domínio na lei de formação para encontrar as imagens). Essas duas técnicas foram utilizadas em LD1, LD3 e LD4. É importante destacar que essas mesmas técnicas (τ_{5_2} e τ_{3_1}) também foram utilizadas na resolução das tarefas propostas a partir de st6_2.

Em relação às tarefas associadas a st6_3, identificamos em LD2 novamente a utilização da técnica τ_{5_2}, vale ressaltar que os números que estão na tabela foram retirados do gráfico da função afim.

A seguir apresentamos o sétimo tipo de tarefa.

T_7: Determinar a posição relativa de duas retas no plano.

Para esse tipo de tarefa, encontramos somente o subtipo descrito a seguir.

- st7_1 – Determinar a posição relativa de retas no plano a partir de suas leis de formação.

Na tabela 9 temos a frequência desse subtipo de tarefa.

Tabela 9 - Frequência do subtipo de tarefa relacionado a T_7

Subtipos de tarefas	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st7_1	0	1	0	0	1
Total	0	1	0	0	1

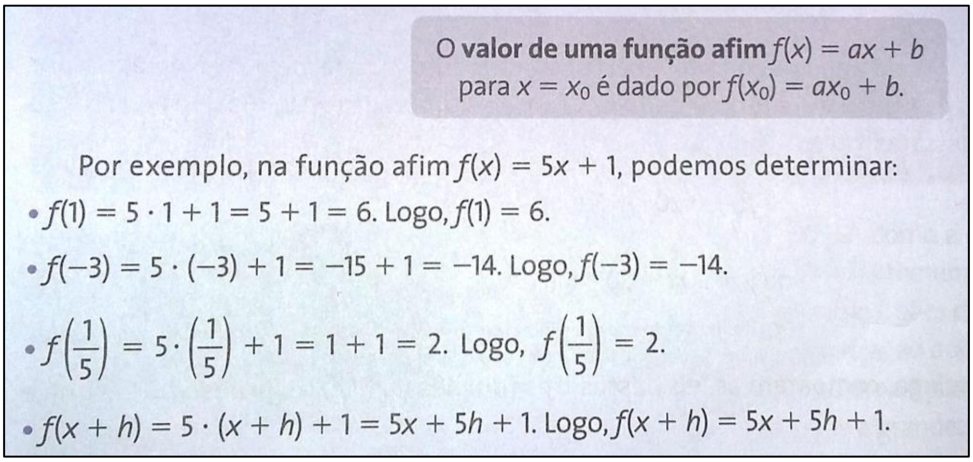
Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

O subtipo de tarefa st7_1 está presente somente em LD2 e em relação à frequência, constatamos que ele aparece somente uma vez. Para a realização da tarefa associada a st7_1, não identificamos a utilização de nenhuma técnica.

T_8: Determinar pontos da função afim.

Esse tipo de tarefa consiste em determinar pontos (pares ordenados) que pertencem à função afim. Na figura 21, temos um exemplo de tarefa associada a esse subtipo.

Figura 21 - Tarefa proposta por LD3 a partir do subtipo st8_1



O **valor de uma função afim** $f(x) = ax + b$ para $x = x_0$ é dado por $f(x_0) = ax_0 + b$.

Por exemplo, na função afim $f(x) = 5x + 1$, podemos determinar:

- $f(1) = 5 \cdot 1 + 1 = 5 + 1 = 6$. Logo, $f(1) = 6$.
- $f(-3) = 5 \cdot (-3) + 1 = -15 + 1 = -14$. Logo, $f(-3) = -14$.
- $f\left(\frac{1}{5}\right) = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) + 1 = 1 + 1 = 2$. Logo, $f\left(\frac{1}{5}\right) = 2$.
- $f(x + h) = 5 \cdot (x + h) + 1 = 5x + 5h + 1$. Logo, $f(x + h) = 5x + 5h + 1$.

Fonte: Dante (2013, p. 74)

Identificamos nos livros didáticos três subtipos de tarefas associados ao tipo T_8, são eles:

- st8_1 – Determinar pontos da função afim a partir da lei de formação.
- st8_2 – Determinar ponto de encontro de duas funções afim a partir da lei de formação.

- st8_3 – Determinar ponto de encontro de duas funções afim a partir de seus gráficos.

A seguir está descrita a frequência de cada um desses subtipos de tarefa.

Tabela 10 - Frequência dos subtipos de tarefas relacionados a T_8

Subtipos de tarefas	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st8_1	8	11	12	5	36
st8_2	1	0	0	0	1
st8_3	0	0	0	1	1
Total	9	11	12	6	38

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

De acordo com a tabela 10, observamos que st8_1 aparece em todos os livros didáticos e que esse subtipo de tarefa é o que possui a maior frequência. Verificamos que para resolver as tarefas propostas a partir de st8_1, foi utilizada novamente a técnica τ_{3_1} (substituir diretamente números do domínio da função na lei de formação para encontrar as respectivas imagens). Essa técnica foi utilizada em todos os livros didáticos.

Para determinar pontos da função a partir da lei de formação (st8_1), verificamos que existem tarefas que solicitam o cálculo de um valor do domínio que está associado a uma imagem pré-determinada. Para esses casos, identificamos uma técnica que chamamos de τ_{8_1} e que consiste em igualar a função ao número dado e resolver a equação do primeiro grau cuja incógnita é o valor do domínio. Essa mesma técnica foi utilizada em LD1, LD2 e LD3 e não identificamos a tecnologia que justifica essa técnica.

Ainda em relação às tarefas associadas a st8_1, verificamos também que algumas delas envolvem o cálculo da raiz da função. Nesse aspecto, a técnica utilizada consiste em igualar a lei de formação a zero e resolver a equação do primeiro grau formada e cuja solução é a raiz da função. Chamamos essa técnica de τ_{8_11} e a identificamos em todos os livros didáticos.

Em relação à tecnologia que justifica a técnica τ_{8_11}, verificamos que ela está presente em LD3 e LD4 e nessas obras foram utilizadas a definição de raiz de uma função. Essa tecnologia que chamamos de θ_{8_11}, diz que a raiz de uma função f é todo valor x de seu domínio tal que f(x) = 0.

Na tarefa proposta a partir do subtipo st8_2 (Determinar ponto de encontro de duas funções afim a partir da lei de formação), não verificamos a utilização de nenhuma técnica.

Para resolver a tarefa proposta a partir de st8_3 (determinar ponto de encontro de duas funções afim a partir de seus gráficos), identificamos a utilização de três técnicas distintas. A primeira consiste em descobrir as leis de formação das funções a partir dos pontos fornecidos pelo gráfico, utilizando a técnica τ_{311111} (substituir na equação y = ax + b as coordenadas dos pontos fornecidos na tarefa e a partir disso formar um sistema linear de duas equações, cujas incógnitas são os valores de a e b e com a resolução desse sistema linear são encontrados os valores de a e b para que seja escrita a lei de formação da função afim).

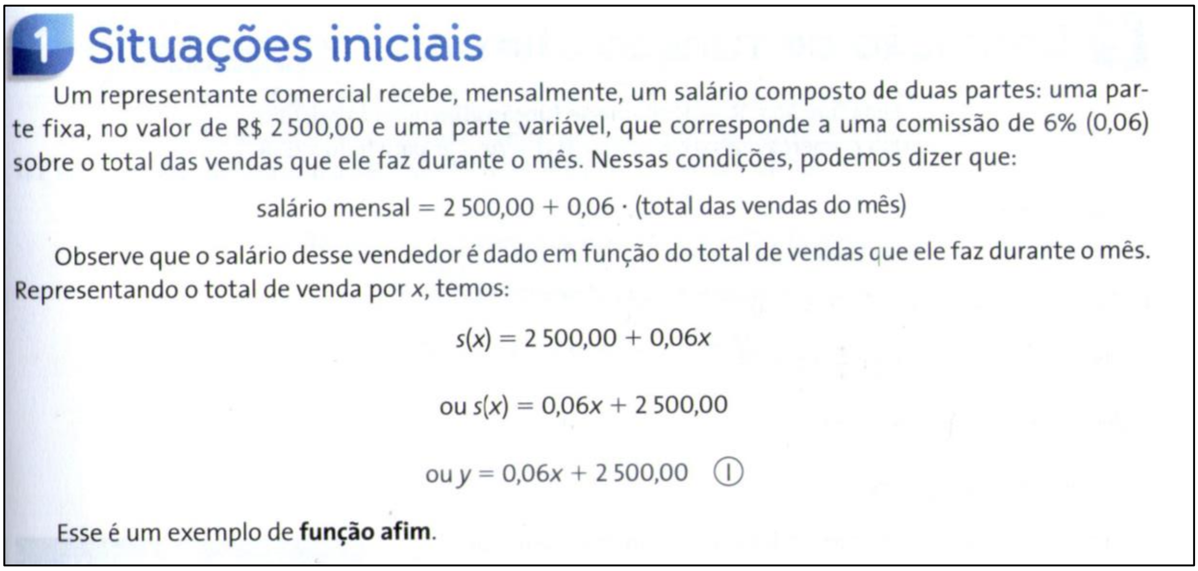
Conhecendo-se a lei de formação da função, foi utilizada uma técnica que chamamos de τ_{8_3}**.** Essa técnica consiste em igualar as leis de formação das duas funções, resolver a equação do primeiro grau formada e descobrir o valor da abscissa do ponto comum às funções. Em seguida, foi novamente utilizada a técnica τ_{3_1} para encontrar a ordenada do ponto em questão. Vale ressaltar que as três técnicas utilizadas para resolver as tarefas propostas a partir de st8_3 estão presentes somente em LD4 e também que encontramos somente justificativa (θ_{3_1}) para a utilização da técnica τ_{3_1}.

A seguir apresentamos o próximo tipo de tarefa.

T_9: Escrever a fórmula da função afim.

Esse tipo de tarefa envolve todas as tarefas que pedem para os estudantes escreverem a fórmula da função afim. Na figura 22 temos um exemplo de tarefa proposta.

Figura 22 - Tarefa proposta por LD3 a partir do subtipo st9_5



1 Situações iniciais

Um representante comercial recebe, mensalmente, um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R$ 2 500,00 e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 6% (0,06) sobre o total das vendas que ele faz durante o mês. Nessas condições, podemos dizer que:

$$\text{salário mensal} = 2\,500{,}00 + 0{,}06 \cdot (\text{total das vendas do mês})$$

Observe que o salário desse vendedor é dado em função do total de vendas que ele faz durante o mês. Representando o total de venda por x, temos:

$$s(x) = 2\,500{,}00 + 0{,}06x$$

$$\text{ou } s(x) = 0{,}06x + 2\,500{,}00$$

$$\text{ou } y = 0{,}06x + 2\,500{,}00 \quad \text{(I)}$$

Esse é um exemplo de **função afim**.

Fonte: Dante (2013, p. 73)

O tipo de tarefa T_9 foi é o que possui mais subtipos de tarefas. Esses subtipos são:

- st9_1 – Escrever a lei de formação da função afim a partir de uma questão do cotidiano.
- st9_2 – Escrever a lei de formação da função afim a partir de dois pontos.
- st9_3 – Escrever a lei de formação da afim a partir de seu gráfico.
- st9_4 – Escrever a lei de formação da função afim a partir de uma tabela.
- st9_5 – Escrever a lei de formação da função afim a partir da taxa de variação e do coeficiente linear.
- st9_6 – Escrever a lei de formação da função afim que passa por um ponto e que possui a mesma taxa de variação de uma reta dada.
- st9_7 – Escrever a lei de formação da função afim a partir de uma figura geométrica.
- st9_8 – Escrever a lei de formação da função afim a partir de um ponto e da taxa de variação.
- st9_9 – Escrever a lei de formação da função afim a partir de um ponto.
- st9_10 – Escrever a lei de formação da função afim a partir de um ponto e do coeficiente linear.

Na tabela 11, temos a frequência desses tipos de tarefa em cada livro didático.

Tabela 11 - Frequência dos subtipos de tarefas relacionados a T_9

Subtipos de tarefas	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st9_1	3	7	2	23	35
st9_2	0	0	4	3	7
st9_3	1	2	9	4	16
st9_4	1	10	1	2	14
st9_5	0	0	4	9	13
st9_6	0	0	3	1	4
st9_7	2	2	1	4	9
st9_8	2	3	1	1	7
st9_9	1	0	0	0	1
st9_10	0	0	0	2	2
Total	10	24	25	49	108

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

A tabela 11 nos mostra que o subtipo de tarefa st9_1 (escrever a lei de formação da função afim a partir de uma questão do cotidiano) é o que possui a maior frequência com um total de trinta e cinco ocorrências. Nesse aspecto, verificamos também que LD4 é o livro que possui mais subtipos de tarefas associados ao tipo T_9. Conforme verificamos na tabela 11, temos um total de cento e oito subtipos de tarefas.

Verificamos em LD4 e LD3 a utilização de algumas técnicas para resolver as tarefas propostas a partir de st9_1. Nesse contexto, foi utilizada novamente a técnica τ_{3_11} (calcular o valor da taxa de variação através da expressão $(y_2 – y_1) : (x_2 - x_1)$) para encontrar a taxa de variação da função afim e posteriormente foi utilizada uma outra técnica que chamamos de τ_{9_1}. Essa técnica consiste em identificar um ponto que pertence a função afim e com isso descobrir sua lei de formação substituindo na equação $a = (y_2 – y_1) : (x_2 - x_1)$ as coordenadas do ponto e também a taxa de variação que foi calculada anteriormente.

Também verificamos que para resolver outras tarefas propostas a partir de st9_1, foi utilizada uma técnica que chamamos de τ_{9_11}. Essa técnica consiste em identificar a taxa de variação e o coeficiente linear da função afim no enunciado de uma questão e com esses dados escrever a fórmula da função $y = ax + b$.

É importante destacar que os quatro livros didáticos analisados trazem a tecnologia que justifica a técnica τ_{9_11}. Chamamos essa tecnologia de θ_{9_11} e ela consiste na definição de taxa de variação e de coeficiente linear da função afim.

Desse modo, a taxa de variação da função afim é a variação em f(x) causada por cada aumento de uma unidade em x e o coeficiente linear é dado pelo número b = f(0).

Para escrever a lei de formação da função a partir de dois pontos (st9_2), verificamos que foi utilizada em LD3 a técnica τ_{311111} (substituir na equação y = ax + b os pontos fornecidos pela questão e a partir disso resolver um sistema linear de duas equações, cujas incógnitas são os valores de a e b). Para a resolução de outras tarefas em LD4, verificamos que foi novamente utilizada a técnica τ_{9_1}.

Para a resolução das tarefas propostas a partir de st9_3 (escrever a lei de formação da função afim a partir de seu gráfico), verificamos que a partir do gráfico da função foram retirados dois pontos distintos e foi utilizada novamente a técnica τ_{9_1} (identificar um ponto que pertence a função afim e com isso descobrir sua lei de formação substituindo na equação $a = (y_2 – y_1) : (x_2 - x_1)$ as coordenadas do ponto e também a taxa de variação que foi calculada anteriormente) para escrever a fórmula da função afim. Em outras tarefas propostas a partir desse mesmo subtipo, identificamos novamente a utilização da técnica τ_{3_2}. Vale ressaltar que as técnicas τ_{9_1} e τ_{3_2} foram utilizadas em LD3.

Para resolver as tarefas propostas a partir do subtipo st9_4 (Escrever a lei de formação da função afim a partir de uma tabela) não encontramos a utilização de nenhuma técnica, pois as respostas são somente apresentadas.

No subtipo de tarefa st9_5 (escrever a lei de formação da função afim a partir da taxa de variação e do coeficiente linear), estamos considerando as tarefas que apresentam de forma explícita o valor da taxa de variação e do coeficiente linear para que o aluno somente escreva a lei de formação da função afim. Nesses casos, verificamos que a técnica utilizada foi τ_{9_11}.

Também verificamos em LD3 e LD4 que são propostas, a partir do subtipo st9_6 (escrever a lei de formação da função afim que passa por um ponto e que possui a mesma taxa de variação de uma reta dada), algumas tarefas que foram resolvidas com a técnica τ_{9_1} (descobrir a lei de formação da função substituindo na equação $a = (y_2 – y_1) : (x_2 - x_1)$ as coordenadas do ponto e também a taxa de variação conhecida).

Essa mesma técnica (τ_{9_1}) é utilizada em LD4 para resolver as tarefas relacionadas à st9_8 (escrever a lei de formação da função afim a partir de um ponto e da taxa de variação) e st9_10 (escrever a lei de formação da função afim a partir de um ponto e do coeficiente linear).

Para as tarefas propostas a partir do subtipo st9_7 (escrever a lei de formação da função afim a partir de uma figura geométrica), as respostas são somente apresentadas, desse modo também não identificamos a utilização de nenhuma técnica.

Conforme nos mostra a tabela 11, encontramos somente uma tarefa associada ao subtipo st9_9 (escrever a lei de formação da função afim a partir de um ponto). Essa tarefa envolvia a escrita da lei de formação da função linear e observamos que foi novamente utilizada a técnica τ_{9_1}.

O último subtipo de tarefa relacionado ao tipo T_9 é o subtipo st9_10 e para a resolução das tarefas não encontramos nenhuma técnica.

A seguir temos o próximo tipo de tarefa.

T_{10}: Escrever em linguagem natural a resposta de uma questão.

Esse tipo de tarefa está associado às tarefas que pedem para o aluno escrever em linguagem natural a resposta de uma questão sobre função afim, ou seja, estamos considerando a escrita em linguagem corrente. Para o tipo de tarefa T_{10} encontramos o seguinte subtipo de tarefa:

- st10_1 – Escrever em linguagem natural a resposta de uma questão sobre função afim.

Na tabela 12, temos a frequência desse subtipo de tarefa nos livros didáticos.

Tabela 12 - Frequência dos subtipos de tarefa relacionados a T_{10}

Subtipo de tarefa	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st10_1	2	1	0	6	9
Total	2	1	0	6	9

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Esse subtipo de tarefa está presente em três dos livros didáticos e conforme podemos verificar LD1 e LD4 são os livros que mais possuem subtipos de tarefas que envolvem a escrita em linguagem natural. Para realizar as tarefas propostas a partir do subtipo st10_1, identificamos a utilização de algumas técnicas.

Inicialmente queremos destacar uma tarefa que é proposta em LD1 e LD4 e que pede para o aluno justificar por que a função identidade é um caso particular de função afim. A técnica utilizada consiste em utilizar o fato de que para uma função do tipo y = ax + b ser identidade é necessário que a = 1 e b = 0. Chamamos essa técnica de τ_{10_1} e ela foi utilizada em LD1 e LD4. Nesses dois livros identificamos a tecnologia utilizada para justificar a técnica τ_{10_1}. Chamamos essa tecnologia de θ_{10_1} e ela consiste em utilizar a própria definição de função afim (uma função é afim, quando é do tipo f(x) = ax + b com **a** e **b** números reais).

Também verificamos que em LD1, foi proposta uma tarefa que consiste em justificar o motivo pelo qual os gráficos das funções lineares sempre passam pela origem do plano cartesiano. Nesse contexto, encontramos uma técnica que consiste em utilizar o fato do ponto (0, 0) sempre pertencer à função linear para justificar o motivo pelo qual seu gráfico sempre passar pela origem. Chamamos essa técnica de τ_{10_2}.

Identificamos em LD2 uma tarefa que consiste em explicar por que uma função que modela uma situação matemática não poder ter um determinado valor como imagem. A técnica para resolver essa tarefa, consiste em utilizar a definição de domínio de uma função para justificar o motivo pelo qual a função não pode ter um valor de imagem que é pedido na situação descrita na tarefa. Essa técnica, chamamos de τ_{10_3} e verificamos que ela está presente somente em LD2.

Vale ressaltar que existem tarefas que solicitam ao estudante responder as tarefas utilizando o registro em linguagem natural, mas não ficou claro as técnicas que foram utilizadas.

T_{11}: Identificar se a função é afim.

O tipo de tarefa T_{11} engloba todas as tarefas que pedem para o aluno identificar se a função é ou não afim.

Encontramos dois subtipos de tarefa relacionados ao tipo de tarefa T_{11}, são eles:

- st11_1 – Identificar se a função é afim através da lei de formação.
- st11_2 – Identificar se a função é afim através do gráfico.

Tabela 13 - Frequência dos subtipos de tarefas relacionados a T_{11}

Subtipos de tarefas	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st11_1	17	0	0	6	23
st11_2	1	0	0	0	1
Total	18	0	0	6	24

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

A tabela 13 nos mostra que o subtipo de tarefa st11_1 é o que aparece com mais frequência. Também podemos perceber que LD1 é o livro que tem a maior ocorrência de subtipos de tarefa relacionados a T_{11}. Desse modo, encontramos um total de vinte e quatro ocorrências considerando os subtipos de tarefas st11_1, st11_2.

Identificamos em LD1 e LD4 a mesma técnica para resolver as tarefas propostas a partir de st11_1. Chamamos essa técnica de τ_{11_1} e ela consiste em verificar se a função dada na questão é da forma f(x) = ax + b (a e b números reais). A tecnologia associada a essa técnica é dada pela própria definição de função afim (θ_{10_1}) e ela está presente em LD1 e LD4.

Para resolver as tarefas propostas a partir de st11_2, não identificamos a presença de nenhuma técnica.

T_{12}: Identificar se o ângulo de declividade da reta é agudo ou obtuso.

O tipo de tarefa T_{12} envolve as tarefas que pedem para o estudante verificar se o ângulo formado entre a reta que representa a função e o eixo das abscissas é agudo ou obtuso. Associado a T_{12}, encontramos somente um subtipo de tarefa.

- st12_1 – Identificar se o ângulo de declividade da reta é agudo ou obtuso através da lei de formação da função.

Em relação a esse subtipo de tarefa, encontramos a seguinte ocorrência:

Tabela 14 - Frequência do subtipo de tarefa relacionados a T_{12}

Subtipos de tarefas	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st12_1	4	0	0	0	4
Total	4	0	0	0	4

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Podemos perceber que st12_1 aparece somente em LD1 e em relação à ocorrência, esse subtipo aparece quatro vezes.

Para resolver as tarefas propostas a partir do subtipo st12_1, identificamos uma técnica que chamamos de τ_{12_1}. Essa técnica consiste em determinar se o ângulo de declividade da reta é agudo ou obtuso a partir do sinal da taxa de variação que está presente na lei de formação da função afim. Não identificamos em LD_1 a presença da tecnologia que justifica τ_{12_1}.

T_{13}: Identificar ponto(s) que pertence(m) à função afim.

Esse subtipo de tarefa está associado às tarefas que pedem para que o aluno identifique pontos que pertencem à função afim.

Para esse tipo de tarefa encontramos os subtipos abaixo:

- st13_1 – Identificar se um ponto pertence a função afim a partir da lei de formação.
- st13_2 – Identificar pontos que possuem uma coordenada desconhecida e que pertencem ao gráfico da função afim.

Para esses subtipos encontramos a seguinte frequência:

Tabela 15 - Frequência dos subtipos de tarefas relacionados a T_{13}

Subtipos de tarefas	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st13_1	2	0	0	0	2
st13_2	2	0	0	0	2
Total	4	0	0	0	4

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Conforme nos mostra a tabela 15, os subtipos de tarefa st13_1 e st13_2 aparecem somente em LD1.

Para resolver as tarefas relacionadas ao subtipo st13_1 foi utilizada uma técnica que chamamos de τ_{13_1} e que consiste em substituir na lei de formação da função as coordenadas dos pontos e verificar se eles satisfazem a relação que define a função. A tecnologia que valida a técnica τ_{13_1} é θ_{3_1} (o valor da função afim que para $x = x_0$ é dado por $f(x_0) = ax_0 + b$).

Observamos em LD1 a presença de duas técnicas para resolver as tarefas propostas a partir do subtipo st13_2. Primeiramente é utilizada a técnica τ_{2_1} (substituir as coordenadas do ponto dado na lei de formação da função, formar uma equação do primeiro grau e resolvê-la) e posteriormente, a técnica τ_{13_1} para identificar se o ponto pertence à função afim.

T_{14}: Identificar se existe proporcionalidade.

O tipo de tarefa T_{14} se caracteriza por identificar se existe ou não proporcionalidade em algumas situações que envolvem a função afim. Para esse tipo de tarefa encontramos três subtipos.

- st14_1 – Identificar se existe proporcionalidade a partir da lei de formação da função afim.
- st14_2 – Identificar se existe proporcionalidade a partir dos números de uma tabela.
- st14_3 – Identificar se existe proporcionalidade a partir do enunciado de uma questão.

Apresentamos a seguir a tabela 16, que mostra a frequência desses subtipos de tarefa.

Tabela 16 - Frequência do subtipo de tarefa relacionado a T_{14}

Subtipos de tarefas	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st14_1	0	0	0	2	2
st14_2	1	0	0	0	1
st14_3	4	0	4	1	9
Total	5	0	4	3	12

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Percebemos que nenhum dos subtipos de tarefa que foram apresentados está presente em todos os livros didáticos simultaneamente. Podemos observar também que st14_3 é o subtipo que está mais presente nos livros didáticos e, em relação ao total de ocorrências, temos que esses subtipos aparecem doze vezes.

Assim como para alguns casos que já citamos no decorrer de nossa pesquisa, também não identificamos nenhuma técnica para resolver as tarefas propostas a partir de st14_1, st14_2 e st14_3.

T_{15}: Identificar o coeficiente linear da função afim.

O tipo de tarefa T_{15} envolve as tarefas que trabalham com a identificação do coeficiente linear da função afim. Associado ao tipo de tarefa T_{15}, identificamos somente dois subtipos. São eles:

- st15_1 – Identificar o coeficiente linear da função afim a partir de sua lei de formação.
- st15_2 – Identificar o coeficiente linear da função afim a partir de seu gráfico.

Na tabela 17, temos a frequência desses subtipos de tarefas.

Tabela 17 - Frequência do subtipo de tarefa relacionado a T_{15}

Subtipos de tarefas	LD_1	LD_2	LD_3	LD_4	Total
st15_1	0	0	1	5	6
st15_2	0	0	0	1	1
Total	0	0	1	6	7

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Essa tabela nos mostra que o subtipo de tarefa st15_1 aparece seis vezes, sendo uma vez em LD3 e cinco vezes em LD4, desse modo há um total de seis ocorrências.

Para responder as tarefas propostas a partir de st15_1, observamos em LD3 e LD4, a utilização de uma técnica que consiste em identificar o termo independente na lei de formação da função afim. Chamamos essa técnica de τ_{15_1} e a tecnologia que a justifica (θ_{9_11}) consiste na própria definição de coeficiente linear, que faz referencia a esse termo dizendo que ele é o número b = f(0).

Conforme nos mostra a tabela 17, também identificamos associado ao tipo de tarefa T_{15}, o subtipo st15_2. Nesse aspecto, para resolver as tarefas propostas a partir desse subtipo, foi utilizada uma técnica que identificamos como τ_{15_2} e que consiste em verificar o número onde a reta corta o eixo das ordenadas. Na justificativa dessa técnica, foi novamente utilizada a tecnologia θ_{9_11}.

A seguir temos o próximo tipo de tarefa.

T_{16}: Identificar a taxa de variação da função afim

Esse tipo de tarefa envolve a identificação da taxa de variação da função afim. Conforme descrevemos abaixo, encontramos dois subtipos de tarefa associados ao tipo T_{16}.

- st16_1 – Identificar a taxa de variação da função afim a partir de sua lei de formação.
- st16_2 – Identificar a taxa de variação da função afim a partir de seu gráfico.

Na tabela 18 temos a frequência desse subtipo de tarefa.

Tabela 18 - Frequência do subtipo de tarefa relacionado a T_{16}

Subtipos de tarefas	LD_1	LD_2	LD_3	LD_4	Total
st16_1	0	0	3	4	7
st16_2	0	0	0	1	1
Total	0	0	3	5	8

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

De acordo com a tabela anterior, percebemos que o subtipo de tarefa st16_1 aparece somente nos livros do Ensino Médio, com um total de sete ocorrências. Também verificamos que o subtipo de tarefa st16_2 que está presente somente em LD4.

Identificamos em LD3 uma técnica para resolver as tarefas propostas a partir de st16_1. Chamamos essa técnica de τ_{16_1} e a mesma consiste em observar o valor de **a** na lei de formação f(x) = ax + b. A tecnologia que justifica essa técnica consiste em utilizar a definição de taxa média de uma função. Nesse caso, a taxa média no intervalo [x, x + h] é dado pela expressão $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Desse modo, utilizando a lei de formação f(x) = ax + b, chega-se à conclusão de que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ = **a**. Chamamos essa tecnologia de θ_{16_1} e a identificamos somente em LD3.

Para resolver a tarefa proposta a partir do subtipo st16_2, não identificamos a utilização de nenhuma técnica.

T_{17}: Identificar as variáveis dependente e independente da função afim.

O tipo de tarefa T_{17} envolve as tarefas que pedem para o aluno identificar as variáveis dependente e independente da função afim. Associados a esse tipo, encontramos somente um subtipo.

- st17_1 – Identificar as variáveis dependente e independente da função afim a partir do enunciado de uma questão.

Em relação à frequência, identificamos esse subtipo de tarefa apenas em LD_4.

Tabela 19 - Frequência do subtipo de tarefa relacionado a T_{17}

Subtipos de tarefas	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st17_1	0	0	0	1	1
Total	0	0	0	1	1

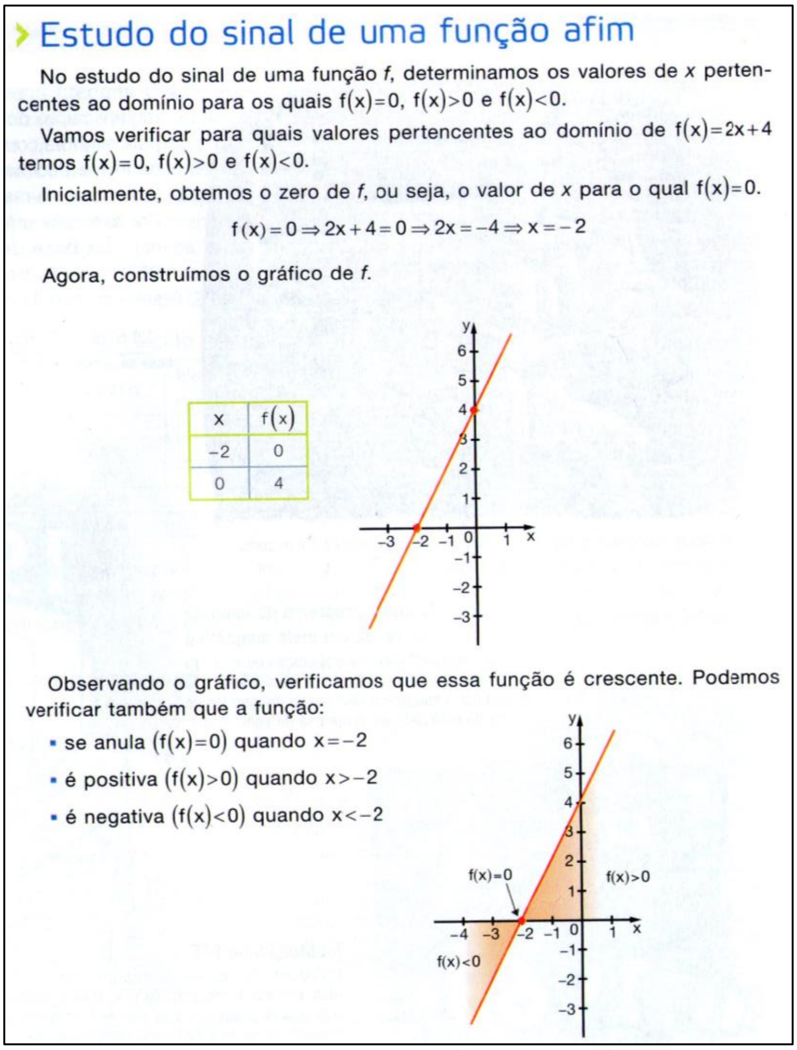
Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Para resolver a tarefa associada a st17_1, não identificamos a utilização de nenhuma técnica, pois durante a resolução somente é descrito se a variável é dependente ou independente.

T_{18}: Realizar o estudo do comportamento da função afim.

Nesse tipo de tarefa, estamos considerando o estudo do comportamento da função afim como sendo a verificação dos intervalos onde a função tem imagens positiva, negativa ou nula. Na figura 23 temos um exemplo de tarefa associado ao tipo T_{18}.

Figura 23 - Tarefa proposta por LD3 a partir do subtipo st8_1



Estudo do sinal de uma função afim

No estudo do sinal de uma função *f*, determinamos os valores de *x* pertencentes ao domínio para os quais $f(x)=0$, $f(x)>0$ e $f(x)<0$.

Vamos verificar para quais valores pertencentes ao domínio de $f(x)=2x+4$ temos $f(x)=0$, $f(x)>0$ e $f(x)<0$.

Inicialmente, obtemos o zero de *f*, ou seja, o valor de *x* para o qual $f(x)=0$.

$$f(x)=0 \Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$$

Agora, construímos o gráfico de *f*.

x	f(x)
−2	0
0	4

Observando o gráfico, verificamos que essa função é crescente. Podemos verificar também que a função:

- se anula $(f(x)=0)$ quando $x=-2$
- é positiva $(f(x)>0)$ quando $x>-2$
- é negativa $(f(x)<0)$ quando $x<-2$

Fonte: SOUZA, (2013, p. 100)

Para o tipo de tarefa T_{18}, encontramos o subtipo descrito a seguir:

- st18_1 – Realizar o estudo do comportamento da função afim a partir da lei de formação.

A tabela 20 traz a frequência desse subtipo de tarefa.

Tabela 20 - Frequência do subtipo de tarefa relacionado a T_{18}.

Subtipos de tarefas	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st18_1	0	0	7	8	15
Total	0	0	7	8	15

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

A tabela 20 mostra que LD1 e LD2 não apresentam tarefas relacionadas ao subtipo st18_1.

Na resolução das tarefas propostas a partir de st18_1, identificamos novamente a utilização da técnica τ_{8_11} (igualar a lei de formação a zero para calcular o valor da raiz da função). Verificamos que essa técnica é novamente utilizada porque o estudo do comportamento da função é realizado a partir do valor que representa a raiz da função afim. Essa técnica está presente em LD3 e LD4. Vale ressaltar que a justificativa dessa técnica é dada pela tecnologia que já identificamos como θ_{8_11}. Essa tecnologia diz que a raiz de uma função f é todo valor x de seu domínio tal que $f(x) = 0$.

Após ser encontrada a raiz da função, verificamos que foi utilizada uma técnica que chamamos de τ_{18}. Essa consiste em determinar para quais valores do domínio a função é positiva ou negativa. Verificamos também que em LD4 existe uma tecnologia que justifica essa técnica e a identificamos como θ_{18_1}. Essa tecnologia diz que:

- Se função $f(x) = ax + b$ for crescente, f(x) será maior que zero para todos os valores maiores que a raiz da função e será menor que zero para os valores do domínio menores que o zero da função.
- Se função $f(x) = ax + b$ for decrescente, f(x) será menor que zero para todos os valores maiores que a raiz da função e será maior que zero para os valores do domínio menores que o zero da função.

A seguir temos o último tipo de tarefa que encontramos nos livros didáticos.

T_{19}: Realizar a comparação entre funções.

As tarefas propostas a partir do tipo T_{19}, envolvem a comparação entre duas ou mais funções, de modo a definir a partir de que valores de seus domínios, uma função possui a imagem maior, menor ou igual ao da outra função. Associados ao tipo de tarefa T_{19}, encontramos os seguintes subtipos:

- st19_1 – Realizar a comparação entre funções a partir do enunciado de uma questão.
- st19_2 – Realizar a comparação entre funções a partir de seus gráficos.
- st19_3 – Realizar a comparação entre funções a partir de uma tabela.
- st19_4 – Realizar a comparação entre funções a partir de suas leis de formação.

Na tabela abaixo mostramos a frequência desses subtipos de tarefa.

Tabela 21 - Frequência do subtipo de tarefa relacionado a T_{20}

Subtipos de tarefas	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st19_1	1	0	5	2	8
st19_2	0	1	0	2	3
st19_3	2	0	0	0	2
st19_4	0	0	1	0	1
Total	3	1	6	4	14

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

A tabela 21 nos mostra que nenhum subtipo de tarefa relacionado a T_{19} está presente em todos os livros didáticos. Percebemos também que o subtipo st19_1 é o que possui maior frequência com um total de oito ocorrências.

Para realizar as tarefas propostas a partir de st19_1, verificamos que antes de realizar a comparação entre as funções, os seus gráficos são construídos no mesmo plano cartesiano. Nesse sentido, foram novamente utilizadas as técnicas τ_{5_2} (construir uma tabela com duas colunas, onde na primeira delas estão alguns valores do domínio da função e na segunda estão as respectivas imagens) e τ_{5_1} (marcar no eixo horizontal do plano cartesiano os valores do domínio da função e as respectivas imagens no eixo vertical e traçar as retas que representam os gráficos dessas funções). Nesse contexto, a comparação é realizada a partir do ponto comum entre as retas que representam os gráficos das funções. Chamamos de τ_{19_1} a técnica de comparar duas funções a partir do ponto comum entre seus gráficos.

Em suma, verificamos que para resolver as tarefas propostas a partir do subtipo st19_1, foram utilizadas três técnicas distintas (τ_{5_2}, τ_{5_1}, τ_{19_1}) em LD1, LD3 e LD4. É importante deixar claro que não encontramos, nos livros didáticos, a tecnologia que justifica a técnica τ_{19_1}.

Para resolver as tarefas propostas a partir do subtipo st19_2 (Realizar a comparação entre funções a partir de seus gráficos), também foi utilizada a técnica de comparar as funções a partir do ponto comum entre elas. Conforme já destacamos, chamamos essa técnica de τ_{19_1}.

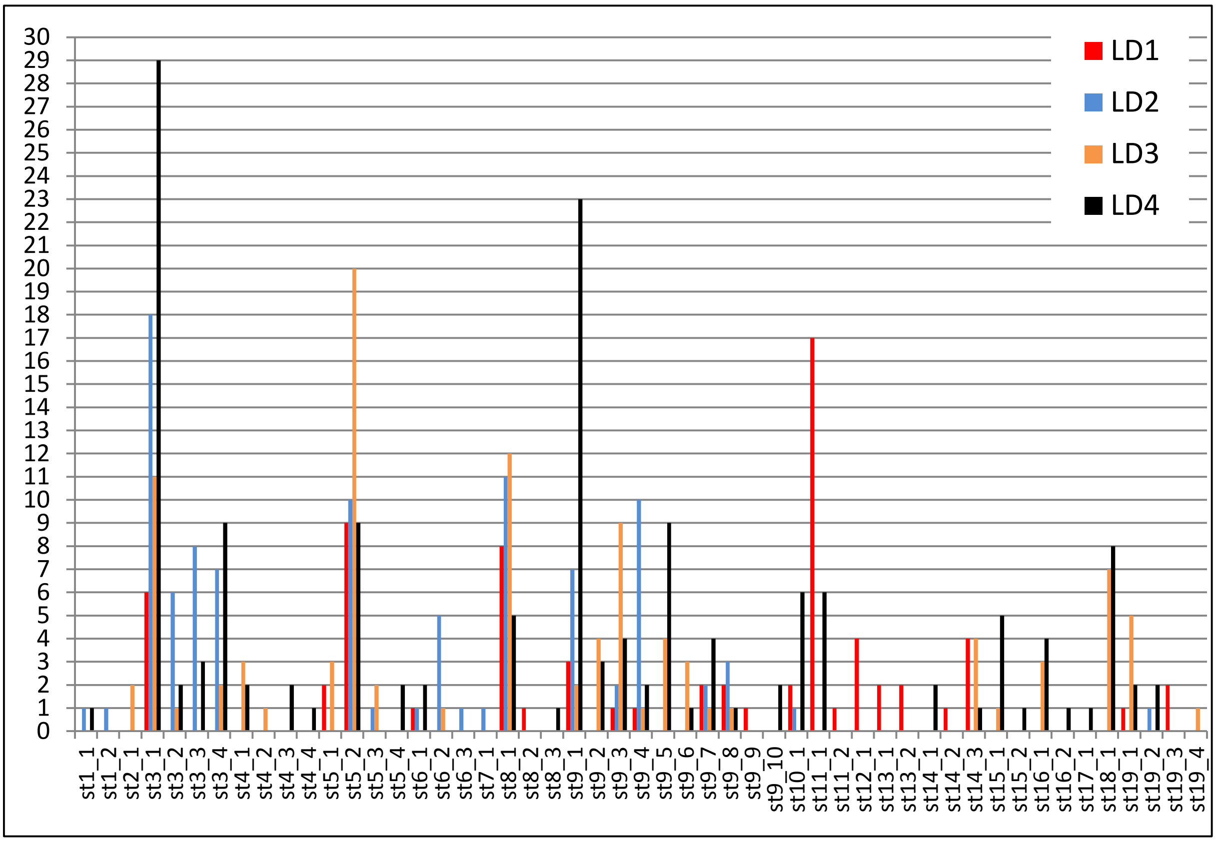
Nesse contexto de identificação de técnicas, verificamos que para resolver as tarefas propostas a partir de st19_3 (realizar a comparação entre funções a partir de uma tabela) foi utilizada em LD1 a técnica τ_{3_1} (substituir diretamente números do domínio da função na lei de formação para encontrar as respectivas imagens). Desse modo, a comparação entre as funções foi realizada a partir dos valores que representam as suas imagens. É importante deixar claro que a tecnologia que justifica τ_{3_1} é θ_{3_1} (o valor de uma função para $x = x_0$ é dado por $f(x_0) = ax_0 + b$), mas não a identificamos em LD1.

Para resolver as tarefas propostas a partir de st19_4 (realizar a comparação entre funções a partir de suas leis de formação), verificamos que a comparação também é realizada a partir do ponto comum entre as funções. Nesse caso, para encontrar o ponto comum, foi utilizada a técnica τ_{8_3} (igualar as leis de formação das duas funções, resolver a equação do primeiro grau formada e descobrir o valor da abscissa do ponto comum às funções) e τ_{3_1} para calcular a imagem das funções que, nesse caso, representa a outra coordenada do ponto comum entre elas.

Ao longo dessa análise, verificamos que nos quatro livros didáticos existem vários subtipos de tarefas diferentes e também que são utilizadas diversas técnicas para resolver as tarefas propostas. Também verificamos a utilização de algumas tecnologias que justificam as técnicas utilizadas na resolução das tarefas. É importante destacar que algumas técnicas e tecnologias utilizadas são comuns a diferentes livros didáticos.

Com o objetivo de fazer um comparativo entre as quantidades de subtipos de tarefas por livro didático, apresentamos a seguir a figura 24.

Figura 24 - Gráfico de frequência para os subtipos de tarefa



Fonte: Construído pelo autor da pesquisa

De acordo com essa figura, podemos perceber que há um total de cinquenta e um subtipos de tarefas diferentes e que somente st3_1 (calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano através da lei de formação da função afim), st5_2 (construir o gráfico da função a partir da lei de formação), st8_1 (Determinar pontos da função afim a partir da lei de formação), st9_1 (Escrever a fórmula da função afim a partir de uma questão do cotidiano), st9_3 (Escrever a lei de formação da função afim a partir de seu gráfico), st9_4 (Escrever a lei de formação da função afim a partir de uma tabela), st9_7 (Escrever a lei de formação da função afim a partir de uma figura geométrica) e st9_8 (Escrever a lei de formação da função afim a partir de um ponto e da taxa de variação), estão presentes em todos os livros didáticos.

Temos ainda que os subtipos de tarefas mais abordados em LD1, LD2 e LD3 são, respectivamente st11_1 (Identificar se a função é afim através da lei de formação), st3_1 (Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano através da lei de formação da função afim), st5_2 (Construir o gráfico da função a partir da lei de formação). Nesse caso, podemos dizer que esses livros dão importância a subtipos de tarefas diferentes. Assim como em LD2, o subtipo de tarefa mais abordado por LD4 é st3_1, desse modo, verificamos que esses dois livros dão ênfase ao mesmo subtipo de tarefa.

Na figura 24, percebemos que os subtipos de tarefa st9_1 e st3_1 são os mais trabalhados em LD4. Esses subtipos de tarefa envolvem situações do cotidiano e, várias tarefas propostas a partir desses subtipos, utilizam a função afim para resolver questões que fazem parte do contexto de outras áreas do conhecimento. Isso é importante porque alguns pesquisadores como Delgado (2010) dizem que alguns estudantes não enxergam as funções como uma ferramenta de resolução de problemas.

No gráfico descrito na figura 24, percebemos que os livros do ensino médio não dão muita importância às tarefas que trabalham a escrita em linguagem natural (st10_1). Isso é o contrario do que defende as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (PCNEM), pois nesse documento diz que,

> É conveniente solicitar aos alunos que expressem em palavras uma função dada de forma algébrica, por exemplo, f(x) = 2 x + 3, como a função que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de três unidades; isso pode facilitar a identificação, por parte do aluno, da ideia de função em outras situações, como, por exemplo, no estudo da cinemática, em Física (PCNEM, 2006, p. 72).

É importante deixar claro que as tarefas que observamos nos livros didáticos e que envolvem à escrita em linguagem natural, pedem que o aluno justifique a resposta de uma questão. Desse modo, não encontramos, conforme defende o PCNEM (2006), nenhuma tarefa que tenha como objetivo fazer com que os estudantes expressem em palavras uma função que está descrita na forma algébrica.

Trazemos a seguir os quadros 11 e 12, onde temos uma síntese sobre a presença ou ausência das técnicas nos livros didáticos. Vale ressaltar que assinalamos com um x os casos em que a técnica está presente no livro didático.

Quadro 11 - Utilização das técnicas pelos livros didáticos. Parte 1

Subtipos de tarefas	Técnicas utilizadas para resolver as tarefas propostas	Livros didáticos			
		LD1	LD2	LD3	LD4
st1_1	Não apresenta				
st1_2	Não apresenta				
st2_1	τ_{2_1}			x	
st3_1	τ_{3_1}	x		x	x
	τ_{3_11}			x	x
	τ_{3_111}			x	x
	τ_{3_1111}				x
st3_2	τ_{3_11}			x	x
	τ_{3_111}			x	x
st3_3	τ_{2_1}				x
	τ_{3_1}				x
	τ_{3_3}				x
st3_4	τ_{3_1}			x	x
st4_1	τ_{4_1}			x	x
st4_2	τ_{3_11}			x	
	τ_{4_1}			x	
st4_3	τ_{4_3}				x
st4_4	Não apresenta técnica				
st5_1	τ_{5_1}	x		x	
st5_2	τ_{5_2}	x	x	x	x
	τ_{3_1}	x	x	x	x
st5_3	τ_{5_1}			x	
st5_4	τ_{5_1}				x
st6_1	τ_{3_1}	x	x		x
	τ_{5_2}	x		x	x
st6_2	τ_{3_1}		x	x	
	τ_{5_2}		x	x	
st6_3	τ_{5_2}		x		
st7_1	Não apresenta técnica				
st8_1	τ_{8_1}	x	x	x	
	τ_{8_11}	x	x	x	x
st8_2	Não apresenta técnica	-	-	-	-
st8_3	τ_{2_1}				x
	τ_{3_1}				x
	τ_{8_3}				x

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Quadro 12 - Utilização das técnicas pelos livros didáticos. Parte 2

Subtipos de tarefas	Técnicas utilizadas para resolver as tarefas propostas	Livros didáticos			
		LD1	LD2	LD3	LD4
st9_1	τ_{3_11}			x	x
	τ_{9_1}			x	x
	τ_{9_11}			x	x
st9_2	τ_{2_1}			x	
	τ_{9_1}				x
st9_3	τ_{2_1}			x	x
	τ_{9_1}			x	x
st9_4	τ_{2_1}			x	x
	τ_{9_1}				x
st9_5	τ_{9_11}			x	x
st9_6	τ_{9_1}			x	x
st9_7	Não apresenta técnica				
st9_8	τ_{9_1}				x
st9_9	τ_{9_1}	x			
st9_10	τ_{9_1}				x
st10_1	τ_{10_1}	x			x
	τ_{10_2}				x
st11_1	τ_{11_1}	x			x
st11_2	Não apresenta técnica				
st12_1	τ_{12_1}	x			
st13_1	τ_{13_1}	x			
st13_2	τ_{2_1}	x			
	τ_{13_1}	x			
st14_1	Não apresenta técnica				
st14_2	Não apresenta técnica				
st14_3	Não apresenta técnica				
st15_1	τ_{15_1}			x	x
st15_2	Não apresenta técnica				x
st16_1	τ_{16_1}			x	
st17_1	Não apresenta técnica				
st18_1	τ_{8_11}			x	x
	τ_{18_1}			x	x
st19_1	τ_{5_1}	x		x	x
	τ_{5_2}	x		x	x
	τ_{19_1}	x		x	x
st19_2	τ_{19_1}				x
st19_3	τ_{3_1}	x			
st19_4	τ_{3_1}			x	
	τ_{8_3}			x	

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Podemos perceber que são utilizadas diversas técnicas para a resolução das tarefas propostas e várias delas são comuns a diferentes livros didáticos. Verificamos também que algumas técnicas são utilizadas mais de uma vez para resolver tarefas propostas a partir de subtipos diferentes, nesse contexto estão as técnicas τ_{2_1}, τ_{3_1}, τ_{3_11}, τ_{3_111}, τ_{5_1}, τ_{5_2}, τ_{8_11}, τ_{8_3}, τ_{9_1} e τ_{19_1}.

Conforme já destacamos, as praxeologias matemáticas presentes nos livros didáticos envolvem tipos de tarefa, técnicas e algumas tecnologias. Nesses casos não encontramos nenhuma referencia às possíveis teorias que justifiquem as tecnologias.

Nos quadros a seguir temos uma síntese sobre a presença ou ausência das tecnologias em cada um dos livros didáticos.

Quadro 13 - Presença ou ausência das tecnologias nos livros didáticos. Parte 1

Subtipos de tarefas	Técnicas utilizadas para resolver as tarefas propostas	Presença da tecnologia nos livros didáticos			
		LD1	LD2	LD3	LD4
st1_1	Não apresenta				
st1_2	Não apresenta				
st2_1	τ_{2_1}				
st3_1	τ_{3_1}			θ_{3_1}	
	τ_{3_11}			θ_{3_11}	
	τ_{3_111}				
	τ_{3_1111}				
st3_2	τ_{3_11}			θ_{3_11}	
	τ_{3_111}				
st3_3	τ_{2_1}				
	τ_{3_1}				
	τ_{3_3}				
st3_4	τ_{3_1}			θ_{3_1}	
st4_1	τ_{4_1}			θ_{4_1}	θ_{4_1}
st4_2	τ_{3_11}			θ_{3_11}	
	τ_{4_1}			θ_{4_1}	
st4_3	τ_{4_3}				
st4_4	Não apresenta técnica				

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Quadro 14 - Presença ou ausência das tecnologias nos livros didáticos. Parte 2

Subtipos de tarefas	Técnicas utilizadas para resolver as tarefas propostas	Presença da tecnologia nos livros didáticos			
		LD1	LD2	LD3	LD4
st5_1	τ_{5_1}			θ_{5_1}	
st5_2	τ_{5_1}			θ_{3_1}	
	τ_{5_2}			θ_{3_1}	
st5_3	τ_{5_1}			θ_{5_1}	
st5_4	τ_{5_1}			θ_{5_1}	
st6_1	τ_{3_1}				
	τ_{5_2}				
st6_2	τ_{3_1}				
	τ_{5_2}				
st6_3	τ_{5_2}				
st7_1	Não apresenta técnica				
st8_1	τ_{8_1}				
	τ_{8_11}			θ_{8_11}	θ_{8_11}
st8_2	Não apresenta técnica				
st8_3	τ_{2_1}				
	τ_{3_1}				
	τ_{8_3}				
st9_1	τ_{3_11}			θ_{3_11}	
	τ_{9_1}				
	τ_{9_11}	θ_{9_11}	θ_{9_11}	θ_{9_11}	θ_{9_11}
st9_2	τ_{2_1}				
	τ_{9_1}				
st9_3	τ_{2_1}				
	τ_{9_1}				
st9_4	τ_{2_1}				
	τ_{9_1}				
st9_5	Não apresenta técnica				
st9_6	τ_{9_1}				
st9_7	Não apresenta técnica				
st9_8	τ_{9_1}				
st9_9	τ_{9_1}				
st9_10	τ_{9_1}				
st10_1	τ_{10_1}				θ_{10_1}
	τ_{10_2}				

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa

Quadro 15 - Presença ou ausência das tecnologias nos livros didáticos. Parte 3

Subtipos de tarefas	Técnicas utilizadas para resolver as tarefas propostas	Presença da tecnologia nos livros didáticos			
		LD1	LD2	LD3	LD4
st11_1	τ_{11_1}				
st11_2	Não apresenta técnica				
st12_1	τ_{12_1}				
st13_1	τ_{13_1}				
st13_2	τ_{2_1}				
	τ_{13_1}				
st14_1	Não apresenta técnica				
st14_2	Não apresenta técnica				
st14_3	Não apresenta técnica				
st15_1	τ_{15_1}				
st15_2	Não apresenta técnica				
st16_1	τ_{16_1}				
st17_1	Não apresenta técnica				
st18_1	τ_{8_11}				
	τ_{18_1}				
st19_1	τ_{5_1}				θ_{5_1}
	τ_{5_2}	θ_{3_1}		θ_{3_1}	θ_{3_1}
	τ_{19_1}				
st19_2	τ_{19_1}				
st19_3	τ_{3_1}	θ_{3_1}			
st19_4	τ_{3_1}			θ_{3_1}	
	τ_{8_3}				

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa.

De acordo com os quadros 13, 14 e 15, podemos perceber que as tecnologias estão mais presentes nos livros do Ensino Médio. Acreditamos que isso acontece porque no Ensino Fundamental os livros trabalham com as ideias iniciais da função afim. Isso é diferente do que acontece no Ensino Médio, pois nesse nível de ensino a função afim é trabalhada de uma forma mais aprofundada, dando mais ênfase a utilização das tecnologias. Nesse contexto, verificamos que LD3 é o livro que mais traz elementos tecnológicos.

Outro ponto que nos chamou atenção foi o fato de um dos livros do Ensino Médio trazer mais tecnologias de que o outro, pois acreditávamos que por serem do Ensino Médio, ambos os livros iriam dar ênfase à justificativa das técnicas. No entanto, constatamos que isso não aconteceu. Esse fato vai de encontro ao que defende Chevallard (1998a), pois para esse pesquisador instituições diferentes podem se relacionar de maneira distinta com o mesmo objeto.

Também queremos destacar que embora LD1 e LD3 sejam livros do mesmo autor e trabalhem com o mesmo objeto (função afim), os quadros 13, 14 e 15 nos mostram que LD1 quase não traz tecnologias. A nosso ver, isso só reforça a ideia de que é no Ensino Médio onde os elementos tecnológicos são mais trabalhados.

Em síntese, acreditamos que o fato dos livros didáticos darem mais ênfase ao saber fazer, pode levar os alunos a se preocupar somente em resolver as tarefas propostas sem refletir sobre o motivo pelo qual se cumpre a tarefa daquela maneira. É importante destacar que embora os livros didáticos deem mais importância ao saber fazer, acreditamos que é importante o professor trabalhar com a utilização de tecnologias desde que elas estejam de acordo com o nível escolar dos estudantes.

Defendemos a importância do uso de justificativas nas aulas de matemática, porque isso pode contribuir para que os estudantes compreendam que as técnicas de resolução das tarefas não apareceram de um momento para o outro como se fosse somente um produto que está presente na imaginação do professor e dos autores dos livros didáticos.

Ainda sobre a utilização das justificativas nas aulas de matemática, Tinoco et al (2008), diz que um trabalho que permita a alunos e professores trabalharem com as justificativas, permitindo a discussão dos significados, pode contribuir para que haja uma diminuição nas dificuldades de aprendizagem.

Nessa linha, Mantovani (2009) diz que o livro didático também ocupa a posição de suporte teórico para professores e alunos. Desse modo, como os livros também cumprem esse papel, é importante que essas publicações deem mais importância à justificativa das técnicas utilizadas para cumprir as tarefas propostas.

Na próxima etapa de nosso trabalho trazemos a análise praxeológica da sequência didática de Dornelas (2007).

4.4 ETAPA 4: ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE DORNELAS (2007)

Conforme já mostramos no inicio desse capítulo, Dornelas (2007) elaborou e aplicou uma sequência didática que traz situações onde a função afim é utilizada para resolver questões do cotidiano. Na figura 25, temos a primeira essa sequência didática.

Figura 25 – Primeira parte da sequência didática de Dornelas (2007).

O salário base dos frentistas filiados ao Sindicato dos Trabalhadores do Comércio e Mineração de Derivados de Petróleo do Estado de Pernambuco é de R$ 300,00. Esses empregados têm seu trabalho realizado perigosamente, em razão dos produtos inflamáveis ou explosivos que manuseiam diariamente. Os frentistas realizam os trabalhos expostos aos agentes nocivos à integridade física, além do parâmetro de tolerância, com risco de vida acentuado. Assim, conforme artigo 193 da CLT terão direito em receber o adicional de periculosidade de 30% do salário base. No caso específico do Estado de Pernambuco esse valor é de R$ 100,00; ou seja, o salário fixo mensal é de R$ 400,00. Para incentivar o crescimento na venda de óleo lubrificante e aumentar o seu lucro, o proprietário de um Posto de Combustível da Região Metropolitana do Recife oferece aos seus frentistas uma comissão de R$ 0,50 por litro vendido deste produto.

(a) Se em um mês um frentista vender 10 litros de óleo lubrificante, que salário receberá no fim do mês?

(b) Escreva um bilhete ao contador do posto de combustível, explicando como um frentista qualquer deve fazer para calcular o seu salário mensal.

(c) João, um dos frentistas do posto, precisa faturar R$ 600,00 em janeiro, para cobrir os cheques pré-datados que ele fez no Natal. Quantos litros de óleo lubrificante ele deve vender para conseguir esse salário?

(d) Como no próximo mês, João ainda tem cheques pré-datados, precisará de um salário maior para cobri-los. Ele pede então, ao contador do posto, que lhe explique como calcular quantos litros de óleo lubrificante deve vender para receber o salário que precisa. Imagine que você seja o contador, e escreva um bilhete para João, explicando o que ele deve fazer.

(e) João contou aos colegas o pedido feito ao contador. Imediatamente, todos os outros frentistas, e são mais de 30 nesse posto, foram fazer o mesmo pedido informando ao contador quantos litros de óleo lubrificante cada um vendeu, até aquele momento. O contador quase enlouquece, e ficou pensando como fazer para atender a todos. Ajude-o, e invente uma maneira para que os frentistas do posto possam determinar, rapidamente, quanto será o salário dos mesmos, até aquele momento?

(f) Além disso, eles querem determinar quantos litros de óleo lubrificante cada um deverá vender para receber o salário que precisa. Como você poderá organizar estes dados de maneira que o contador possa explicar aos frentistas o salário a ser recebido por cada um deles?

(g) De que maneira o contador do posto poderá apresentar aos frentistas uma outra solução que possa ser entendida e aplicada por eles sem que seja necessário recorrer ao próprio contador, a cada vez que precisarem aumentar a sua receita mensal, ou ao uso de tabelas ou de cálculos numéricos?

Fonte: Dornelas (2007, p. 67, 68, 69, 71, p. 72 e 74)

De acordo com a figura anterior, percebemos a presença de alguns subtipos de tarefa que já foram identificados nos livros didáticos. Nesse contexto, em relação à primeira atividade temos:

- **Letra A:** Se enquadra no tipo de tarefa T_3 (calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano). Em relação ao subtipo de tarefa temos uma classificação de acordo com st3_4 (calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano a partir dos dados fornecidos pelo enunciado de uma questão).

Durante a análise da sequência didática, verificamos que os alunos utilizaram duas técnicas para resolver essa tarefa. Chamamos essas técnicas de τ_{3_4} e τ_{3_41}, a primeira delas se caracteriza por efetuar uma soma de dez parcelas de R$ 0,50, e somar o resultado ao valor fixo de R$ 405,00. A segunda técnica (τ_{3_41}) consiste em multiplicar R$ 0,50 por dez e somar o resultado ao valor fixo de R$ 405,00. Para essas técnicas não identificamos a presença nem a discussão sobre a utilização de tecnologias.

- **Letras B e D:** Essas tarefas estão inseridas no tipo de tarefa T_{10} (escrever em linguagem natural a justificativa da resolução de uma questão) e no subtipo st10_1 (escrever em linguagem natural a justificativa da resolução de uma questão sobre função afim). Para esses casos não ficou muito claro qual foi a técnica utilizada pelos alunos.

- **Letra C:** Essa tarefa está inserida no tipo de tarefa T_3 (calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano) e no subtipo st3_4 (calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano a partir dos dados fornecidos pelo enunciado de uma questão). Para a sua resolução, os alunos utilizaram duas técnicas que chamamos de τ_{3_411} e τ_{3_4111}. A primeira consiste em utilizar a operação inversa (subtrair R$ 400,00 de 600,00 e dividir o resultado por R$ 0,50) para descobrir a quantidade de litros de óleo que precisa ser vendida.

A outra técnica (τ_{3_4111}) se caracteriza pela multiplicação de uma quantidade qualquer de litros de óleo por R$ 0,50, somar o resultado ao salário fixo e verificar se essa quantidade chega ou não ao valor de R$ 600,00. Com essa técnica, a resposta é encontrada através de tentativas.

- **Letra E:** Embora os estudantes possam organizar os dados de várias formas, Dornelas (2007) deixa claro que a sua intenção com essa tarefa é que eles utilizem uma tabela. Desse modo, consideramos que essa tarefa está inserida no tipo T_6 (construir uma tabela de valores para a função afim), e está associada ao subtipo st6_2 (construir uma tabela de valores para a função afim a partir do enunciado de uma questão). Para esse caso, identificamos a utilização da técnica τ_{5_2} que consiste em construir uma tabela de modo a relacionar a quantidade de litros de óleo vendida e o salário a receber ao final do mês. Embora os estudantes tenham construído diversos modelos de tabelas, em todas elas estava presente a relação de dependência fornecida no enunciado da tarefa. Desse modo, consideramos as diversas tabelas construídas como sendo a mesma técnica. É importante deixar claro que a técnica utilizada pelos alunos (τ_{5_2}) foi a mesma que encontramos nos livros didáticos (LD1, LD3 e LD4).

- **Letra F:** Essa questão também tem como objetivo fazer com que os alunos construam uma tabela, desse modo, se enquadra no tipo de tarefa T_6 e no subtipo st6_2. Nesse caso, verificamos que foram utilizadas duas técnicas para a construção da tabela, a primeira técnica foi τ_{5_2} e, para preencher a tabela, foi novamente utilizada a técnica τ_{3_411} (utilizar a operação inversa subtraindo R$ 400,00 de 600,00, dividir o resultado por R$ 0,50).
- **Letra G:** O objetivo dessa tarefa de acordo com Dornelas (2007) era que os alunos realizassem a conversão do registro numérico para o algébrico, escrevendo a lei de formação S = 400 + 0,5L. Nessa expressão, S é o salário a receber no final do mês e L representa a quantidade de litros de óleo vendidos pelos frentistas. Desse modo, consideramos que essa tarefa está inserida no tipo T_9 (escrever a fórmula da função afim) e no subtipo st9_1 (escrever a fórmula da função afim a partir de uma questão do cotidiano).

Na técnica utilizada para resolver a tarefa, os estudantes não utilizaram os termos taxa de variação e coeficiente linear da função afim e sim valores fixo e variável. Consideramos que essa técnica foi à mesma anteriormente identificada em LD3 e LD4 e a chamamos de τ_{9_11}. Essa técnica consiste em identificar a taxa de variação e o coeficiente linear da função afim no enunciado da questão e com esses valores escrever a fórmula da função afim y = ax + b.

A seguir apresentamos a segunda atividade da sequência didática proposta por Dornelas (2007). Conforme fizemos anteriormente, iremos primeiro mostrar as tarefas propostas para depois destacar os elementos praxeológicos que foram utilizados.

Figura 26 – Segunda atividade da sequência didática de Dornelas (2007)

Sr. André, dono do posto em que João trabalha, precisa transportar óleo combustível do Porto de SUAPE para abastecer seus quatro estabelecimentos comerciais. Ele tem as opções de transportar sua carga por trem ou caminhão. Nos dois casos, ele tem um custo fixo para preparar a carga (embalagem) e um custo variável por quilômetro transportado, que depende do meio de transporte utilizado. Em caminhões, o custo da embalagem é mais baixo, R$ 100,00, pois basta cobrir a carga com plástico. Para transportar o óleo combustível por trem, o custo da embalagem é mais caro, R$ 120,00, pois a carga precisa ser colocada em suportes metálicos, para ser acomodada nos vagões. Para o transporte em caminhões, a empresa transportadora cobra R$ 0,80 por quilômetro transportado para cobrir as despesas com o frete, enquanto para o transporte ferroviário o custo é de R$ 0,40 por quilômetro transportado.

(a) Qual a forma mais barata de transportar o óleo combustível do Porto de SUAPE para os postos de gasolina do Sr. André?

(b) Escrevam um bilhete para o Sr. André ajudando-o a decidir qual a forma mais econômica de transportar o óleo combustível para os seus quatro postos de gasolina, por caminhão ou por trem?

(c) Sr. André precisa apresentar aos seus sócios, em transparência, as diferentes maneiras de transportar combustível para os seus quatro postos de gasolina para que decidam qual a forma mais econômica. Ele se enrolou todo ao tentar representar, através de uma tabela, os custos de todas as possíveis formas de transporte e pediu, novamente, a ajuda do contador da empresa para que ele inventasse uma maneira mais simples e prática de reunir todos esses resultados. Que idéia vocês dariam para o contador?

Fonte: Dornelas (2007, p. 76, 77 e 78)

Considerando a segunda atividade temos:

- **Letra A:** Essa tarefa é do tipo T_{19} (realizar a comparação entre funções) e está inserida no subtipo st19_1 (realizar a comparação entre funções a partir do enunciado de uma questão). Verificamos que a técnica utilizada para realizar a comparação entre as funções, foi a de atribuir valores arbitrários para as variáveis independentes e calcular o respectivo valor das variáveis dependentes. Chamamos essa técnica de τ_{19_11}.

- **Letra B:** A tarefa correspondente a essa atividade é do tipo T_{10} (escrever em linguagem natural a justificativa da resolução de uma questão) e em relação ao subtipo, está inserida em st10_1 (escrever em linguagem natural a justificativa da resposta de uma questão sobre função afim). Para a resolução dessa tarefa não conseguimos identificar a técnica utilizada.
- **Letra C:** Dornelas (2007) diz que o objetivo principal nessa tarefa é que os estudantes façam a comparação entre as funções construindo seus gráficos. Nesse sentido, podemos dizer que a tarefa proposta é do tipo T_{19} e se insere no subtipo st19_2 (realizar a comparação entre funções a partir de seus gráficos). Em relação à justificativa para a resolução dessa tarefa, não fica claro qual foi a técnica utilizada para a construção dos gráficos.

Verificamos que as tarefas propostas na sequência didática de Dornelas (2007) são de tipos encontrados nos livros didáticos. Esses tipos de tarefa são: T_3 (Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano), T_6 (Construir uma tabela de valores para a função afim), T_9 (A lei de formação da função afim), T_{10} (Escrever em linguagem natural a justificativa da resposta de uma questão sobre função afim) e T_{19} (Realizar a comparação entre funções).

Esses tipos de tarefa estão associados à subtipos que também foram identificados nos livros didáticos que analisamos. Esses subtipos são: st3_4 (Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano a partir dos dados fornecidos pelo enunciado de uma questão), st6_2 (Construir uma tabela de valores para a função afim a partir do enunciado de uma questão), st9_1 (Escrever a lei de formação da função afim a partir de uma questão do cotidiano), st19_1 (Realizar a comparação entre funções a partir do enunciado de uma questão) e st19_2 (Realizar a comparação entre funções a partir de seus gráficos).

Para a realização das tarefas, verificamos no trabalho de Dornelas (2007), que os estudantes mobilizaram seis técnicas diferentes, são elas: τ_{3_4}, τ_{3_41}, τ_{3_5}, τ_{5_2}, τ_{9_11} e τ_{19_1}.

A seguir mostramos os resultados da comparação entre os elementos praxeológicos que identificamos nos livros didáticos com os da sequência didática proposta por Dornelas (2007).

4.5 ETAPA 5: COMPRAÇÃO DAS ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS DOS LIVROS DIDÁTICOS COM AS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE DORNELAS (2007)

Conforme já abordamos, identificamos na sequência didática de Dornelas (2007) vários subtipos de tarefa que também estão presentes nos livros didáticos que analisamos. A seguir, trazemos os quadros 16 e 17, onde realizamos uma síntese sobre os elementos comuns da organização matemática que encontramos nos livros e na sequência didática.

Quadro 16 - Elementos comuns aos livros didáticos e à sequência didática de Dornelas (2007). Parte 1

Tipos de tarefa	Subtipos de tarefa	Técnica utilizada nos livros e pelos sujeitos da pesquisa de Dornelas (2007)
T_3 - Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano.	**st3_4** - Calcular o valor desconhecido de uma situação do cotidiano a partir dos dados do enunciado de uma questão.	
T_6 - Construir uma tabela de valores para a função afim[10].	**st6_2** - Construir uma tabela de valores para a função afim a partir do enunciado de uma questão)	**τ_{5_2}** – Construir uma tabela de valores de modo a relacionar os valores do domínio e da imagem da função afim.
T_9 - Escrever a lei de formação da função afim.	**st9_1** - Escrever a lei de formação da função afim a partir de uma questão do cotidiano.	**τ_{9_11}** - Identificar a taxa de variação e o coeficiente linear da função afim no enunciado da questão e, com esses dados escrever a lei de formação da função.

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa.

[10] Identificamos esse tipo de tarefa somente em LD_1.

Quadro 17 - Elementos comuns aos livros didáticos e à sequência didática de Dornelas (2007). Parte 2

T_{10} - Escrever em linguagem natural a justificativa da resposta de uma questão.	**st10_1** - Escrever em linguagem natural a justificativa da resposta de uma questão sobre função afim.	
T_{19} - Realizar a comparação entre funções.	**st19_1** - Realizar a comparação entre funções a partir do enunciado de uma questão.	
	st19_2 - Realizar a comparação entre funções a partir de seus gráficos.	

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa.

Em síntese, embora as atividades propostas por Dornelas (2007) abordem os mesmos tipos e subtipos de tarefa que estão presentes nos livros didáticos, verificamos que isso não acontece com às técnicas que foram utilizadas pelos estudantes que executaram as tarefas da sequência didática, pois a maioria dessas técnicas não estão presentes nos livros. Nesse contexto, as técnicas τ_{3_4}, τ_{3_41}, τ_{3_4}, τ_{3_41} e τ_{19_11}, estão presentes somente na sequência didática.

A seguir, trazemos uma discussão dos resultados encontrados.

5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

No capítulo anterior, apresentamos vários tipos e subtipos de tarefa que são comuns aos livros didáticos e à sequência didática de Dornelas (2007). Verificamos ainda que todas as atividades propostas por essa pesquisadora se inserem em algum tipo ou subtipo de tarefa que os livros didáticos abordam. Verificamos também que tanto as atividades da sequência didática quanto às dos livros didáticos, priorizam o bloco prático técnico da praxeologia matemática, ou seja, o saber fazer.

Dornelas (2007) diz que é importante que os alunos resolvam problemas que envolvam situações de contexto realístico que abordem variação e relação entre grandezas, compreensão de variável dependente e independente e conversão entre os registros de representação da função afim. Nesse contexto, identificamos nos livros didáticos alguns subtipos de tarefas que envolvem esses elementos.

Trazemos a seguir a tabela 22, onde mostramos os subtipos de tarefas que envolvem cada elemento que Dornelas (2007) julga importante para a aprendizagem de função afim. Também mostramos as respectivas frequências nos livros didáticos. Vale salientar que nessa tabela só contabilizamos os subtipos de tarefas que envolvem questões do cotidiano, pois para Dornelas (2007) o estudo da função afim deve partir de situações de contexto realístico.

Tabela 22 - Frequência dos subtipos de tarefas que envolvem os elementos que contribuem para aprendizagem de função afim de acordo com os parâmetros defendidos por Dornelas (2007).

Subtipos de tarefa	Descrição do subtipo de tarefa	LD1	LD2	LD3	LD4	Total
st5_2	Construir o gráfico da função afim a partir da lei de formação.	9	10	20	9	48
st5_4	Construir o gráfico da função a partir do enunciado de uma questão.	0	0	0	2	2
st6_2	Construir uma tabela de valores para a função afim a partir do enunciado de uma questão.	0	5	1	0	6
st6_3	Construir uma tabela de valores para a função afim a partir de seu gráfico.	0	1	0	0	1
st9_1	Escrever a fórmula da função afim a partir de uma questão do cotidiano.	3	7	2	23	35
st9_3	Escrever a lei de formação da função afim a partir de seu gráfico.	1	2	9	4	16
st9_4	Escrever a lei de formação da função afim a partir de uma tabela.	1	10	1	2	14
st10_1	Escrever em linguagem natural a justificativa da resolução de uma questão.	2	1	0	6	9
st17_1	Identificar as variáveis dependente e independente da função afim a partir do enunciado de uma questão.	0	0	0	1	1
Total		16	36	33	47	132

Fonte: Construído pelo autor da pesquisa

A tabela 22 nos mostra que LD4 é o livro que possui mais subtipos de tarefas relacionados aos elementos que Dornelas (2007) julga importante para a aprendizagem do conceito de função afim. Embora esse livro seja o que tenha mais questões nesse contexto, não podemos dizer que ele é o que está mais de acordo com o que defende Dornelas (2007), pois o mesmo dá ênfase a um subtipo de tarefa (st9_1) enquanto que os outros, não são, ou quase não são abordados. Assim, para trabalhar de acordo com o que traz Dornelas (2007), seria necessário que LD4 distribuísse de maneira mais equitativa os subtipos de tarefas.

A tabela 22 também nos mostra que os livros didáticos não dão muita importância às tarefas propostas a partir do subtipo st5_4 (Construir o gráfico da função a partir do enunciado de uma questão), pois somente LD4 trabalha com tarefas nesse sentido. Isso é diferente do que acontece com o subtipo tarefa st5_2 (Construir o gráfico da função afim a partir da lei de formação), pois ele está presente em todos os livros didáticos e possui um total de quarenta e oito ocorrências.

Isso nos mostra que para a construção do gráfico da função afim, os livros didáticos consideram mais importante ter o registro algébrico como ponto de partida. No entanto, consideramos que os estudantes devem trabalhar com a construção do gráfico da função afim a partir de diferentes registros de representação, pois isso pode contribuir para que eles transitem entre as diferentes formas de representar um objeto matemático, conforme defende Duval (2012).

Acrescentando a essa discussão, percebemos que LD2 é o segundo livro que possui mais subtipos de tarefas que envolvem os conteúdos defendidos por Dornelas (2007). Desse modo, embora a quantidade de subtipos de tarefas abordadas por LD2 ainda seja pequena, consideramos importante o fato de um livro do Ensino Fundamental trazer vários subtipos de tarefas que são trabalhados por Dornelas (2007).

A nosso ver, o fato de um livro do Ensino Fundamental trabalhar com questões relevantes para a aprendizagem do conceito de função afim, pode fazer com que os estudantes cheguem ao Ensino Médio com subsídios para o aprofundamento do estudo desse tipo de função.

Conforme já abordamos, os tipos de tarefa que são trabalhados na sequência didática de Dornelas (2007), envolvem algumas dificuldades que os estudantes enfrentam quando estão trabalhando com a função afim. Algumas dessas dificuldades são apontadas nas pesquisas de Luz (2010), Fonseca (2011), Schonardie (2011), Delgado (2010), Ferreira (2013), Cardoso et al (2013), Braga (2009) e Filho (2011).

Outro ponto importante é que os Parâmetros da Educação Básica do Estado de Pernambuco (Pernambuco, 2012) e as Organizações Curriculares para o Ensino Médio (2006) trazem alguns elementos que são importantes para o estudo das funções. Alguns desses elementos estão presentes nas tarefas propostas por Dornelas 2007.

Desse modo, consideramos relevante o fato dos livros didáticos proporem situações que envolvam os elementos que Dornelas (2007) aponta como sendo importantes para a aprendizagem do conceito de função afim.

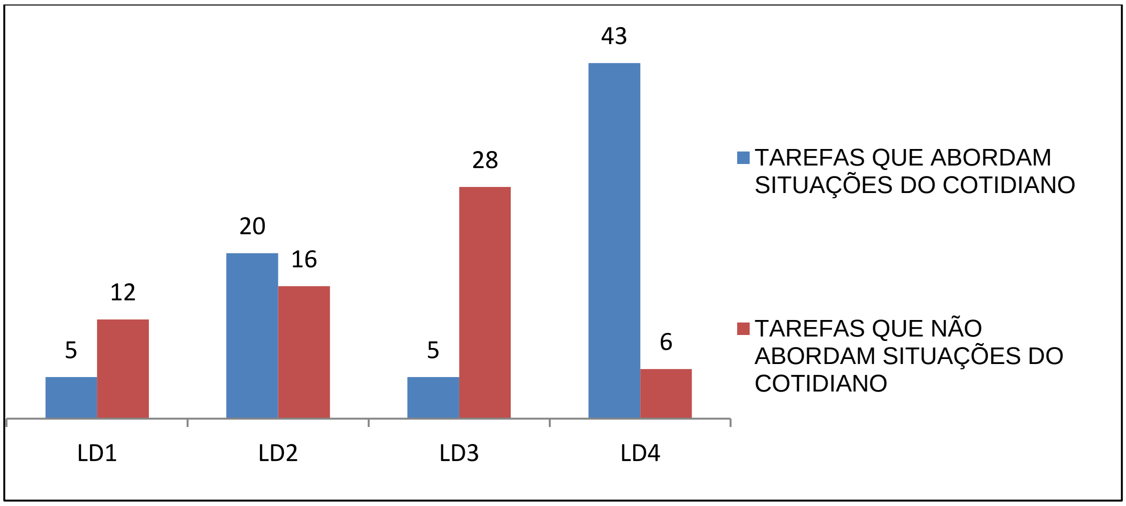
Também queremos frisar o fato de na sequência didática de Dornelas (2007), várias tarefas solicitarem que o aluno utilize o registro em linguagem natural. Nesse sentido, percebemos que nos quatro livros didáticos há apenas nove tarefas desse tipo. Assim podemos dizer, de acordo com os parâmetros defendidos por Dornelas (2007), que isso é uma limitação dos livros, pois para essa pesquisadora, questões que envolvem a conversão de registro em linguagem natural favorecem a compreensão do conceito de função afim.

Verificamos também na tabela 22, outras limitações referentes à abordagem de função afim que é realizada pelos livros didáticos, como por exemplo, a quantidade de tarefas que envolvem à conversão de registro em linguagem tabular e à diferenciação entre as variáveis dependente e independente. Nesse sentido, quase não encontramos subtipos de tarefa que trabalhem esses dois aspectos.

Dornelas (2007) diz que é importante que as questões que envolvem a função afim tratem de situações do cotidiano. De acordo com essa pesquisadora esse tipo de questão pode contribuir para que o aluno se aproprie do conceito de função e perceba a sua importância na representação e resolução de situações do dia a dia.

Nesse sentido, trazemos a seguir a figura 27, onde fizemos um comparativo das tarefas propostas pelos livros didáticos, que abordam ou que não abordam situações do cotidiano.

Figura 27 - Quantidade de tarefas dos livros didáticos que abordam ou não situações do cotidiano



Fonte: Construído pelo autor da pesquisa

De acordo com esse gráfico, percebemos que LD2 e LD4 são os livros que dão mais ênfase as tarefas que envolvem questões do cotidiano e nesse contexto estão mais de acordo com o que defende Dornelas (2007).

Em relação à utilização de técnicas de resolução das tarefas, verificamos que na sequência didática de Dornelas (2007) não existe nenhuma referencia sobre o caminho que deve ser seguido para que os estudantes resolvam as tarefas. Isso é diferente do que acontece em algumas tarefas propostas nos livros didáticos, pois verificamos que os autores utilizam uma técnica e posteriormente sugerem uma tarefa semelhante à que foi anteriormente proposta.

A nosso ver isso pode levar o aluno não só a fazer uso da mesma técnica que foi apresentada nos livros, mas também a ficar refém dela no momento em que for resolver outras tarefas que envolvem o mesmo subtipo, como se a técnica apresentada fosse a única existente para cumprir a tarefa.

Nesse caso podemos citar como exemplo uma tarefa que pede para os estudantes organizarem os dados referentes a uma situação que envolve a função afim. Em Dornelas (2007), embora a autora deixe claro que espera que os alunos construam uma tabela, não há na tarefa qualquer referencia sobre a técnica que os estudantes devem utilizar. Porém, nos livros didáticos, constatamos que o enunciado desse mesmo subtipo de tarefa deixa claro aos alunos que eles devem construir uma tabela. Isso acontece tanto nos livros do 9º ano do Ensino Fundamental como nos do 1º ano do Ensino Médio.

Acreditamos que isso não permite que os estudantes possam decidir a técnica a ser utilizada e também a fazer uma comparação entre técnicas (caso exista mais de uma) para decidir aquela que melhor se adequa à resolução da tarefa, já que de acordo com Chevallard (1998), uma mesma tarefa pode ser resolvida através de técnicas distintas.

É importante destacar que isso não acontece em todas as tarefas propostas pelos livros didáticos, mas em alguns casos percebemos que os livros não contribuem para que os alunos aumentem a sua autonomia, conforme defende o PNLD 2014 e 2015.

Também, não consideramos que os livros didáticos abordem o tema função afim em acordo com os parâmetros defendidos por Dornelas (2007). Para que houvesse uma convergência entre o que defende essa pesquisadora e as atividades propostas pelos livros didáticos, seria necessário que houvesse uma quantidade maior de subtipos de tarefas (tabela 22) que abordassem os elementos defendidos por Dornelas (2007) e também que essas tarefas fossem trabalhadas tomando como base situações do cotidiano.

Outros fatores também foram determinantes para chegarmos a essa conclusão, como o fato dos livros didáticos darem mais importância a determinados subtipos de tarefas e suprimirem outros que são importantes para aprendizagem de função afim, de acordo com os parâmetros defendidos por Dornelas (2007).

Outro ponto divergente foi o fato dos livros resolverem algumas tarefas e logo a seguir propor outras do mesmo subtipo, podendo levar o estudante a somente repetir uma técnica de resolução. Nesse aspecto, conforme já discutimos isso não acontece nas atividades propostas por Dornelas (2007), embora ela tenha uma ideia das técnicas que podem ser utilizadas pelos estudantes.

Em relação ao uso de tecnologias, percebemos tanto nos livros didáticos como na sequência didática, que é dado mais ênfase ao bloco prático técnico da praxeologia matemática, ou seja, às tarefas e em como resolvê-las. Embora isso aconteça, constatamos que em alguns momentos da sequência didática, há uma discussão que leva os alunos a refletirem sobre a validade de algumas técnicas que são utilizadas.

Nesse contexto, embora os livros didáticos não deem muita importância às tecnologias, acreditamos que o professor pode contribuir nesse sentido, levando seus alunos a uma discussão de modo a comparar as técnicas utilizadas e a perceber se elas são eficazes para a resolução das tarefas, conforme acontece em algumas atividades da sequência didática de Dornelas (2007).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho tivemos como objetivo geral analisar a abordagem de função afim realizada por livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio. Nesse sentido, analisamos onze pesquisas que trabalharam com a função afim e com isso fizemos um levantamento para saber quais foram as dificuldades enfrentadas pelos estudantes que trabalharam com esse tipo de função. Também analisamos treze livros didáticos, sendo nove do 9º ano do Ensino Fundamental e quatro do 1º ano do Ensino Médio. Com essas análises verificamos se a abordagem que é realizada pelos livros didáticos, no capítulo referente à função afim, engloba as dificuldades dos estudantes que foram sujeitos das pesquisas.

Constatamos que várias dificuldades que foram apontadas pelos autores das pesquisas, são contempladas nas atividades presentes nos livros didáticos. Observamos que isso acontece tanto no Ensino Fundamental como no Médio. Também verificamos que o trabalho com a função afim realizada pelos livros didáticos, não estão em sintonia com o que as pesquisas apontam em relação às dificuldades que os alunos apresentaram quando estavam desenvolvendo atividades que envolviam a função afim.

Para aprofundar a nossa análise, escolhemos dois livros do 9º ano, dois do 1º ano e uma sequência didática desenvolvida no Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências da UFRPE, para fazer uma análise praxeológica. Para fundamentar a nossa pesquisa, nos apoiamos na Teoria Antropológica do Didático que foi desenvolvida por Yves Chevallard. Além de trazer a TAD, também abordamos alguns temas que são centrais para esse trabalho, como o livro didático e o saber função afim.

Para alcançarmos o objetivo geral proposto em nossa pesquisa, elencamos cinco objetivos específicos. São eles: Identificar as principais dificuldades dos alunos apontadas nas pesquisas que trabalharam com o conceito de função afim; identificar em que medida as abordagens sobre o ensino de função afim, propostas pelos livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio aprovados no PNLD 2014/2015, contribuem para superar as dificuldades apontadas nas pesquisas; caracterizar as Organizações Matemáticas presentes nas abordagens de função afim realizadas em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio aprovados no PNLD

2014/2015; caracterizar e analisar a Organização Matemática presente na sequência didática desenvolvida por Dornelas (2007); analisar em que medida as organizações matemáticas existentes nos livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio aprovados no PNLD 2014/2015 estão em sintonia com a organização matemática presente na sequência didática desenvolvida por Dornelas (2007).

Para contemplarmos os objetivos específicos a nossa análise foi dividida em cinco etapas. Na primeira delas fizemos uma caracterização dos livros didáticos e da sequência didática de Dornelas (2007). Essa caracterização nos deu uma ideia de como a função afim está inserida tanto nos livros como na sequência didática.

Na segunda etapa de análise fizemos um levantamento de pesquisas que trabalharam com a função afim para identificar quais eram as principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes que trabalharam com esse modelo matemático. Também nessa etapa verificamos se abordagem dos livros didáticos do 9º ano e do 1º ano estão em acordo com o que as pesquisas apontam como sendo dificuldade enfrentada por estudantes. Desse modo, alcançamos o segundo objetivo específico proposto em nossa pesquisa.

Na terceira etapa de análise, utilizamos a noção de praxeologia fornecida pela TAD para caracterizar as Organizações Matemáticas presentes nos livros do 9º ano do Ensino Fundamental, do 1º ano do Ensino Médio aprovados no PNLD 2014/2015 e na sequência didática de Dornelas (2007). Com a realização dessa etapa contemplamos o terceiro e quarto objetivos específicos, pois caracterizamos os tipos e subtipos de tarefas, as técnicas e as tecnologias que foram utilizadas. Ainda nessa etapa, elaboramos alguns quadros e tabelas com o objetivo de fazer uma síntese dos elementos praxeológicos presentes nos livros que foram analisados.

Nessa parte de nosso trabalho, verificamos que os livros didáticos priorizam as tarefas e em como executá-las, deixando um pouco de lado a reflexão sobre o motivo pelo qual algumas técnicas de resolução. Também constatamos que os livros dão mais importância a determinados subtipos de tarefa de que a outros que também são vistos por alguns pesquisadores como sendo importantes para que o aluno compreenda o conceito de função afim.

Partindo das caracterizações realizadas na etapa anterior, comparamos as Organizações Matemáticas dos livros didáticos e as que foram identificadas na sequência didática de Dornelas (2007) e com isso contemplamos o nosso quinto objetivo específico. Nessa etapa verificamos que existem vários pontos divergentes entre a sequência didática e os livros, como por exemplo, o fato dessas obras darem ênfase, em alguns casos, a diferentes tipos de tarefa.

Também encontramos outros pontos que julgamos ser importantes para esse trabalho, como por exemplo, o fato dos livros didáticos quase não trabalharem com tarefas que envolvem a identificação das variáveis dependente e independente da função afim, embora Dornelas (2007) defenda que isso é importante para a aprendizagem da função afim.

Em relação à realização das tarefas, verificamos que nos exercícios resolvidos os livros didáticos utilizam uma técnica e em seguida propõem outra tarefa similar com a que foi anteriormente resolvida. Conforme já discutimos no capítulo anterior, isso pode fazer com que os alunos utilizem a mesma técnica para resolver as tarefas propostas a partir do mesmo subtipo.

Consideramos isso importante porque é mais um ponto divergente entre os livros didáticos e a sequência didática de Dornelas (2007), já que essa pesquisadora não deixa claro para os estudantes a técnica que pode ser utilizada para resolver as tarefas propostas. Em síntese, verificamos através da análise praxeológica, que a abordagem realizada pelos quatro livros de matemática não estão em sintonia com os principais elementos da sequência didática de Dornelas (2007).

Com a realização desse trabalho, acreditamos ter contribuído com alguns pontos que julgamos ser relevantes, como por exemplo, mostrar quais foram as principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes que trabalharam com a função afim, mostrar se abordagem de função afim realizada por livros didáticos estão de acordo com os achados de algumas pesquisas e também se essa abordagem sobre função afim traz elementos considerados importantes por uma sequência didática desenvolvida no Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências da UFRPE.

Nesse trabalho verificamos quais foram os pontos convergentes e divergentes entre as praxeologia dos livros didáticos e a que estão presentes na sequência didática de Dornelas (2007). Para um estudo futuro, acreditamos que seja importante fazer uma comparação das praxeologias dos livros didáticos com a do professor em sala de aula, para perceber até que ponto a organização matemática utilizada pelo professor sofre ou não influencia dos livros didáticos.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

ANDRINI, A.; VASCONCELOS M. J. **Praticando Matemática.** 3ª edição. 9º ano: livro do professor. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

ARAÚJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França**: estudo sobre ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático. 2009. 291 f. Tese. (Programa de Pós graduação em Educação – Doutorado). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2009.

ARDENGHI, M. J. **Ensino Aprendizagem do Conceito de Função**: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. 2008. 182 f. Dissertação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.

ANDRADE, S. N. **Possibilidades de Articulação Entre as Diferentes Formas de Conhecimento:** A Noção de Função Afim. 2006. 218 f. Dissertação. (Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade do Cruzeiro do Sul. São Paulo, 2006.

ANDRADE, V. L. V. X. de. **Os conceitos de medidas de tendência central e de dispersão na formação estatística no ensino médio no Brasil e na França**. Abordagem exploratória no quadro da teoria antropológica do didático e da teoria dos campos conceituais. 2013. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática e Doutorado em Ciências da Educação – cotutela) - Universidade Federal Rural de Pernambuco/Universidade Lumière Lyon2, Recife, 2013.

ÁVILA, Geraldo. **Introdução ao Cálculo.** Rio de Janeiro: LTC, 2008.

AZEVEDO, A. B. G. **O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções.** 2009. 166 f. Dissertação (Faculdade de Ciências – Departamento de Educação). Lisboa, Universidade de Lisboa, 2009.

BAHIA, R. M. **Uma abordagem significativa de função no 9º ano do Ensino Fundamental.** 2013. 58 f. Trabalho de conclusão de curso (Universidade Federal de Lavras). Lavras, 2013.

BARRETO, B. C; MONTEIRO, M. C. G. G. **Professor, livro didático e contemporaneidade.** Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**. 7ª edição. São Paulo: Moderna, 2011.

BIGODE, A. J. L. **Projeto Velear:** Matemática. 1ª edição. São Paulo: Scipione, 2012.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problematique. *Recherches em Didactique des Mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 19, n. 1, 1999.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRAGA, E. R.. **A compreensão dos conceitos das funções afim e quadrática no ensino fundamental com o recurso da planilha.** 2009. 208 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática - Mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS**. Brasília: Secretaria da Educação Básica, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS**. Brasília: Secretaria da Educação Básica, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** V. 02**.** Brasília: Secretaria da Educação Básica, 2006.

BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2014. Coleções mais distribuídas por componente curricular Matemática. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-dados-estatisticos>. Acesso em 10 Jul. 2014.

BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2015. Coleções mais distribuídas por componente curricular Matemática. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-dados-estatisticos>. Acesso em 20 Jul. 2015.

BRASIL. Guia de livros didáticos: PNLD 2015 - matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014.

BRASIL. Guia de livros didáticos: PNLD 2014 - matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2013.

BRITO MENEZES, A. P. A. **Contrato didático e transposição didática:** inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do Ensino Fundamental. 2006. 410 f. Tese (Programa de Pós graduação em Educação – Doutorado). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

CÂMARA DOS SANTOS, M.; LIMA, P. F. **Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem em Matemática.** Educação Matemática em Revista, n. 12, São Paulo, SBEM, 2002.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2010.

CARDOSO, M. B.; SANTANA, L. E. L.; SILVA, S. H.; FERREIRA, M. A. de S.. FUNÇÃO AFIM: UMA ANÁLISE DOS PROCEDIMENTOS DE CONVERSÃO DE ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO. In: **ENCONTRO NACIONAL DE**

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11º, 2013. Curitiba. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba: Paraná, 2013.

CARVALHO, J. B. P.; LIMA, P. F. A escolha e o uso do Livro Didático. In: **Coleção Explorando o ensino.** V. 17. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2010.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática**: teoria e contexto. 1ª edição. São Paulo: Saraiva, 2012.

CHEVALLARD, Y. **Conceitos fundamentais da didática:** as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUN, J (dir.). Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget. 1996.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigner**. 240 p. Incluído: CHEVALLARD, Y. JOHSUA M. A. Un exemple d'analyse de la transposition didactique. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

____________. **La transposición didática: Del saber Sabio Al Saber ensinado**. Buenos Aires: Aique, 1998a.

_______________. **Analyse des pratiques enseignenantes et didactique des mathematiques: l'approche anthropologique.** In: L'Université d'Eté, 1998. p. 91-118. Actes de l'Université d'Eté la Rochelle, Irem, Clemont-Ferrand, France. 1998b.

_______________. **Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathematiques.** In: MAURY, S. Caillot, M. (éds). Rapport au savoir et didactiques, Paris: Éditions Fabert. 2003.

_______________. Familiére et problématique, la figure du professeur. In: **Recherches em Didactique des Mathématiques.** 1997.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática.** São Paulo: Editora livraria da física, 2007.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris:** Matemática, 9º ano: livro do professor. São Paulo: Ática, 2012.

DANTE, L. R. **MÁTEMÁTICA:** Contexto e aplicações. 2ª edição. 1º ano: livro do professor. São Paulo: Ática, 2013.

DANTE, L. R. **Livro Didático de Matemática: uso ou abuso?** Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996.

DELGADO, C. J. B. **O ENSINO DA FUNÇÃO AFIM A PARTIR DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.** 2010. 152 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica). Universidade do Grande Rio, Duque de Caxias, 2010.

DELGADO, C. J. B.; FRIEDMANN, C. V. P.; LIMA; J. C. P. AS DIFICULDADES APRESENTADAS POR ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO EM RELAÇÃO ÀS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DA FUNÇÃO AFIM. In: **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 10º, 2010, Salvador. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador: Bahia, 2010.

DELIZOICOV, D.; ANGOTII, J. A.; PERNAMBUCO, M. M. Colaboração: Antônio Fernando Gouveia da Silva. **Ensino de Ciências: Fundamentos e Métodos.** São Paulo: Cortez, 2002.

DORNELAS, J. J. B. **ANÁLISE DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM.** 2007. 181 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática - Mestrado). Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2007.

DULCE, S. O.; MORI, Iracema. **Matemática:** Ideias e desafios. 17ª edição. São Paulo: Saraiva, 2012.

DUVAL, Raymond. **GRÁFICO E EQUAÇÕES:** A ARTICULAÇÃO DE DOIS REGISTROS. In: **REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,** v. 06, n. 02, 2011. Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/24514>. Acessado em 23/10/2014.

DUVAL, Raymond. **REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E FUNCIONAMENTO COGNITIVO DO PENSAMENTO**. In: **REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,** v. 07, n. 02, 2012. Universidade Federal de Santa Catarina.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org) **Aprendizagem em Matemática:** Registros de representação semiótica. Campinas, Papirus, 2005.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** 1ª edição. São Paulo: Unicamp, 2007.

FILHO, L. G.. **Modelagem Matemática e o Ensino de Função do 1º Grau.** 2011. 138 f. Dissertação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

FERREIRA, R. D. **CONTRIBUIÇÕES DO GEOGEBRA PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**. 2013. 212 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A, Funções, limite, derivação e integração.** 6ª edição. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

FONSECA, V. G. da. **O USO DE TECNOLOGIAS NO ENSINO MÉDIO:** a integração de mathlets no ensino da função afim. 2011. 141 f. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

GUERREIRO, L. A. S. R. **O PAPEL DAS REPRESENTAÇÕES ALGÉBRICAS NA APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES**. 2009. 176 f. Dissertação (Mestrado em educação). Universidade de Lisboa Faculdade de Ciências, Lisboa, 2009.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar.** 7ª edição. V.1. São Paulo: Atual, 1993.

LAJOLO, MARISA. **Livro Didático:** um (quase) manual de usuário. Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996.

LEONARDO, F. M. **Projeto Araribá:** Matemática, 9º ano: livro do professor. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**, 1º ano: livro do professor. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais.** Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, C. E. O. **A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES.** 2013. 61 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - Departamento de Matemática). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

LIMA, E. L.; CARVALHO, Cezar Pinto Carvalho; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. **A matemática do Ensino Médio.** 9ª ed. V. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LOPES, W. S. **A IMPORTÂNCIA DA UTILIZAÇÃO DE MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES NO DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO DE FUNÇÃO: uma proposta de ensino.** 2003. 105 f. Dissertação (Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

LUZ, S. V. **APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE FUNÇÃO DO 1º GRAU: UMA INVESTIGAÇÃO POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA E DOS MAPAS CONCEITUAIS.** 2010. 172 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática), Maringá, 2010.

MACIEL, P. R. C.; CARDOSO, T. F. L. **O CONCEITO DE FUNÇÃO ATRAVÉS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA.**
In: **SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 5ª, 2012, Petropólis. Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Petrópolis: Rio de Janeiro, 2012.

MAGALHÃES, A. R. **MAPAS CONCEITUAIS DIGITAIS COMO ESTRATÉGIA PARA O DESENVOLIMENTO DA METACOGNIÇÃO NO ESTUDO DE FUNÇÕES.** 2009. 262 f. Tese (Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

MAGGIO, D. P.; SOARES, M. A. da S.; NEHRING, C. M. **Registros de Representação Semiótica da Função Afim: Análise de Livros Didáticos de Matemática no Ensino Médio.** In: revista eletrônica de educação matemática. Florianopólis, v. 05, n.01, 2010.

MANTOVANI, K. P. **O Programa Nacional do Livro Didático – PNLD: impactos na qualidade do ensino público.** 2009. 126 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Geografia Humana). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

MAZZIEIRO, A. S.; MACHADO, P. A. F. **Descobrindo e aplicando a matemática**, 9º ano: livro do professor. Belo Horizonte: Dimensão, 2012.

MENEZES, J. E.; FILHO, M. S. M. **COMO OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO ESTÃO CONSTRUINDO E INTERPRETANDO GRÁFICOS DE FUNÇÕES POLINOMIAIS 1º E 2º GRAUS.** In: **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 10º, 2010, Salvador. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador: Bahia, 2010. p. 1-10.

MESQUITA, F. N. A.; CARVALHO, J. C.; GUERRA, R. B. **Articulação de conteúdos no livro didático e a educação matemática crítica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 10, 2010, Bahia. Anais eletrônicos. Bahia, 2010. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/ocs/index.php/xenem/xenem/paper/view/1562>. Acesso em: 14 nov. 2014.

MORETTIN, P. A.; HAZZAN, S.; B. W. O. **Cálculo funções de uma e várias variáveis.** São Paulo: Saraiva, 2003.

MORI, Iracema; ONAGA, D. S. **MATEMÁTICA IDEIAS E** DESAFIOS. 17ª edição. São Paulo: Saraiva, 2012.

OLIVEIRA, N. de. **Conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem**. 1997. 163 f. Dissertação (Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

PAIS, L. C.. Didática da matemática: **uma análise da influência francesa.** 2ª edição. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. 2ª edição. São Paulo: Moderna, 2013.

PERNAMBUCO. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco.** Secretaria de Educação, 2012.

POSTAL, R. F. **Atividades de modelagem matemática visando a uma aprendizagem significativa de funções afins, fazendo uso do computador como ferramenta de ensino.** 2009. 115 f. Dissertação (Programa de Ensino de Ciências Exatas). Centro Universitário Univates, Lajeado, 2009.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática.** 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SCHONARDIE, B. **Modelagem Matemática e Introdução da Função Afim no Ensino Fundamental.** 2011. 129 f. Dissertação (Pós Graduação em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2011.

SILVA, Daniel. Romão. **Livro didático de Matemática: Lugar histórico e perspectivas. São Paulo**. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2010.

SANTANA, A. J.; ANDRADE, V. L. V. X.; RÉGNIER, J. C. Análise das pesquisas didáticas sobre função afim no Ensino Fundamental e Médio no quadro da análise estatística implicativa. In: RÉGNIER, J-C.; SLIMANI, Y.; GRAS, R. (Ed.). **Analyse Statistique Implicative**. Des sciences dures aux sciences humaines et sociales. Tunísia: ARSA, 2015. p. 400-416.

SILVA, V. G. **Análise da Abordagem de Comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático**. 2011. 194 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

SOUZA, J. R. de; ROBERTO DE S.; PATRICIA R. M. P. **Vontade de Saber Matemática**. 2ª edição. São Paulo: FTD, 2012.

SOUZA, Joamir. **Novo Olhar Matemática.** 2ª edição. São Paulo: FTD, 2013.

STEWART, J. **Cálculo.** 5ª edição. V. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

TEIXEIRA, R. de F. B. **Relações Professor e Livro Didático de Alfabetização.** 2009. 135 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

TINOCO, Lúcia et al. **Álgebra: Pensar? Calcular? Comunicar?**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática. Projeto Fundão, UFRJ, 2008.

TRINDADE, J. A. de O. **Obstáculos epistemológicos à aprendizagem do conceito de função**. Artigo (Pós-Graduação em educação). Universidade Federal de Santa Catarina. 1999.