

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE**  
**Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação - PRPPG**  
***Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências – PPGEC***

FERNANDA ANDRÉA FERNANDES SILVA

**SIGNIFICADOS E REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS  
ABORDADOS NO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO - ENEM**

Recife

2013

**FERNANDA ANDRÉA FERNANDES SILVA**

**SIGNIFICADOS E REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS  
ABORDADOS NO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO - ENEM**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências, (PPGEC) da Universidade Federal Rural de Pernambuco, para obtenção do título de Mestre em Ensino das Ciências.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Mônica Lins.

Coorientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Recife

2013

### Ficha Catalográfica

S586s Silva, Fernanda Andréa Fernandes  
Significados e representações dos números racionais  
abordados no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM /  
Fernanda Andréa Fernandes Silva. -- Recife, 2013.  
153 f. : il.

Orientador (a): Mônica Maria Lins Santiago.  
Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino das  
Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco,  
Departamento de Educação, Recife, 2013.  
Inclui referências e anexo(s).

1. Números racionais 2. Significados 3. Representações  
4. ENEM I. Santiago, Mônica Maria Lins, orientadora II. Título

CDD 507

FERNANDA ANDRÉA FERNANDES SILVA

**SIGNIFICADOS E REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS  
ABORDADOS NO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO - ENEM**

Dissertação defendida no Departamento de Educação da UFRPE no dia 05/03/2013  
e aprovada pela seguinte Banca Examinadora:

---

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Mônica Lins, UFRPE  
Orientadora

---

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos, UFRPE  
Coorientador e Examinador Interno

---

Prof. Dr. Mérciles Thadeu Moretti, UFSC  
Examinador Externo

---

Prof. Dr. Abraão Juvêncio de Araújo, Col. Aplicação UFPE  
Examinador Externo

Dedico esta pesquisa ao meu pai, Ailton  
José da Silva (em memória).

## AGRADECIMENTOS

A **Deus**, por ter me concedido a realização de um sonho.

À minha mãe, **Quitéria Fernandes**, por ter compreendido o quanto esse mestrado é importante para mim e ter conduzido a nossa família, com maestria, na minha ausência, passando por momentos difíceis em que necessitava de minha ajuda, mas sem se deixar abater.

Ao meu esposo, **Antônio Correia**, pelo companheirismo, dedicação e paciência com que trilhou esse caminho ao meu lado.

Aos meus filhos, **Daniele Francine** e **Deyvson Paulo** por compreenderem a necessidade da minha ausência.

A minha filha **Edvania Fernandes**, por ter buscado se adaptar, as mudanças de moradia e escola, e a distância dos irmãos e avós.

Aos meus avós, **Marina** e **Orlando** que mesmo sem entenderem bem o significado desse curso me apoiaram e rezaram por mim.

À minha amiga Professora **Lúcia Cristina S. Monteiro**, grande mestra, incentivadora que me fez ter confiança e acreditar que era capaz de chegar até aqui.

À minha orientadora Professora **Mônica Lins** pelo carinho, orientações, encaminhamentos, confiança e humildade que sempre me tratou. Meus agradecimentos sinceros.

Ao meu coorientador Professor **Marcelo Câmara dos Santos**, quando no curso de especialização em Educação matemática, ter me despertado a vontade de seguir em frente e almejar um mestrado; e ao reencontrá-lo, no mestrado, como meu coorientador, pela sua dedicação, paciência, confiança, e orientações tão importantes durante a minha jornada. Meus agradecimentos sinceros.

Ao Professor **Abraão Juvêncio Araújo**, pelas contribuições realizadas na qualificação, e por ter aceitado o convite para participar da banca de defesa.

Ao Professor **Méricles T. Moretti** por ter aceitado o convite em participar da banca de defesa.

Aos **colegas do grupo de pesquisa**, Fenômenos Didáticos na classe de matemática, pelas contribuições para a pesquisa;

A **todos os meus amigos de turma**, incluindo **Ivoneide** e **Rodrigo**, pelo carinho, com que me receberam, demonstrando toda a hospitalidade do povo pernambucano.

## RESUMO

Essa pesquisa se propõe a investigar quais são os significados e as representações dos números racionais que são contemplados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. Para tanto, tomamos como referência os estudos de Romanatto (1997) e Gomes (2010) e adotamos os seguintes significados para os números racionais: medida (parte-todo), quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade, um número na reta numérica e porcentagem. Para analisarmos os registros de representações dos números racionais que são contemplados no ENEM, utilizamos a Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval que considera que os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis e que o acesso a esses só é possível por meio de um sistema de representação. O percurso metodológico constou de duas etapas. Na etapa I analisamos as provas de conhecimentos gerais dos ENEM de 1998 a 2008 e as provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011, no sentido de identificar os itens que envolviam o conceito de números racionais nos seus diferentes significados. Na etapa II, analisamos os itens identificados na etapa I, referente às provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011, quanto aos registros de representações contidos na estrutura do item e, em particular os registros dos números racionais, e, também, quanto aos registros de representações, os tratamentos e as conversões que podiam ser mobilizados, durante a resolução do item. Concluímos que nas provas de conhecimentos gerais dos ENEM de 1998 a 2008, aproximadamente 5,6% dos itens (3,9 itens por prova) envolviam o conceito de números racionais. Enquanto que nas provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011 (novo ENEM), aproximadamente, 21% dos itens (9,6 itens por prova) abordavam esse conceito. Os significados identificados nos itens relativos aos ENEM de 1998 a 2008 foram praticamente os mesmos identificados no período do novo ENEM, parte-todo, razão, porcentagem e probabilidade. Sendo o significado porcentagem o mais abordado. Alguns itens envolveram mais de um significado. Os itens referentes às provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011 tiveram um predomínio na sua estrutura (enunciado, suporte, comando e alternativas de resposta), entre os registros de representações semióticas dos números racionais, o registro numérico porcentagem. O registro semiótico dos números racionais que mais pôde ser mobilizado durante as resoluções dos itens foi o registro numérico fracionário. As conversões entre os registros dos números racionais, só ocorreram apenas num sentido, com exceção de um item do ENEM 2010.

Palavras-chave: Números racionais, significados, representações, ENEM

## ABSTRACT

This research proposes to investigate what are the meanings and the representations of the rational numbers that are contemplated in the National High School Exam – ENEM. Therefore, then we take as reference the studies of Romanatto (1997) and Gomes (2010) and we adopted the following meanings for the rational numbers: measure (part-whole), quotient, reason, multiplicative operator, probability, a number in straight numerical and percentages. To we analyze the records of representations of the rational numbers that are contemplated in ENEM, We use the Theory of the Representations semiotics Raymond Duval who considers that mathematical objects are not directly perceptible and that access to them is possible only through a system of representation. The methodological route that we have adopted consisted of the two stages. In step I we analyze the tests general knowledge of the ENEMs 1998 to 2008 and math tests and their technologies of the ENEMs from 2009 to 2011, in the sense of identify items that mobilized the concept of rational numbers in their different meanings. In step II, we analyze the items identified in step I, regarding the math tests and their technologies of ENEM 2009 to 2011, as to records of representations contained in the structure of the item and in particular of the records of the rational numbers, and also, regarding as to records of representations, treatments and conversions that could be mobilized during the resolution of the item. We concluded that, in the evidence of general knowledge of the ENEMs 1998 to 2008, approximately 5.6% of the items (3.9 items per tests) involved the concept of rational numbers. While in math tests and their technologies of the ENEMs 2009 to 2011 (new ENEM), approximately 21% of the items (9.6 items per tests) mobilized this concept. The meanings identified in the items relative at the ENEM 1998 to 2008 were virtually the same identified in the period of the ENEM new, part-whole, reason, percentages and probability. Being the meaning, percentage, as the more addressed. Some items involved more than one meaning. The items related to math tests and their technologies of the ENEMs 2009 to 2011 had a predominance in its structure (enunciated, bracket, command, and alternatives of the answer), among the records of semiotic representations of rational numbers, the numeric registration, percentages. The semiotic register of rational numbers who else could be mobilized during for the resolutions of the items was the record fractional numerical. Conversions between the records of rational numbers only occurred in only one direction, with the exception of one item of the ENEM 2010.

Keywords: rational numbers, meanings, representations, ENEM

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – Classificação dos registros de representação semiótica em matemática .....	33
QUADRO 2 - Discriminação dos objetos de conhecimento de matemática e suas tecnologias.....	45
QUADRO 3 - Significados dos números racionais identificados nos itens dos ENEM de 1998 a 2008.....	54
QUADRO 4 - Significados dos números racionais identificados nos itens dos ENEM de 2009 a 2011 .....	55
QUADRO 5 - Síntese da abordagem do significado porcentagem nos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009 .....	76
QUADRO 6 - Registros dos números racionais existentes e mobilizados nos itens Identificados do ENEM 2009 .....	78
QUADRO 7 - Conversões entre o registro da língua materna e os registros dos números racionais do ENEM 2009 .....	78
QUADRO 8 - Conversões entre os registros dos números racionais do 2009 .....	79
QUADRO 9 - Conversões entre outros tipos de registros do ENEM 2009 .....	79
QUADRO 10 - Síntese da abordagem do significado porcentagem nos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010 .....	100
QUADRO 11 - Registros dos números racionais existentes e mobilizados nos itens identificados do ENEM 2010.....	102
QUADRO 12 – Conversões entre os registros dos números racionais do ENEM ...	103
QUADRO 13 - Conversões entre o registro da língua materna e os registros dos números racionais do ENEM 2010 .....	103
QUADRO 14 - Conversões entre outros tipos de registros do ENEM 2010 .....	104
QUADRO 15 - Síntese da abordagem do significado porcentagem nos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 .....	125
QUADRO 16 - Registros dos números racionais existentes e mobilizados nos itens do ENEM 2011 .....	126
QUADRO 17 - Conversões entre o registro da língua materna e os registros dos números racionais do ENEM 2011 .....	127

QUADRO 18 - Conversões entre os registros dos números racionais do ENEM 2011 .....	127
QUADRO 19 - Conversões entre outros tipos de registros do ENEM 2011 .....	128
QUADRO 20 – Percentuais dos itens que envolvem as conversões entre o registro da língua materna e os registros dos números racionais dos ENEM 2009 a 2011.....	134
QUADRO 21 – Percentuais das conversões entre os registros dos números racionais que podem ser mobilizados nos itens dos ENEM 2009 a 2011 .....	135
QUADRO 22 – Percentuais das conversões entre outros tipos de registros que podem ocorrer nas estratégias de resolução dos itens analisados dos ENEM 2009 a 2011 .....	136

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1- Relações entre as competências e as habilidades da matriz curricular do ENEM.....	43
FIGURA 2 - questão 137 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.....	56
FIGURA 3 - questão 139 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.....	58
FIGURA 4 - questão 140 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.....	60
FIGURA 5 - questão 141 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.....	62
FIGURA 6 - questão 143 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.....	64
FIGURA 7 - questão 144 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.....	66
FIGURA 8 - questão 152 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.....	68
FIGURA 9- questão 158 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.....	69
FIGURA 10- questão 164 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.....	71
FIGURA 11- questão 180 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.....	73
FIGURA 12- questão 136 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010.....	80
FIGURA 13- questão 138 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010.....	82
FIGURA 14- questão 141 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010.....	83
FIGURA 15- questão 145 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010.....	85

FIGURA 16- questão 153 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010 .....	88
FIGURA 17- questão 154 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010 .....	90
FIGURA 18- questão 170 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010 .....	92
FIGURA 19- questão 172 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010 .....	96
FIGURA 20- questão 173 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010 .....	98
FIGURA 21- item 143 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 .....	105
FIGURA 22- questão 145 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 .....	106
FIGURA 23- questão 157 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 .....	109
FIGURA 24 - questão 159 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 .....	112
FIGURA 25- questão 162 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 .....	114
FIGURA 26- questão 164 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 .....	115
FIGURA 27- questão 165 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 .....	116
FIGURA 28- questão 166 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 .....	118
FIGURA 29- questão 171 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 .....	120
FIGURA 30- questão 172 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 .....	122

## LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1- Quantidade de itens por prova do ENEM que mobilizam algum tipo de significado ou representação do número racional .....	52
GRÁFICO 2- Significados dos números racionais abordados nos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009 .....	75
GRÁFICO 3 - Significados dos números racionais abordados nos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010 .....	99
GRÁFICO 4 - Significados dos números racionais abordados nos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 .....	124
GRÁFICO 5 – Significados dos números racionais abordados nos itens das provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM 2009 a 2011 .....	129
GRÁFICO 6- Percentuais de registros dos números racionais existentes na estrutura dos itens de acordo com o ano do ENEM .....	130
GRÁFICO 7 – Registros dos números racionais presentes na estrutura dos itens analisados de acordo com o significado envolvido .....	131
GRÁFICO 8 – Percentuais dos registros dos números racionais que podem ser mobilizados nos itens de acordo com o ano do ENEM .....	132
GRÁFICO 9 – Registros dos números racionais mobilizados nas resoluções dos itens de acordo com o significado envolvido .....	132
GRÁFICO 10 – Conversões mobilizadas entre o registro da língua materna e os registros dos números racionais de acordo com os significados envolvidos .....	133
GRÁFICO 11 – Conversões entre os registros dos números racionais de acordo com o significado envolvido .....	135

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	15
1. DEFINIÇÃO E SIGNIFICADOS DOS NÚMEROS RACIONAIS .....	19
1.1 Ideias básicas dos significados dos números racionais adotados nesse estudo .....	25
1.2 Os significados dos números racionais considerados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais .....	29
2. REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICA .....	32
2.1 A existência de diversos registros de representação semiótica .....	33
2.2 A diferença entre o objeto representado e seus registros de representação semiótica .....	35
2.3 A coordenação entre diferentes registros de representação semiótica .....	36
2.4 A substituidade dos registros de representações semióticas .....	38
2.5 A apreensão de figuras de formas geométricas .....	39
3. O EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO – ENEM .....	41
4. PERCURSO METODOLÓGICO .....	47
4.1 Categorias de análise utilizadas na etapa I .....	47
4.2 Categorias de análise da etapa II .....	48
4.3 Roteiro utilizado para análise da etapa II .....	51
5. ANÁLISE DA ETAPA I .....	52
5.1 Itens dos ENEM de 1998 a 2011 que mobilizam o conceito de números racionais .....	52
5.2 Significados dos números racionais nas provas de conhecimentos gerais dos ENEM de 1998 a 2008.....	53
5.3 Significados dos números racionais nas provas de conhecimentos gerais dos ENEM de 2009 a 2011.....	55
6. ANÁLISE DA ETAPA 2 .....	56
6.1 Análise dos itens selecionados da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.....	56

6.2 Síntese da análise dos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009 .....	75
6.3 Análise da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010 .....	80
6.4 Síntese da análise dos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010 .....	99
6.5 Análise da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 .....	105
6.6 Síntese da análise dos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 .....	124
6.7 Síntese das análises dos ENEM 2009 a 2011 .....	129
CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	138
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	143
ANEXO A .....	148
ANEXO B .....	151

## INTRODUÇÃO

---

No Sistema Educacional Brasileiro, os números racionais são introduzidos, em geral, a partir do 4º ano do Ensino Fundamental, com o ensino formal de frações, ampliando o conjunto dos números naturais que se mostra, para os alunos, insuficiente para resolver determinados problemas.

O conjunto dos números racionais é composto por números que apresentam as seguintes representações: fração ordinária, porcentagem, decimal exato, inteiro, decimal periódico e potência de dez. Esses registros são empregados de acordo com o contexto em que o número está inserido, como, por exemplo, em uma receita culinária, utiliza-se a expressão “ $\frac{3}{4}$  de xícara de farinha de trigo” e não “0,75 de xícara de farinha de trigo”. Também, emprega-se o termo “ganhe 10% de desconto nas compras à vista” ao invés de “ $\frac{1}{10}$  de desconto nas compras à vista”. Sendo assim, torna-se necessário que os alunos tenham o domínio e estabeleçam conexões entre os diferentes registros de representações dos números racionais e que saibam utilizá-los e interpretá-los em diversos contextos (BRASIL, 1997), buscando ter o domínio sobre eles.

Romanatto (1997) afirma que, dependendo do contexto em que aparece o número racional, ele, assume um *significado* ou *personalidade*. Os registros de representações e os significados desses números são estudados formalmente até o final do Ensino Fundamental, sendo consolidados no Ensino Médio, como apontam as Orientações Curriculares do Ensino Médio – OCNEM (BRASIL, 2008).

Entretanto, pesquisas envolvendo o ensino-aprendizagem dos números racionais, como Catto (2000), Merlini (2005), Teixeira (2008), Santos (2005) têm demonstrado que esses números são de difícil compreensão para os alunos, devido à variedade de registros de representações, como, também, de significados. Além disso, os alunos têm demonstrado dificuldades em compreender que algumas propriedades do conjunto dos números naturais só são válidas para esse domínio, favorecendo a criação de entraves à aprendizagem do conjunto dos números racionais e rupturas desse com o conjunto numérico dos naturais, como indicam os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997).

O ENEM é uma avaliação da aprendizagem com base nas competências e habilidades que o aluno deve desenvolver durante a educação básica; é pautado em

uma concepção de ensino e aprendizagem contextualizado, problematizador, que busca o desenvolvimento do sujeito voltado para a cidadania, como preconizam os documentos curriculares oficiais brasileiros, acima citados. Quando esse exame foi lançado, em 1998, era constituído de uma prova de conhecimentos gerais, contendo 63 itens de múltipla escolha e uma redação; se baseava em uma matriz de referência em que eram descritas as competências e habilidades a serem avaliadas. Em 2009, o ENEM foi reformulado, passando a chamar-se novo ENEM, e constituído de 04 provas, Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Redação; Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias. Cada prova, exceto a de redação, contém 45 itens de múltipla escolha. A matriz de referência desse exame passou a indicar os eixos cognitivos a serem avaliados, além das competências e habilidades, que também sofreram modificações.

Ramalho e Núñez (2011) apontam que

Os fundamentos dos referenciais nacionais do ensino médio, a partir do ENEM, colocam na pauta do Ministério da Educação um novo debate e, nesse sentido, esse exame passa a ter grande importância na função de fomentar a reforma, não apenas desta etapa de ensino, mas da educação básica como um todo” (RAMALHO e NÚÑES, op.cit., p. 09).

Os autores acima citados afirmam, ainda, que conhecer a fundamentação desse exame é importante para uma reflexão acerca do ENEM e sua relação com o ensino escolar, de forma dialética e num duplo sentido.

Dessa forma, com a finalidade de instigar as reflexões sobre o currículo acerca dos números racionais, esse estudo se propôs a responder a seguinte questão de pesquisa: **Como são abordados os números racionais no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, à luz de seus significados e das suas representações?**

Nessa direção, essa pesquisa teve como objetivo geral:

- Investigar como são abordados os números racionais no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, à luz de seus significados e das suas representações.

E, como objetivos específicos:

- Identificar e analisar os itens dos ENEM que mobilizam o conceito de números racionais, nos seus diferentes significados;

- Analisar os diferentes significados dos números racionais;
- Analisar os registros semióticos presentes na estrutura do item ou que podem ser mobilizados durante a resolução do mesmo;
  - Investigar a relação entre os significados e tipos de representação semiótica;
  - Analisar as conversões e os tratamentos que podem ser realizados durante a resolução do item;

Para realizar as análises previstas nos objetivos deste trabalho, foi utilizado como referencial teórico a Teoria das Representações Semióticas de Duval (2003, 2009, 2011) e a classificação dos significados dos números racionais, proposta por Romanatto (1997) e Gomes (2010).

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma: introdução, que consta de justificativa do tema, problema de pesquisa, objetivo geral e objetivos específicos da pesquisa.

O primeiro capítulo está dividido em três seções: a primeira apresenta uma definição e os significados dos números racionais, a segunda seção apresenta as ideias básicas dos significados dos números racionais adotados nesse estudo e, a terceira seção, os significados dos números racionais considerados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais.

O segundo capítulo está dividido em quatro seções: a primeira discute o conhecimento matemático na perspectiva da Teoria de Raymond Duval; a segunda seção retrata a existência de diversos registros de representação semiótica; a terceira seção visa diferenciar o objeto representado dos seus registros de representação semiótica; a quarta seção discute a coordenação entre diferentes registros de representação semiótica.

O terceiro capítulo apresenta as características, objetivos e fundamentos em que se baseiam o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM

O quarto capítulo apresenta o percurso metodológico adotado no estudo, tendo sido dividido em três etapas que foram analisadas em duas sessões. A primeira seção apresenta e discute as categorias de análise utilizadas na etapa I, destinadas à identificação dos itens das provas de conhecimentos gerais dos ENEM de 1998 a 2008 e das provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011, que mobilizam o conceito de números racionais nos seus diferentes significados. A segunda seção apresenta as categorias de análise utilizadas na

etapa II, ou seja, aquelas destinadas à análise dos registros de representações semióticas dos números racionais, dos outros registros semióticos envolvidos no item, dos tratamentos realizados durante a resolução, e das conversões mobilizadas entre os registros. Finalmente, a terceira seção traz o roteiro de análise da etapa II.

O quinto capítulo foi destinado à análise da etapa I, sendo dividido em duas seções. A seção 5.1, apresenta o levantamento quantitativo dos itens dos ENEM de 1998 a 2011 que mobilizam o conceito de números racionais. A seção 5.2 apresenta o levantamento dos significados dos números racionais nas provas de conhecimentos gerais dos ENEM de 1998 à 2008.

O sexto capítulo refere-se à análise da etapa II, sendo dividido em seis seções. A sessão 6.1, analisa os itens selecionados da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009. A seção 6.2, apresenta uma síntese da análise dos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009. A sessão 6.3, analisa os itens selecionados da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010. A seção 6.4, apresenta uma síntese da análise dos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010. A sessão 6.5, analisa os itens selecionados da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011; e, finalmente, a seção 6.6, apresenta uma síntese da análise dos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011.

Para concluir, as considerações finais retomaram o problema de pesquisa, procurando ampliar a discussão do que já foi analisado, indicando em que medida o estudo vai conseguir responder à questão proposta e quais as contribuições do estudo para o ensino e a aprendizagem dos números racionais na escola.

## CAPÍTULO 1. DEFINIÇÃO E SIGNIFICADOS DOS NÚMEROS RACIONAIS

---

Caraça (1975) define o número racional utilizando a ideia de medida de um segmento, ou seja, dados os segmentos de reta,  $u$ ,  $v$  e  $w$ ;  $u$  contendo  $m$  vezes  $v$ ,  $v$  contendo  $n$  vezes  $w$ ; por definição, a medida do segmento  $w$ , tomando-se  $u$ , como unidade, é o número  $\frac{m}{n}$ , para qualquer  $m$  e  $n$ , sendo  $n$  diferente de zero. Se  $m$  for divisível por  $n$ , então o número  $\frac{m}{n}$ , coincide com o número inteiro que é o resultado da divisão; se  $m$  não for divisível por  $n$ , então o número  $\frac{m}{n}$  é chamado de fracionário, onde  $m$  é o numerador e  $n$  o denominador.

Kieren (1976), citado por Teixeira (2008), Silva (2008), Gomes (2010) e Costa (2011), define o número racional como sendo um número 'x' qualquer que satisfaz a equação  $ax = b$  onde 'a' e 'b' são inteiros e  $b \neq 0$ , ou seja,  $x = \frac{b}{a}$ . Entretanto, esse autor, em obra posterior, afirma que essa definição não explica muito sobre a noção de número racional (KIEREN, 1980), sendo o primeiro pesquisador, de acordo com a literatura, a apontar sete interpretações desses números que devem ser consideradas para a completa compreensão da sua natureza, a saber:

1. Números racionais são frações que podem ser comparadas, somadas, subtraídas, etc.
2. Números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (via nosso sistema de numeração) para os números inteiros.
3. Números racionais são classes de equivalência de frações. Assim,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{4}$ ,  $\frac{3}{6}$ , ... e  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{4}{6}$ ,  $\frac{6}{9}$ , ... são números racionais;
4. Números racionais são números na forma  $\frac{p}{q}$ , onde  $p$ ,  $q$  são inteiros e  $q \neq 0$ . Nesta forma, os números racionais são "razões" de números;
5. Números racionais são operadores multiplicativos (p. ex., esticadores, redutores, etc.)
6. Números racionais são elementos de um campo quociente ordenado e infinito. Eles são números na forma  $x = \frac{p}{q}$ , onde  $x$  satisfaz a equação  $qx = p$ ;
7. Números racionais são medidas ou pontos numa reta numérica.<sup>1</sup> [KIEREN, 1976, p.102, apud (SILVA 2008, p. 30), tradução nossa].

---

<sup>1</sup> 1. Rational numbers are fractions which can be compared, added, subtracted, etc ; 2. Rational numbers are decimal fractions which form a natural extension (via our numeration system) to the whole numbers ; 3. Rational numbers are equivalence classes of fractions. Thus  $\{1/2, 2/4, 3/6, \dots\}$  and  $\{2/3, 4/6, 6/9, \dots\}$  are rational numbers ; 4. Rational numbers are numbers of the form  $p/q$ , where  $p$ ,  $q$  are integers and  $q \neq 0$ . In this form, rational numbers are 'ratio' numbers ; 5. Rational numbers are multiplicative operators (e.g., stretchers, shrinkers, etc.) ; 6. Rational numbers are elements of an infinite ordered quotient field. They are numbers of the form  $x = p/q$  where  $x$  satisfies the equation  $qx = p$  ; 7. Rational numbers are measure or points on a number line.

Segundo Behr et al (1983), Kieren (1976) afirma que para se ter uma ampla compreensão dos números racionais é necessário conhecer não apenas cada uma dessas interpretações, mas, também, como elas se relacionam, pois análises teóricas e empíricas evidenciam que são necessárias diferentes estruturas cognitivas para lidar com os vários significados dos números racionais.

Em maio de 1980, Kieren, embasando-se na pesquisa de Morgenau (1961) que analisou o componente cognitivo na aprendizagem de um conhecimento complexo, publica um artigo em que revê as interpretações do número racional, passando a chamá-las de subconstrutos que, interconectados, formam o construto dos números racionais. Ele considera cinco subconstrutos como sendo básicos: parte-todo, quociente, medida, razão e operador (KIEREN, 1980).

Esse autor afirma que esses subconstrutos não são matematicamente e psicologicamente independentes, mas representam cinco diferentes padrões de pensamentos dos números racionais. Ele considera os subconstrutos parte-todo e razão estreitamente relacionados, pois, “juntos formaram bases tradicionais e modernas para o desenvolvimento do significado de fração”<sup>2</sup> (KIEREN, 1980, p. 134, tradução nossa).

Ohlsson (1988) afirma que Kieren (1976, 1980) refere-se mais aos números racionais do que as frações, mas as ideias por ele propostas como básicas são similares às interpretações de frações sugeridas por outros pesquisadores.

Em 1988, Kieren discute um modelo teórico de construção do conhecimento matemático, relacionando-o ao número racional. Apresenta uma rede de subconstrutos do número racional que forma um sistema ideal de conhecimento pessoal desse número, usando a distinção filosófica de Morgenau (1961) entre fatos externos e construtos humanos mentais. Ele sugere uma nova classificação para os subconstrutos do número racional: medida, quociente, número razão e operador multiplicativo.

Behr et al (1983), pesquisadores americanos que fazem parte do The Rational Number Project<sup>3</sup>, consideram que o conceito de número racional está entre as ideias matemáticas mais complexas e importantes que as crianças se deparam durante o ensino fundamental. Essa importância dos números racionais pode ser analisada a partir das perspectivas:

---

<sup>2</sup> These have formed the traditional and modern bases for developing fraction meaning.

<sup>3</sup> Projeto de número Racional apoiado pela NSF (National Science Foundation).

- a) Prática, pois a eficiência em lidar com esses conceitos aumenta a habilidade de resolver situações e problemas do cotidiano;
- b) Psicológica, pois os números racionais proporcionam o desenvolvimento e a expansão das estruturas mentais que são necessárias a um aprimoramento intelectual contínuo;
- c) Matemática, porque a compreensão dos números racionais fundamenta o desenvolvimento de operações algébricas elementares. (BEHR ET AL, 1983)

Esses autores redefiniram algumas interpretações de Kieren (1976) dos números racionais e subdividiram outras, propondo os seguintes subconstrutos:

1. Medida fracionária: é uma reconceitualização da interpretação parte-todo da fração. Representa uma quantidade de uma determinada unidade.
2. Razão de um número racional: expressa uma comparação entre duas quantidades;
3. Taxa de número racional: representa uma nova grandeza que foi definida da relação entre duas outras. A velocidade é um exemplo desse construto, sendo obtida da relação entre a distância e o tempo;
4. Quociente de um número racional: representa um número racional como quociente indicado, ou seja, como uma divisão do numerador pelo denominador;
5. Coordenada linear de um número racional: assemelha-se à interpretação medida de Kieren. Representa o número racional na reta numérica, enfatizando as propriedades associadas à topologia na reta numérica, densidade, distância e não completividade; e, ainda, que os números racionais são um subconjunto dos reais;
6. Decimal de número racional: envolve as propriedades ao nosso sistema de numeração;
7. Operador de um número racional: representa esse número como uma transformação, uma função ou como alongador-redutor.

Nesher (1985), citado por Ohlsson (1988), apresenta outra proposta de interpretação dos números racionais:

1. Fração como descrição da relação parte-todo, ou seja, uma descrição da partição de um objeto. “Sob este significado, um todo é cortado em  $n$  fatias, cada fatia é

codificada como  $\frac{k}{n}$ . A ideia de 1 inteiro  $\frac{n}{n}$  é uma característica básica dessa interpretação”<sup>4</sup> (Nesher, 1985, apud Ohlsson, 1988, p.55, tradução nossa).

2. Número racional como um resultado da divisão entre dois números inteiros;
3. Número racional como uma razão, ou seja, como uma comparação (multiplicativa) entre duas quantidades;
4. Número racional como um operador, ou seja, como algo que opera em outra coisa, uma quantidade, e muda essa quantidade;
5. Número racional como probabilidade.

Essa autora considera parte-todo, divisão e razão os mais importantes esquemas conceituais das frações (NESHER, 1985, apud OLHSSON, 1988).

Ohlsson (1988) considera as pesquisas de Kieren (1976, 1980), Ber et al (1983) e Nesher (1985) um progresso para a semântica das frações, e afirma que esses autores concordam que quociente, razão, operador e alguma versão da relação parte-todo são conceitos centrais. No entanto, a autora aponta dificuldades em conciliar as análises porque diferem quanto ao objeto de estudo, frações ou números racionais, e por não serem especificados os critérios utilizados para fazer as distinções em cada análise. “Uma lista de interpretações é um ponto inicial necessário, mas a teoria dos significados das frações também deve esclarecer as relações entre as interpretações”<sup>5</sup> (OLHSSON, 1988, P.56, tradução nossa).

Segundo a autora acima citada, as propostas de Kieren, Behr et al e Nesher, não extinguem as possibilidades de interpretações de frações. Ohlsson (1988) afirma que em suas pesquisas anteriores, esboçou uma semântica geradora de interpretações de frações, cujos objetivos eram atribuir uma estrutura para o conjunto de interpretações de frações, ao invés de apenas listá-las, e caracterizar todo o conjunto de interpretações possíveis. Então, ela propôs a interpretação de uma fração em função da interpretação do numerador e do denominador, porque ambos são inteiros e, sendo assim, podem ser interpretados como quantidades (ex. o número de bolas de gude de uma sacola) ou como parâmetros (ex. o número de vezes que uma operação é repetida). Desta forma, a autora indicou quatro interpretações básicas possíveis para as frações:

---

<sup>4</sup> Under this meaning, a whole is sliced into  $n$  slices, each slice is encoded as  $1/n$ , and if one refers to several ( $k$ ) slices it is encoded as  $k/n$ . The idea of 1 whole ( $1=n/n$ ) is a basic feature in this representation.

<sup>5</sup> A list of interpretations is a necessary starting point, but a theory of the meaning of fractions must clarify the relations between the interpretations.

1. Quando o numerador e o denominador de uma fração são interpretados como quantidades, gerando a ideia de comparação (razão), isto é, uma quantidade é descrita com relação a outra. Como exemplo: há duas meninas para cada menino;
2. Quando o numerador é uma quantidade e o denominador é um parâmetro, correspondendo à ideia de partição (parte-todo). O numerador é operado da maneira que é descrita pelo denominador. Um exemplo seria, uma pizza de R\$21,00 foi dividida em 4 partes.
3. Quando o numerador é um multiplicador e o denominador, um divisor (operador), e ambos são aplicados a uma mesma quantidade. Como exemplo, temos: um balão encolheu dois terços do seu tamanho.
4. Quando ambos, numerador e denominador são parâmetros, não foi interpretado.

Entretanto em Ohlsson (1988), a própria autora faz severas críticas a essas interpretações dadas para frações e apresenta outra abordagem em que tenta avançar na teoria dos construtos dos números racionais, e sugere que o traço de fração usado na forma  $\frac{a}{b}$ , pode significar os seguintes construtos matemáticos: função quociente, um número racional, um vetor binário e um tipo particular de função composta. Para cada construto matemático são definidas suas aplicações. O construto função quociente admite quatro aplicações de  $\frac{a}{b}$ , partição, extração, contração e educação. O construto número racional, é definido com duas aplicações, frações e medidas. O vetor binário é aplicado como razão, quantidade intensiva, taxa e proporção. Enquanto que o construto função composta pode ser aplicado como operador.

Porém, Romanatto (1997) considera que a aplicação como fração (do subconstruto número racional), não aparenta ser diferente da interpretação usual parte-todo da fração. A aplicação de medida, desse mesmo construto, não tem relação com a noção de medida de número racional considerada por Kieren (1976) ou Behr et al (1983); e da forma em que está definida se aproxima mais da noção de parte-todo de frações, ficando limitada ao uso de unidades de medida padrão.

Para Behr et al (1992), citados por Romanatto (1997), que concorda com as suas afirmações, as aplicações do subconstruto vetor binário  $\frac{a}{b}$ , parecem não inovar na compreensão já existente dos números racionais porque coincidem com as noções descritas em análises anteriores. O subconstruto quantidade intensiva apresenta uma limitação no seu bojo; e o subconstruto função composta, pode levar

a uma interpretação usual de número racional como operador definido em Kieren (1976).

As afirmações acima descritas embasaram Romanatto (1997) para afirmar que os cinco subconstrutos dos números racionais, parte-todo, quociente, número proporcional, operador e medida, estavam de alguma forma sustentando-se ao teste do tempo.

Esse autor afirma que Confrey e Harel (1994) associam a compreensão de número racional a uma teia de relações ou conceitos interligados que serão construídos a partir de contextos significativos que envolvam esses números. Romanatto (1997) considera que esses contextos, devem compreender as diversas “personalidades” do número racional que sugere serem: medida (parte-todo), quociente, razão, operador multiplicativo, um número na reta numérica e probabilidade. Ele considera essas personalidades necessárias para uma compreensão plena desses números, de acordo com as pesquisas de Kieren (1975 e 1980); Behr et al (1983); Freudenthal (1983); Vergnaud (1983); Nesher (1985); Silver (1986); Olhsson (1987); Schwartz (1988); Gimenez (1988) e Behr, Harel, Post e Lesh (1992) (ROMANATTO, 1997).

Nunes et al (2003, apud Teixeira, 2008) baseados na teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud apresentaram uma proposta de classificação dos números racionais, na forma fracionária, identificando cinco significados desses números que devem ser considerados no ensino e aprendizagem: número, parte-todo, medida (com quantidades intensivas e extensivas), quociente e operador multiplicativo. Essa classificação foi utilizada nas pesquisas de Merlini (2005), Moutinho (2005), Rodrigues (2005), Santos (2005), Damico (2007), que fizeram parte de um Projeto de pesquisa desenvolvido no programa de cooperação internacional entre Oxford Brookes University, e o Centro das Ciências Exatas Tecnológicas da PUC-SP.

A nossa pesquisa, quanto aos significados dos números racionais, nos fez concluir que não existe um consenso entre os pesquisadores quanto a uma classificação para os diversos significados que podem apresentar esses números. Portanto, assumiremos em nosso estudo a classificação proposta por Romanatto (1997), junto com o significado porcentagem, proposto por Gomes (2010). Os quais iremos detalhar na próxima seção.

## 1.1 IDEIAS BÁSICAS DOS SIGNIFICADOS DOS NÚMEROS RACIONAIS ADOTADOS NESSE ESTUDO.

A classificação de números racionais adotada nesse estudo tem como base a sugerida por Romanatto (1997): medida (parte-todo), quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade e número na reta numérica, acrescida do significado porcentagem, proposto por Gomes (2010). A seguir detalharemos esses significados, ao ponto em que também justificaremos a nossa escolha.

- **Medida (parte-todo)**

De acordo com Romanatto (1997), o significado parte-todo envolve a ideia de comparação entre quantidade ou medida de uma parte e o todo. A situação envolve um todo (o inteiro ou o grupo) que deve ser dividido em  $n$  partes iguais e ser tomado um determinado número de partes, cada parte será  $\frac{1}{n}$ . Portanto, como afirmam Behr et al (1983), esse significado depende diretamente da possibilidade de particionar uma quantidade contínua ou um conjunto de objetos discretos em tamanhos ou subconjuntos iguais. Ainda segundo esses autores, esse significado representa um construto fundamental para o desenvolvimento do conceito de número racional, e ponto de partida para que sejam construídos os outros significados desse número.

O significado medida (parte-todo), envolvendo quantidades contínuas e discretas, é usualmente utilizado para introduzir frações no currículo escolar, como indicam os PCN (1997). Entretanto, Magina e Campos (2008), tomando como base pesquisas anteriores, como Campos e Magina (2004, 2006), afirmam que muitas atividades que envolvem parte-todo, no ensino escolar do Brasil, resumem-se em dividir uma área em partes iguais, nomear a fração correspondente ao número de partes pintadas sobre o número total de partes e a análise da equivalência e ordem por meio da percepção, em detrimento das relações lógico matemáticas nela envolvidas.

- **Quociente**

São as situações em que o número racional  $\frac{a}{b}$  significa uma divisão entre dois números inteiros. Segundo Behr et al (1983), esse número é utilizado para se referir a uma operação de divisão,  $a \div b$ , e envolve pelo menos dois níveis de sofisticação.

O primeiro é que o resultado dessa divisão pode significar uma equivalência entre ele (o resultado) e a fração correspondente, como,  $\frac{1}{2}$  e 2, ou  $\frac{1}{3}$  e 0,66...

O segundo nível seria aquele em que o número racional é considerado como elemento do campo quociente, ou seja, como elemento de um conjunto numérico que é definido por uma relação de equivalência e pelas operações da adição e da multiplicação, que atribuem a esse conjunto uma estrutura algébrica de corpo comutativo (KIEREN 1976, APUD BEHR ET AL, 1983). Portanto, podemos afirmar que os números racionais são quocientes, por definição. Entretanto, Behr et al (idem) afirmam que esse nível requer estruturas cognitivas que não estão desenvolvidas em crianças e jovens da educação básica, por envolverem sistemas abstratos dos números racionais.

Romanatto (1997) aponta que o número racional  $\frac{1}{2}$ , ao ser considerado como uma divisão entre dois inteiros, envolve duas ideias, a partição e a quotição. A divisão como partição significa que é conhecido o número de grupos ou partes iguais a ser formado e o quociente representa o tamanho ou o número de elementos de cada parte. Por exemplo: quero dividir dois chocolates para três pessoas.

A divisão como quotição significa que é conhecido o tamanho ou o número de elementos de cada parte e o quociente representa o número de grupos ou partes a ser formado. Exemplo disso seria: quantas vezes 2 cabem em 3? (ROMANATTO, 1997).

- **Razão**

Behr et al (1983) considera razão como uma relação que transmite a noção de grandeza relativa. Sendo assim, é mais correto afirmar que é um índice comparativo ao invés de um número. Esses autores também consideram o subconstruto razão o mais “natural” para promover o conceito de equivalência.

Romanatto (1997) afirma que “uma razão é uma relação de comparação multiplicativa entre duas quantidades de mesma medida” (ROMANATTO,1997, p. 104). O exemplo de um contexto que envolve razão seria: existem três moças para cada dois rapazes, que poderia ser representado pelo número racional na forma fracionária,  $\frac{3}{2}$ , ou na forma de razão, 3 : 2.

A igualdade de duas razões forma uma proporção que é uma ferramenta poderosa para resolver problemas que requerem comparações de magnitudes

(BEHR et al, 1983). O conceito de proporcionalidade faz relacionar áreas da matemática como, aritmética, estatística, geometria, funções e álgebra. Dele derivam outros conceitos importantes como, regra de três, divisão em partes proporcionais, quantidades intensivas, misturas, entre outros. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2008).

A razão em que se têm duas grandezas diferentes, sendo a segunda dependente da primeira é chamada de taxa. Um exemplo seria a densidade, que é obtida pela comparação entre a massa (kg) e o volume ( $m^3$ ), ou seja, — (ROMANATTO, 1997).

- **Operador multiplicativo**

O significado operador multiplicativo impõe ao número racional – uma interpretação algébrica, em que esse número é pensado como uma função que transforma quantidades contínuas em quantidades contínuas semelhantes – vezes. Ou seja, é uma função – que estica quantidades contínuas (um segmento de reta com comprimento L, por exemplo), em ‘a’ vezes o seu comprimento, e em seguida o reduz por um fator ‘q’ (BEHR et al, 1983).

No caso, de uma quantidade discreta, o número racional – transforma um conjunto com ‘n’ elementos, num conjunto com ‘a.n’ elementos, para depois reduzi-lo em — (Ibid).

Behr et al (1983) consideram que o significado operador multiplicativo é particularmente importante para a aprendizagem de equivalência de frações e a operação da multiplicação dos números racionais.

- **Probabilidade**

De acordo com Romanatto (1997), situações que envolvem o significado probabilidade trazem uma comparação entre chances favoráveis ou necessárias e chances possíveis. Um exemplo de situação que envolve esse significado seria: Numa caixa há quatro bolas verdes e sete vermelhas, qual a probabilidade de se sortear, ao acaso, uma bola verde?

No nosso entendimento, apesar de alguns autores considerarem esse significado como incluído no significado parte-todo, reconhecemos que deve ser dado um tratamento diferenciado às situações que envolvem probabilidade devido à

sua importância prática ligada aos assuntos do cotidiano que envolve tratamento da informação.

- **Número na reta numérica**

Nesse caso, o número racional  $\frac{a}{b}$ , ou o seu decimal equivalente, é associado a um ponto na reta numérica. Um exemplo característico seria: localize o ponto associado a  $\frac{1}{2}$  na reta numérica. Damico (2007) aponta algumas vantagens para o ensino e aprendizagem dos números racionais utilizando-se de situações que envolvem esse significado:

- 1) Facilitam a compreensão das frações como números racionais;
- 2) Favorecem o desenvolvimento da ideia de que os números racionais são uma extensão dos números inteiros e que estes também são racionais;
- 3) A localização de frações impróprias, que são aquelas que representam um número maior que um inteiro e as frações mistas tornem-se mais natural;
- 4) A compreensão das propriedades topológicas da reta, como a densidade dos números racionais são favorecidas;
- 5) Podem ser construídos, a partir da reta numérica, os significados de equivalência e ordem;
- 6) A reta numérica pode servir como um modelo de representação para auxiliar a compreensão das operações básicas com frações.

- **Porcentagem**

Em consonância com Gomes (2010), consideramos também o significado porcentagem, por compreendermos que situações que envolvem taxa percentual têm características próprias, que as diferenciam dos outros tipos de situações em que o significado operador multiplicativo está envolvido, o qual é apontado por alguns pesquisadores (MERLINI, 2005; SANTOS, 2005, TEIXEIRA, 2008), como sendo o significado em que está presente os contextos referentes à porcentagem.

De acordo com Gomes (2010) é comum os alunos perceberem a porcentagem como uma ideia matemática que tem “*vida própria*”, à qual é necessário utilizar, algumas vezes, a ideia de operador multiplicativo para resolver situações do tipo: calcule 25% de 40, em que o professor sugere a conversão da taxa percentual para a fração centesimal e o cálculo do produto entre a fração e 40.

Entretanto, logo em seguida, os professores utilizam a ‘regra de três’ e o raciocínio proporcional para resolver essas situações. Portanto, os contextos que envolvem porcentagem devem, a nosso ver, ser tratados de forma independente daquele que envolvem os operados multiplicativos.

Na próxima seção iremos discorrer sobre os significados dos números racionais que estão presentes, explicitamente, nos Parâmetros Curriculares Nacionais e aqueles que consideramos, de acordo com a classificação que adotamos, serem também retratados nesse documento, de maneira implícita.

## **1.2 OS SIGNIFICADOS DOS NÚMEROS RACIONAIS CONSIDERADOS PELOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS**

Os parâmetros Curriculares Nacionais do 1º ao 5º ano (antiga 1ª a 4ª séries), de matemática apontam a introdução dos números racionais para o segundo ciclo. O objetivo principal da abordagem dos números racionais nesse ciclo é fazer com que os alunos percebam a existência de casos em que o resultado de uma divisão entre dois números naturais (exceto quando o divisor for zero) ou a medida de uma grandeza, não poderá ser expresso apenas com o uso dos números naturais, já conhecidos, levando-os a identificarem nos números racionais uma possibilidade de resposta (BRASIL, 1997).

Com isso, os PCN de matemática referentes ao segundo ciclo, indicam a construção da noção de número racional a partir do quociente de dois números naturais, sendo o divisor diferente de zero, ou seja, o número racional é compreendido como o número que representa o resultado de uma divisão entre dois números naturais quaisquer, excluindo o zero como divisor.

A estratégia didática em que os alunos são levados a lidar com questões ou problemas que envolvem divisão, e cujos resultados não pertencem ao conjunto dos números naturais, possibilita o acesso à “noção de número racional, pela compreensão de alguns de seus significados (quociente, parte-todo, razão) e de suas representações, fracionária e decimal” (BRASIL, 1997, pág. 57).

Os significados dos números racionais, citados no parágrafo anterior, são analisados e exemplificados na seção destinada às orientações didáticas para o ensino de números racionais no segundo ciclo. Pudemos perceber para o significado razão os seguintes exemplos, “a possibilidade de sortear uma bola verde de uma

caixa em que há 2 bolas verdes e 8 bolas de outras cores (2 em 10); [...] a exploração da porcentagem (40 em cada 100 alunos da escola gostam de futebol)” (BRASIL, 1997, pág. 68) que consideramos como sendo contextos em que estão presentes os significados, probabilidade e porcentagem, respectivamente, de acordo com as ideias de Romanatto (1997) e Gomes (2010).

Ainda nesse ciclo, os Parâmetros Curriculares Nacionais, na seção que traz os conteúdos conceituais e procedimentais que devem ser trabalhados, apontam os seguintes conteúdos, entre outros:

- Localizar na reta numérica os números racionais, na representação decimal;
- Explorar a ideia de probabilidade em problemas que envolvem chances possíveis, chances seguras e situações que envolvem sorte.
- Reconhecer que a porcentagem está inserida em contextos diários;

Esses conteúdos nos indicam que os números racionais são trabalhados nos três contextos acima citados, envolvendo significados diferentes, sendo eles respectivamente, número na reta numérica, porcentagem e probabilidade, em que os dois primeiros significados são apontados na pesquisa de Romanatto (1997), e o terceiro, nos estudos de Gomes (2010).

As orientações didáticas dos PCN para o terceiro e quarto ciclos afirmam a necessidade dos significados dos números racionais, quociente, parte-todo e razão, serem trabalhados nesses ciclos, de forma sistemática, dando continuidade ao ciclo anterior, e, ainda, devendo ser introduzido o significado operador, no sentido de consolidar o conceito de número racional. A noção de probabilidade é ampliada por meio de problemas que explorem as possibilidades de quantificação do incerto. A localização dos números racionais na reta numérica irá contemplar, além do número na forma decimal, a forma fracionária. O cálculo com porcentagens será desenvolvido, também com a ideia de proporcionalidade. No bloco referente a grandezas e medidas, é indicado trabalhar a razão entre duas grandezas diferentes, determinando uma terceira, como é o caso da densidade demográfica (BRASIL, 1998a).

As orientações curriculares para o Ensino Médio - OCEM, no bloco de números e operações, considera que é necessário ampliar os campos numéricos e suas operações no Ensino Médio, por meio de problemas do cotidiano, envolvendo operações (quanto aos números racionais) com frações, particularmente com a porcentagem e números racionais na forma decimal finita (BRASIL, 2008).

Portanto, podemos concluir, com base na análise dos PCN do ensino fundamental, das OCEM e na classificação dos significados dos números racionais a qual adotamos, que identificamos nesses documentos curriculares os significados dos números racionais possíveis de serem trabalhados a partir do segundo ciclo da educação básica: quociente, parte-todo, razão, probabilidade, porcentagem e número na reta numérica.

## CAPÍTULO 2. REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICA

---

Para Duval (2011), na aprendizagem da matemática surgem problemas de compreensão que não são encontrados em outras áreas do conhecimento. Para compreender as razões dessas dificuldades não basta se voltar para aqueles que as sentem ou não conseguem resolvê-las, ou para as atividades e problemas que são trabalhados em sala de aula. É necessário se interrogar sobre o que é o conhecimento matemático e sobre o que esse conhecimento pode ter de diferente dos outros tipos de conhecimentos.

Esse autor afirma que essas questões são tanto de ordem epistemológica como cognitiva, pois a análise do conhecimento não deve se ater unicamente à natureza dos objetos considerados, mas, também, à forma como são apresentados ou como se pode ter acesso a eles.

Dessa forma, a importância das representações semióticas, de acordo com Raymond Duval, se deve ao fato de as

... possibilidades de tratamento matemático dependerem do sistema de representação(...). A seguir há o fato de que os objetos matemáticos, começando pelos números, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. O acesso aos números está ligado à utilização de um sistema de representação que os permite designar. (DUVAL, 2003, p.13).

Sendo assim, Duval (2011, p.58) afirma “que a atividade matemática consiste nas transformações das representações semióticas” de maneira implícita ou explícita, sendo essas transformações produtoras de novos conhecimentos.

Por esse motivo, Duval (2009) analisa o desenvolvimento cognitivo do indivíduo e as dificuldades de aprendizagem da matemática, em relação a seu objeto de estudo, a partir de três fenômenos próprios dos registros de representação: 1) a existência de diversos registros de representação semiótica, 2) a diferença entre o objeto representado e seus registros de representação semiótica e 3) a coordenação entre diferentes registros de representação semiótica.

Para esse autor, registro,

é, evidentemente, um sistema semiótico, mas um sistema semiótico particular que não funciona nem como código, nem como sistema formal. Ele se caracteriza, essencialmente, pelas operações cognitivas específicas que ele permite efetuar (DUVAL, 2011, p. 70).

Para um sistema semiótico ser considerado um registro é necessário que ele execute de maneira específica operações de produção de representações, pois “um registro é um sistema semiótico cognitivamente criador” (DUVAL op. cit. p. 83).

## 2.1 A EXISTÊNCIA DE DIVERSOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

É só analisarmos um pouco a história da matemática para percebermos que o desenvolvimento da humanidade está atrelado à produção de sistemas semióticos, como os sistemas numéricos, pois “A matemática é o único domínio em que o progresso dos conhecimentos está estreitamente ligado à invenção de novos sistemas semióticos” (DUVAL, 2011, p.84).

De acordo com Duval (2003), existem quatro tipos diferentes de registros em matemática, discriminados no quadro 1.

Quadro 1 - Classificação dos registros de representação semiótica em matemática

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Argumentação a partir de observações, de crenças ...;</li> <li>• Dedução válida a partir de definição ou de teoremas</li> </ul>	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). <ul style="list-style-type: none"> <li>• Apreensão operatória e não somente perceptiva;</li> <li>• Construção com instrumentos</li> </ul>
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Numéricas (binária, decimal, fracionária...);</li> <li>• Algébricas;</li> <li>• Simbólicas (línguas formais).</li> <li>• Cálculo</li> </ul>	Gráficos cartesianos. <ul style="list-style-type: none"> <li>• Mudanças de sistema de coordenadas;</li> <li>• Interpolação, extrapolação.</li> </ul>

Fonte: Duval (2003)

A importância da diversidade dos registros de representação para o funcionamento do pensamento é devida às diferenças de custo ou às limitações nas transformações internas a cada registro, podendo um registro, devido às suas

características, permitir efetuar certas transformações de maneira mais econômica e mais eficiente do que outro registro.

Os registros discursivos permitem o desenvolvimento linear do pensamento, fundamentado na sucessão, para produzir, apreender ou organizar expressões, como na língua natural, que se constitui o primeiro registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento, apesar de, no ensino da matemática, ser, em geral, reduzida à função de comunicação. Os registros não discursivos favorecem uma apreensão simultânea da sua organização dimensional (DUVAL, 2011).

Os registros monofuncionais são específicos da matemática. Os registros multifuncionais são utilizados em outras áreas do conhecimento para as funções de: a) comunicação, ou seja, quando se tem que expressar algo; b) objetivação, quando se quer definir algo para si; e, muito raramente, como c) tratamento, quando se quer transformar os dados no interior de um registro. Entretanto, na matemática, é o contrário que se produz, pois a língua materna (registro multifuncional) é utilizada inicialmente para a função de tratamento (ibid).

No nosso campo de pesquisa, os números racionais, o registro multifuncional na representação discursiva compreende os registros dos números racionais na língua natural, como um doze avos, cinco décimos ou vinte por cento. Esse registro está associado diretamente ao vocabulário que é intrínseco a cada cultura e permite ao sujeito que se utiliza adequadamente dele, expressar-se ou comunicar-se corretamente.

O registro multifuncional na representação não discursiva é composto pelo registro figural, que envolve as situações de partições de grandezas contínuas e discretas.

O registro monofuncional discursivo compreende o registro simbólico numérico e algébrico dos números racionais. No registro simbólico numérico está a forma fracionária que pode assumir os significados, parte-todo, razão, quociente, operador multiplicativo e probabilidade, de acordo com a classificação que adotamos, e que analisamos no capítulo anterior. Como também, estão os números racionais na forma decimal exata, quando tem um número finito de casas decimais, e na forma decimal não exata, quando temos infinitas casas decimais que se repetem segundo um período. Ainda no registro simbólico numérico, temos a potência de dez e os percentuais, que estão presentes em situações que envolvem

porcentagem, outro significado que adotamos para os números racionais. No registro simbólico algébrico estão as formas algébricas fracionária, decimal e potência de dez, necessárias em situações que requerem generalizações dos números racionais.

Os registros monofuncionais não discursivos compreendem os registros gráficos, em que os números racionais correspondem a um ponto na reta numérica.

Esses múltiplos registros de representações do número racional fazem com que, muitas vezes, os alunos sintam dificuldades em identificar diferentes registros de representações como sendo de um mesmo número racional (MARANHÃO e IGLIORI, 2003).

Segundo Duval (2011), a especificidade da atividade matemática se encontra em mobilizar simultaneamente ao menos dois desses registros de representação ou na possibilidade de mudar de registro sempre que for conveniente.

## **2.2 A DIFERENÇA ENTRE O OBJETO REPRESENTADO E SEUS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**

Os registros de representação mudam de acordo com os elementos considerados e o sistema utilizado para produzir uma representação, enquanto que, com o objeto representado, sua maior característica é a invariância (DUVAL 2011).

Reconhecer a diferença entre o objeto representado e os seus registros de representação impede que dois registros de representações diferentes de um mesmo objeto sejam considerados como sendo dois objetos diferentes ou, então, que dois registros de representação de dois objetos distintos sejam considerados de um mesmo objeto por apresentarem seus conteúdos parecidos.

A dificuldade cognitiva em reconhecer dois registros de representações de um mesmo objeto reside no fato de esses registros serem parciais, não apresentando ou explicitando o mesmo conteúdo do objeto.

Maranhão e Iglori (2003) citaram uma atividade retirada da pesquisa de Catto (2000) para exemplificar a ocorrência do fenômeno da não diferenciação entre representante (registro de representação) e representado (objeto) influenciando na aprendizagem dos números racionais. A tarefa solicitava colocar os sinais de = ou  $\neq$ , entre os registros numéricos,  $(0,5)^2$  e  $-\frac{1}{2}$ . Uma aluna do ensino médio, respondeu,

$(0,5)^2 = 0,25$ ;  $- = 0,25$  e  $0,25 \neq -$ . Diante da resposta, as autoras concluíram que a aluna considera  $0,25$  e  $-$  como sendo dois números distintos e não registros de representações de um mesmo número racional.

As autoras analisam ainda uma atividade proposta em um livro didático, analisado na pesquisa de Catto (2000), em que o enunciado da atividade utiliza a palavra 'número' tanto para nomear o registro de representação quanto para o objeto representado, como sendo mais um exemplo em que ocorre o fenômeno da não diferenciação entre representante e representado influenciando a aprendizagem dos números racionais.

Um registro de representação será considerado como tal, por um sujeito, ou seja, não será confundido com o objeto representado, lhe dando acesso a esse, quando esse sujeito dispor de ao menos dois sistemas semióticos diferentes para produzir esse registro e converter naturalmente de um sistema semiótico a outro, mesmo sem se dar conta dos registros produzidos (DUVAL, 2009).

### **2.3 A COORDENAÇÃO ENTRE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA**

Coordenar registros de representação semiótica permite associar formas de representação que podem tornar, na matemática, os cálculos mais econômicos, além de proporcionar o conhecimento do objeto de estudo através de diferentes perspectivas, complementando-o. Entretanto, Duval (2009) afirma que não basta conhecer regras de correspondência entre dois sistemas semióticos para que ambos sejam mobilizados e utilizados de forma coordenada, é necessária a colocação em correspondência das unidades de sentido que são próprias de cada registro de representação.

Para isso, Duval (2011) distingue dois tipos de transformações de representações semióticas. Quando elas ocorrem no interior de um registro são chamadas, de 'tratamentos'. Aquelas que mudam de registro de representação, conservando o mesmo objeto analisado são chamadas de 'conversões'.

Os tratamentos são transformações que dependem do tipo de registro de representação semiótica ao qual se está trabalhando, pois obedecem ao um modo próprio de funcionamento deste e requerem operações cognitivas que são particulares para cada registro de representação. Para exemplificar, temos as

seguintes somas:  $3 + 2$ ;  $0,3 + 0,2$  e  $- -$ . Ao somar esses valores numéricos estaremos transformando-os, utilizando para isso, as regras de funcionamento de cada registro numérico (inteiro, decimal e fracionário) e que exigem custos cognitivos diferentes.

As conversões provocam uma mudança de registro de representação que não se prende apenas ao conteúdo da representação, mas às operações semióticas que irão transformar o conteúdo dessa representação.

Portanto, essas transformações (as conversões), não se reduzem apenas ao conhecimento dos códigos necessários a uma transformação entre registros, mas exigem uma

...necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. Pois são essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinente, que devem ser levadas em consideração, em cada um dos dois registros (DUVAL, 2003, p. 17);

levando ao aluno estabelecer relações e analisar aspectos diferentes de um mesmo objeto.

Entretanto, a conversão é uma operação que não é cognitivamente reversível. Um sujeito que converte um registro de representação em outro não converterá, necessariamente no sentido inverso, pois

A conversão direta e a conversão inversa são duas tarefas cognitivas tão diferentes quanto subir ou descer um caminho íngreme na montanha. Em outras palavras, para que haja coordenação sinérgica de vários registros, é preciso ser capaz de converter as representações nos dois sentidos e não em um único (DUVAL, 2011, p.118)

Os dados do enunciado de um problema ao serem transformados em uma equação, refletem uma conversão entre relações de diferentes expressões linguísticas em expressões dessas relações no registro simbólico.

Entre os números racionais, Duval (2009) afirma que pesquisas têm identificado que alguns alunos, mesmo sabendo efetuar uma adição de números na forma fracionária e decimal, chegam ao *seconde*<sup>6</sup> sem saberem converter um número na forma decimal em um número na forma fracionária e reciprocamente. É

---

<sup>6</sup> Corresponde ao primeiro ano do ensino médio no Brasil

preciso discernir a significação operatória ligada ao significante e o número representado. Dessa forma, a significação operatória não será a mesma para  $0,25$ ;  $-$  e  $25 \times 10^{-2}$ , pois os tratamentos que permitem efetuar as adições são diferentes ( $0,25 + 0,25 = 0,5$ ;  $- + - = -$ ;  $25 \times 10^{-2} \times 25 \times 10^{-2} = 50 \times 10^{-2}$ ).

Na pesquisa de Maranhão e Igliori (2003), a coordenação entre diferentes registros de representação semiótica dos números racionais foi citada como outro fator de influência na aprendizagem desses números. As autoras ressaltam que atividades que requeiram uma mudança entre o registro de partida e o de chegada, como por exemplo, transformar  $-$  em  $0,25$  (registro de partida é o numérico fracionário e o de chegada é o numérico decimal exato) requerem uma *conversão*. Já uma atividade que solicite encontrar uma fração equivalente a  $-$ , por exemplo, é um tratamento.

Segundo Duval (2011, p.99), “As operações próprias de cada registro são as operações cognitivas”, sendo assim, para o sujeito poder mobilizar o registro de forma intencional e espontânea, esse registro deve cumprir três funções cognitivas que são características do *ato de pensar*: I) que o registro mobilizado represente a *produção de representações* ou referência de alguma coisa; II) que a produção de representações leve à objetivação, ou seja, a uma tomada de consciência do que não se tinha consciência antes de ser produzida. III) que o registro mobilizado propicie uma transformação de representações por conversão ou por tratamento.

Portanto, investigar os registros mobilizados, as conversões e os tratamentos que podem ser realizados nas resoluções dos itens do Exame Nacional do Ensino Médio pode favorecer a uma análise cognitiva do que esse exame deve estar requerendo dos sujeitos, quanto ao campo dos números racionais.

## 2.4 A SUBSTITUTIVIDADE DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

O ato de substituir um registro de representação por outro referencialmente equivalente é essencial ao pensamento matemático e exige, geralmente, uma *continuidade semântica* e uma associação entre os registros que serão substituídos para que faça sentido ao *pensamento natural* (DUVAL, 2012a).

Entretanto, esse autor afirma que

Duas expressões podem ser sinônimas, ou referencialmente equivalentes (elas podem “querer dizer a mesma coisa”, elas podem ser verdadeiras ou falsas ao mesmo tempo) e não serem semanticamente congruentes: neste caso, há um custo cognitivo importante para a compreensão. (Duval, 2012a, p. 100).

Segundo o mesmo autor, transformar uma expressão ou informação contida num sistema semiótico em outra, em outro sistema, pode se tornar um obstáculo na aprendizagem de matemática de vários alunos, devido ao fato de a equivalência referencial distinguir-se da congruência semântica, mas o pensamento espontâneo priorizá-la.

A expressão no registro da língua natural, “um quarto mais um meio” é semanticamente congruente e referencialmente equivalente à expressão no registro numérico fracionário,  $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ , entretanto, a substituição do número no registro numérico decimal, 0,5, para o registro numérico fracionário,  $\frac{1}{2}$ , possui a característica de ser referencialmente equivalente, mas não é semanticamente congruente.

Em nossa pesquisa não foi nosso objetivo analisar a congruência semântica dos itens identificados nas provas do ENEM; entretanto, em alguns deles, iremos fazer comentários a esse respeito.

## 2.5 A APREENSÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

As figuras geométricas contidas no contexto das atividades matemáticas são percebidas de duas maneiras diferentes e, na maioria das vezes, contraditórias, de acordo com Duval (2012b). A primeira maneira seria instantânea, relacionada à apreensão perceptiva das figuras geométricas, e a segunda maneira seria discursiva em relação aos elementos figurais. Essas maneiras de apreensão são contraditórias porque o desenho relativo à figura geométrica pode evidenciar elementos que não estão contidos no enunciado, enquanto que esse pode trazer dados sobre o desenho que podem não serem vistos, de modo espontâneo.

Assim, o autor acima citado afirma que o registro figural<sup>7</sup> que se constitui no desenho da figura geométrica faz originar interpretações próprias para a situação, identificadas como sendo apreensões: sequencial das figuras, perceptiva, discursiva e operatória.

<sup>7</sup> Duval (2012b) denomina registro de representações espaciais.

A apreensão sequencial é necessária nas atividades que requerem a construção ou reprodução de uma figura geométrica. A apreensão perceptiva seria aquela que ocorre de forma espontânea na visualização do desenho relativo à figura geométrica, e visa à percepção das suas formas. A apreensão discursiva é necessária na articulação entre os elementos (propriedades e hipóteses) das figuras geométricas contidos no enunciado do problema, no registro da língua natural, e o desenho, no registro figural.

A apreensão operatória é centrada nas modificações possíveis de ocorrer no desenho da figura geométrica de origem e na forma de rever perceptivamente essa figura a partir dessas modificações. Essas modificações podem ocorrer através da subdivisão do desenho, denominada *modificação mereológica*; como também aumentando-o, diminuindo-o ou deformando-o, chamada *modificação ótica*; ou ainda, deslocando-o ou rotacionando-o em relação ao campo ao qual se encontra, sendo denominada *modificação posicional*.

Alguns itens dos ENEM que iremos analisar apresentam desenhos os quais iremos identificar o tipo de apreensão(ões) que são necessárias para a devida compreensão e resolução do item.

No próximo capítulo iremos discorrer sobre as características e objetivos do Exame Nacional do Ensino Médio.

### CAPÍTULO 3. O EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO – ENEM

---

O exame Nacional do Ensino Médio – ENEM foi criado em 1998 pelo Ministério da Educação e Cultura - MEC, ficando sob a responsabilidade do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. Esse exame é oferecido anualmente aos concluintes e egressos do ensino médio, sendo, inicialmente, segundo Brasil (1998), de caráter voluntário, e tendo como objetivos: conferir ao cidadão parâmetro para uma auto avaliação, com vistas à continuidade de sua formação e sua inserção no mercado de trabalho; criar referência nacional para os egressos de qualquer das modalidades de ensino médio; fornecer subsídios às diferentes modalidades de acesso à educação superior e constituir-se em modalidades de acesso à educação superior.

O ENEM surgiu em contexto de mudanças no sistema educacional brasileiro que foram iniciadas a partir dos anos 90 com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) nº 9394/96, do Parecer nº15/98 e da Resolução nº 15/98 da Câmara de Educação Básica (CEB) do Conselho Nacional de Educação (CNE), e instituíram as diretrizes curriculares para o Ensino Médio. Essas mudanças se constituíram em uma reforma educacional brasileira, nesse nível, que visaram orientar as políticas públicas e os projetos educacionais no país, no sentido de servir de referência para os currículos escolares (RAMALHO e NÚÑEZ, 2009).

Dessa forma, o ENEM se configura como ‘o principal instrumento de avaliação da implementação da reforma nas escolas públicas e privadas, sinalizando para o MEC as diferenças entre as redes e revelando as deficiências a serem superadas’ (op. Cit. p. 8).

O modelo de avaliação ao qual o ENEM tem como base dá

ênfase na aferição das estruturas mentais com as quais construímos continuamente o conhecimento e não apenas na memória, que, importantíssima na constituição dessas estruturas, sozinha não consegue fazer-nos capazes de compreender o mundo em que vivemos (BRASIL, 2005, p. 7).

Para isso, esse exame está centrado nas competências e habilidades adquiridas, transformadas e fortalecidas durante a educação básica. Ele é norteado

por uma concepção de ensino fundamentada nas Orientações Curriculares Nacionais e nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, que tem como proposta

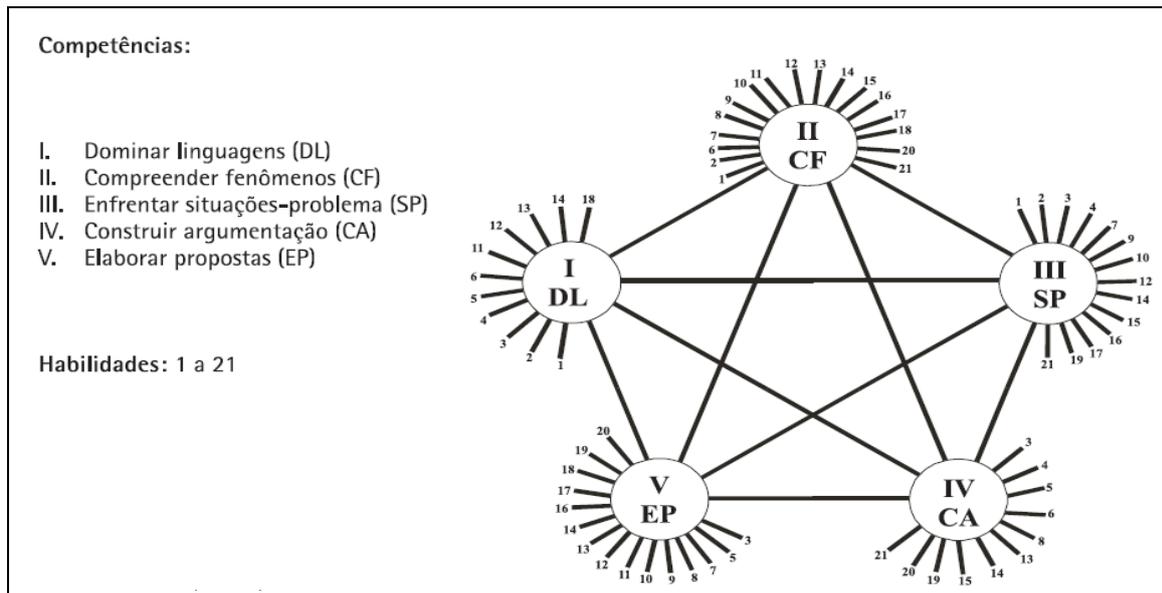
a necessidade de substituir um ensino que toma como referência a transmissão-recepção dos conteúdos por outro de natureza produtiva, no qual os estudantes participam de forma consciente da construção/apropriação dos conteúdos escolares que se constituem em ferramentas para a educação científica e para a cidadania. (RAMALHO e NÚÑEZ, 2009, p. 9)

O ENEM, ao ser criado, em 1998, constava de uma prova de múltipla escolha com sessenta e três itens e uma redação. Esse exame tinha como base uma matriz de competências que foi desenvolvida especificamente para ele e que continha cinco competências a serem avaliadas na prova de múltipla escolha, que abarcaram as três áreas de conhecimento, Linguagem Códigos e suas Tecnologias, Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias e Ciências humanas e suas Tecnologias, definidas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. As competências eram as seguintes:

- I – dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica;
- II – construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas;
- III – selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema;
- IV – relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente;
- V – recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural. (BRASIL, 1998b, p. 178)

As competências nas três áreas do conhecimento envolviam vinte e uma habilidades que estão descritas no anexo A desta pesquisa. As habilidades podiam estar relacionadas a mais de uma competência, como mostra a figura 1,

Figura 1 - Relações entre as competências e as habilidades da matriz curricular do ENEM.



A figura 1 demonstra a característica interdisciplinar proposta pelo exame que tem como base os Parâmetros Curriculares Nacionais, que considera a interação entre as áreas de conhecimento, como também entre as disciplinas.

A avaliação da prova de redação também tinha como base as competências que deveriam ser desenvolvidas durante a educação básica, sendo elas:

- I – demonstrar domínio da norma culta da língua escrita;
- II – compreender a proposta de redação e aplicar conceitos das várias áreas de conhecimento para desenvolver o tema, dentro dos limites estruturais do texto dissertativo-argumentativo;
- III – selecionar, relacionar, organizar e interpretar informações, fatos, opiniões e argumentos em defesa de um ponto de vista;
- IV – demonstrar conhecimento dos mecanismos linguísticos necessários para a construção da argumentação;
- V – elaborar proposta de solução para o problema abordado, mostrando respeito aos valores humanos e considerando a diversidade sócio-cultural. (op. cit. p. 178).

O ENEM teve essa configuração de 1998 a 2008. Em maio de 2009, o Ministério da Educação e Cultura - MEC publica a Portaria nº 462 de 27 de maio de 2009 (BRASIL, 2009a) e o INEP a portaria N° 109, de 28 de maio de 2009 (BRASIL, 2009b), reestruturando esse exame, passando a ser chamado 'novo ENEM', e a constar de uma prova de múltipla escolha contendo quarenta e cinco itens de quatro áreas do conhecimento, ou seja, das áreas de Linguagem Códigos e suas Tecnologias, Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias, Ciências humanas e suas Tecnologias; e de uma prova de redação, no sentido de avaliar as

competências e habilidades desenvolvidas durante a educação básica que são necessárias ao mundo do trabalho, à instância acadêmica e ao exercício da cidadania. Para isso, esse exame tem como base em uma nova matriz de referência definida para esse fim.

Os objetivos desse exame, além dos presentes na versão anterior, passam a conter também a certificação dos jovens e adultos no nível de conclusão do Ensino Médio, promover a avaliação do desempenho acadêmico das escolas de Ensino Médio e promover a avaliação acadêmica dos ingressantes nas Instituições de Ensino Superior.

No novo ENEM, os objetivos sofreram algumas modificações para que o exame passe a ser utilizado de forma unificada nos processos de seleção das universidades públicas, com o objetivo de democratizar o acesso às vagas nas Instituições Federais de ensino superior, favorecer a mobilidade acadêmica e levar a uma reestruturação dos currículos do ensino médio. De acordo com o INEP, as universidades podem optar entre as seguintes formas de utilização do novo ENEM como processo seletivo: como única fase, por meio do sistema de seleção unificada (SISU); primeira fase; combinando com o vestibular da instituição; ou única fase, para as vagas remanescentes do vestibular.

A nova matriz de referência define cinco eixos cognitivos que são comuns a todas as áreas de conhecimento, sendo eles, dominar linguagens, compreender fenômenos, enfrentar situações-problema e construir argumentações.

Além dos eixos cognitivos, a matriz de referência para o novo ENEM apresenta as competências e habilidades requeridas para cada área de conhecimento, sendo para a área de matemática e de suas tecnologias (nossa área de estudo) definidas sete competências e trinta habilidades<sup>8</sup> que os estudantes devem possuir dos seguintes objetos de conhecimento: numéricos, geométricos, de estatística e probabilidade, algébricos e algébricos/geométricos (BRASIL, 2009c), que estão discriminados no quadro 2.

---

<sup>8</sup> As competências e habilidades definidas para a área de matemática e de suas tecnologias estão no anexo B.

Quadro 2 - Discriminação dos objetos de conhecimento de matemática e suas tecnologias

Objetos de conhecimento	Discriminação
Numéricos	operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.
Geométricos	características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.
De estatística e probabilidade	representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.
Algébricos	gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas
Algébricos/geométricos	plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações

Fonte: Brasil (2009)

Na análise das competências e habilidades a serem avaliadas na área de matemática e suas tecnologias, identificamos os números racionais, nosso objeto de estudo, presentes em quase todas as competências e em algumas habilidades ligadas a essas.

Os números racionais constam na competência de área um, *Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais*, e nas seguintes habilidades relacionadas a essa competência:

H1 – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2- Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 – Avaliar propostas de intervenções na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Na competência de área três, *Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano*, verificamos uma habilidade também ligada aos números racionais que envolve o significado razão:

H11- Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

Na competência de área quatro, *Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano*, encontramos outra habilidade ligada ao nosso objeto de estudo, pois também mobiliza o significado razão dos números racionais:

H16 – Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

Finalmente, na competência de área sete, *Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística*, verificamos três habilidades que também estão relacionadas ao conhecimento dos números racionais, pois envolvem o significado probabilidade e porcentagem:

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Esse fato demonstra a importância dos números racionais nesse exame e, portanto, a necessidade de verificarmos quais os significados e as representações desses números que são mobilizados no ENEM. No próximo capítulo iremos definir o percurso metodológico para alcançarmos os nossos objetivos e respondermos à nossa questão de pesquisa.

## CAPÍTULO 4. PERCURSO METODOLÓGICO

---

Essa pesquisa procurou investigar como são abordados os números racionais no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, à luz de seus significados e das suas representações. Para isso a análise foi dividida em duas etapas:

**Etapa I** – Análise das provas de conhecimentos gerais dos ENEM de 1998 a 2008 e das provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011, no sentido de identificar os itens que contemplavam o conceito de números racionais nos seus diferentes significados.

**Etapa II** – Análise dos itens identificados na etapa I, referente às provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011, visando identificar os registros de representações contidos na estrutura do item, os tratamentos e as conversões que podem ser mobilizados durante a resolução do item.

### 4.1. CATEGORIAS DE ANÁLISE UTILIZADAS NA ETAPA I.

Para identificar os itens das provas de conhecimentos gerais dos ENEM de 1998 a 2008 e das provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011, que mobilizavam o conceito de números racionais nos seus diferentes significados, adotamos como categoria preliminar de análise a classificação dos significados de números racionais proposta por Romanatto (1997):

Medida (parte-todo)- expressa uma relação entre partes iguais que são tomadas de uma unidade considerada e o seu total, estando presente a ideia de quantidade e medida. É um dos primeiros contextos que são estudados pelo aluno iniciante no campo dos racionais.

Quociente- expressa uma divisão no contexto de partição ou cota. Por exemplo, dividir 3 chocolates para 4 pessoas (partição).

Razão- expressa uma relação comparativa multiplicativa entre duas quantidades de mesma grandeza ou de grandezas diferentes. Se as grandezas forem diferentes,

mas uma depender da outra, então a razão é denominada taxa. Um exemplo de razão com quantidades de mesma grandeza seria: existem três mulheres para cada dois homens; ou como taxa: a velocidade, como uma relação entre distância e tempo.

Operador multiplicativo- expressa uma relação de transformação de uma quantidade ou medida inicial, ou ainda uma proporcionalidade. Por exemplo, o número que multiplicado por 2 e tem como resultado 3 é o operador  $3/2$ .

Número na reta numérica- expressa a correspondência entre um número racional a um ponto da reta numérica. De acordo com algumas pesquisas como, Nunes e Silva (2009), este é um significado em que os alunos mais apresentam dificuldades de compreensão.

Probabilidade- expressa a ideia de chance em um contexto de relação parte-todo. De acordo com Romanatto (1997), nesse significado, o número racional pode ser visto como uma comparação entre chances favoráveis e possíveis de um evento ocorrer. Por exemplo, calcular a chance de se retirar uma bola azul de uma caixa com 05 bolas azuis, 03 bolas verdes e 02 bolas amarelas.

Em nosso estudo, consideramos também a ideia de número racional como porcentagem, indicada por Gomes (2010), e que nos parece bastante oportuna pois, segundo o autor, “é muito comum os alunos enxergarem as porcentagens como um conceito matemático com *vida própria*” (idem, p. 68). Nesse contexto o símbolo % representa por cento ou sobre 100, e são utilizadas frações centesimais que representam a taxa percentual.

## **4.2 CATEGORIAS DE ANÁLISE DA ETAPA II:**

### 1) Registros de representações dos números racionais

A análise dos registros de representações semióticas dos números racionais foi realizada, a priori, com base na classificação proposta por Duval (2003) e Soares (2007) dos registros de representações semióticas dos números racionais. A partir dessa análise, categorizamos os registros dos números racionais, identificados na etapa II, de acordo com a classificação abaixo:

Registro numérico fracionário (RNF): quando o número racional, ou expressão numérica de números racionais, envolve números na forma  $\frac{a}{b}$ , com  $b \neq 0$ . Ex:  $\frac{1}{2}$ .

Registro numérico decimal (RND): quando o número racional, ou a expressão numérica de números racionais, envolve números na forma de números acompanhados com vírgula, e que podem ser transformados na forma  $\frac{a}{b}$ , com  $b \neq 0$ . Ex: 3,4; 0,999...;  $2,12 + 35$ .

Registro numérico percentual (RNP): quando o número racional, ou a expressão numérica de números racionais, tem números na forma de número acompanhado com o símbolo %. Ex: a expressão  $9,8\% \cdot 250000$ , do item 1, ação 1, pág. 82, questão 145 do ENEM 2010.

Registro numérico potência de dez (RNPD): quando o número racional está na forma de notação científica ou produto de potência de dez. Ex:  $1,5 \times 10^2$ , alternativa de resposta “A”, pág. 65, questão 152 do ENEM 2009.

Registro algébrico (RA): quando o numerador ou denominador de uma fração, ou ambos, são incógnitas ou variáveis, podendo a fração fazer parte de uma expressão ou equação, o número racional na forma decimal vir acompanhado de uma incógnita, ou ainda o quando o número racional na forma percentual é a incógnita ou faz parte de uma expressão ou equação que contém uma incógnita. Ex: a expressão,  $\frac{1}{2} \times BC$ , do item 1, ação 1, pág. 58, da questão 140 do ENEM 2009; a equação  $0,30x + 0,20x \cdot 0,30x = 3800$ , que pode ser mobilizada no item 1, ação 2, pág. 108, questão 162 do ENEM 2011; ou a equação  $x\% \cdot 132000 = 13000$ , do item 1.1, ação 3, pág. 86, questão 154 do ENEM 2010 .

Registro figural: quando o número racional está representado por meio de uma quantidade contínua ou discreta, ou, ainda, na reta numérica. Ex: as alternativas de resposta da questão 136, pág. 77, do ENEM 2010.

## 2) Outros registros de representações semióticas

A análise dos outros registros de representações semióticas contidos no item, ou que poderiam ser mobilizados durante a resolução do mesmo, teve como base a classificação proposta por Duval (2003), dos registros de representações semióticas. Partindo dessa análise, categorizamos os outros registros de representações presentes ou mobilizados nos itens, conforme a seguinte classificação:

Registro na língua materna- são os textos, que comportam os enunciados e comandos dos itens.

Registro numérico inteiro- são as representações numéricas dos números naturais, inteiros relativos que fazem parte do conjunto dos números racionais.Ex: 28, -4.

Registro em diagrama- é aquele que relaciona quatro valores numéricos ou algébricos (sendo dois valores relativos e dois absolutos, na maioria das vezes), sendo um desses a incógnita, dispostos em forma de colunas, em que cada coluna corresponde ao valor relativo e ao respectivo universo. Esse registro é utilizado para estabelecer a regra de três, em uma conversão em que o registro de partida é o da língua materna. Ex: a regra de três, do item 1.1, ação 1, pág. 80 , questão 141 do ENEM 2010.

Registro de tabela- o único item, dos selecionados, que trouxe esse tipo de registro, foi o 166, pág. 112, do ENEM 2011, no qual esse tipo de registro aparece identificado.

Registro Gráfico-\_correspondem a todos os tipos de gráficos de, linhas, barras e colunas. Ex: o gráfico de linha do item 143, pág. 62, do ENEM 2009.

Registro figural- é aquele que se representa figuras geométricas em até três dimensões.

Registro de quadro- é aquele que apresenta um quadro, trazendo dados necessários à resolução do item.

O registro em diagrama foi assim tipificado por sentirmos a necessidade de nomear o registro que é intermediário entre o registro da língua materna e o registro algébrico proporcional, e tem o objetivo de organizar os dados necessários a esse último registro.

### 3) Tratamentos

A análise dos tratamentos realizados nos registros de representações semióticas ocorreu de acordo com a estratégia de resolução (canônica) que poderia ser mobilizada no item, e foram categorizados, de acordo com os registros em que ocorriam.

### 4) Conversões entre registros de representações semióticas

A análise das conversões entre os registros de representações semióticas também dependeu da estratégia de resolução (canônica) que poderia ser mobilizada na resolução do item e foi categorizada de acordo com o sistema semiótico que o registro se encontrava inicialmente (registro de partida), e para o qual ele foi transformado (registro de chegada).

## **4.3. ROTEIRO UTILIZADO PARA ANÁLISE DA ETAPA II.**

Para analisar os 29 (vinte e nove) itens das provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011 (novo ENEM) identificados na etapa I, quanto aos registros de representações (dos números racionais ou não) existentes no item e aqueles que podem ser mobilizados na resolução do mesmo, os tratamentos e as conversões contempladas durante essa resolução, traçamos um roteiro que é seguido para todos os itens, conforme abaixo:

- 1) estratégia esperada de resolução, incluindo tratamentos e conversões (quando houver);
- 2) outra(s) estratégia(s) de resolução (quando for pertinente);
- 3) análise do suporte (quando houver);
- 4) estrutura do item, quanto aos registros de representações envolvidos;
- 5) alguns comentários referentes às habilidades necessárias à resolução do item e outros conceitos exigidos (quando for pertinente);

## CAPÍTULO 5. ANÁLISE DA ETAPA I

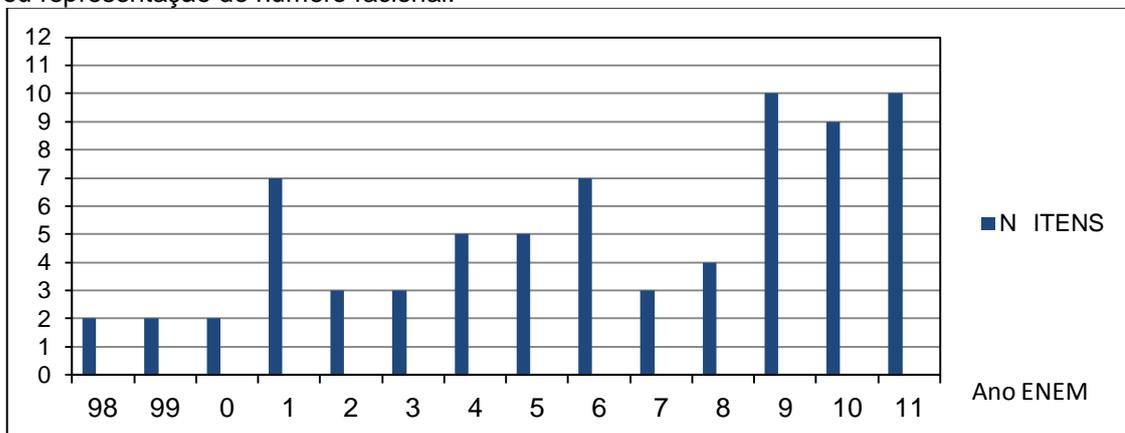
---

A análise da etapa I tem o objetivo de identificar os itens das provas de conhecimentos gerais dos ENEM 1998 a 2008 e das provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011 que contemplam os números racionais, de acordo com os significados ou contextos em que eles estavam inseridos.

### 5.1 ITENS DOS ENEM DE 1998 A 2011 QUE CONTEMPLAM O CONCEITO DE NÚMEROS RACIONAIS.

Da análise das provas de conhecimentos gerais dos ENEM de 1998 a 2008 foram identificados 41 itens e das provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011, 29 itens, totalizando 70 itens que contemplam o conceito de números racionais, nos seus diferentes significados, apresentados no gráfico 1, por ano de aplicação do ENEM.

Gráfico1- Quantidade de itens por prova do ENEM que contemplam algum tipo de significado ou representação do número racional.



As provas de conhecimentos gerais dos ENEM de 1998 à 2008 apresentaram uma média de 3,5 itens, por prova, que contemplam algum tipo de significado e representação dos números racionais, o que corresponde a aproximadamente 5,6% do total de 63 itens que continha cada prova.

Entre as provas de matemática e suas tecnologias do novo ENEM, que corresponde ao período de 2009 à 2011, foram encontrados, em média, 9,6 itens por prova que abordam algum tipo de significado e representação dos números

racionais, correspondendo a aproximadamente 21% do total de 45 itens da prova. Esse resultado pode estar indicando a necessidade e a importância do aluno saber mobilizar o conceito dos números racionais na resolução dos itens do ENEM.

O crescimento no número de itens por prova que abordam o conceito dos números racionais, no novo ENEM se comparado com os ENEM de 1998 a 2008, pode ter se dado pelo fato da nova versão desse exame constar de uma prova de matemática e suas tecnologias com 45 itens, enquanto que a versão antiga constava de 63 itens envolvendo não só matemática e suas tecnologias, como também, as áreas de ciências da natureza e ciências humanas. Além disso, o novo ENEM assume um outro caráter que é o de servir como processo seletivo para o ensino superior, o que pode estar indicando que o crescimento no número de itens que envolve o conceito de números racionais, se deve a importância desse conhecimento não só no cotidiano das pessoas, quanto na vida acadêmica; e a consequente necessidade de ser avaliado entre os concluintes e egressos do ensino médio.

## **5.2 SIGNIFICADOS DOS NÚMEROS RACIONAIS NAS PROVAS DE CONHECIMENTOS GERAIS DOS ENEM DE 1998 À 2008**

Nas provas de conhecimentos gerais dos ENEM de 1998 a 2008 foram identificados 41 itens que mobilizam o conceito de números racionais nos significados operador multiplicativo, parte-todo, razão, porcentagem e probabilidade. Alguns desses itens envolvem mais de um significado do número racional, como pode ser visto no quadro 3.

Quadro 3 - Significados dos números racionais identificados nos itens dos ENEM de 1998 a 2008.

ENEM	n° itens	Op. Multip.	Parte-todo	razão	Quoc	Porcent	Probab	Núm. na reta	Mais de um signif.
1998	02	-	-	-	-	02	-	-	-
1999	02	-	-	02	-	-	-	-	-
2000	02	-	-	02	-	02	-	-	02
2001	07	-	01	03	-	06	-	-	03
2002	03	-	-	01	-	02	-	-	-
2003	03	-	-	01	-	02	-	-	-
2004	05	01	03	01	-	02	-	-	02
2005	05	-	-	01	-	02	02	-	-
2006	07	-	-	02	-	05	01	-	01
2007	03	-	-	01	-	01	02	-	01
2008	02	-	-	-	-	01	01	-	01
<b>Total</b>	<b>41</b>	<b>01</b>	<b>04</b>	<b>14</b>	<b>-</b>	<b>25</b>	<b>06</b>	<b>-</b>	<b>10</b>

Desses itens identificados como mobilizadores de algum tipo de significado do número racional, 61% abordam o significado porcentagem, 34,1% razão, 14,6% probabilidade, 9,7% parte-todo e não conseguimos identificar nenhum item que envolvesse os significados quociente e número na reta numérica. Esses resultados podem ser justificados devido ao fato de o ENEM priorizar situações que envolvam contextos econômicos e sociais, ou seja, relacionados à cidadania, nos quais os significados porcentagem, razão e probabilidade podem se fazer mais frequentes.

Devido à grande quantidade de itens (70) dos ENEM de 1998 a 2011 que contemplaram o conceito de números racionais, sendo 41 itens identificados nos ENEM de 1998 a 2008 e 29 itens nos ENEM de 2009 a 2011, e ao curto período de tempo que tivemos para a conclusão dessa pesquisa, optamos por realizar a análise dos itens correspondentes ao período de 1998 a 2008, relativo ao antigo ENEM apenas quanto aos significados dos números racionais presentes neles e realizamos uma análise mais detalhada dos significados e representações dos números racionais do novo ENEM por considerarmos a importância de conhecer como eles estão sendo tratados por esse exame que têm o objetivo, atualmente, de selecionar os sujeitos para o ensino superior.

## 5.2 SIGNIFICADOS DOS NÚMEROS RACIONAIS NAS PROVAS DE CONHECIMENTOS GERAIS DOS ENEM DE 2009 À 2011

O quantitativo de itens que envolvem os significados dos números racionais contemplados nos itens identificados nas provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011 estão descritos no quadro 4.

Quadro 4 - Significados dos números racionais identificados nos itens dos ENEM de 2009 a 2011.

ENEM	n° itens	Op. Multip.	Parte-todo	razão	Quoc	Porcent	Probab	Núm. na reta	Mais de um signif.
<b>2009</b>	10	-	01	03	-	06	01	-	01
<b>2010</b>	09	-	01	01	-	07	01	-	01
<b>2011</b>	10	-	01	03	-	03	03	-	-
<b>Total</b>	<b>29</b>		<b>03</b>	<b>07</b>	-	<b>16</b>	<b>05</b>	-	<b>02</b>

Se compararmos os dados do quadro 4, referente aos itens identificados do novo ENEM que mobilizam o conceito de números racionais com os do quadro 3 que apresenta os significados mobilizados pelos itens identificados dos ENEM de 1998 a 2008 verificamos que há uma tendência desses exames em priorizar o significado porcentagem, seguido pelo significado razão, probabilidade e parte-todo.

A análise desses significados dos números racionais contemplados nas provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011 serão apresentados juntos com a análise da etapa 2, no próximo capítulo.

## CAPÍTULO 6. ANÁLISE DA ETAPA 2

---

Nesta etapa iremos analisar os itens identificados das provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011, conforme categorias e roteiro de análise descritos na metodologia.

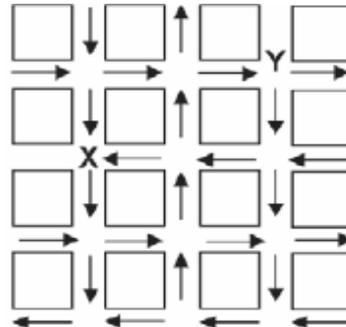
### 6.1 ANÁLISE DOS ITENS SELECIONADOS DA PROVA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS DO ENEM 2009

Da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009, foram selecionados 10 itens, aproximadamente 22% do total de itens, que contemplam o conceito de números racionais nos seus diferentes significados e representações. Nessa seção iremos discorrer sobre esses itens.

#### Item 01/2009

Figura 2- questão 137 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.

O mapa ao lado representa um bairro de determinada cidade, no qual as flechas indicam o sentido das mãos do tráfego. Sabe-se que esse bairro foi planejado e que cada quadra representada na figura é um terreno quadrado, de lado igual a 200 metros.



Desconsiderando-se a largura das ruas, qual seria o tempo, em minutos, que um ônibus, em velocidade constante e igual a 40 km/h, partindo do ponto X, demoraria para chegar até o ponto Y?

- A 25 min.                       D 1,5 min.  
 B 15 min.                         E 0,15 min.  
 C 2,5 min.

Fonte: BRASIL (2009d), p.19.

## 1) Estratégia esperada de resolução:

	Ação	Transformação
1	Descrever o percurso de x a y e estabelecer que o tempo gasto é a razão entre o espaço percorrido pelo ônibus e a velocidade $\frac{x}{y}$ .	Conversão da língua materna para o registro algébrico.
2	Calcular o espaço percorrido pelo ônibus ( $5 \times 200\text{m}$ )	Conversão do registro figural para o numérico inteiro.
3	Transformar 1000 m em 1 km	Tratamento no registro numérico inteiro
4	Substituir o valor encontrado na ação 3, na razão, da ação 1 para encontrar o tempo gasto pelo ônibus para o percurso de X a Y. $\frac{x}{y}$	Tratamento no registro numérico fracionário
5	Transformar para minutos $\frac{1}{60}$	Conversão de horas para minutos.
6	Simplificar a fração $\frac{1}{60}$ e transformá-la em decimal; ou apenas transformar a fração $\frac{1}{60}$ em decimal (1,5 min)	Tratamento no registro numérico decimal e conversão do registro numérico fracionário para o decimal; ou apenas a referida conversão.

## 2) Análise do suporte:

O suporte requer uma apreensão discursiva, pois o registro figural será analisado de acordo com o registro discursivo, no enunciado do item, no sentido de encontrar o espaço percorrido pelo ônibus;

## 3) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Razão (taxa)
Registro do enunciado	Língua materna e numérico inteiro
Registro do suporte	Geométrico
Registro do comando	Língua materna e numérico inteiro
Registro das alternativas de resposta	Numérico decimal e inteiro

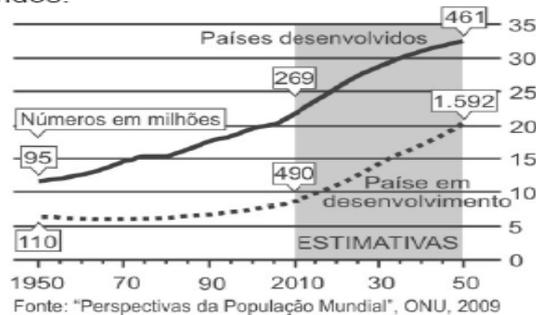
## 4) Alguns comentários

O item requer que o sujeito compreenda o conceito de velocidade constante como uma relação entre distância e tempo, e saiba realizar transformações nas unidades de medida de comprimento e tempo.

## Item 02/2009

Figura 3 - questão 139 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.

A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Disponível em: [www.economist.com](http://www.economist.com).  
Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado).

Em 2050, a probabilidade de se escolher, aleatoriamente, uma pessoa com 60 anos ou mais de idade, na população dos países desenvolvidos, será um número mais próximo de

- A  $\frac{1}{2}$
- B  $\frac{7}{20}$
- C  $\frac{8}{25}$
- D  $\frac{1}{5}$
- E  $\frac{3}{25}$

Fonte: BRASIL (2009d), p.19.

1)Estratégia esperada de resolução:

	Ação	Transformação
1	Identificar no gráfico a taxa percentual que representa o número de pessoas com 60 anos ou mais, nos países desenvolvidos, no ano de 2050 (entre 30% e 35%)	Leitura no registro gráfico.
2	Transformar 30% e 35% em frações centesimais — —	Conversão do registro numérico porcentagem para o numérico fracionário.
3	Transformar as frações das alternativas de resposta em frações centesimais para verificar qual representa um valor percentual entre 30% e 35% — .	Tratamento no registro numérico fracionário.

1.1) Outra estratégia de resposta seria, após reconhecimento no gráfico do intervalo percentual que compreende a solução, estimar valores entre 30% e 35% para convertê-los no registro fracionário, verificar nos itens de resposta a fração que faz parte desse intervalo.

2) Análise do suporte:

O suporte requer a compreensão do enunciado para análise do registro gráfico, exigindo, assim uma forte compreensão discursiva que sobrepõe à compreensão perceptiva do gráfico de linhas.

3) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Probabilidade e porcentagem
Registro do enunciado	Língua materna, numérico inteiro e numérico percentual
Registro do enunciado	Gráfico de linhas
Registro do comando	Língua materna e numérico inteiro
Registro das alternativas de resposta	Numérico fracionário

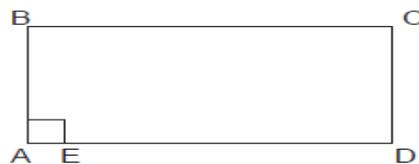
4) Alguns comentários:

A resolução do item implica em o aluno conceber a taxa percentual como sendo a relação entre o número de “pessoas com 60 anos ou mais” e a população mundial. Dependendo do caminho a ser seguido pelo aluno, o item envolverá a conversão do registro fracionário para o registro porcentagem, ou, então, do registro porcentagem para o fracionário. Os distratores poderão fazer parte da estratégia de resolução do item, na medida em que o aluno pode encontrar o intervalo percentual ao qual pertence a fração e testar as alternativas, em busca da solução.

## Item 03/2009

Figura 4 - questão 140 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.

O governo cedeu terrenos para que famílias construíssem suas residências com a condição de que no mínimo 94% da área do terreno fosse mantida como área de preservação ambiental. Ao receber o terreno retangular ABCD, em que  $AB = \frac{BC}{2}$ , Antônio demarcou uma área quadrada no vértice A, para a construção de sua residência, de acordo com o desenho, no qual  $AE = \frac{AB}{5}$  é lado do quadrado.



Nesse caso, a área definida por Antônio atingiria exatamente o limite determinado pela condição se ele

- A duplicasse a medida do lado do quadrado.
- B triplicasse a medida do lado do quadrado.
- C triplicasse a área do quadrado.
- D ampliase a medida do lado do quadrado em 4%.
- E ampliase a área do quadrado em 4%.

Fonte: BRASIL (2009d), p.20

1) Estratégia esperada de resolução:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a área do retângulo como sendo, —	Conversão do registro da língua materna para o algébrico.
2	Calcular a área do retângulo —	Tratamento no registro algébrico.
3	Estabelecer o cálculo de 6% da área do retângulo — .	Tratamento no registro algébrico.
4	Calcular a área equivalente a 6% da área do retângulo —	Conversão do registro numérico percentual para o fracionário e tratamento no registro algébrico.
5	Comparar a área do quadrado demarcado por Antônio — com a área que deve ser destinada a construção —	Tratamento no registro algébrico.

Qualquer que seja a estratégia escolhida pelo aluno, ele necessitaria calcular a área total do retângulo e do quadrado; tomar a área do retângulo como sendo o equivalente a 100% e comparar, ou a área do retângulo com a do quadrado para inferir que a área do quadrado equivale a 2% da área do retângulo e então Antônio precisaria triplicar a área do quadrado; ou comparar a área que deveria ser destinada à construção (6% da área total) com a área do quadrado escolhido por Antônio.

#### 2) Análise do suporte:

O suporte no registro figural se configura, apenas, como um apoio visual para os dados que são fornecidos no enunciado do item, exigindo dessa forma uma apreensão discursiva.

#### 3) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Porcentagem
Registro do enunciado	Língua materna e Algébrico
Registro do suporte	Geométrico
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	Língua materna e numérico percentual

#### 4) Alguns comentários

O item requer o cálculo de porcentagem no contexto de áreas de figuras planas, necessitando habilidade no cálculo dessas referidas áreas.

## Item 04/2009

Figura 5 - questão 141 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.

Uma resolução do Conselho Nacional de Política Energética (CNPE) estabeleceu a obrigatoriedade de adição de biodiesel ao óleo diesel comercializado nos postos. A exigência é que, a partir de 1.º de julho de 2009, 4% do volume da mistura final seja formada por biodiesel. Até junho de 2009, esse percentual era de 3%. Essa medida estimula a demanda de biodiesel, bem como possibilita a redução da importação de diesel de petróleo.

Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br>.  
Acesso em: 12 jul. 2009 (adaptado).

Estimativas indicam que, com a adição de 4% de biodiesel ao diesel, serão consumidos 925 milhões de litros de biodiesel no segundo semestre de 2009. Considerando-se essa estimativa, para o mesmo volume da mistura final diesel/biodiesel consumida no segundo semestre de 2009, qual seria o consumo de biodiesel com a adição de 3%?

- Ⓐ 27,75 milhões de litros.
- Ⓑ 37,00 milhões de litros.
- Ⓒ 231,25 milhões de litros.
- Ⓓ 693,75 milhões de litros.
- Ⓔ 888,00 milhões de litros.

Fonte: BRASIL (2009d), p. 20.

### 1) Estratégia esperada de resolução:

O item apresenta no enunciado os dados necessários à resolução da questão, que são a taxa percentual (4%) e a quantidade de transformação (925 milhões) referente a essa taxa percentual. No comando, solicita que seja encontrada a quantidade de transformação referente à taxa percentual de 3%.

A estratégia de base para a resolução da questão seria o aluno calcular a quantidade inicial e, logo após, encontrar a quantidade de transformação, referente à taxa percentual de 3%.

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a equação que representa a quantidade inicial (total da mistura final diesel/biodiesel), $4\% \times x = 925$ milhões;	Conversão da língua materna para o registro algébrico.
2	Resolver a equação ( $x = 23.125$ milhões de litros)	Conversão do registro numérico percentual para o numérico decimal ou fracionário e tratamento no registro algébrico.
3	Calcular a quantidade de transformação, $3\% \times 23125$ (693,75 milhões de litros)	Conversão do registro numérico percentual para o fracionário ou decimal e tratamento no registro escolhido.

1.1) Outra estratégia que poderia ser mobilizada seria utilizando o raciocínio proporcional:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a regra de três, sendo que uma coluna corresponde a 4% e a quantidade de biodiesel em milhões de litros (925); e, a outra coluna, a taxa percentual de 3% e a incógnita que representa a quantidade de biodiesel em milhões de litros, relativa a esse percentual.	Conversão da língua materna para uma representação intermediária, em diagrama.
2	Estabelecer a proporção, — - e resolvê-la (693,75)	Conversão do registro em diagrama para o registro algébrico e tratamento nesse registro.

Esse tipo de estratégia, com base na regra de três, difere um pouco dos cálculos tradicionais que a utilizam, pois não há uma relação direta com a centena, mobilizando uma relação parte-parte. Requer que o sujeito detenha o conceito de proporcionalidade para inferir que se 4%, corresponde a 925 milhões, então 3% corresponderá a um valor que é proporcional a 925; e não apenas que ele saiba utilizar a regra.

2) Análise do suporte:

O suporte é um texto que não se mostra necessário para a resolução do item.

## 3) Estrutura do item

Ideia envolvida	Porcentagem
Registro do enunciado	Língua materna, numérico percentual, numérico inteiro.
Registro do suporte	Língua materna e numérico percentual.
Registro do comando	Língua materna, numérico percentual e numérico inteiro.
Registro das alternativas de resposta	Numérico decimal

## 4) Alguns comentários:

O item requer que o aluno tenha as habilidades de compreensão de texto e cálculo de porcentagem.

## Item 05/2009

Figura 6 - questão 143 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009

O gráfico a seguir mostra a evolução, de abril de 2008 a maio de 2009, da população economicamente ativa para seis Regiões Metropolitanas pesquisadas.



FONTE: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa Mensal de Emprego.

Disponível em: [www.ibge.gov.br](http://www.ibge.gov.br).

Considerando que a taxa de crescimento da população economicamente ativa, entre 05/09 e 06/09, seja de 4%, então o número de pessoas economicamente ativas em 06/09 será igual a

- A 23.940.
- B 32.228.
- C 920.800.
- D 23.940.800.
- E 32.228.000.

Fonte: BRASIL (2009d), p.20.

1)Estratégia esperada de resolução:

A estratégia de base requer que o aluno calcule a quantidade de transformação relativa à taxa percentual de 4% e à quantidade inicial (23.020.000); depois adicione a quantidade de transformação calculada (92.080) à quantidade inicial (23.020.000) para encontrar a quantidade final (23.940.800), solução do item.

	Ação	Transformação
1	Estabelecer o cálculo da quantidade de transformação referente à taxa percentual de 4% e a quantidade inicial de 23.020.000( $4\% \times 23.020.000$ )	Conversão da língua materna para o registro numérico percentual.
2	Calcular $4\% \times 23.020.000$ (92.0800)	Conversão do registro numérico percentual para o fracionário ou decimal e tratamento no registro escolhido.
3	Adicionar a quantidade de transformação calculada (920.800) à quantidade inicial (23.020.000), obtendo 23.940.800.	Tratamento no registro numérico inteiro.

2)Outra estratégia seria o sujeito considerar a taxa percentual como sendo 104% (100% + 4%).

	Ação	Transformação
1	Estabelecer o cálculo da quantidade de transformação referente à taxa percentual de 104% e a quantidade inicial de 23.020.000 ( $104\% \times 23.020.000$ )	Conversão da língua materna para o registro numérico percentual.
2	Calcular $104\% \times 23.020.000$ (23.940.800)	Conversão do registro numérico percentual para o fracionário ou decimal e tratamento no registro escolhido.

3) Análise do suporte:

O suporte é um gráfico de linha que requer uma apreensão perceptiva e discursiva para a compreensão dos dados.

4)Estrutura do item:

Ideia envolvida	Porcentagem
Registro do enunciado	Língua materna e numérico percentual
Registro do suporte	Gráfico de linha
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	Numérico inteiro

5) Alguns comentários:

O item requer as habilidades de compreensão do gráfico e cálculo de porcentagem.

### Item 06/2009

Figura 7 - questão 144 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.

A música e a matemática se encontram na representação dos tempos das notas musicais, conforme a figura seguinte.

Semibreve		1
Mínima		1/2
Semínima		1/4
Colcheia		1/8
Semicolcheia		1/16
Fusa		1/32
Semífusa		1/64

Um compasso é uma unidade musical composta por determinada quantidade de notas musicais em que a soma das durações coincide com a fração indicada como fórmula do compasso. Por exemplo, se a fórmula de compasso for  $\frac{1}{2}$ , poderia ter um compasso ou com duas semínimas ou uma mínima ou quatro colcheias, sendo possível a combinação de diferentes figuras.

Um trecho musical de oito compassos, cuja fórmula é  $\frac{3}{4}$ ,

poderia ser preenchido com

- A 24 fusas.
- B 3 semínimas.
- C 8 semínimas.
- D 24 colcheias e 12 semínimas.
- E 16 semínimas e 8 semicolcheias.

Fonte: BRASIL (2009d), p.21.

1)Estratégia esperada de resolução:

Na estratégia esperada de resolução o sujeito verifica que 8 compassos de  $\frac{3}{4}$  equivalem a  $8 \times \frac{3}{4} = 6$  e busca nas alternativas de resposta a que corresponda a esse valor.

	Ação	Transformação
1	Estabelecer $8 \times - (6)$	Conversão do registro da língua materna para o numérico fracionário.
2	Calcular em cada alternativa o quanto corresponde (numericamente) as respectivas quantidades de notas musicais e verificando em qual delas o valor será 6. (alternativa D)	Tratamento no registro numérico fracionário.

## 2) Análise do suporte:

O suporte apresenta as notas musicais no registro da língua materna, figural e numérico fracionário. Exige a compreensão e coordenação desses três registros.

## 3) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Parte-todo
Registro do enunciado	Língua materna e numérico fracionário
Registro do suporte	Língua materna, figural e numérico fracionário.
Registro do comando	Língua materna e numérico fracionário
Registro das alternativas de resposta	Língua materna e numérico inteira.

## 4) Alguns comentários:

O comando não deixa claro se a fórmula  $-$  corresponde a um compasso ou aos oito compassos, necessitando que o sujeito tenha uma leitura e compreensão do enunciado para concluir que a fórmula corresponde a apenas um compasso. Esse item envolve equivalência de frações e um tratamento no registro numérico fracionário.

## Item 07/2009

Figura 8 - questão 152 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.

### Técnicos concluem mapeamento do aquífero Guarani

O aquífero Guarani localiza-se no subterrâneo dos territórios da Argentina, Brasil, Paraguai e Uruguai, com extensão total de 1.200.000 quilômetros quadrados, dos quais 840.000 quilômetros quadrados estão no Brasil. O aquífero armazena cerca de 30 mil quilômetros cúbicos de água e é considerado um dos maiores do mundo.

Na maioria das vezes em que são feitas referências à água, são usadas as unidades metro cúbico e litro, e não as unidades já descritas. A Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (SABESP) divulgou, por exemplo, um novo reservatório cuja capacidade de armazenagem é de 20 milhões de litros.

Disponível em: <http://noticias.terra.com.br>. Acesso em: 10 jul. 2009 (adaptado).

Comparando as capacidades do aquífero Guarani e desse novo reservatório da SABESP, a capacidade do aquífero Guarani é

- A  $1,5 \times 10^2$  vezes a capacidade do reservatório novo.
- B  $1,5 \times 10^3$  vezes a capacidade do reservatório novo.
- C  $1,5 \times 10^6$  vezes a capacidade do reservatório novo.
- D  $1,5 \times 10^8$  vezes a capacidade do reservatório novo.
- E  $1,5 \times 10^9$  vezes a capacidade do reservatório novo.

Fonte: BRASIL (2009d), p.23.

### 1) Estratégia esperada de resolução:

A comparação das capacidades do aquífero Guarani e do novo reservatório da SABESP se dá por meio da razão entre as suas respectivas capacidades. Para isso, o sujeito deve encontrar a capacidade do aquífero Guarani a partir do seu volume dado no enunciado do item.

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a razão entre a capacidade do reservatório do aquífero Guarani e a do novo reservatório da SABESP ————— .	Conversão da Língua materna para o registro numérico fracionário
2	Transformar o volume do reservatório do aquífero Guarani ( $30.000 \text{ km}^3$ ) para medida de capacidade em litros ( $3,0 \times 10^{15}$ litros)	Conversão de volume para litros no registro numérico inteiro
3	Calcular a razão ( $1,5 \times 10^9$ )	Tratamento no registro numérico potência de dez.

## 2) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Razão
Registro do enunciado	-
Registro do suporte	Língua materna e numérico inteiro
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	Numérico Potência de dez

## 3) Análise do suporte:

O suporte é um texto, que requer a compreensão dos dados no registro numérico inteiro e língua materna. O enunciado se confunde com o suporte.

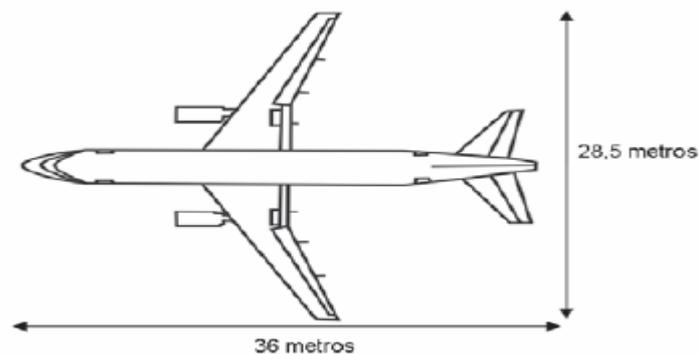
## 4) Alguns comentários

O item requer as habilidades de transformar unidades de medida de volume, medidas de volume em medidas de capacidade, e o cálculo da razão.

**Item 08/2009**

Figura 9- questão 158 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.

A figura a seguir mostra as medidas reais de uma aeronave que será fabricada para utilização por companhias de transporte aéreo. Um engenheiro precisa fazer o desenho desse avião em escala de 1:150.



Para o engenheiro fazer esse desenho em uma folha de papel, deixando uma margem de 1 cm em relação às bordas da folha, quais as dimensões mínimas, em centímetros, que essa folha deverá ter?

- A 2,9 cm × 3,4 cm.
- B 3,9 cm × 4,4 cm.
- C 20 cm × 25 cm.
- D 21 cm × 26 cm.
- E 192 cm × 242 cm.

Fonte: BRASIL (2009d), p.25.

## 1)Estratégia esperada de resolução:

O item requer que as dimensões reais do avião sejam colocadas na escala dada, sendo necessário, ainda, acrescentar dois centímetros a cada dimensão, referente às bordas da folha.

	Ação	Transformação
1	Estabelecer as razões, entre a medida 28,5 m e a escala de 150 — , e entre a medida 36m do avião e a escala de 150 — .	Conversão do registro numérico razão para o registro numérico fracionário.
2	Calcular a razão entre a medida 28,5m do avião e a escala de 150, transformando antes ou depois do cálculo a medida de metros para centímetros (19 cm).	Tratamento no registro numérico fracionário e conversão de metros para centímetros.
3	Calcular a razão entre a medida 36m do avião e a escala de 150, transformando antes ou depois do cálculo a medida de metros para centímetros (24 cm).	Tratamento no registro numérico fracionário e decimal conversão de metros para centímetros.
4	Acrescentar 2 cm a essas medidas, devido as margens de 1 cm que o desenho deve ter em relação as bordas, obtendo as dimensões mínimas para a folha ( 21cm x 26 cm)	Tratamento no registro numérico inteiro.

## 2)Análise do suporte:

O suporte é a figura de um avião com as dimensões em metros, no registro numérico decimal, e requer uma apreensão discursiva para que o aluno compreenda que serão adicionados a cada medida transformada para a escala mencionada no enunciado, dois centímetros de comprimento, que representam as bordas do papel.

## 3)Estrutura do item:

Ideia envolvida	Razão
Registro do enunciado	Língua materna e numérico razão
Registro do suporte	Figural e numérico decimal
Registro do comando	Língua materna e numérico inteiro
Registro das alternativas de resposta	Numérico

## 4)Alguns comentários:

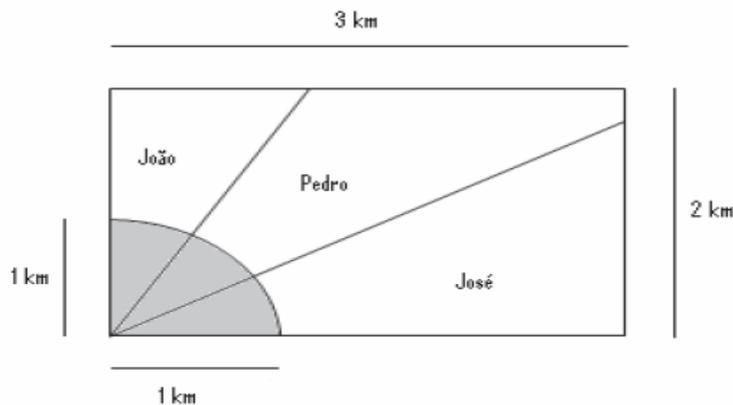
A margem de 1 cm que deve ter o desenho em relação a borda da folha poderá levar o sujeito a interpretações equivocadas do tipo, somar apenas um centímetro em cada dimensão, mantendo, assim, uma congruência semântica com o

enunciado do item; ou, ainda, somar dois centímetros às dimensões reais para manter uma congruência semântica com o suporte, e depois colocá-las na escala dada.

### Item 09/2009

Figura 10 - questão 164 da prova de matemática e suas tecnologias do ENM 2009.

Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km x 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.



Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a

(considere  $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,58$ )

- A 50%.
- B 43%.
- C 37%.
- D 33%.
- E 19%.

Fonte: BRASIL (2009d) p.26.

#### 1) Estratégia esperada de resolução:

Na estratégia esperada de resolução, o sujeito deve reconhecer que cada terça parte da área de extração corresponde a um ângulo de  $30^\circ$ , calcular o cateto desconhecido do terreno de João, calcular a área do terreno e compará-la com a área total para encontrar a porcentagem referente a esse terreno.

	Ação	Transformação
1	Reconhecer cada arco como sendo equivalente a $30^\circ$ .	
2	Reconhecer que $\overline{AB} = \overline{BC}$ .	
3	Estabelecer a equação que calcula o lado desconhecido do terreno de João, que neste caso é um triângulo retângulo, em que é conhecido um ângulo interno ( $30^\circ$ ) e o cateto adjacente a ele (2 km), podendo ser calculado o outro cateto do triângulo por meio da equação $\tan 30^\circ = \frac{b}{2}$ .	Conversão do registro figural para o algébrico.
4	Resolver a equação ( $1,16 \text{ km}^2$ ).	Tratamento no registro algébrico.
5	Calcular a área $\frac{1}{2} \times 2 \times 1,16$ do terreno de João ( $1,16 \text{ km}^2$ ).	Tratamento no registro numérico decimal.
6	Calcular a área total do terreno ( $6 \text{ km}^2$ ).	Tratamento no registro numérico inteiro.
7	Estabelecer a equação relativa à taxa percentual da área do terreno ( $6 \text{ km}^2$ ) que coube a João. ( $x\% \times 6 = 1,16$ ).	Conversão do registro da língua materna para o algébrico.
8	Resolver a equação ( $0,193$ ).	Tratamento no registro algébrico.
9	Transformar $0,193$ em taxa percentual ( $19,3\%$ ).	Conversão do registro numérico decimal para o numérico percentual.

## 2) Análise do suporte:

O suporte no registro figural requer uma compreensão discursiva para coordenar as informações contidas no enunciado do problema com a figura. Isso exige: I) compreender que um quarto de círculo equivale a  $90^\circ$  ou que os ângulos internos de um retângulo equivalem, cada um, a  $90^\circ$ ; II) realizar um tratamento para encontrar o valor correspondente a cada arco ( $30^\circ$ ) (neste caso, se faz necessário uma apreensão operatória da figura); III) reconhecer que os lados opostos do retângulo possuem a mesma medida.

## 3) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Porcentagem
Registro do enunciado	Língua materna e numérico inteiro
Registro do suporte	Geométrico
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	numérico percentual

## 4) Alguns comentários:

O item requer a habilidade de utilizar as relações métricas no triângulo retângulo, cálculo de áreas planas e de porcentagem e conhecer os valores de ângulos notáveis.

**Item 10/2009**

Figura 11- questão 180 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.

Um médico está estudando um novo medicamento que combate um tipo de câncer em estágios avançados. Porém, devido ao forte efeito dos seus componentes, a cada dose administrada há uma chance de 10% de que o paciente sofra algum dos efeitos colaterais observados no estudo, tais como dores de cabeça, vômitos ou mesmo agravamento dos sintomas da doença. O médico oferece tratamentos compostos por 3, 4, 6, 8 ou 10 doses do medicamento, de acordo com o risco que o paciente pretende assumir.

Se um paciente considera aceitável um risco de até 35% de chances de que ocorra algum dos efeitos colaterais durante o tratamento, qual é o maior número admissível de doses para esse paciente?

- A 3 doses.
- B 4 doses.
- C 6 doses.
- D 8 doses.
- E 10 doses.

Fonte: BRASIL (2009d), p.30.

## 1) Estratégia esperada de resolução:

A estratégia esperada de resolução consiste no cálculo do percentual de chances de ter efeitos colaterais a cada dose tomada. O sujeito deve perceber que na primeira dose, ele tem 10% de um total de 100% de chances de ter efeitos colaterais. Para a segunda dose, as chances de ter efeitos colaterais aumentam, pois são 10% da primeira dose mais 10% de 90% ( $100\% - 10\% \times 100\%$ ) da segunda dose, perfazendo um total de 19%. Na terceira dose, o sujeito acumula os 10% da

primeira dose, com os 9% da segunda dose e os 10% de 81% ( $90\% - 10\% \times 90\%$ ) para a terceira dose, acumulando 27,1% de chances de ter efeitos colaterais. Finalmente, para a quarta dose, ele somaria 10% mais 9% mais 8,1%, referentes respectivamente a primeira, segunda e terceira doses e mais 10% de 72,9% ( $81\% - 10\% \times 81\%$ ), perfazendo um total de 34,4% de chances de ter efeitos colaterais.

	Ação	Transformação
1	Estabelecer que na primeira dose, a porcentagem de pacientes que podem sofrer efeitos colaterais seria: $10\% \times 100\%$ , na segunda dose seriam $10\% \times 100\% + 10\% \times 90\%$ , na terceira dose, $10\% \times 100\% + 10\% \times 90\% + 10\% \times 81\%$ , na quarta dose, $10\% \times 100\% + 10\% \times 90\% + 10\% \times 81\% + 10\% \times 72,9\%$ .	Conversão da língua materna para o registro numérico percentual e tratamento no registro numérico percentual.
2	Calcular o valor da expressão ( $10\% \times 100\% + 10\% \times 90\%$ ) na segunda dose (19%)	Tratamento no registro numérico inteiro.
4	Calcular o valor da expressão na terceira dose (27,1%)	Tratamento no registro numérico inteiro.
5	Calcular o valor da expressão na quarta dose (34,4%)	Tratamento no registro numérico inteiro.

Nos cálculos das expressões que contêm taxa percentual de 10%, habitualmente os alunos apenas dividem o valor referente à quantidade inicial por dez, devido à congruência semântica, sem ser necessária a conversão para o registro fracionário ou decimal.

## 2) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Porcentagem
Registro do enunciado	Língua materna e numérico percentual
Registro do suporte	Não há
Registro do comando	Língua materna e numérico percentual
Registro das alternativas de resposta	Numérico inteiro e língua materna.

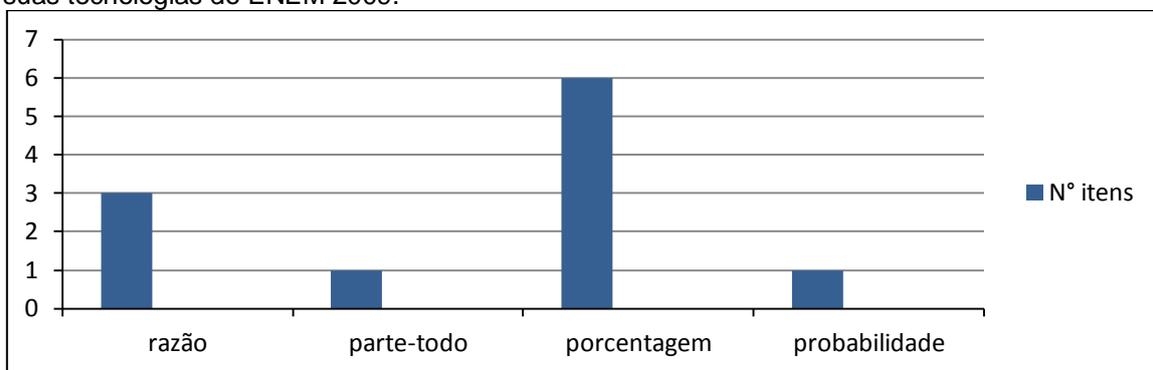
## 3) Alguns comentários:

O item difere dos itens anteriores de porcentagem, pois o aluno para calcular as chances de ter efeitos colaterais em cada dose tem que considerar as doses anteriores, dificultando a resolução.

## 6.2 SÍNTESE DA ANÁLISE DOS ITENS DA PROVA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS DO ENEM 2009.

Dos 10 itens analisados, pudemos verificar que foram os seguintes significados abordados: parte-todo, razão, probabilidade e porcentagem, com predominância do último, de acordo com o gráfico 2 que demonstra uma tendência dos ENEM já observada nas versões anteriores. Um item mobilizou dois significados, porcentagem e probabilidade.

Gráfico 2- Significados dos números racionais abordados nos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.



O significado parte-todo é mobilizado na questão 144 (item 06/2009), num contexto envolvendo as notas musicais. O significado probabilidade é abordado na questão 139 (item 02/2009), junto com o significado porcentagem, num contexto que mobiliza taxa percentual de pessoas na população dos países desenvolvidos e subdesenvolvidos acima de 60 anos.

O significado razão é abordado nas questões 137 (item 01/2009), 152 (item 07/2009) e 158 (item 08/2009), em contextos diferentes. Na questão 137, o contexto envolve o conceito de velocidade constante; na questão 152, comparação entre medidas de capacidade e a questão 158, escala.

O significado porcentagem é mobilizado nas questões 139, 140, 141, 143, 164 e 180, conforme quadro 5.

Quadro 5 - Síntese da abordagem do significado porcentagem nos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009.

<b>Item</b>	<b>Questão</b>	<b>Contexto</b>	<b>Incógnita requerida no comando do item</b>	<b>Dados fornecidos no item</b>
02/2009	139	Índice populacional de pessoas com 60 anos ou mais no mundo	Taxa percentual no registro fracionário	Taxas percentuais
03/2009	140	Área de figuras planas	Comparação entre a área construída e a área correspondente a 6% da área do terreno (quantidade de transformação)	Lados do retângulo, cuja área representa a quantidade inicial; taxa percentual e o lado do quadrado.
04/2009	141	Consumo de biodiesel	Quantidade inicial, referente ao consumo de biodiesel	Taxa percentual e quantidade de transformação.
05/2009	143	Crescimento populacional	Quantidade de transformação referente ao aumento populacional	Taxa percentual e quantidade inicial
09/2009	164	Área de figuras planas	Taxa percentual referente à área do terreno que coube a João	Dimensões do terreno destinado a partilha, cuja área corresponde a quantidade inicial; e dados necessários para o cálculo da área do terreno de João, que representa a quantidade de transformação.
10/2009	180	Efeitos colaterais por dose de medicamento	Quantidades de transformação que representa as chances de se ter efeitos colaterais a cada dose tomada, para estabelecer o maior número de doses considerando um risco de até 35% de chances de efeitos colaterais.	Taxa percentual

A questão 139 requer que o sujeito leia e interprete o gráfico para determinar o intervalo (no eixo vertical) em que está contida a taxa percentual que, convertida para o registro numérico fracionário, corresponde à incógnita do item. Para determinar a fração, resposta do item, o sujeito deve converter as taxas percentuais, do intervalo escolhido, para o registro numérico fracionário e comparar com as alternativas de resposta; ou, ainda, converter as alternativas de resposta (registro

numérico fracionário) para o registro numérico percentual, buscando uma taxa percentual que esteja dentro do intervalo escolhido.

Na questão 141, a incógnita é a quantidade inicial, tendo sido dada a taxa percentual e a quantidade de transformação e na questão 143, a incógnita é a quantidade de transformação, em que são conhecidas a quantidade inicial e a taxa percentual; portanto nesses itens a incógnita pode ser calculada diretamente, pois eles apresentam todos os dados necessários à sua resolução;

As questões, 140, 164 e 180 têm em comum a necessidade de que, inicialmente, sejam calculados dados que se farão necessários para o cálculo da incógnita. Por exemplo, na questão 164, para se obter a taxa percentual (incógnita) que corresponde à área do terreno que coube a João, é preciso, a princípio, calcular a quantidade inicial (área do terreno) e a quantidade de transformação (área do terreno que coube à João) para, com esses resultados, obter a taxa percentual. Isso equivale a dizer que para o cálculo da taxa percentual, nesse item, são necessárias ao menos três ações, sendo uma para o cálculo da quantidade inicial, outra para encontrar a quantidade de transformação e, finalmente, com o auxílio dos dados obtidos, a que calcula a taxa percentual.

O quadro 6 apresenta os registros dos números racionais existentes na estrutura de cada item e os possíveis de serem mobilizados durante a resolução desses. O registro numérico percentual (RNP) obteve uma maior ocorrência (60%) entre aqueles existentes na estrutura dos itens; e o registro numérico fracionário (RNF), se apresentou como o que mais pode ser mobilizado (80%) durante a resolução dos mesmos.

Quadro 6 - Registros dos números racionais<sup>9</sup> existentes e mobilizados nos itens identificados do ENEM 2009.

Item	Questão	Ideia envolvida	Registros existentes na estrutura do item	Registros que podem ser mobilizados
01/2009	137	Razão	RND	RA, RNF
02/2009	139	Probabilidade e porcentagem	RNF, RNP	RNF
03/2009	140	Porcentagem	RA, RNP	RA, RNP, RNF,
04/2009	141	Porcentagem	RNP, RND	RNP, RA, RNF, RND,
05/2009	143	Porcentagem	RNP	RNP, RNF, RND
06/2009	144	Parte-todo	RNF	RNF, RNP
07/2009	152	Razão	RPD	RNF
08/2009	158	Razão	RND, RNR	RNF, RND, RNR
09/2009	164	Porcentagem	RNP	RA, RND, RNP
10/2009	180	Porcentagem	RNP	RNP

As conversões entre o registro da língua materna e os registros dos números racionais, estão listadas no quadro 7.

Quadro 7 - Conversões entre o registro da língua materna e os registros dos números racionais do ENEM 2009.

Item	Questão	Registro de chegada
01/2009	137	RA
03/2009	140	RA
04/2009	141	RA
05/2009	143	RNP
06/2009	144	RNF
07/2009	152	RNF
08/2009	158	RNF
09/2009	164	RA
10/2009	180	RNP

Na coluna referente ao registro de chegada constam apenas os registros, numérico fracionário (RNF), algébrico (RA), numérico percentual (RNP), demonstrando um fechamento nesses registros, no que se refere a conversões que têm como registro de partida a língua materna.

As conversões entre os registros dos números racionais ocorreram apenas num sentido, como se pode observar no quadro 8.

<sup>9</sup> Utilizamos as seguintes abreviações para os registros: RNR- registro numérico razão; RNF – registro numérico fracionário; RND- registro numérico decimal; RNP - registro numérico percentual; RA – registro algébrico; RF - registro figurado; RLM- registro da língua materna; RNI- registro numérico inteiro; RD- registro em diagrama.

Quadro 8 - Conversões entre os registros dos números racionais do ENEM 2009.

Item	Questão	Registro de Partida	Registro de chegada
01/2009	137	RNF	RND
03/2009	140	RNP	RNF
04/2009	141	RNP Ou RNP	RNF  RND
05/2009	143	RNP ou RNP	RNF  RND
08/2009	158	RNR	RNF
09/2009	164	RND	RNP

Nessas conversões entre registros dos números racionais houve um predomínio da conversão cujo registro de partida é o numérico percentual, que pode ser explicado pela quantidade de itens que envolvem o significado porcentagem.

E, finalmente, apresentamos o quadro 9 com as conversões ocorridas durante a resolução dos itens que envolveram outros tipos de registros.

Quadro 9 - Conversões entre outros tipos de registros do ENEM 2009.

Item	Questão	Registro de Partida	Registro de chegada
01/2009	137	RF	RNI
04/2009	141	RLM RD	RD RA
09/2009	164	RF	RA

A análise dos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2009 que mobilizam o conceito dos números racionais nos mostrou que os significados abordados, razão, parte-todo, porcentagem e probabilidade foram mobilizados em contextos que necessitavam da compreensão de conceitos de outras áreas da matemática e também da física, como, geometria, trigonometria no triângulo retângulo e velocidade média.

Exceto a questão 180, todos os demais apresentaram um suporte (gráfico de linhas; texto; figura coordenando os registros, numérico fracionário e língua materna; e figuras geométricas). Esses suportes exigiram a sua leitura e interpretação, para que os dados fossem reconhecidos, sendo também necessário, em dois itens, realizar um tratamento nos dados para que fossem identificados.

Em cada item, identificamos ao menos dois registros de representação dos números racionais que podiam ser trabalhados, internamente no registro, por meio dos tratamentos, ou ser convertido para outro registro. Entretanto a conversão em ambos os sentidos dos registros não foi observada.

O registro numérico potência de dez foi identificado em apenas um item, havendo predomínio entre os registros existentes na estrutura do item do registro numérico percentual e entre aqueles que podem ser mobilizados, do registro numérico fracionário. Acreditamos que isso se deve ao fato de o significado mais mobilizado ter sido o porcentagem, seguido pela razão.

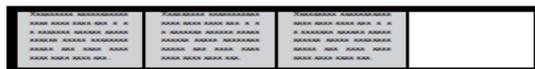
### 6.3 ANÁLISE DA PROVA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS DO ENEM 2010

Na prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010, foram selecionados 09 itens (20%), que mobilizam o conceito de números racionais nos seus diferentes significados e representações. Nessa seção iremos discorrer sobre esses itens.

#### Item 01/2010

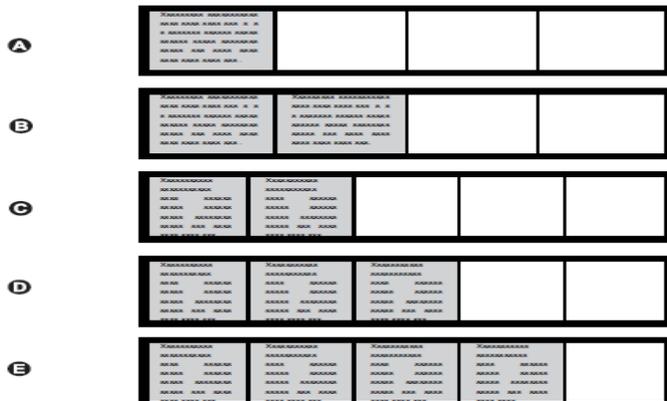
Figura 12: questão 136 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010

Um professor dividiu a lousa da sala de aula em quatro partes iguais. Em seguida, preencheu 75% dela com conceitos e explicações, conforme a figura seguinte.



Algum tempo depois, o professor apagou a lousa por completo e, adotando um procedimento semelhante ao anterior, voltou a preenchê-la, mas, dessa vez, utilizando 40% do espaço dela.

Uma representação possível para essa segunda situação é



1)Estratégia esperada de resolução:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer 40% no registro fracionário —	Conversão do registro numérico percentual para o numérico fracionário.
2	Simplificar a fração -	Tratamento no registro numérico fracionário.
3	Representar a fração obtida no registro figural	Conversão do registro numérico fracionário para o geométrico.

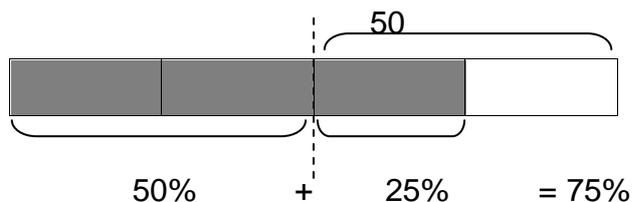
2)Estrutura do item:

Ideia envolvida	Parte-todo e porcentagem
Registro parte introdutória	numérico percentual, língua materna e geométrico
Registro do enunciado	numérico percentual e língua materna
Registro do suporte	-
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	Geométrico

3) Alguns comentários:

O item envolve uma coordenação entre três registros: o numérico percentual, o numérico fracionário e o geométrico. Na parte introdutória da questão, a coordenação entre o registro numérico percentual e o geométrico é mais imediata, pois não demanda, necessariamente, o tratamento de simplificação no registro fracionário. Para os alunos, 75% é facilmente associado à fração —

O registro numérico percentual (75%) também pode ser convertido diretamente para o geométrico por este apresentar uma determinada simetria. Ao visualizar a figura que representa o todo, ou seja, 100%, consegue-se determinar sua metade (50%) que seria formada por duas partes de quatro e a estas bastaria acrescentar mais uma parte que representaria a metade, da metade restante (25%), dando um total de 75% ou três partes de quatro.



Por outro lado, 40%, que corresponde à fração — , oferece maior dificuldade em ser convertida para o registro figural, por não poder ser encontrada a partir da

divisão do inteiro em metades, justificando o tratamento no registro fracionário para obter a fração irredutível.

### Item 02/2010

Figura 13 - questão 138 da prova de matemática e suas tecnologias do Enem 2010

No monte de Cerro Armazones, no deserto de Atacama, no Chile, ficará o maior telescópio da superfície terrestre, o Telescópio Europeu Extremamente Grande (E-ELT). O E-ELT terá um espelho primário de 42 m de diâmetro, “o maior olho do mundo voltado para o céu”.

Disponível em: <http://www.estadao.com.br>. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Ao ler esse texto em uma sala de aula, uma professora fez uma suposição de que o diâmetro do olho humano mede aproximadamente 2,1 cm.

Qual a razão entre o diâmetro aproximado do olho humano, suposto pela professora, e o diâmetro do espelho primário do telescópio citado?

- A** 1 : 20
- B** 1 : 100
- C** 1 : 200
- D** 1 : 1 000
- E** 1 : 2 000

Fonte: BRASIL (2010), p. 20.

#### 1) Estratégia esperada de resolução:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a razão entre as duas medidas.	Conversão entre o registro da língua materna e o registro numérico fracionário.
2	Colocar as duas medidas na mesma unidade.	Tratamento no registro numérico inteiro.
3	Simplificar a fração obtida	Tratamento no registro numérico fracionário.
4	Transformar a fração para a forma de razão.	Conversão do registro numérico fracionário para o registro numérico razão.

#### 2) Análise do suporte:

O suporte está no registro da língua materna e requer a compreensão do texto. Apresenta um dado no registro numérico inteiro.

## 3) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Razão
Registro do enunciado	Registro numérico decimal e língua materna
Registro do suporte	Língua materna e numérico inteiro
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	Numérico razão

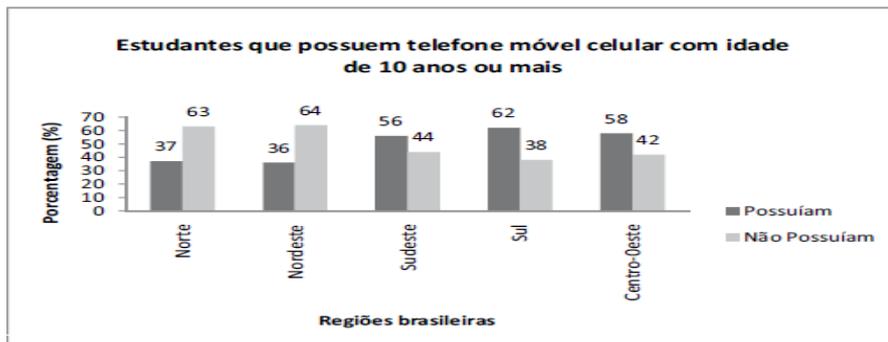
## 4) Alguns Comentários:

O item requer a habilidade de transformar medidas de comprimento.

**Item 03/2010**

Figura 14 - questão 141 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010.

Os dados do gráfico foram coletados por meio da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios.



Fonte: IBGE. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br>. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Supondo-se que, no Sudeste, 14 900 estudantes foram entrevistados nessa pesquisa, quantos deles possuíam telefone móvel celular?

- A 5 513
- B 6 556
- C 7 450
- D 8 344
- E 9 536

Fonte: BRASIL (2010), p. 21.

## 1) Estratégia esperada de resolução:

O item requer que o sujeito reconheça a incógnita, que é a quantidade de transformação que representa o número de estudantes que possuem telefone móvel celular; a taxa percentual (56%), correspondente ao número relativo de estudantes que possuem telefone móvel celular na região sudeste; e a quantidade de referência (14900).

	Ação	Transformação
1	Estabelecer o cálculo da quantidade de transformação referente à taxa percentual de 56% e a quantidade de referência 14900( $56\% \times 14900$ ).	Conversão do registro da língua materna para o registro numérico percentual.
2	Calcular $56\% \times 14900$ (8344).	Conversão do registro numérico percentual para o fracionário ou decimal e tratamento no registro escolhido.

1.1) Outra estratégia de resolução seria utilizar o raciocínio proporcional:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a regra de três, sendo que uma coluna corresponde a 100% e ao número total de estudantes entrevistados na região sudeste (14900); e, a outra coluna, a taxa percentual (56%) de estudantes dessa região que possuem telefone móvel celular e a incógnita que representa a quantidade de transformação relativa a esse percentual.	Conversão da língua materna para uma representação intermediária, em diagrama.
2	Estabelecer a proporção, — — e resolvê-la(8344).	Conversão do registro em diagrama para o registro algébrico e tratamento nesse registro.

Para estabelecer a regra de três é necessário que o sujeito reconheça os valores correspondentes à quantidade inicial (14900), taxa percentual (56), e a incógnita (quantidade de transformação), explícitas no item; a centena e a incógnita (quantidade de transformação) que estão implícitas.

2) Análise do suporte:

Para a leitura e a interpretação do registro de representação gráfico, é necessário que o aluno, a partir da informação do comando, identifique no gráfico a região sudeste e nas colunas que representam essa região, a que representa o percentual (56%) de alunos que possuíam celular.

3) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Porcentagem
Registro do enunciado	Língua materna
Registro do suporte	Gráfico de colunas, numérico percentual.
Registro do comando	Língua materna e numérico inteiro
Registro das alternativas de resposta	Numérico inteiro

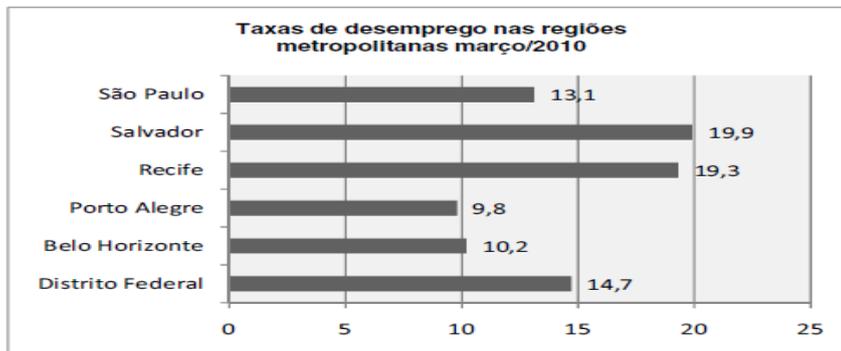
#### 4) Alguns comentários:

Percebemos que o enunciado não fornece informações necessárias sobre o que representa o gráfico, cabendo ao aluno buscar essa informação no título do gráfico. Outra observação nossa seria quanto ao comando que deixa implícita a informação de terem sido entrevistados somente jovens com mais de 10 anos.

#### Item 04/2010

Figura 15 - questão 145 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010.

Os dados do gráfico seguinte foram gerados a partir de dados colhidos no conjunto de seis regiões metropolitanas pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese).



Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Supondo que o total de pessoas pesquisadas na região metropolitana de Porto Alegre equivale a 250 000, o número de desempregados em março de 2010, nessa região, foi de

- A 24 500.
- B 25 000.
- C 220 500.
- D 223 000.
- E 227 500.

Fonte: BRASIL (2010), p. 22.

#### 1) Estratégia esperada de resolução:

O item requer que o sujeito reconheça a incógnita como a quantidade de transformação que representa o número de desempregados na região metropolitana de Porto Alegre, em março de 2010, a taxa percentual (9,8%), relativo a essa quantidade de transformação; e a quantidade de referência (250.000) que corresponde ao total de pessoas pesquisadas nessa região.

	Ação	Transformação
1	Estabelecer o cálculo da quantidade de transformação referente à taxa percentual de 9,8% e a quantidade de referência 250.000 ( $9,8\% \times 250.000$ ).	Conversão do registro da língua materna para o registro numérico percentual.
2	Calcular $9,8\% \times 250.000$ (24.500).	Conversão do registro numérico percentual para o fracionário ou decimal e tratamento no registro escolhido.

1.1) Outra estratégia de resolução seria utilizando o raciocínio proporcional:

Para estabelecer a regra de três, a centena e a incógnita (número de desempregados em março de 2010 na região metropolitana de Porto Alegre) estão implícitas, a quantidade inicial (250.000) e a taxa percentual (9,8%) estão explícitas no item.

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a regra de três, sendo que uma coluna corresponde a 100% e ao número total de desempregados na região metropolitana de Porto Alegre (250000); e, a outra coluna, à taxa percentual (9,8%) de desempregados nessa região e a incógnita que representa a quantidade de transformação relativa a esse percentual.	Conversão da língua materna para uma representação intermediária, em diagrama.
2	Estabelecer a proporção, $\frac{\text{---}}{\text{---}} = \frac{\text{---}}{\text{---}}$ e resolvê-la (24500)	Conversão do registro em diagrama para o registro algébrico e tratamento nesse registro.

1.2) Outra estratégia de resolução seria utilizando o arredondamento para 10%:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer o cálculo da quantidade de transformação referente à taxa percentual de 10% e a quantidade de referência 250000 ( $10\% \cdot 250000$ ).	Conversão do registro da língua materna para o registro numérico percentual
2	Calcular $10\% \cdot 250000$ (25000)	Tratamento no registro numérico inteiro, dividindo 250000 por 10.
3	Comparar o resultado encontrado com um valor próximo a esse.	Raciocínio proporcional para inferir que como 9,8 é um pouco menor que 10, o resultado seria um pouco menor que 25.000.

## 2) Análise do suporte:

O suporte não apresenta o símbolo de porcentagem (%), fazendo apenas menção à “taxa”, devendo o aluno saber identificar a taxa de porcentagem a partir do registro de representação semiótico gráfico. Para a compreensão do gráfico é necessário que o aluno, coordene as informações contidas no comando, especificando a região com a sua respectiva identificação na barra no gráfico que a representa (Porto Alegre), como também sua respectiva taxa percentual (9,8), exigindo, assim, uma apreensão discursiva; não necessitando qualquer tipo de tratamento.

## 3) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Porcentagem
Registro do enunciado	Língua materna
Registro do suporte	Gráfico de barras, numérico decimal
Registro do comando	Língua materna e numérico inteiro
Registro das alternativas de resposta	Numérico inteiro

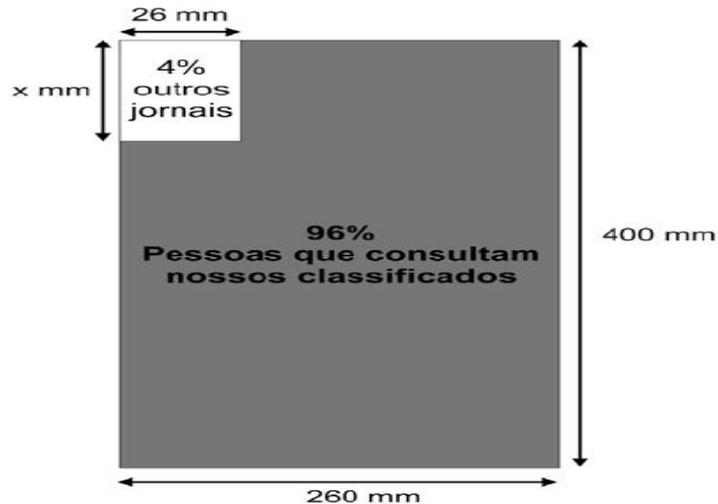
## 4) Alguns comentários:

A estrutura do item é a mesma do anterior, inclusive a ideia envolvida (porcentagem), os tratamentos e os registros de representação (numéricos). Entretanto, desta vez, no gráfico não aparece o símbolo %.

## Item 05/2010

Figura 16 - questão 153 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010.

O jornal de certa cidade publicou em uma página inteira a seguinte divulgação de seu caderno de classificados.



Para que a propaganda seja fidedigna à porcentagem da área que aparece na divulgação, a medida do lado do retângulo que representa os 4%, deve ser de aproximadamente

- A 1 mm.
- B 10 mm.
- C 17 mm.
- D 160 mm.
- E 167 mm.

Fonte: BRASIL (2010), p. 24

1) Estratégia esperada de resolução:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer o cálculo da área do retângulo maior (400mm x 260mm) e resolver (104.000mm <sup>2</sup> )	Conversão do registro da língua materna para o registro numérico inteiro e tratamento nesse registro.
2	Estabelecer o cálculo da área do retângulo menor, como sendo, 4% da área do retângulo maior (4% x 104.000)	Conversão do registro da língua materna para o numérico percentual.
3	Calcular 4% x 104.000 (4.160 mm <sup>2</sup> )	Conversão do registro numérico percentual para o fracionário ou decimal e tratamento no registro escolhido.
4	Determinar a medida do lado do retângulo (4.160mm <sup>2</sup> ÷ 26mm), cuja área foi calculada na ação 2 (4.160 mm <sup>2</sup> ) e tendo sido dado o outro lado (26mm), no suporte do item (160 mm).	Tratamento no registro numérico inteiro.

1.1) Outra estratégia de resolução, utilizando o raciocínio proporcional:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer o cálculo da área do retângulo maior (400mm x 260mm) e da área do retângulo menor em função da medida do lado desconhecida (26mm x x mm) e resolvê-los.	Conversão da língua materna para o registro numérico inteiro e algébrico e tratamento nos respectivos registros.
2	Estabelecer a regra de três, sendo que uma coluna corresponde a área do retângulo maior (10.400 mm <sup>2</sup> ) e ao respectivo percentual (100%); e, a outra coluna, corresponde a área do retângulo menor (26x mm <sup>2</sup> ) e a taxa percentual relativa a essa área (4%)	Conversão da língua materna para o registro em diagrama.
3	Estabelecer a proporção, $\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ e resolvê-la.	Conversão do registro em diagrama para o registro algébrico e tratamento nesse registro.

Para estabelecer a regra de três, na ação 2, a centena e a incógnita (área do retângulo menor em função do lado desconhecido) estão implícitas. A área do retângulo maior (quantidade inicial), calculada na ação 1, e a taxa percentual (4%) são explícitas.

2) Análise do suporte:

O suporte está no registro figural e requer uma apreensão perceptiva da figura para a compreensão e tratamento dos dados que se encontram no registro numérico percentual e numérico inteiro.

3) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Porcentagem
Registro do enunciado	Língua materna
Registro do suporte	Geométrico, numérico inteiro e numérico percentual.
Registro do comando	Língua materna e numérico percentual
Registro das alternativas de resposta	Numérico inteiro

4) Alguns comentários:

O item requer a habilidade do cálculo de área de figuras planas.

### Item 06/2010

Figura 17 - questão 154 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010.

Uma empresa possui um sistema de controle de qualidade que classifica o seu desempenho financeiro anual, tendo como base o do ano anterior. Os conceitos são: **insuficiente**, quando o crescimento é menor que 1%; **regular**, quando o crescimento é maior ou igual a 1% e menor que 5%; **bom**, quando o crescimento é maior ou igual a 5% e menor que 10%; **ótimo**, quando é maior ou igual a 10% e menor que 20%; e **excelente**, quando é maior ou igual a 20%. Essa empresa apresentou lucro de R\$ 132 000,00 em 2008 e de R\$ 145 000,00 em 2009.

De acordo com esse sistema de controle de qualidade, o desempenho financeiro dessa empresa no ano de 2009 deve ser considerado

- A** insuficiente.
- B** regular.
- C** bom.
- D** ótimo.
- E** excelente.

Fonte: BRASIL (2010), p. 24.

1) Estratégia esperada de resolução:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer o cálculo que subtrai o lucro de 2009 (R\$ 132.000) do lucro de 2008 (R\$145.000), referente à quantidade de transformação, e resolvê-lo (R\$13.000).	Conversão da língua materna para o registro numérico inteiro e tratamento nesse registro.
2	Estabelecer a relação entre 13.000 e 132.000 $\frac{13.000}{132.000}$ , que dá um pouco menos de 1 para 10 $\frac{1}{10}$ .	Conversão do registro da língua materna para o numérico fracionário e tratamento no registro numérico fracionário.
3	Reconhecer que vale um pouco menos de 10% e que, portanto, o crescimento anual da empresa foi considerado bom.	Tratamento no registro numérico fracionário e conversão para o numérico percentual.

1.1) Outra estratégia seria utilizar um tratamento algébrico:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer o cálculo que subtrai o lucro de 2009 (R\$ 132.000) do lucro de 2008 (R\$145.000), referente à quantidade de transformação, e resolvê-lo (R\$13.000).	Conversão da língua materna para o registro numérico inteiro e tratamento nesse registro.
2	Estabelecer a equação que relaciona a taxa percentual (incógnita) com a quantidade inicial e a porcentagem ( $x\% \times 132.000 = 13.000$ ).	Conversão da língua materna para o registro algébrico.
3	Resolver a equação, $x\% \times 132.000 = 13.000$ (9,8%).	Tratamento no registro algébrico.
4	Estabelecer o conceito, com base no resultado encontrado.	

1.2) Outra estratégia de resolução, seria utilizar o raciocínio proporcional:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer o cálculo que subtrai o lucro de 2009 (R\$ 132.000) do lucro de 2008 (R\$145.000), referente à quantidade de transformação, e resolvê-lo (R\$13.000).	Conversão da língua materna para o registro numérico inteiro e tratamento nesse registro.
2	Estabelecer a regra de três, sendo que uma coluna corresponde ao lucro de 2008 (132.000) e a taxa percentual de 100%; e a outra coluna corresponde à quantidade de transformação (13.000) obtida da ação 1, e a incógnita que representa a taxa percentual relativa a essa quantidade de transformação.	Conversão da língua materna para o registro em diagrama.
3	Estabelecer a proporção, $\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ e resolvê-la (9,8%)	Conversão do registro em diagrama para o registro algébrico, e tratamento nesse registro.

Para estabelecer a regra de três na ação 2, a centena e a incógnita (taxa percentual referente à quantidade de transformação) estão implícitas. A quantidade de transformação (13.000), calculada na ação 1, e a quantidade inicial (132.000) estão explícitas.

## 2) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Porcentagem
Registro do enunciado	língua materna e numérico percentual
Registro do suporte	Não há suporte
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	Língua materna

## 3) Alguns comentários:

Qualquer que seja a estratégia estabelecida, inicialmente deve-se calcular a quantidade de transformação (13.000) que é a diferença entre os lucros de 2009 e 2008, para depois ser calculada a taxa percentual que representa o desempenho financeiro anual da empresa.

**Item 07/2010**

Figura 18 - questão 170 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010.

Um grupo de pacientes com Hepatite C foi submetido a um tratamento tradicional em que 40% desses pacientes foram completamente curados. Os pacientes que não obtiveram cura foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade e submetidos a dois tratamentos inovadores. No primeiro tratamento inovador, 35% dos pacientes foram curados e, no segundo, 45%.

Em relação aos pacientes submetidos inicialmente, os tratamentos inovadores proporcionaram cura de

- A** 16%.
- B** 24%.
- C** 32%.
- D** 48%.
- E** 64%.

Fonte: BRASIL (2010), p. 28.

## 1)Estratégia esperada de resolução:

	Ação	Transformação
1	Supor 1.000 pacientes com hepatite e estabelecer o cálculo de $40\% \times 1.000$ .	Conversão do registro da língua materna para o numérico percentual.
2	Calcular $40\% \times 1000$ .	Conversão do registro numérico percentual para o numérico fracionário ou decimal e tratamento no registro escolhido.
3	Calcular a diferença entre o total de pacientes (1.000) e o número de pacientes curados (400).	Tratamento no registro numérico inteiro.
4	Estabelecer a divisão do número de pacientes não curados (600) por dois e resolver (300).	Conversão do registro da língua materna para o numérico inteiro e tratamento no registro numérico inteiro.
5	Estabelecer o cálculo de 35% de 300 para o primeiro grupo, e resolver (105)	Conversão do registro da língua materna para o registro numérico percentual. Conversão do registro numérico percentual para o numérico fracionário ou decimal e tratamento no registro numérico escolhido
6	Estabelecer o cálculo de 45% de 300 para o segundo grupo, e resolver (135).	O mesmo da ação anterior.
7	Somar os pacientes curados dos dois grupos (105 + 135).	Tratamento no registro numérico inteiro.
8	Estabelecer a razão entre o número de pacientes curados após os tratamentos inovadores (240) e o total de pacientes com hepatite — .	Conversão do registro da língua materna para o registro numérico fracionário.
9	Simplificar a fração para obter a fração centesimal — .	Tratamento no registro numérico fracionário.
10	Transformar a fração centesimal em taxa percentual.	Conversão do registro numérico fracionário para o numérico percentual.

## 1.1) Outra estratégia de resolução, seria:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a diferença entre o total de pacientes submetidos ao tratamento convencional (100%) e o número relativo de pacientes curados (100% - 40%) e resolvê-la (60%).	Conversão do registro da língua materna para o numérico percentual e tratamento no registro numérico percentual.
2	Estabelecer a divisão do valor encontrado (60%) por dois (30%).	Tratamento no registro numérico percentual.
3	Estabelecer o cálculo de 30%. 30%(número relativo de pacientes curados no primeiro grupo).	Conversão do registro da língua materna para o numérico percentual.
4	Calcular $30\% \times 35\%$ (10,5%)	Conversão do registro numérico percentual para o fracionário ou decimal, tratamento no registro escolhido e conversão desse registro para o numérico percentual.
5	Estabelecer o cálculo de $45\% \times 30\%$ (número relativo de pacientes curados no segundo grupo).	Conversão do registro da língua materna para o numérico percentual.
6	Calcular $45\% \times 30\%$ (13,5%).	Mesma da ação anterior.
7	Somar os percentuais de pacientes curados nos dois grupos (24%)	Tratamento no registro numérico percentual.

## 1.2) Outra estratégia de resolução, seria:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a diferença entre o total percentual de pacientes submetidos ao tratamento convencional (100%) e o de pacientes completamente curados (40%).	Conversão do registro da língua materna para o numérico percentual e tratamento no registro numérico percentual.
2	Estabelecer a divisão do valor encontrado (60%) por dois (30%).	Conversão do registro da língua materna para o numérico percentual e tratamento no registro numérico percentual.
3	Somar as taxas percentuais dos pacientes curados que foram submetidos ao primeiro tratamento e ao segundo tratamento inovador (35% + 45%).	Tratamento no registro numérico percentual.
4	Estabelecer o cálculo de 30% do total de pacientes que foram submetidos ao tratamento inovador e obtiveram cura (80%) $\times$ (30% $\times$ 80%).	Conversão do registro da língua materna para o numérico percentual.
5	Calcular $30\% \times 80\%$ (24%).	Conversão do registro numérico percentual para o fracionário ou decimal, tratamento no registro escolhido e conversão desse registro para o numérico percentual.

## 2) Estrutura do item:

Ideia envolvida	porcentagem
Registro do enunciado	língua materna e numérico percentual
Registro do suporte	Não há suporte
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	numérico percentual

## 3) Alguns comentários:

O enunciado é confuso, pois não deixa claro se os dois grupos foram submetidos aos tratamentos inovadores ou se cada um dos dois grupos passou por um único tratamento inovador. Só é possível verificar quando se compara as alternativas de repostas, que o enunciado refere-se à primeira opção, ou seja, os dois grupos foram submetidos aos tratamentos inovadores.

Pudemos perceber, neste item, que existem duas estratégias básicas para a sua resolução. Na primeira, o aluno pode supor uma quantidade inicial de pacientes, estrategicamente definida de modo a facilitar as operações de tratamento como a que utilizamos na resolução da questão, 1.000 pacientes. A partir de então seria apenas calcular as quantidades de transformação ou porcentagens, sendo conhecidas as taxas percentuais e a quantidade inicial, como: 60% de 1.000, 35% de 300 e 45% de 300. Na segunda estratégia de resolução, o aluno calcula as porcentagens a partir da relação entre a taxa percentual inicial (que está no lugar da quantidade inicial) e a taxa percentual a ser aplicada sobre esse valor relativo. Obtém como porcentagem, também um valor relativo (taxa percentual), diferentemente dos problemas clássicos em que a porcentagem é um valor absoluto. Situação como essa ainda não havia sido trabalhada nos itens anteriores.

Entre as soluções descritas, consideramos a estratégia de base como sendo aquela que exige um menor custo cognitivo, pois, além de seguir a ordem em que se apresentam os dados no item, mantendo uma congruência semântica com o enunciado, possui um maior número de ações que são desenvolvidas. A última solução foi considerada como sendo a de maior custo cognitivo, não só porque não utiliza a ordem dos dados dispostos no texto, não mantendo uma congruência semântica com o enunciado, como também, por ser resolvida em um menor número de ações.

### Item 8/2010

Figura 19 - questão 172 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010.

Em 2006, a produção mundial de etanol foi de 40 bilhões de litros e a de biodiesel, de 6,5 bilhões. Neste mesmo ano, a produção brasileira de etanol correspondeu a 43% da produção mundial, ao passo que a produção dos Estados Unidos da América, usando milho, foi de 45%.

Disponível em: planetasustentavel.abril.com.br. Acesso em: 02 maio 2009.

Considerando que, em 2009, a produção mundial de etanol seja a mesma de 2006 e que os Estados Unidos produzirão somente a metade de sua produção de 2006, para que o total produzido pelo Brasil e pelos Estados Unidos continue correspondendo a 88% da produção mundial, o Brasil deve aumentar sua produção em, aproximadamente,

- A 22,5%.
- B 50,0%.
- C 52,3%.
- D 65,5%.
- E 77,5%.

Fonte: BRASIL (2010), p.29.

1) Estratégia esperada de resolução, seria utilizar o raciocínio proporcional:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer o cálculo da quantidade de transformação (em valores percentuais), que representa o aumento na produção de etanol no Brasil em 2009 ( $45\% \div 2$ ) e resolver (22,5%).	Conversão da língua materna para o registro numérico percentual e tratamento nesse registro.
2	Estabelecer a regra de três, sendo que uma coluna corresponde à produção brasileira de etanol em 2006 (43%) e a taxa percentual de 100%, e a outra coluna corresponde ao aumento na produção brasileira em 2009 (22,5%), e à incógnita que corresponde ao percentual relativo ao aumento dessa produção.	Conversão da língua materna para o registro em diagrama.
3	Estabelecer a proporção, $\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ e resolvê-la (52,3%).	Conversão do registro em diagrama para o registro algébrico e tratamento nesse registro.

Para estabelecer a regra de três na ação 2, a centena e a incógnita (taxa percentual) estão implícitas. A produção brasileira de etanol em 2006 e o aumento referente a essa produção no ano de 2009 (calculado) estão explícitos.

1.1) Outra estratégia de resolução, seria utilizar a razão:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer o cálculo da quantidade de transformação (em valores percentuais), que representa o aumento na produção de etanol no Brasil em 2009. $(45\% \div 2)$ e resolver (22,5%).	Conversão da língua materna para o registro numérico percentual e tratamento nesse registro.
2	Estabelecer a razão entre o aumento da produção brasileira de etanol em 2009 e a produção de etanol desse país em 2006 — .	Conversão da língua materna para o registro numérico fracionário.
3	Dividir o numerador pelo denominador (0,523).	Conversão do registro numérico fracionário para o numérico decimal
4	Multiplicar o valor obtido por cem (52,3%).	Conversão do registro numérico decimal para o porcentagem.

2) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Porcentagem
Registro do enunciado	Língua materna
Registro do suporte	Língua materna e numérico percentual
Registro do comando	Língua materna e numérico percentual
Registro das alternativas de resposta	numérico percentual

3) Alguns comentários:

Pudemos verificar que nesse item, assim como no anterior, a quantidade inicial (43%) e quantidade de transformação ou porcentagem (22,5%), são valores relativos e não absolutos, como são encontrados mais comumente. O comando requer que seja calculado o aumento da produção brasileira de etanol em 2009 em taxa percentual, mas isso pode não ficar claro para o aluno, pois os dados já estão no registro numérico percentual, podendo levá-lo a calcular, apenas, a quantidade de transformação ou porcentagem (22,5%), ao invés da taxa percentual referente a essa porcentagem (52,32%).

### Item 9/2010

Figura 20 - questão 173 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010.

O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

TAMANHO DOS CALÇADOS	NÚMERO DE FUNCIONÁRIAS
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é

- A  $\frac{1}{3}$
- B  $\frac{1}{5}$
- C  $\frac{2}{5}$
- D  $\frac{5}{7}$
- E  $\frac{5}{14}$

Fonte: BRASIL (2010), p.29.

#### 1) Estratégia esperada de resolução:

	Ação	Transformação
1	Identificar no quadro o tamanho dos calçados acima de 36,0 (37,0; 38,0; 39,0) e os respectivos números de funcionárias que utilizam esses tamanhos (3, 10, 1).	Leitura de quadro.
2	Somar os valores obtidos (3 + 10 + 1).	Tratamento no registro numérico inteiro.
3	Estabelecer a razão entre o número de funcionárias que calçam 38 e o das que calçam acima de 36 — .	Conversão da língua materna para o registro numérico fracionário.
4	Simplificar a fração —	Tratamento no registro numérico fracionário.

#### 2) Análise do suporte:

O suporte, no registro quadro, apresenta todos os dados necessários para a resolução do item, no registro numérico inteiro, sendo necessária a leitura, a interpretação e o tratamento dos dados.

## 3) Estrutura do item:

Ideia envolvida	probabilidade
Registro do enunciado	Língua materna e numérico decimal
Registro do suporte	Numérico inteiro
Registro do comando	Língua materna e numérico decimal
Registro das alternativas de resposta	Numérico fracionário

## 4) Alguns comentários:

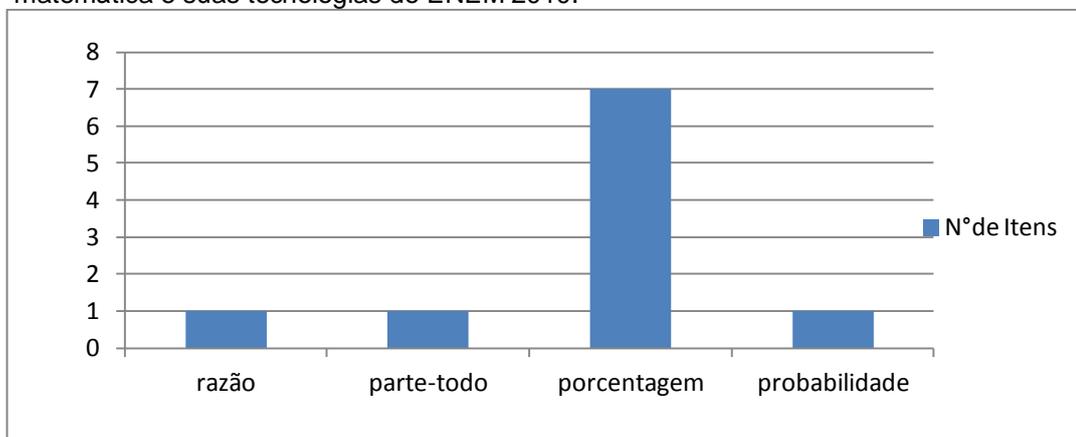
O contexto apresenta uma dificuldade suplementar, pois o aluno deve se ater à informação que somente deve considerar as funcionárias que calçam mais de 36. Ou seja, apesar de ser afirmado que a escolha é “ao acaso”, não se pode considerar o número de funcionárias que calça 36 ou menos.

Nesse item, o aluno pode ser atraído para o distrator (E) por ter no denominador o número 14, semanticamente congruente ao total de funcionárias que calçam acima de 36.

#### 6.4 SÍNTESE DA ANÁLISE DOS ITENS DA PROVA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS DO ENEM 2010.

Dos 09 itens analisados, pudemos verificar que foram os seguintes significados abordados: parte-todo, razão, probabilidade e porcentagem, com predominância do último, de acordo com o gráfico 3 que demonstra uma tendência dos ENEM já observada nas versões anteriores. Um item mobilizou 02 significados, parte-todo e porcentagem.

Gráfico 3 - Significados dos números racionais abordados nos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010.



O significado parte-todo é mobilizado na questão 136 (item 01/2010), em um contexto envolvendo a lousa da sala de aula. O significado razão é abordado na questão 138 (item 02/2010), no contexto envolvendo medidas de comprimento.

O significado probabilidade, como chances de escolha dentro de um universo, foi mobilizado na questão 173 (item 09/2010), em um contexto envolvendo tamanho dos calçados das funcionárias de um colégio.

O significado porcentagem foi abordado nas questões 136, 141, 145, 153, 154, 170 e 172; como descrito no quadro 10:

Quadro 10 - Síntese da abordagem do significado porcentagem nos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010.

Item	Questão	Contexto	Incógnita requerida no comando do item	Dados fornecidos no item
01/2010	136	Divisão da lousa da sala de aula	Representação de 40% no registro figural, significando parte-todo.	Exemplo
03/2010	141	Taxa de desemprego	Porcentagem ou de quantidade transformação	Quantidade inicial e taxa percentual
04/2010	145	Pesquisa de estudantes que possuem telefone móvel celular	Porcentagem ou de quantidade transformação	Quantidade inicial e taxa percentual
05/2010	153	geométrico	Lado do retângulo cuja área (porcentagem ou quantidade de transformação) equivale a 4% (taxa percentual) da área total.	Taxa percentual
06/2010	154	financeiro	Taxa percentual	Quantidade inicial
07/2010	170	Tratamento de pacientes	porcentagem	Quantidade inicial no registro numérico percentual e taxa percentual
08/2010	172	Produção de etanol	Taxa percentual	Quantidade inicial no registro numérico percentual

Pudemos observar nas questões que mobilizam o significado porcentagem, que a 136 requer que a taxa percentual (40%) seja representada geometricamente, sendo mobilizado, também, o significado parte-todo. As questões 141 e 145 requerem o cálculo da porcentagem, que pode ser realizado de forma direta, pois é dada a quantidade inicial e a taxa percentual, diferenciando-se nesses itens,

basicamente, o contexto e o registro da taxa percentual (numérico decimal e inteiro, respectivamente).

Na questão 153, que envolve um contexto geométrico, é solicitado calcular o lado do retângulo cuja área é a porcentagem referente à taxa percentual de 4%. Entretanto é necessário que, inicialmente, seja calculada a quantidade inicial ou de referência, que nesse caso é a área equivalente ao retângulo maior. Portanto, o cálculo da porcentagem não se dá de forma direta, como nos itens anteriores, necessitando de ao menos duas operações, uma que calcule a quantidade inicial e a outra que calcule a porcentagem.

Na questão 154, cujo contexto é financeiro, requer o cálculo da taxa percentual que representa o desempenho financeiro de uma empresa. É dada a quantidade inicial, que é o lucro da empresa em 2008. No entanto, de início deve ser calculada a porcentagem ou quantidade de transformação que representa o acréscimo, em valores absolutos, entre os anos de 2008 e 2009, para só então ser encontrada a taxa percentual referente a esse acréscimo. Isso equivale a dizer que o cálculo da taxa percentual não se dá de forma direta, implicando, seja qual for a estratégia a ser tomada para sua resolução, em ao menos duas ações, uma para encontrar a porcentagem e a outra que leva ao cálculo da taxa percentual.

Nas questões 170 e 172 a porcentagem (que é a incógnita da questão 170) e a quantidade inicial são valores relativos, ou seja, se encontram no registro numérico percentual, o que não aconteceu nos itens anteriores. Esse fato pode levar a uma maior dificuldade na resolução destes itens, pois os sujeitos podem não reconhecer essas grandezas, já que são comumente trabalhadas enquanto valores absolutos.

Na questão 170 requer o cálculo da porcentagem que representa o número de pacientes curados submetido aos tratamentos inovadores, tendo sido dado a taxa percentual de pacientes submetidos a cada tratamento, mas sendo necessário, a princípio, calcular a quantidade inicial dos pacientes que se submeteram a eles. Portanto, o cálculo da porcentagem não se dá de forma direta, sendo necessário ao menos duas operações, uma referente ao cálculo da quantidade inicial de cada grupo de tratamento, e a outra para obter as respectivas taxas percentuais de cura.

Finalmente, na questão 172 requer o cálculo da taxa percentual referente ao aumento da produção de etanol do Brasil em 2009, comparado a 2006. Foi fornecida a quantidade inicial que é a produção de etanol do Brasil em 2006, sendo necessário, para se calcular a taxa percentual, que seja obtida a porcentagem ou

quantidade de transformação (referente a essa taxa) que é o aumento da produção brasileira de etanol em 2009, relativa a 2006. No que se pode concluir que, independente da estratégia a ser utilizada na resolução, o cálculo da taxa percentual não se dá de forma direta, sendo necessário ao menos duas operações.

O quadro 11 apresenta os registros dos números racionais existentes na estrutura de cada item e os mobilizados durante a resolução desses, sendo o registro numérico percentual (RNP) aquele que obteve um maior percentual (77,7%) de ocorrência na estrutura dos itens (enunciado, suporte, comando, e alternativas de respostas). Entre aqueles que mais pôde ser mobilizado (100%) durante a resolução está o registro numérico fracionário (RNF).

Quadro 11 - Registros<sup>10</sup> dos números racionais existentes e mobilizados nos itens identificados do ENEM 2010.

Item	Questão	Ideia envolvida	Registros existentes na estrutura do item	Registros que podem ser mobilizados
01/2010	136	Parte-todo e porcentagem	RNP, RF	RNP, RNF, RF
02/2010	138	Razão	RND, RNR	RNF, RNR,
03/2010	141	Porcentagem	RNP	RNP, RNF, RND, RA
04/2010	145	Porcentagem	RNP	RNP, RNF, RND, RA
05/2010	153	Porcentagem	RNP	RNP, RNF, RND, RA,
06/2010	154	Porcentagem	RNP	RNF, RNP, RA
07/2010	170	Porcentagem	RNP	RNF, RNP, RND
08/2010	172	Porcentagem	RNP	RNP, RA, RNF, RND
09/2010	173	Probabilidade	RNF, RND	RNF

As conversões entre os registros dos números racionais ocorreram apenas em um sentido, com exceção do item 170, no qual a conversão pode ser mobilizada nos dois sentidos entre o registro numérico percentual (RNP) e o numérico fracionário (RNF); ou, entre o registro numérico percentual (RNP) e o numérico decimal (RND), conforme se pode observar no quadro 12:

<sup>10</sup> Utilizamos as seguintes abreviações para os registros: RNR- registro numérico razão; RNF – registro numérico fracionário; RND- registro numérico decimal; RNP - registro numérico percentual; RA – registro algébrico; RLM- registro da língua materna; RF- registro figural; RNI- registro numérico inteiro; RD- registro em diagrama.

Quadro 12 - Conversões entre os registros dos números racionais do ENEM 2010.

<b>Item</b>	<b>Questão</b>	<b>Registro de Partida</b>	<b>Registro de chegada</b>
01/2010	136	RNP RNF	RNF RG
03/2010	141	RNP Ou RNP	RNF  RND
04/2010	145	RNP Ou RNP	RNF  RND
05/2010	153	RNP Ou RNP	RNF  RND
06/2010	154	RNF RAP Ou RAP	RNP RAF  RAD
07/2010	170	RNP Ou RNP RNF Ou RND	RNF  RND RNP  RNP
08/2010	172	RNF RND	RND RNP

As conversões que tiveram como registro de partida a língua materna e como registro de chegada um dos registros dos números racionais, estão listadas no quadro 13. Pudemos perceber que apenas os registros numérico fracionário (RNF), numérico percentual (RNP) e o algébrico (RA) puderam ser mobilizados, demonstrando um fechamento nesses registros, no que se refere a conversões que tem como registro de partida a língua materna.

Quadro 13 - Conversões entre o registro da língua materna e os registros dos números racionais do ENEM 2010.

<b>Item</b>	<b>Questão</b>	<b>Registro de Chegada</b>
02/2010	138	RNF
03/2010	141	RNP
04/2010	145	RNP
05/2010	153	RNP
06/2010	154	RNF RA
07/2010	170	RNF RNP
08/2010	172	RNP RNF
09/2010	173	RNF

Finalmente, apresentamos o quadro 14, com as conversões ocorridas durante a resolução dos itens que envolveram outros tipos de registros.

Quadro 14 - Conversões entre outros tipos de registros do ENEM 2010

<b>Item</b>	<b>Questão</b>	<b>Registro de Partida</b>	<b>Registro de chegada</b>
03/2010	141	RLM RD	RD RA
04/2010	145	RLM RD	RD RA
05/2010	153	RLM RLM RD	RNI RD RA
06/2010	154	RLM RLM RD	RNI RD RA
07/2010	170	RLM	RNI
08/2010	172	RLM RD	RD RA

Todos os itens do quadro 14 abordam o significado porcentagem, que pode, dependendo da estratégia adotada pelo sujeito, mobilizar a conversão do registro da língua materna para o registro em diagrama, e desse para o registro algébrico.

A análise dos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2010 que mobilizam o conceito dos números racionais nos mostrou que os significados abordados, razão, parte-todo, porcentagem e probabilidade, foram mobilizados em vários contextos, mas que apenas um item necessitou da compreensão de conceitos relacionados a outras áreas da matemática, sendo nesse caso, a geometria, com o uso de áreas de figuras planas.

Dos itens analisados, quatro apresentaram um suporte do tipo; gráfico de barras; figura geométrica; texto e um quadro, os quais exigiram a sua leitura e interpretação, para que os dados fossem identificados. Nenhum necessitou receber tratamento para que os dados fossem reconhecidos.

Em cada item, ao menos dois registros de representação dos números racionais podiam ser mobilizados, internamente no registro, por meio dos tratamentos, ou ser convertido para outro registro. Entretanto, em apenas um item a conversão pôde ser mobilizada em ambos os sentidos, sendo, nesse caso, entre os registros, numérico percentual e numérico fracionário ou entre o numérico percentual e o numérico decimal.

O registro numérico percentual foi o mais frequente entre os registros existentes na estrutura dos itens, e o numérico fracionário o que mais pôde ser mobilizado durante as resoluções, repetindo o que ocorreu no ENEM 2009. Acreditamos que isso se deve ao fato de o significado mais mobilizado ter sido o de porcentagem.

## 6.5 ANÁLISE DA PROVA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS DO ENEM 2011

Na prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 foram selecionados 10 itens (aproximadamente 22%), que mobilizam o conceito de números racionais nos seus diferentes significados e representações. Nessa seção iremos discorrer sobre esses itens.

### Item 01/2011

Figura 21 - item 143 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011.

Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2 000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm.

Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de

- A 1 : 250.
- B 1 : 2 500.
- C 1 : 25 000.
- D 1 : 250 000.
- E 1 : 25 000 000.

Fonte: BRASIL (2011), p.21.

#### 1)Estratégia esperada de resolução:

A palavra “escala” contida no comando remete diretamente à razão a ser formada, entretanto os dados estão dispostos no enunciado em ordem inversa à que irá ser impressa na razão, e deverão sofrer um tratamento nas suas unidades de comprimento.

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a razão entre as duas medidas.	Conversão do registro da língua materna para o registro numérico fracionário.
2	Colocar as duas medidas na mesma unidade.	Conversão de centímetros para quilômetros.
3	Simplificar a fração obtida	Tratamento no registro numérico fracionário.
4	Transformar a fração para a forma de razão.	Conversão do registro numérico fracionário para o numérico razão.

2) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Razão (escala).
Registro do enunciado	Língua materna e numérico inteiro.
Registro do suporte	Não há suporte.
Registro do comando	Língua materna.
Registro das alternativas de resposta	Numérico razão

3) Alguns comentários:

O item requer a habilidade de transformar medidas de comprimento.

### Item 2/2011

Figura 22 - questão 145 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011.

#### Café no Brasil

O consumo atingiu o maior nível da história no ano passado: os brasileiros beberam o equivalente a 331 bilhões de xícaras.

Veja. Ed. 2158, 31 mar. 2010.

Considere que a xícara citada na notícia seja equivalente a, aproximadamente, 120 mL de café. Suponha que em 2010 os brasileiros bebam ainda mais café, aumentando

o consumo em  $\frac{1}{5}$  do que foi consumido no ano anterior.

De acordo com essas informações, qual a previsão mais aproximada para o consumo de café em 2010?

- A 8 bilhões de litros.
- B 16 bilhões de litros.
- C 32 bilhões de litros.
- D 40 bilhões de litros.
- E 48 bilhões de litros.

Fonte: BRASIL (2011), p.25.

1) A estratégia esperada de resolução envolve os dados na medida em que estão dispostos no problema:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a expressão que transforma o consumo de café em 2009, de quantidade de xícaras para mililitros (330 bilhões x 120 ml).	Conversão da língua materna para o registro numérico inteiro.
2	Resolver a expressão (39.600 bilhões mL).	Tratamento no registro numérico inteiro.
3	Estabelecer a expressão que calcula o consumo de café em 2010, em mililitros -	Conversão do registro da língua materna para o numérico fracionário.
4	Calcular a expressão (47.520 bilhões ml).	Tratamento no registro numérico fracionário.
5	Transformação da unidade de capacidade mililitros para litros (47.520 bilhões ml ÷ 100 )	Tratamento no registro numérico Inteiro.

1.1) Outro tipo de solução seria transformar o consumo de café em 2009 para litros, inicialmente:

	Ação	Transformação
1	Transformar a quantidade de café por xícara de mililitros para litros. (120ml ÷ 100)	Tratamento no registro numérico inteiro.
2	Transformar o consumo de café em 2009, de xícaras de café para litros (330 bilhões x 0,12 l).	Tratamento no registro numérico decimal.
3	Estabelecer a expressão que calcula o consumo de café em 2010 em litros -	Conversão do registro da língua materna para o numérico decimal e fracionário e tratamento no registro numérico fracionário e decimal.

Ainda podem ser adotados outros dois tipos de resolução, em que a primeira ação, seria o cálculo do consumo de café em 2010, como veremos a seguir:

1.2)

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a expressão que calcula o consumo de xícaras de café em 2010 -	Conversão do registro da língua materna para o numérico fracionário
2	Calcular o consumo de xícaras de café em 2010 (397,2 bilhões de xícaras).	Tratamento no registro numérico fracionário e conversão para o numérico decimal.
3	Transformar o consumo de xícaras de café em 2010 para mililitros (397,2 x 120 ml).	Tratamento no registro numérico decimal
4	Transformar a quantidade consumida em 2010 de mililitros de café para litros (47664 ÷ 100).	Tratamento no registro numérico inteiro.

## 1.3)

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a expressão que calcula o consumo de xícaras de café em 2010	Conversão do registro da língua materna para o numérico fracionário.
2	Calcular o consumo de xícaras de café em 2010. (397,2 bilhões de xícaras).	Tratamento no registro numérico fracionário e conversão para o numérico decimal.
3	Transformar a quantidade de café por xícara de mililitros para litros.(120mL ÷ 100)	Tratamento no registro numérico inteiro.
4	Transformar a quantidade de xícaras consumidas em 2010 para litros(397,2bilhões de xícaras x 0,12).	Tratamento no registro numérico decimal.

## 2) Análise do suporte:

O suporte é um texto no registro da língua materna e apresenta um dado no registro numérico inteiro.

## 3)Estrutura do item:

Ideia envolvida	Parte-todo
Registro do enunciado	Língua materna, numérico inteiro e numérico fracionário
Registro do suporte	Língua materna e numérico inteiro
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	Numérico inteiro e língua materna

## 4) Alguns comentários:

Entre as soluções descritas, consideramos a solução de base como sendo aquela em que exige um menor custo cognitivo, pois segue a ordem em que se apresentam os dados no item, ou seja mantém, uma congruência semântica com o enunciado, e a segunda solução como sendo a de maior custo cognitivo, porque o sujeito não só não utiliza a ordem dos dados dispostos no texto, como, também, não parte diretamente para o cálculo do consumo do café em 2010, como requer o comando, detendo-se em encontrar, inicialmente, a unidade de capacidade (litro) a qual se referem as alternativas de resposta para a partir dela, ser calculado o consumo de café em 2009 e posteriormente o de 2010, imprimindo, assim, uma ordem inversa, que não é utilizada nas demais soluções.

### Item 3/2011

Figura 23 - questão 157 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011.

Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R\$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR (imposto de renda)
POUPANÇA	0,560	ISENTO
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é

- A a poupança, pois totalizará um montante de R\$ 502,80.
- B a poupança, pois totalizará um montante de R\$ 500,56.
- C o CDB, pois totalizará um montante de R\$ 504,38.
- D o CDB, pois totalizará um montante de R\$ 504,21.
- E o CDB, pois totalizará um montante de R\$ 500,87.

Fonte: BRASIL (2011), p.25.

#### 1) Estratégia esperada de resolução:

Os dados, necessários à resolução do item, estão dispostos na mesma ordem (capital investido, rendimento e imposto) em que irão ser utilizados no cálculo do montante: capital investido (500) + rendimento mensal (poupança) e capital investido (500) + rendimento mensal – imposto de renda sobre o ganho (CDB), apresentando uma congruência semântica com a expressão a ser formada na resolução do item.

	Ação	Transformação
1	Estabelecer o cálculo do montante da poupança após um mês. $(500 + 0,560\% \times 500)$ .	Conversão do registro da língua materna para o registro numérico percentual.
2	Cálculo do montante da poupança após um mês (R\$ 502,80).	Conversão do registro numérico percentual para o numérico fracionário, do numérico fracionário para o numérico decimal e tratamento no registro numérico decimal; ou, conversão, do registro numérico percentual para o numérico decimal e um tratamento nesse registro.
3	Estabelecer o cálculo do montante do CDB após um mês. $(500 + 0,876\% \times 500 - 4\% \times (0,876 \times 500))$ .	Conversão do registro da língua materna para o registro numérico percentual.
4	Cálculo do montante da aplicação no CDB (R\$ 504,21).	As mesmas da ação 2.
5	Comparação entre os montantes da poupança e do CDB $(504,21 > 502,80)$ .	

1.1) Outra estratégia seria utilizar o raciocínio proporcional:

Estabelecer uma regra de três para o cálculo do montante da aplicação na poupança, outra para o cálculo do montante no CDB e também para o cálculo do imposto de renda devido no CDB. Para o cálculo do montante da aplicação na poupança, a centena e a incógnita (porcentagem relativa à taxa percentual da poupança), estão implícitas e a quantidade inicial (500) está explícita. Para o cálculo do montante da aplicação no CDB, a centena e a incógnita (porcentagem relativa à taxa percentual do CDB) estão implícitas e a quantidade inicial (500) está explícita no texto. Para o cálculo do imposto a ser pago pelo CDB, estão implícitas, a quantidade inicial, a centena e incógnita (porcentagem referente à taxa percentual do imposto a ser pago)

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a regra de três para o cálculo do rendimento da poupança após um mês, sendo que uma coluna corresponde a 0,560% e a incógnita que representa o rendimento mensal da poupança, e a outra coluna, corresponde a 100% e ao valor relativo à aplicação, R\$ 500,00.	Conversão da língua materna para uma representação intermediária, em diagrama.
2	Estabelecer a proporção, $\frac{0,560}{100} = \frac{x}{500}$ e resolvê-la (2,80).	Conversão do registro em diagrama para o registro algébrico e tratamento nesse registro.
3	Estabelecer o cálculo do montante da poupança após um mês (500,00 + 2,80) e resolvê-lo (502,8)	Conversão da língua materna para o registro numérico decimal, e tratamento nesse registro.
4	Estabelecer a regra de três para o cálculo do rendimento do CDB após um mês, sendo que uma coluna corresponde a 0,876% e a incógnita que representa o rendimento mensal do CDB, e a outra coluna corresponde a 100% e ao valor relativo à aplicação, R\$ 500,00.	Conversão da língua materna para uma representação intermediária, em diagrama.
5	Estabelecer a proporção, $\frac{0,876}{100} = \frac{x}{500}$ e resolvê-la (4,38).	Conversão do registro em diagrama para o registro algébrico e tratamento nesse registro.
6	Estabelecer a regra de três para o cálculo do imposto de renda à pagar sobre o ganho do CDB após um mês, sendo que uma coluna corresponde a 4% e a incógnita que representa o valor do imposto à pagar, e a outra coluna corresponde a 100% e ao valor relativo ao rendimento do CDB após um mês, R\$ 4,38.	Conversão da língua materna para uma representação intermediária, em diagrama.
7	Estabelecer a proporção - $\frac{4}{100} = \frac{x}{500}$ e resolvê-la (0,17).	Conversão do registro em diagrama para o registro algébrico e tratamento nesse registro.
8	Estabelecer o cálculo do ganho da aplicação no CDB após um mês (500 + 4,38 - 0,17) e resolvê-lo (504,21).	tratamento no registro numérico decimal;
9	Comparar os montantes da poupança e do CDB	

## 2) Análise do suporte:

O suporte está no registro de quadro e oferece o rendimento mensal e imposto de renda a ser pago pela poupança e CDB no registro numérico percentual. As taxas referentes aos rendimentos mensais da poupança e CDB requerem a compreensão de que são relativas aos percentuais do capital investido, e a taxa

percentual do imposto de renda do CDB requer a compreensão de que é relativa ao rendimento mensal.

3) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Porcentagem
Registro do enunciado	Língua materna e numérico inteiro
Registro do suporte	Quadro
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	Língua materna e numérico decimal

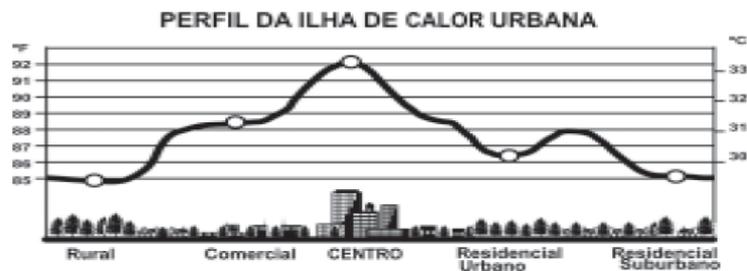
4) Alguns comentários:

Os dados presentes no suporte do item (0,560 e 0,876) dificultam o cálculo sem o auxílio da calculadora.

### Item 4/2011

Figura 24 - questão 159 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011.

Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das “ilhas de calor” da região, que deveriam ser inferiores a  $31^{\circ}\text{C}$ . Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Fonte: EPA.

Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

- A  $\frac{1}{5}$
- B  $\frac{1}{4}$
- C  $\frac{2}{5}$
- D  $\frac{3}{5}$
- E  $\frac{3}{4}$

Fonte: BRASIL (2011), p.26.

## 1) Estratégia esperada de resolução:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a razão, em que o numerador é o número de regiões que apresentam um “pico inferior a 31°C” (3), e o denominador, é o número de “outras regiões para morar” (4).	Conversão do registro da língua materna para o numérico fracionário.

## 2) Análise do suporte:

O suporte requer a compreensão de que o eixo vertical compreende as temperaturas na unidade Celsius (°C) situadas no lado direito do gráfico e Fahrenheit (°F), no lado esquerdo. No eixo horizontal encontram-se as regiões, incluindo a que Rafael mora. Como o enunciado refere-se às temperaturas em “°C”, a relação a ser estabelecida será entre as temperaturas do eixo localizado no lado direito e suas respectivas regiões, com exceção do “centro”, pois é a região que Rafael mora.

## 3) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Probabilidade
Registro do enunciado	Língua materna e numérico inteiro
Registro do suporte	Gráfico
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	Numérico fracionário

## 4) Alguns comentários:

A expressão “*Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar*” possui congruência semântica com a razão – , em que “1”, equivale ao termo “uma” e “4” a expressão “outras regiões para morar”. Entretanto, essa razão – não é referencialmente equivalente à solução do item – Além disso, o sujeito que não se ater ao comando de escolher “*aleatoriamente, uma das outras regiões*”, e, ainda, fizer uma leitura direta do gráfico (que apresenta cinco regiões), poderá incluir na quantidade de regiões que representa o denominador da fração o centro, ficando, assim, com um total de 5 (cinco) regiões ao invés de 4 (quatro). Esses dois fatores, quer seja, a congruência semântica com uma razão que não é referencialmente

equivalente à expressão dada e uma leitura do gráfico sem relacioná-lo ao comando, podem contribuir para uma diminuição no índice de acertos do item.

Outra observação seria quanto ao contexto que não representa a realidade, pois ninguém escolhe o lugar em que vai morar de forma aleatória.

### Item 5/2011

Figura 25 - questão 162 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011.

Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R\$ 3 800,00 gerado pela aplicação.

A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de

- A R\$ 4 222,22.
- B R\$ 4 523,80.
- C R\$ 5 000,00.
- D R\$ 13 300,00.
- E R\$ 17 100,00.

Fonte: BRASIL (2011), p. 26.

1) Estratégia esperada de resolução:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a equação ( $x - 30\% x + 20\% \times 30\% x = 3800,00$ ).	Conversão do registro na língua materna para o registro algébrico.
2	Resolução da equação (5000,00)	Tratamento no registro algébrico.

2) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Porcentagem
Registro do enunciado	Língua materna, numérico percentual e numérico decimal
Registro do suporte	Não há suporte
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	Numérico decimal

3) Alguns comentários:

A resolução da equação requer o cálculo da quantidade inicial ( $x$ ), referente à quantia aplicada. Entretanto a segunda parcela da equação ( $20\% \cdot 30\% x$ ) refere-se ao cálculo da porcentagem ou quantidade de transformação, em que a quantidade

inicial passa a ser  $30\%x$ . Portanto, a resolução do item requer que o sujeito considere duas quantidades iniciais ou de referência,  $x$  e  $30\%x$ , o que pode levar a um custo cognitivo maior, e conseqüentemente a uma diminuição na quantidade de acertos do item.

### Item 6/2011

Figura 26 - questão 164 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011.

Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil  $\text{km}^2$  de área. Quando não chove, o homem do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interferem na vida do sertanejo.

Disponível em: <http://www.wwf.org.br>. Acesso em: 23 abr. 2010.

Segundo este levantamento, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por  $\text{km}^2$ , é de

- A 250.
- B 25.
- C 2,5.
- D 0,25.
- E 0,025.

Fonte: BRASIL (2011), p.26.

1)Estratégia esperada de resolução:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a razão entre as medidas.	Conversão da língua materna para o registro numérico fracionário.
2	Dividir o numerador pelo denominador	Conversão do registro numérico fracionário para o numérico decimal.

2)Estrutura do item:

Ideia envolvida	Razão
Registro do enunciado	-
Registro do suporte	Numérico inteiro e língua materna
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	Numérico inteiro e decimal

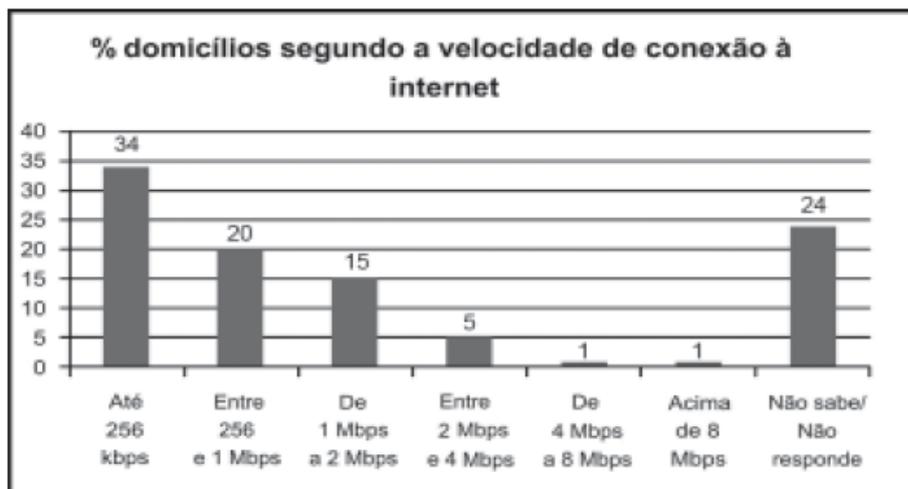
### 3) Alguns comentários:

Os dados estão dispostos no item na mesma ordem em que irão ser utilizados na razão, primeiro o numerador (20 milhões) e depois o denominador (800 mil km<sup>2</sup>) e o comando já indica que a densidade demográfica é “.. habitantes por km<sup>2</sup>...”. O que o sujeito deve fazer é converter o registro da língua materna para o registro numérico fracionário, havendo, nesse caso, uma congruência semântica. Outro fato é que o suporte é o enunciado do item.

### Item 7/2011

Figura 27- questão 165 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011.

O gráfico mostra a velocidade de conexão à internet utilizada em domicílios no Brasil. Esses dados são resultado da mais recente pesquisa, de 2009, realizada pelo Comitê Gestor da Internet (CGI).



Disponível em: <http://agencia.ipea.gov.br>. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se, aleatoriamente, um domicílio pesquisado, qual a chance de haver banda larga de conexão de pelo menos 1 Mbps neste domicílio?

- A 0,45
- B 0,42
- C 0,30
- D 0,22
- E 0,15

Fonte: BRASIL (2011), p.27.

## 1) Estratégia esperada de resolução:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a expressão que soma os percentuais dos intervalos cuja velocidade de conexão é maior ou igual a 1 Mbps (15% + 5% + 1% + 1%) e resolvê-la (22%).	Conversão do registro da língua materna para o numérico percentual, e tratamento no registro numérico percentual.
2	Dividir o percentual encontrado por 100	Conversão do registro numérico percentual para o numérico decimal.

## 2) Análise do suporte:

O suporte requer a compreensão de que cada coluna corresponde no eixo vertical aos percentuais, e o eixo horizontal aos intervalos de velocidade de conexão de banda larga dos domicílios pesquisados, com exceção da última coluna, que corresponde ao percentual de entrevistados que desconhecem a velocidade de conexão de banda larga do seu domicílio ou não responderam à pesquisa.

O tipo de gráfico apresentado não deixa clara a relação parte-todo, presente na probabilidade, em que, neste caso, o número de domicílios que possuem banda larga com conexão acima de 1Mbps (22%) é uma parte do total de 100% de domicílios pesquisados.

## 3) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Probabilidade
Registro do enunciado	Língua materna
Registro do suporte	Gráfico
Registro do comando	Língua materna e numérico inteiro
Registro das alternativas de resposta	Numérico decimal

## 4) Alguns comentários:

A coluna relativa aos entrevistados que não sabem ou não respondem abre uma lacuna para as chances de haver banda larga com conexão igual ou superior a 1Mbps.

A expressão “*peelo menos 1 Mbps*”, ao ser convertida para o registro numérico é referencialmente equivalente a, ; portanto, a conversão para o registro numérico não é semanticamente congruente à expressão dada, o que poderá levar os sujeitos a terem dificuldades em determinar o percentual de domicílios desejado.

## Item 8/2011

Figura 28 - questão 166 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011.

Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização “deve mudar”, no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

#### Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: <http://img.terra.com.br>. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é

- A 8%.
- B 9%.
- C 11%.
- D 12%.
- E 22%.

Fonte: BRASIL (2011), p.27.

1)Estratégia esperada de resolução:

	Ação	Transformação
1	Calcular o total de pessoas vacinadas	Tratamento no registro numérico inteiro.
2	Estabelecer a razão — entre o número de pessoas vacinadas no posto de vacinação portadoras de doenças crônicas (22) e o número total de pessoas vacinadas nesse posto (200).	Conversão do registro da língua materna para o numérico fracionário.
3	Simplificar a fração para obter 100 no denominador — e transformar para o valor percentual (11%).	Tratamento no registro numérico fracionário e conversão para o registro numérico percentual.
4	Ou ainda, dividir o numerador (22) pelo denominador (200) e multiplicar por 100.	Conversão do registro numérico fracionário para o decimal e conversão do registro numérico decimal para o numérico percentual.

1.1) Outra estratégia de solução utiliza o raciocínio proporcional:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a regra de três, sendo que uma coluna corresponde à incógnita, que é a taxa percentual referente ao número de pessoas vacinadas, portadoras de doenças crônicas, e a respectiva quantidade de transformação (22). A outra coluna corresponde a 100% e a quantidade total de pessoas vacinadas.	Conversão da língua materna para uma representação intermediária, em diagrama.
2	Estabelecer a proporção $\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ e resolvê-la.	Conversão do registro em diagrama para o registro algébrico e tratamento nesse registro.

2) Análise do suporte:

A tabela necessita que seja realizado um tratamento para encontrar o total de pessoas atendidas no posto de vacinação.

3) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Probabilidade
Registro do enunciado	Língua materna e numérico inteiro
Registro do suporte	Tabela
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	numérico percentual

4) Alguns comentários:

A probabilidade, nesse item, é tratada como a taxa percentual que representa as chances de se escolher aleatoriamente pessoas atendidas no posto de vacinação portadoras de doenças crônicas. No item 159, a probabilidade foi tratada como a fração em que o numerador representava a quantidade de regiões que poderiam ser escolhidas e, o denominador, o número de regiões disponíveis. Enquanto que no item 165, a probabilidade correspondia ao número decimal que representava as chances dos domicílios pesquisados possuírem banda larga igual ou superior a 1Mbps.

### Item 9/2011

Figura 29 - questão 171 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011.

Nos últimos cinco anos, 32 mil mulheres de 20 a 24 anos foram internadas nos hospitais do SUS por causa de AVC. Entre os homens da mesma faixa etária, houve 28 mil internações pelo mesmo motivo.

Época. 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que, nos próximos cinco anos, haja um acréscimo de 8 mil internações de mulheres e que o acréscimo de internações de homens por AVC ocorra na mesma proporção.

De acordo com as informações dadas, o número de homens que seriam internados por AVC, nos próximos cinco anos, corresponderia a

- A 4 mil.
- B 9 mil.
- C 21 mil.
- D 35 mil.
- E 39 mil.

Fonte: BRASIL (2011), p.28.

1)Estratégia esperada de resolução utiliza a proporcionalidade:

A expressão “haja um acréscimo de 8 mil internações de mulheres e que o acréscimo de internações de homens por AVC ocorra na mesma proporção” é semanticamente congruente ao raciocínio proporcional, em que o acréscimo do número de mulheres com AVC (8000) está para o número total de mulheres com AVC(32000), assim como o acréscimo de homens com AVC(x), está para o número total de homens com AVC(28000).

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a regra de três, sendo que uma coluna corresponde ao valor do acréscimo do número de mulheres com AVC (8000) e ao número total de mulheres com essa doença (32000), e a outra coluna corresponde à incógnita que representa o acréscimo de homens com AVC e ao número total de homens com AVC (24000).	Conversão da língua materna para uma representação intermediária, em diagrama
2	Estabelecer a proporção, $\frac{8000}{32000} = \frac{x}{28000}$ e resolvê-la (7000).	Conversão do registro em diagrama para o registro algébrico e tratamento nesse registro.
3	Estabelecer a soma do acréscimo do número de homens internados com AVC (7000) nos próximos cinco anos com o número inicial das internações de homens (7000 + 28000) e resolvê-la (35000).	Conversão do registro da língua materna para o registro numérico inteiro e tratamento nesse registro.

1.1) Outra estratégia de resolução, seria:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a razão — que representa o índice de acréscimo de mulheres com AVC.	Conversão da língua materna para o registro numérico fracionário.
2	Simplificar a fração -	Tratamento no registro numérico fracionário.
3	Calcular o produto entre a razão e o número total de homens com AVC -	Tratamento no registro numérico fracionário.
5	Somar o valor encontrado com o número de homens internados com AVC (7000 + 28000)	Tratamento no registro numérico inteiro

2) Análise do suporte:

O suporte é um texto que traz dados necessários à resolução do item, no registro numérico inteiro, de forma clara e objetiva e sem necessidade de tratamento.

3) Estrutura do item:

Ideias envolvidas	Razão
Registro do enunciado	Numérico inteiro e língua materna
Registro do suporte	Numérico inteiro e língua materna
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	Numérico inteiro e língua materna

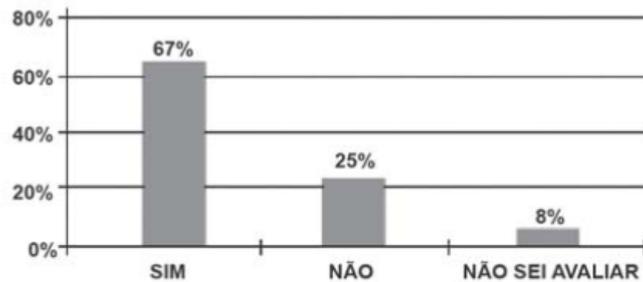
4) Alguns comentários:

A afirmação que haja um acréscimo de 8mil internações de mulheres, nos próximos cinco anos e que o acréscimo de internações de homens ocorra na mesma proporção pode induzir o aluno a pensar em somar oito ao número de homens com AVC.

### Item 10/2011

Figura 30 - questão 172 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011.

Uma enquete, realizada em março de 2010, perguntava aos internautas se eles acreditavam que as atividades humanas provocam o aquecimento global. Eram três as alternativas possíveis e 279 internautas responderam à enquete, como mostra o gráfico.



Época. Ed. 619, 29 mar. 2010 (adaptado).

Analisando os dados do gráfico, quantos internautas responderam “NÃO” à enquete?

- A Menos de 23.
- B Mais de 23 e menos de 25.
- C Mais de 50 e menos de 75.
- D Mais de 100 e menos de 190.
- E Mais de 200.

Fonte: BRASIL (2011), p.29.

1)Estratégia esperada de resolução:

A estratégia de base requer que o sujeito reconheça no item a taxa percentual referente aos internautas que responderam “não” à enquete e a quantidade inicial que representa o número total de internautas que participaram da enquete.

	Ação	Transformação
1	Estabelecer o cálculo da quantidade de transformação referente à taxa percentual de 25% e à quantidade inicial de 279 ( $25\% \times 279$ ).	Conversão da língua materna para o registro numérico percentual.
2	Calcular $25\% \times 279$ .	Conversão do registro numérico percentual para o numérico fracionário, tratamento nesse registro e conversão para o registro numérico decimal; ou conversão do registro numérico percentual para o registro numérico decimal e tratamento nesse registro.

1.1) Outra estratégia, seria utilizar o raciocínio proporcional:

Para estabelecer a regra de três, a centena e a incógnita (quantidade de transformação) estão implícitas e a quantidade inicial (279) e a taxa percentual (25%) estão explícitas no texto.

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a regra de três, sendo que uma coluna corresponde ao número total de internautas (279) e a respectiva taxa percentual (100%) e a outra coluna, a incógnita que representa o valor absoluto de internautas que responderam “não” à enquete e a sua respectiva taxa percentual (25%).	Conversão da língua materna para uma representação intermediária, em diagrama.
2	Estabelecer a proporção, — —	Conversão do registro em diagrama para o registro algébrico e tratamento nesse registro.

2)Análise do suporte:

O registro do suporte é um gráfico de colunas que apresenta os valores percentuais referentes às respostas dos internautas à enquete. Basta ao aluno fazer a interpretação direta do gráfico, sem ser necessário realizar nenhuma operação sobre ele.

3)Estrutura do item:

Ideia envolvida	Porcentagem
Registro do enunciado	Língua materna e numérico inteiro
Registro do suporte	Gráfico de colunas
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	Língua materna e numérico inteiro.

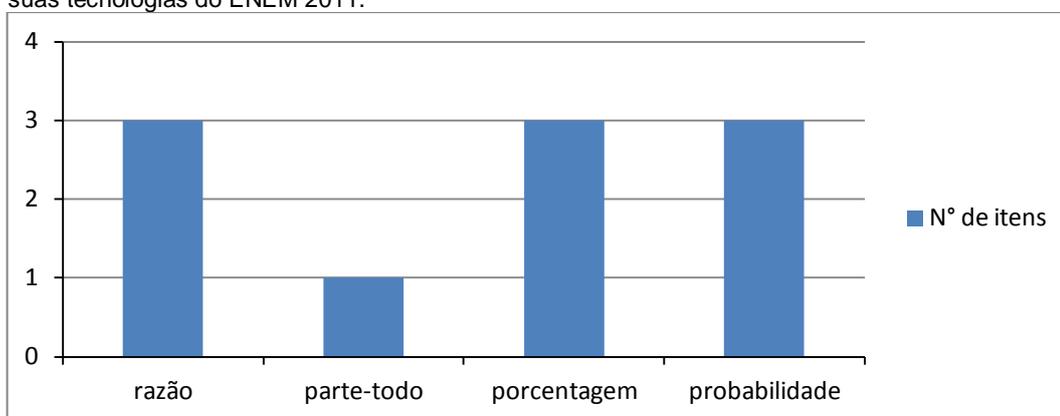
4) Alguns comentários:

O item apresenta os dados de forma clara e direta. Requer o cálculo da porcentagem.

## 6.6 SÍNTESE DA ANÁLISE DOS ITENS DA PROVA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS DO ENEM 2011.

Dos 10 itens analisados, pudemos verificar que foram os seguintes significados abordados: parte-todo, razão, porcentagem, e probabilidade, com uma uniformidade dos três últimos, de acordo com o gráfico 4 que demonstra uma certa mudança na tendência dos ENEM observada nas versões anteriores, em que predominava o significado porcentagem.

Gráfico 4 - Significados dos números racionais abordados nos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011.



O significado parte-todo é mobilizado na questão 145 (item 02/2011), em um contexto envolvendo medidas de capacidade, no consumo de café. O significado razão é abordado em três contextos diferentes. Na questão 143 (item 01/2011), o contexto é de escala; na questão 164 (item 06/2011), densidade demográfica, e na questão 171 (item 09/2011), índice de acréscimo. No primeiro item, a resposta a ser encontrada, apresenta-se no registro numérico que expressa uma divisão e, nos outros dois, no registro numérico inteiro.

O significado porcentagem é abordado nas questões, 157, 162 e 172, conforme quadro 15.

Quadro 15 - Síntese da abordagem do significado porcentagem nos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011.

Item	Questão	Contexto	Incógnita requerida no comando do item	Dados fornecidos no item
03/2011	157	Rendimento mensal da poupança e do CDB	Aplicação mais vantajosa (requer o cálculo da quantidade de transformação referente ao rendimento mensal da poupança e do CDB)	O valor da aplicação (quantidade inicial) taxa percentual da poupança, taxa percentual do CDB e a taxa percentual referente ao ganho mensal do CDB (imposto de renda).
05/2011	162	Aplicação em ações	Quantidade inicial que representa o valor aplicado em ações.	Taxas percentuais de perda (primeiro mês) e ganho (segundo mês) e quantidade final.
10/2011	172	Pesquisa de opinião	Quantidade de transformação, que representa o número de internautas que responderam “não” à enquete.	Taxa percentual referente aos internautas que responderam “não” à enquete e a quantidade inicial que representa o número total de internautas que participaram da enquete.

Na questão 172 a incógnita é a quantidade de transformação, e são conhecidas a quantidade inicial e a taxa percentual, facilitando a resolução do mesmo. A questão 157 também requer calcular as quantidades de transformação que representam os rendimentos mensais da poupança e do CDB, tendo sido dadas as respectivas taxas percentuais e a quantidade inicial. Para o cálculo da quantidade de transformação que representa o imposto do CDB, deve-se considerar como quantidade inicial a quantidade de transformação relativa ao rendimento mensal do CDB. Nesses itens, com exceção da quantidade inicial referente ao cálculo do imposto no CDB, os demais dados são todos fornecidos, o que pode facilitar a resolução dos mesmos.

A questão 162 requer o cálculo da quantidade inicial que representa a quantia aplicada em ações, tendo sido dado as taxas percentuais de perda e ganho dos dois primeiros meses de aplicação e a quantidade final, retirada após dois meses, referente ao montante gerado pela aplicação. O item requer que sejam consideradas duas quantidades iniciais. Uma quantidade inicial referente ao valor aplicado nas ações ( $x$ ) e outra para ser considerada no segundo mês de aplicação, a qual corresponde a trinta por cento do que havia perdido ( $30\%x$ ). Esse fato pode conduzir os sujeitos a erros, caso ele não leve em consideração os dois valores para as quantidades iniciais.

O significado probabilidade, como chances de escolha dentro de um universo, foi mobilizado no contexto geográfico envolvendo regiões (rural, comercial, residencial urbano ou residencial suburbano), na questão 159; em outra, envolvendo pesquisa em domicílios (questão 165), e envolvendo vacinação de pessoas, na questão 166.

O quadro 16 apresenta os registros dos números racionais existentes na estrutura de cada item e os mobilizados durante a resolução desses, sendo o registro numérico percentual (RNP), aquele que obteve um maior percentual (50%) de ocorrência na estrutura dos itens (enunciado, suporte, comando e alternativas de respostas). Entre aqueles que mais pôde ser mobilizado (90%) durante a resolução está o registro numérico fracionário (RNF).

Quadro 16 - Registros<sup>11</sup> dos números racionais existentes e mobilizados nos itens do ENEM 2011.

Item	Questão	Ideia envolvida	Registros existentes na estrutura do item	Registros que podem ser mobilizados
01/2011	143	Razão	RNR	RNF, RNR
02/2011	145	Parte-todo	RNF	RNF, RND
03/2011	157	Porcentagem	RND, RNP	RNP, RNF, RND, RA
04/2011	159	Probabilidade	RNF	RNF
05/2011	162	Porcentagem	RNP, RND	RA
06/2011	164	Razão	RND	RNF, RND
07/2011	165	Probabilidade	RND, RNP	RNP, RND
08/2011	166	Probabilidade	RNP	RNF, RNP, RND, RA
09/2011	171	Razão	-	RA, RNF
10/2011	172	Porcentagem	RNP	RNP, RNF, RND, RA

As conversões que tiveram como registro de partida a língua materna e como registro de chegada, um dos registros dos números racionais, estão listadas no quadro 17. Pudemos perceber que foram mobilizados os registros, numérico fracionário (RNF), numérico decimal (RND), numérico percentual (RNP) e o algébrico porcentagem (RAP), demonstrando no que concerne a esse tipo de conversão (entre a língua materna e os registros dos racionais) uma maior variedade de registros mobilizados se comparados com 2009 e 2010.

<sup>11</sup>Utilizamos as seguintes abreviações para os registros: RNR- registro numérico razão; RNF – registro numérico fracionário; RND- registro numérico decimal; RNP - registro numérico percentual; RA – registro algébrico; RLM- registro da língua materna; RF- registro figurado; RNI- registro numérico inteiro; RD- registro em diagrama.

Quadro 17 - Conversões entre o registro da língua materna e os registros dos números racionais do ENEM 2011.

Item	Questão	Registro de Chegada
01/2011	143	RNF
02/2011	145	RNF RND
03/2011	157	RNP RND
04/2011	159	RNF
05/2011	162	RA
06/2011	164	RNF
07/2011	165	RNP
08/2011	166	RNF
09/2011	171	RNF
10/2011	172	RNP

As conversões entre os registros dos números racionais ocorreram apenas num sentido, como se pode observar no quadro 18:

Quadro 18 - Conversões entre os registros dos números racionais do ENEM 2011.

Item	Questão	Registro de Partida	Registro de chegada
02/2011	145	RNF	RND
03/2011	157	RNP RNF ou RNP	RNF RND
06/2011	164	RNF	RND
07/2011	165	RNP	RND
08/2011	166	RNF Ou RNF RND	RNP RND RNP
10/2011	172	RNP RNF Ou RNP	RNF RND RND

Nas conversões listadas no quadro 18 pudemos constatar que as mais frequentes têm como registro de partida o registro numérico percentual ou o registro numérico fracionário.

E finalmente, apresentamos o quadro 19 com as conversões ocorridas durante a resolução dos itens que envolveram outros tipos de registros.

Quadro 19 - Conversões entre outros tipos de registros <sup>12</sup> do ENEM 2011.

Item	Questão	Registro de Partida	Registro de chegada
01/2011	145	RLM RD	RD RA
08/2011	166	RLM RD	RD RA
09/2011	171	RLM RD RLM	RD RA RNI
10/2011	172	RLM RD	RD RA

Como ocorreu no Enem 2010 esses itens do quadro 19 mobilizam o significado porcentagem, e, dependendo da estratégia estabelecida para a resolução do item, pode ocorrer uma conversão entre o registro da língua materna e o registro em diagrama e desse para o registro algébrico.

Todos os itens do quadro 19 abordam o significado porcentagem, que pode, dependendo da estratégia adotada pelo sujeito, mobilizar a conversão do registro da língua materna para o registro em diagrama, e desse para o registro algébrico.

A análise dos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 que mobilizam o conceito dos números racionais nos mostrou que os significados abordados, razão, parte-todo, porcentagem e probabilidade foram mobilizados em vários contextos, sendo que dois itens necessitaram também da compreensão de conceitos ligados a matemática financeira, e um item do conceito de densidade demográfica.

Entre os itens analisados, dois apresentaram um suporte do tipo texto; dois itens, gráfico de colunas; um item apresentou um quadro, um item, gráfico de curva; e um item apresentou uma tabela. Esses exigiram a sua leitura e interpretação, para que os dados fossem identificados. Nenhum necessitou receber tratamento para que os dados fossem reconhecidos.

Em cada item, ao menos dois registros de representação dos números racionais puderam ser mobilizados, internamente no registro, por meio dos tratamentos, ou ser convertido para outro registro. Entretanto, nenhum item necessitou da conversão em ambos os sentidos dos registros, como ocorreu no ENEM 2009.

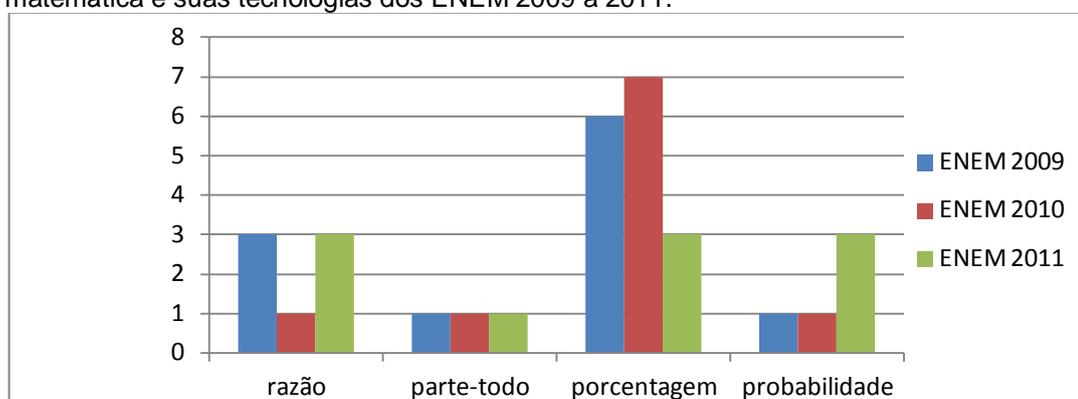
O registro numérico percentual foi o mais frequente entre os registros existentes na estrutura dos itens e o numérico fracionário o que mais pôde ser mobilizado durante as resoluções, repetindo o que ocorreu no ENEM 2009 e 2010,

apesar da uniformidade entre os significados porcentagem, probabilidade e razão. Pois, o registro numérico percentual estava presente mesmo no contexto que envolveu probabilidade, como podemos observar no quadro 16.

## 6.7 SÍNTESE DAS ANÁLISES DOS ENEM DE 2009 A 2011.

Dos 29 itens analisados dos ENEM de 2009 a 2011, verificamos que foram os seguintes significados mobilizados: parte-todo, razão, porcentagem e probabilidade, de acordo com o gráfico 5.

Gráfico 5 – Significados dos números racionais abordados nos itens das provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM 2009 a 2011.



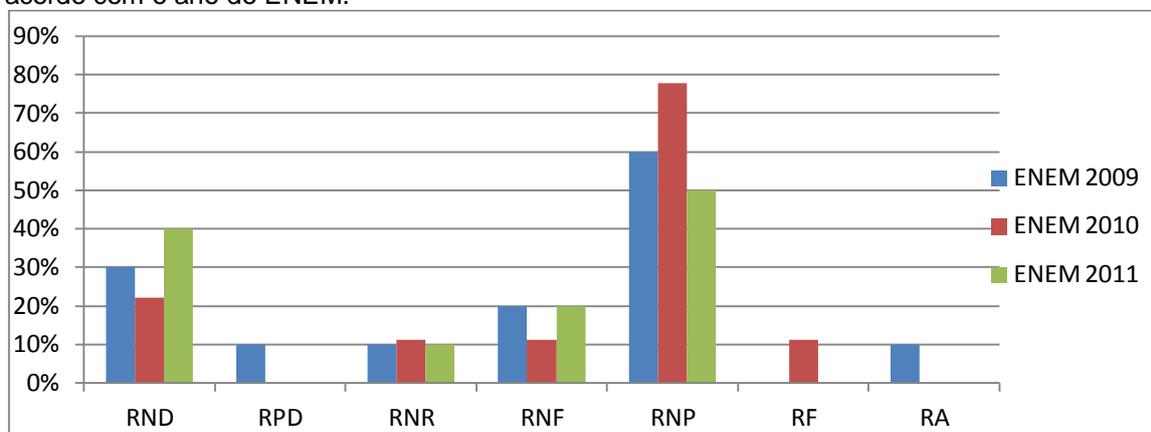
O significado parte-todo correspondeu a 10,3% do total de itens analisados nas provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011, tendo apresentado uma maior uniformidade, pois foi mobilizado em apenas um item a cada prova. O significado probabilidade foi abordado em 17,2% do total de itens, tendo sofrido um acréscimo no número de itens mobilizados no ENEM 2011, em relação aos ENEM 2009 e 2010, passando de um item por prova para três itens.

O significado razão foi mobilizado em 24,1% dos itens analisados dos ENEM de 2009 a 2011, tendo sofrido uma redução no número de itens mobilizados no ENEM 2010 (apenas 1 item), em relação ao ENEM 2009 (três itens), mas voltou a ser mobilizado em três itens no ENEM 2011. O significado porcentagem foi o mais abordado, correspondendo a 58,6% dos itens analisados dos ENEM de 2009 a 2011, tendo sofrido uma redução nos itens que envolviam esse significado no ENEM 2011, o qual apresentou uma uniformidade nos significados razão, porcentagem e probabilidade.

Esses resultados nos revelam que há uma tendência, nesse exame, em abordar os significados, razão, porcentagem, probabilidade e parte-todo, em detrimento dos outros significados, número na reta numérica, quociente e operador multiplicativo. Acreditamos que isso se deve pelo fato de algumas habilidades e competências, que o ENEM se propõe avaliar, mobilizarem os significados que foram privilegiados nesse exame, como analisado no capítulo 3. Quanto à uniformidade entre os significados, razão, porcentagem e probabilidade demonstrada no ENEM 2011, não podemos afirmar se representa uma mudança na forma desses significados serem abordados pelo ENEM, visto que, seria necessário, ao menos, uma análise da versão 2012 para podermos indicar algo nesse sentido.

Os registros de representação semiótica dos números racionais existentes na estrutura (enunciado, suporte, comando e alternativas de respostas) dos 29 itens analisados dos ENEM 2009 (10 itens), 2010 (09 itens) e 2011(10 itens) foram o, numérico decimal, potência de dez, numérico razão, numérico fracionário, numérico percentual e figural, como representados no gráfico 6.

Gráfico 6 – Percentuais de registros dos números racionais<sup>12</sup> existentes na estrutura dos itens de acordo com o ano do ENEM.

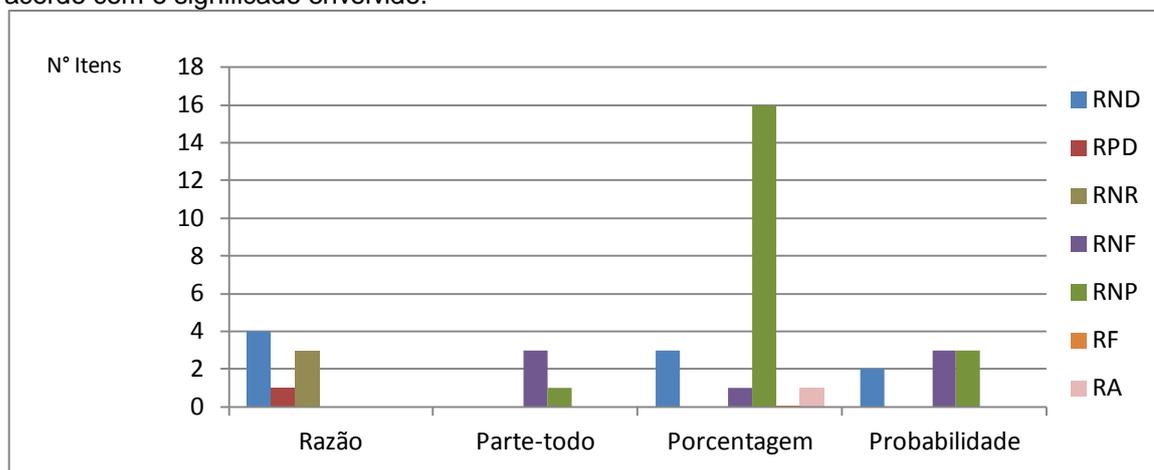


O registro numérico percentual foi o que mais esteve presente na estrutura dos itens dos ENEM 2009 a 2011 (62,6%, em média), mesmo no ENEM 2011, o significado porcentagem não tendo sido o mais abordado. O registro potência de dez só esteve presente no ENEM 2009 e o figural (dos números racionais), apenas no ENEM 2010, ambos com uma única questão.

<sup>12</sup> Utilizamos as seguintes abreviações para os registros: RNR- registro numérico razão; RNF – registro numérico fracionário; RND- registro numérico decimal; RNP - registro numérico percentual; RA – registro algébrico; RLM- registro da língua materna; RF- registro figural; RNI- registro numérico inteiro; RD- registro em diagrama.

O gráfico 7 apresenta os registros de representação semiótica presentes na estrutura dos 29 itens dos ENEM 2009 a 2011, de acordo com o significado envolvido.

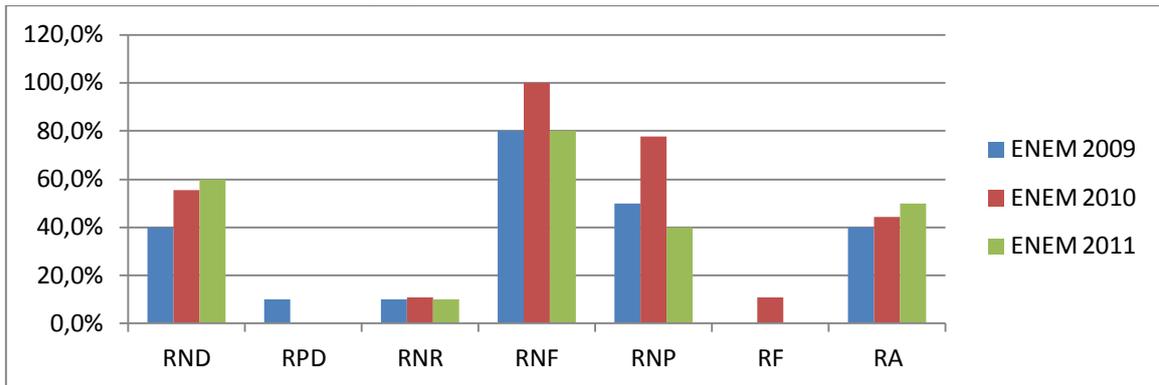
Gráfico 7 – Registros dos números racionais presentes na estrutura dos itens analisados de acordo com o significado envolvido.



O registro numérico percentual se mostra presente também na estrutura dos itens que envolvem os significados probabilidade e parte-todo, isso pode justificar o fato de no ENEM 2011 esse registro continuar sendo o que mais apareceu na estrutura dos itens, apesar da redução de itens que envolveram o significado porcentagem, pois nesse mesmo exame verificamos um acréscimo no número de itens que abordaram o significado probabilidade.

Os registros de representação dos números racionais que podem ser mobilizados (transformados por meio de tratamentos ou conversões) durante a resolução dos itens analisados dos ENEM 2009 a 2011 foram o, numérico fracionário, algébrico, potência de dez, numérico decimal, numérico razão, numérico percentual e figural. Esses registros estão representados no gráfico 8, de acordo com o ano do ENEM.

Gráfico 8 – Percentuais dos registros dos números racionais que podem ser mobilizados nos itens de acordo com o ano do ENEM.

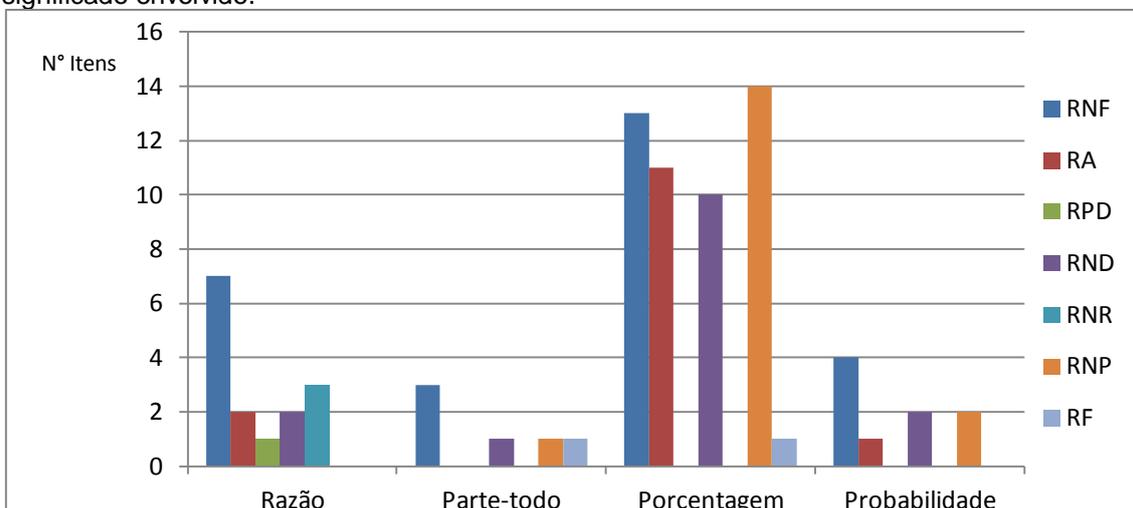


O registro numérico fracionário foi o que mais pôde ser mobilizado nas resoluções dos itens analisados dos ENEM 2009 a 2011. O registro potência de dez só pode ser mobilizado no ENEM 2009 e o figural, no ENEM 2010.

Comparando os registros dos números racionais existentes na estrutura (enunciado, suporte, comando e alternativas de respostas) dos itens analisados dos ENEM 2009 a 2011 com os que podem ser mobilizados durante a resolução desses, verificamos que apesar do registro numérico porcentagem ser o que mais esteve presente na estrutura dos itens, o registro que mais pôde ser mobilizado nas estratégias de resolução desses, ou seja, transformado através de tratamentos e conversões foi o numérico fracionário.

O gráfico 9, apresenta os registros de representação dos números racionais que podem ser mobilizados na resolução dos vinte e nove itens, de acordo com o significado em que foi abordado.

Gráfico 9 – Registros dos números racionais mobilizados nas resoluções dos itens de acordo com o significado envolvido.

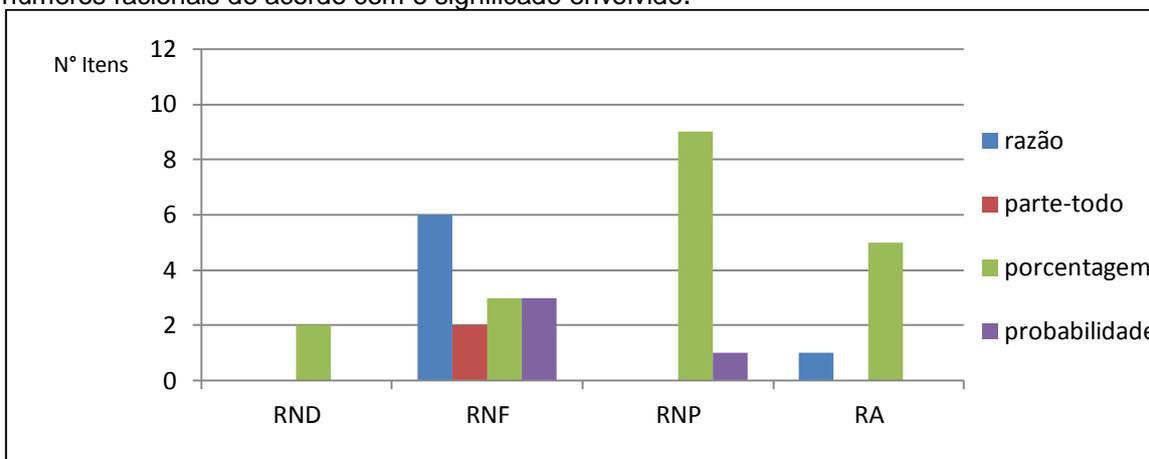


Dos 7 itens que envolveram o significado razão, 3 itens que mobilizaram o significado parte-todo, 16 itens que abordaram o significado porcentagem e 5 itens que mobilizaram o significado probabilidade, entre o total de itens (29) analisados dos ENEM 2009 a 2011, o registro numérico fracionário foi o que pôde ser mais mobilizado nas estratégias de resolução desses, ou seja, que envolveu os significados, razão (todos os itens), parte-todo (todos os itens), e probabilidade (4 dos 5 itens); e o segundo mais mobilizado nos itens que envolveram o significado porcentagem (12 dos 16 itens). Nesse significado o registro mais mobilizado foi o numérico percentual (14 itens). O registro numérico percentual é mobilizado também nos itens que envolvem o significado probabilidade e parte-todo.

O registro algébrico é bastante mobilizado no significado porcentagem (11 dos 16 itens), nas estratégias que envolvem o raciocínio proporcional e só não foi utilizado nos itens que envolvem o significado parte-todo. O registro potência de dez e o numérico razão foram mobilizados apenas no significado razão, o qual não apresentou itens que mobilizassem o registro percentual. O registro figural foi mobilizado apenas nos significados parte-todo e porcentagem.

As conversões mobilizadas entre a língua materna e os registros dos números racionais tiveram como registros de chegada: numérico decimal, numérico fracionário, numérico percentual e algébrico. Esses registros de chegada estão descritos no gráfico 10, de acordo com o significado que o item aborda.

Gráfico 10 – Conversões mobilizadas entre o registro da língua materna e os registros dos números racionais de acordo com o significado envolvido.



Todos os significados tiveram itens em que podem ocorrer as conversões entre a língua materna e o registro numérico fracionário. As conversões cujo registro

de chegada foi o numérico decimal só ocorreram nos itens que envolviam o significado porcentagem. Aquelas que tinham como registro de chegada o numérico percentual ocorreram, em sua maioria (9 de 10 itens), nos itens que mobilizaram o significado porcentagem; e as que tiveram como registro de chegada o algébrico ocorreram em itens que envolveram o significado porcentagem (5 itens) e o significado razão (1item).

O quadro 20 apresenta as conversões que têm como registro de partida a língua materna e como registro de chegada os registros dos números racionais, de acordo com os itens em que foram mobilizadas nos ENEM 2009 a 2011.

Quadro 20 – Percentuais dos itens que envolvem as conversões entre o registro da língua materna e os registros dos números racionais dos ENEM 2009 a 2011.

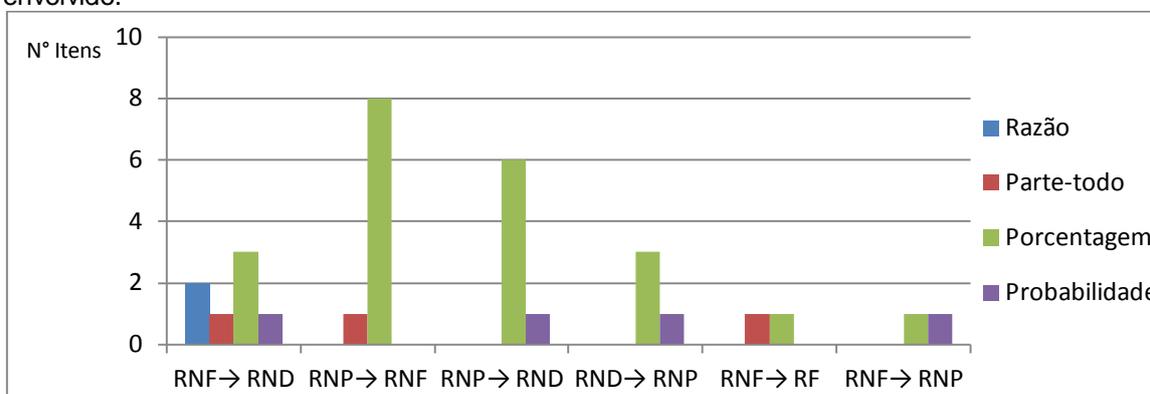
<b>Registro de Chegada</b>	<b>N° Itens do ENEM 2009 (%)</b>	<b>N° itens do ENEM 2010 (%)</b>	<b>N° itens do ENEM 2011 (%)</b>	<b>N° total de itens (%)</b>
RA	40	11,1	10	20,7
RNP	20	55,5	30	34,5
RNF	30	55,5	60	48,3
RND	0	0	20	6,9

As conversões entre a língua materna e os registros dos números racionais que podem ser mais mobilizadas, no ENEM 2011 (60%) e no total de itens analisados (48,3%), são aquelas que têm como registro de chegada o numérico fracionário, podendo ser devido ao fato do ENEM 2011 manter uma uniformidade entre os significados, probabilidade, porcentagem e razão, e o registro numérico fracionário ter sido o mais presente nas estratégias de resolução dos significados abordados nos itens, de acordo com o gráfico 9.

No ENEM 2009 esse tipo de conversão envolveu, em maior número (40%), aquelas que tiveram como registro de chegada o algébrico. No ENEM 2010, esse tipo de conversão ocorreu na mesma proporção para as que tiveram como registro de chegada o numérico percentual e fracionário, podendo ter sido devido ao fato desse exame abordar um número superior de itens que envolveram o significado porcentagem.

As conversões entre os registros dos números racionais estão descritas no gráfico 11, de acordo com os significados envolvidos.

Gráfico 11 – Conversões entre os registros dos números racionais, de acordo com o significado envolvido.



O significado porcentagem mobilizou todas as conversões ocorridas entre os tipos de registros dos números racionais. O significado razão envolveu apenas conversões entre os números racionais que tinham como registro de partida o numérico fracionário e como registro de chegada o numérico decimal.

O quadro 21 apresenta as conversões que têm como registros de partida e de chegada os números racionais e que podem ser mobilizadas nas estratégias de resolução de 62% (18 itens) do total dos itens analisados dos ENEM de 2009 a 2011.

Quadro 21 – Percentuais das conversões entre os registros dos números racionais que podem ser mobilizadas nos itens analisados dos ENEM 2009 a 2011.

Registro de Partida	Registro de Chegada	Percentual de Itens do ENEM 2009 (%)	Percentual de itens do ENEM 2010 (%)	Percentual de itens do ENEM 2011 (%)	Percentual total de itens (%)
RNF	RND	10	11,1	50	24,1
RNP	RNF	30	55,5	20	34,5
RNP	RND	20	44,4	30	31,0
RND	RNP	10	22,2	10	13,8
RNF	RF	0	11,1	0	3,4
RNF	RNP	0	22,2	10	10,3

As conversões entre os registros dos números racionais ocorreram apenas num sentido, com exceção de um item do ENEM 2010, em que a conversão pode ser mobilizada nos dois sentidos. A conversão que tem como registro de partida o numérico percentual e como registro de chegada o numérico fracionário está entre aquelas que podem ser mais utilizadas nas resoluções dos itens analisados dos ENEM 2009 (30%), 2010 (55,5%) e no total de itens analisados (34,5%), podendo ser devido ao fato de que nesses ENEM o significado porcentagem foi o mais mobilizado, de acordo com o gráfico 5. No ENEM 2011 esse fato não ocorreu, porque esse exame apresenta uma mudança quanto aos significados mobilizados nos itens, demonstrando uma uniformidade entre os significados, razão, porcentagem e probabilidade. Isso pode estar influenciando o maior número de conversões entre o registro numérico fracionário e o decimal, pois o registro numérico fracionário é o que aparece com mais frequência entre os significados, conforme gráfico 9.

As conversões entre outros tipos de registros podem ocorrer nas estratégias de resolução de 48,2% (14 itens) do total de itens analisados dos ENEM de 2009 a 2011, e estão relacionadas no quadro 22.

Quadro 22 – Percentuais de conversões entre outros tipos de registros que podem ocorrer nas estratégias de resolução dos itens analisados dos ENEM 2009 a 2011.

<b>Registro de Partida</b>	<b>Registro de chegada</b>	<b>Percentual de Itens do ENEM 2009 (%)</b>	<b>Percentual de itens do ENEM 2010 (%)</b>	<b>Percentual de itens do ENEM 2011 (%)</b>	<b>Percentual total de itens (%)</b>
RF	RNI	10	0	0	3,4
RLM	RD	10	55,5	40	34,5
RD	RA	10	55,5	40	34,5
RF	RA	10	0	0	3,4
RLM	RNI	0	33,3	0	10,3

O maior percentual (34,5%) de conversões entre outros tipos de registros corresponde àquela cujo registro de partida é a língua materna e o de chegada é o registro em diagrama, como também as que têm como registro de partida o diagrama e o de chegada algébrico. Esse tipo de conversão pode ser mobilizado,

em sua maioria, nos itens que envolvem o significado porcentagem, que ocorreu com maior frequência no ENEM 2010, conforme gráfico 5; nas estratégias que utilizam o raciocínio proporcional.

No próximo capítulo iremos apresentar as nossas considerações finais, retomando a nossa questão de pesquisa.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

A nossa questão de pesquisa teve como objetivo analisar *como são abordados os números racionais no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, à luz de seus significados e das suas representações*. Para tal, propomos investigar os seguintes aspectos: identificar e analisar os itens dos ENEM que contemplam o conceito de números racionais nos seus diferentes significados e registros de representações. Do ponto de vista teórico, o estudo teve por base a classificação dos significados dos números racionais proposta por Romanatto (1997) e Gomes (2010) e a Teoria dos Registros de Representações Semiótica de Raymond Duval.

Verificamos que nas provas de conhecimentos gerais dos ENEM de 1998 a 2008, aproximadamente 5,6% dos itens (média de 3,9 itens por prova) envolviam o conceito de números racionais. Nas provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011 (novo ENEM), houve uma mudança no percentual. Aproximadamente 21% dos itens (9,6 itens por prova) mobilizavam esse conceito.

Acreditamos que esse crescimento na média de itens que envolviam o conceito de números racionais pode ser atribuído à reformulação do ENEM em 2009, que passou a conter uma prova para matemática e suas tecnologias com 45 itens. Além disso, o novo ENEM, também passou a ser usado como processo seletivo para o ingresso no ensino superior. Isso nos leva a levantar a hipótese de que o crescimento no número de itens que envolve o conceito de números racionais, pode estar relacionada a importância dada a esse conhecimento não só no cotidiano das pessoas, mas na vida acadêmica. E, conseqüentemente, surge a necessidade de ser avaliado entre os concluintes do ensino médio.

No que se refere aos significados identificados nos itens relativos aos ENEM de 1998 a 2008, constata-se que foram praticamente os mesmos identificados no período do novo ENEM, são eles: *parte-todo*, *razão*, *porcentagem* e *probabilidade*. Com exceção do significado *operador multiplicativo*, que aparece apenas nas provas do período de 1998 a 2008.

Quanto aos significados *quociente* e *número na reta numérica*, não identificamos nenhum item que mobilizasse esses significados dos números racionais nas provas dos ENEM, mesmo a reta numérica tendo sido considerada entre os conteúdos algébricos/geométricos e a divisibilidade, entre os conteúdos

numéricos, dos objetos de conhecimento da matriz de referência para matemática e suas tecnologias do novo ENEM.

Entretanto verificamos a presença de itens pertencentes à mesma prova que mobilizaram o mesmo significado (porcentagem) e registros semióticos (incluindo tratamentos e conversões), sendo a maior diferença entre os dois apenas o símbolo %, que era apresentado no suporte (gráfico) de um item e no outro ele estava ausente. Esses fatos sugerem uma maior reflexão sobre os critérios de escolha dos itens que poderiam incluir, quanto aos itens que abordam o conceito de números racionais, uma maior distribuição entre os seus significados, uma vez que observamos que esses fazem parte da matriz de referência desse exame.

Nas provas de conhecimentos gerais dos ENEM de 1998 a 2008 os significados mais abordados foram porcentagem, seguido pela razão e probabilidade que só começou a constar nas provas do ENEM a partir de 2005. Esses significados continuaram sendo os mais abordados após a reformulação do ENEM em 2009. Entretanto, no ENEM 2011 verificamos uma uniformidade quanto ao número de itens que envolveram esses significados. Nesse exame aumentaram o número de itens que abordaram o significado probabilidade e razão e diminuiu o número de itens que abordaram o significado porcentagem, mudando a tendência dos ENEM anteriores em que havia um predomínio de itens envolvendo o significado porcentagem. O que não implica em afirmar que essa passará a ser a nova tendência. Faz-se necessário continuar analisar os próximos ENEM, a partir de 2012 para confirmar essa nova tendência.

Os itens referentes às provas de matemática e suas tecnologias dos ENEM de 2009 a 2011 tiveram um predomínio, na sua estrutura (enunciado, suporte, comando e alternativas de resposta), do registro numérico percentual (62,6%). Mas, o significado porcentagem no ENEM 2011 pode ser mobilizado em um número menor de itens, se comparado com os exames dos ENEM de 2009 e 2010. O que o ENEM 2011 apresentou foi um aumento no número de itens que envolveram o significado probabilidade.

O significado porcentagem no período relativo ao novo ENEM (2009-2011) aparece envolvido em vários contextos, inclusive envolvendo outros conceitos matemáticos, tais como: área de figuras planas, trigonometria no triângulo retângulo e conceitos relativos à matemática financeira. O significado razão foi trabalhado em contextos envolvendo escala, velocidade média, comparação entre

volume e medida de capacidade, e densidade demográfica. O significado probabilidade, como chances de escolha aleatória dentro de um universo foi mobilizado em contexto geográfico, envolvendo dados populacionais, campanha de vacinação e pesquisa de tamanho de calçado. Portanto, constatamos que alguns itens fizeram conexões não só entre conceitos matemáticos, mas também com conceitos relacionados à física e à geografia. Alguns itens envolveram também mais de um significado. Como a nossa pesquisa não analisou os contextos que envolveram os itens dos ENEM de 1998 a 2008, uma comparação entre esses contextos (antigo ENEM e novo ENEM) ficaria como uma sugestão para aprofundamento desse estudo.

No que tange aos registros semióticos dos números racionais, o que pôde ser mais mobilizado durante as resoluções dos itens dos ENEM 2009 a 2011, foi o registro numérico fracionário. Ao compararmos esse registro com os demais, em relação aos significados envolvidos nos itens, foi o que mais pôde ser mobilizado nas resoluções daqueles que envolveram o significado razão, parte-todo e probabilidade e, também, o segundo mais mobilizado nos itens que envolveram o significado porcentagem.

De acordo com Duval (2003) as conversões são transformações que mudam de acordo com os tipos de registros envolvidos. Na nossa pesquisa tivemos como um dos objetivos específicos, identificar as conversões que podem ser mobilizadas nas resoluções dos itens que contemplam o conceito de números racionais nos seus diferentes significados e representações. Verificamos que, com exceção de um item no ENEM 2010, em que na resolução do mesmo a conversão poderia ser mobilizada nos dois sentidos, nos demais itens, as conversões entre os registros dos números racionais ocorreram apenas em um sentido. Duval (2009, 2011) afirma que saber converter de um registro a outro não implica, necessariamente, em saber realizar a conversão inversa, pois isso requer estruturas cognitivas distintas que nem sempre o sujeito tem desenvolvido.

Nas conversões que puderam ser realizadas nas resoluções dos itens identificados dos ENEM 2009 a 2011 que tiveram como registro de partida a língua materna, o registro de chegada que poderia ocorrer com maior frequência foi o numérico fracionário. Essas conversões puderam ser mobilizadas nos itens que envolveram os significados razão, parte-todo, porcentagem e probabilidade. As conversões que tiveram como registro de partida a língua materna e de chegada o

numérico percentual ocorreram nos itens que abordaram o significado porcentagem e probabilidade.

No ENEM 2009 e 2010 em que o significado mais contemplado pelos itens é a porcentagem, verificamos que as conversões que puderam ser mobilizadas durante a resolução dos itens, com maior frequência, entre os registros dos números racionais, são aquelas que têm como registro de partida o numérico percentual e como registro de chegada o fracionário.

No ENEM 2011, os itens que contemplam os significados que mais mobilizam o registro numérico fracionário (porcentagem, probabilidade e razão) estão distribuídos uniformemente entre o número de itens analisados, então verificamos que as conversões que mais podem ser mobilizadas têm como registro de partida o numérico fracionário e como registro de chegada o numérico decimal.

Nas conversões que puderam ser realizadas nas resoluções dos itens que envolveram outros tipos de registros como o registro algébrico e o que tipificamos de diagrama, a maior ocorrência ficou entre aquelas que envolveram como registro de partida a língua materna e o de chegada o registro em diagrama, como também a que converte o registro diagrama em algébrico, porque fizeram parte da estratégia que utiliza o raciocínio proporcional para resolução de itens que mobilizaram o significado porcentagem.

Para Duval (2003) as conversões são transformações que se submetem aos fenômenos de não congruência. Esses fenômenos, entretanto, não foram analisados na nossa pesquisa. Sabendo da importância de ser analisado o grau de congruência entre essas conversões, sugerimos como um aspecto a ser estudado em outras pesquisas. Futuras investigações poderiam analisar a congruência semântica e a equivalência referencial entre a estrutura que o item oferece e a expressão a ser constituída pelo aluno para a resolução do mesmo, no sentido de verificar se essa, além de ser referencialmente equivalente ao item, também mantém ou não uma congruência semântica. Essas pesquisas poderão avançar no sentido de analisar se os sujeitos participantes do ENEM possuem essa dificuldade.

Por fim, sabemos da limitação de nossa pesquisa. Mas, defendemos que ela significa um avanço no sentido de analisar de que forma estão sendo mobilizados os números racionais no ENEM, que é um exame que se propõe a avaliar as competências e habilidades fundamentais ao exercício da cidadania. Sendo assim,

esperamos poder estar contribuindo com uma reflexão a cerca do ensino e aprendizagem dos números racionais quanto aos seus significados e representações.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª series)**: Matemática. Brasília, MEC/SEF, 1997.

\_\_\_\_\_, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª series)**: Matemática. Brasília, MEC/SEF, 1998a.

\_\_\_\_\_, **Portaria MEC nº 438/1998**. Institui o Exame Nacional do Ensino Médio. Brasília, DF, 1998b. Disponível em: <[http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/diretrizes\\_p0178\\_0181\\_c.pdf](http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/diretrizes_p0178_0181_c.pdf)>. Acessado em 21/01/2012.

\_\_\_\_\_, Ministério da Educação. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)**: Fundamentação Teórico-Methodológica. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Brasília: O instituto, 2005.

\_\_\_\_\_, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Vol.2. Brasília, 2008.

\_\_\_\_\_, **Portaria MEC nº 462/2009**. Portaria que altera o art. 1º da Portaria nº 438, de 28.05.1998. Brasília, DF, 2009(a). Disponível em: <<http://www.portal.mec.gov.br/dmdocuments/port462.pdf>>. Acessado em 21/01/2012.

\_\_\_\_\_, **Portaria INEP nº 109/2009, de 27 de maio de 2009**. Estabelece a sistemática para a realização do ENEM 2009. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 08 jun., 2009(b). Seção 1, p. 14-20.

\_\_\_\_\_, Ministério da Educação. **Matriz de referência para o ENEM 2009**. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Brasília: INEP/MEC, 2009(c).

\_\_\_\_\_, Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio**: Prova de Redação e de Linguagens, códigos e suas Tecnologias e Prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF, cad. 7, 2009(d). Disponível em: <<http://www.portal.inep.gov.br/web/enem/edicões-antiores>>. Acessado em: 16/08/2010.

\_\_\_\_\_, Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio**: Prova de Redação e de Linguagens, códigos e suas Tecnologias e Prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF, cad. 5, 2010. <<http://www.portal.inep.gov.br/web/enem/edicões-anteriores>>. Acessado em: 02/04/2011.

\_\_\_\_\_, Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio**: Prova de Redação e de Linguagens, códigos e suas Tecnologias e Prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF, cad. 5, 2011. <<http://www.portal.inep.gov.br/web/enem/edicões-anteriores>>. Acessado em: 22/05/2012.

BEHR, M. J.; LESH, R.; POST, T. R. ; SILVER, E. A. **Rational number concepts**. In: LESH, R. & LANDAU, M. (Eds). Acquisition of mathematics concepts and processes. New York : Academic Press : Nova York, 1983, p. 91-126.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 6ª edição. Lisboa. 1975.

CATTO, G. G. **Registros de representação e o número racional** – Uma abordagem nos livros didáticos. São Paulo, 2000. 152p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.

COSTA, F. M. **Concepções e competências de professores especialistas em matemática em relação ao conceito de fração em seus diferentes significados**. São Paulo, 2011. 175p. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2011.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental**. São Paulo, 2007. 313p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

DUVAL, R. Registros de representação e números racionais. In: MACHADO, S.D.A.(org.). **Aprendizagem em matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

\_\_\_\_\_. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Coleção Contextos da Ciência. Fasc. I. 1ª ed. São Paulo: editora Livraria da Física, 2009.

\_\_\_\_\_. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. 1ª ed. São Paulo: PROEM, 2011.

\_\_\_\_\_. **Diferenças semânticas e coerência matemática:** introdução aos problemas de congruência. REVMAT. Florianópolis, Santa Catarina, v.7, n.1, p.97-117, 2012a.

\_\_\_\_\_. **Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência.** REVMAT. Florianópolis, Santa Catarina, v.7, n.1, p.118-138, 2012b.

FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. **O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: Ponto de análise para a aprendizagem matemática.** 28ª Reunião GT19. Caxambú, MG, 2005. Disponível em: <[http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo\\_producoes/docs\\_28/funcionamento.pdf](http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_28/funcionamento.pdf)>. Acessado em: 10/04/2012.

GOMES, R. Q. G. **Saberes docentes de professores dos anos iniciais sobre frações.** Rio de Janeiro, 2010. 112p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

KIEREN, T.E. The rational number construct – its elements and mechanisms. In: \_\_\_\_\_ (ed.). **Recent Research on Number Learning.** Columbia:ERIC, 1980. p. 125-149.

\_\_\_\_\_. Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. In: HIEBERT, J. & BEHR, M (eds). **Number Concepts in the Middle Grades.** v. 2. Reston :NTCM. 1988. p. 163-181.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. A fração nas perspectivas do professor e do alunodos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. **BOLEMA.** Rio Claro, São Paulo, ano 21, nº 31, p.23 a 40, 2008.

MARANHÃO, M. C. S. A.; IGLIORI, S. B. C. Registros de representação e números racionais. In: MACHADO, S. D. A.(org.). **Aprendizagem em matemática:** Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. cap.4, p.57-70.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados:** um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. São Paulo, 2005. 215p. Dissertação (mestrado em Educação matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

MOUTINHO, L. V. **Fração e seus diferentes significados**: um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do ensino fundamental. São Paulo, 2005. 193p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

NUNES, M. F.; SILVA, F. A. F. **Os significados do conceito de fração: um estudo diagnóstico com alunos do 8º ano do ensino fundamental**. Monografia de especialização em Educação Matemática- Universidade Estadual de Alagoas. Arapiraca, 2009.

OHLSSON, S. Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of fractions and Related Concepts. In : HIEBERT, J. & BEHR, M (eds). **Number Concepts in the Midle Grades**. v. 2. Reston :NTCM. 1988. p. 53-92.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. As diferentes “Personalidades” do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. **BOLEMA**. Rio Claro, São Paulo, ano 21, nº 31, p.79 a 102,2008.

RAMALHO, B. L.; NÚÑEZ, I. B. **Fundamentos do ensino-aprendizagem das ciências naturais e da matemática**: as provas do ENEM como referência para o Ensino Médio. In: \_\_\_\_\_(Organizadores). Aprendendo com o ENEM – Reflexões para melhor se pensar o ensino e a aprendizagem das ciências naturais e da matemática. Brasília: Liber Livro Editora, 2011. Apresentação, p. 7-15.

RODRIGUES, W. R. **Números racionais**: Um estudo das concepções de alunos após o estudo formal. São Paulo, 2005. 246p. Dissertação (Mestrado em Educação matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

ROMANATTO, M. C. **Número Racional**: Relações necessárias à sua compreensão. Campinas, 1997. 158p. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1997.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental. São Paulo, 2005. 196p. Dissertação (Mestrado em Educação matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

SILVA, M. C. **Reta graduada**: Um registro de representação dos números racionais. São Paulo, 2008. 121p. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

SOARES, M.A. S. **Os números racionais e os registros de representação semiótica**: análise de planejamentos das séries finais do ensino fundamental. Dissertação (mestrado em Educação nas Ciências) – Universidade do Noroeste do estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2007.

TEIXEIRA, A. M. **O professor, o ensino de fração e o livro didático**: um estudo investigativo. São Paulo, 2008. 194p. Dissertação (mestrado Profissional em Educação matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

## ANEXO A

### HABILIDADES AVALIADAS NOS ENEM DE 1998 A 2008:

I – dada a descrição discursiva ou por ilustração de um experimento ou fenômeno de natureza científica, tecnológica ou social, identificar variáveis relevantes e selecionar os instrumentos necessários para realização ou interpretação do mesmo;

II – em um gráfico cartesiano de variável socioeconômica ou técnico-científica, identificar e analisar valores das variáveis, intervalos de crescimento ou decréscimo e taxas de variação;

III – dada uma distribuição estatística de variável social, econômica, física, química ou biológica, traduzir e interpretar as informações disponíveis, ou reorganizá-las, objetivando interpolações ou extrapolações;

IV – dada uma situação-problema, apresentada em uma linguagem de determinada área de conhecimento, relacioná-la com sua formulação em outras linguagens ou vice-versa;

V – a partir da leitura de textos literários consagrados e de informações sobre concepções artísticas, estabelecer relações entre eles e seu contexto histórico, social, político ou cultural, inferindo as escolhas dos temas, gêneros discursivos e recursos expressivos dos autores;

VI – com base em um texto, analisar as funções da linguagem, identificar marcas de variantes linguísticas de natureza sociocultural, regional, de registro ou de estilo, e explorar as relações entre as linguagens coloquial e formal;

VII – identificar e caracterizar a conservação e as transformações de energia em diferentes processos de sua geração e uso social, e comparar diferentes recursos e opções energéticas;

VIII – analisar criticamente, de forma qualitativa ou quantitativa, as implicações ambientais, sociais e econômicas dos processos de utilização dos recursos naturais, materiais ou energéticos;

IX – compreender o significado e a importância da água e de seu ciclo para a manutenção da vida em sua relação com condições socioambientais, sabendo quantificar variações de temperatura e mudanças de fase em processos naturais e de intervenção humana;

- X – utilizar e interpretar diferentes escalas de tempo para situar e descrever transformações na atmosfera, biosfera, hidrosfera e litosfera, origem e evolução da vida, variações populacionais e modificações no espaço geográfico;
- XI – diante da diversidade da vida, analisar, do ponto de vista biológico, físico ou químico, padrões comuns nas estruturas e nos processos que garantem a continuidade e a evolução dos seres vivos;
- XII – analisar fatores socioeconômicos e ambientais associados ao desenvolvimento, às condições de vida e saúde de populações humanas, por meio da interpretação de diferentes indicadores;
- XIII – compreender o caráter sistêmico do planeta e reconhecer a importância da biodiversidade para preservação da vida, relacionando condições do meio e intervenção humana;
- XIV – diante da diversidade de formas geométricas, planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, caracterizá-las por meio de propriedades, relacionar seus elementos, calcular comprimentos, áreas ou volumes, e utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade;
- XV – reconhecer o caráter aleatório de fenômenos naturais ou não e utilizar em situações problema processos de contagem, representação de frequências relativas, construção de espaços amostrais, distribuição e cálculo de probabilidades;
- XVI – analisar, de forma qualitativa ou quantitativa, situações problema referentes a perturbações ambientais, identificando fonte, transporte e destino dos poluentes, reconhecendo suas transformações; prever efeitos nos ecossistemas e no sistema produtivo e propor formas de intervenção para reduzir e controlar os efeitos da poluição ambiental;
- XVII – na obtenção e produção de materiais e de insumos energéticos, identificar etapas, calcular rendimentos, taxas e índices, e analisar implicações sociais, econômicas e ambientais;
- XVIII – valorizar a diversidade dos patrimônios etnoculturais e artísticos, identificando-a em suas manifestações e representações em diferentes sociedades, épocas e lugares;
- XIX – confrontar interpretações diversas de situações ou fatos de natureza histórico-geográfica, técnico-científica, artístico-cultural ou do cotidiano, comparando diferentes pontos de vista, identificando os pressupostos de cada interpretação e analisando a validade dos argumentos utilizados;

XX – comparar processos de formação socioeconômica, relacionado-os com seu contexto histórico e geográfico;

XXI – dado um conjunto de informações sobre uma realidade histórico-geográfica, contextualizar e ordenar os eventos registrados, compreendendo a importância dos fatores sociais, econômicos, políticos ou culturais.

## ANEXO B

### Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias

#### **Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.**

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

#### **Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.**

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

#### **Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.**

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

**Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.**

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

**Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.**

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

**Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.**

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

**Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.**

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.