UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS

DOUTORADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÀTICA

FERNANDA ANDRÉA FERNANDES SILVA

GRAUS DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA NAS CONVERSÕES ENTRE OS REGISTROS GEOMÉTRICO BIDIMENSIONAL E SIMBÓLICO FRACIONÁRIO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Recife

2018

FERNANDA ANDRÉA FERNANDES SILVA

GRAUS DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA NAS CONVERSÕES ENTRE OS REGISTROS GEOMÉTRICO BIDIMENSIONAL E SIMBÓLICO FRACIONÁRIO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Ensino das Ciências e Matemática (PPGEC) da Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Recife

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

S586g Silva, Fernanda Andréa Fernandes
Graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais / Fernanda Andréa Fernandes Silva. – 2018.
258 f. : il.

Orientador: Marcelo Câmara dos Santos.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Recife, BR-PE, 2018.
Inclui referências, apêndice(s) e anexo(s).

1. Números racionais 2. Desenho bidimensional 3. Congruências e restos 4. Construções geométricas 5. Frações 6. Matemática - Estudo e ensino I. Santos, Marcelo Câmara dos, orient. III. Título

CDD 510

FERNANDA ANDRÉA FERNANDES SILVA

GRAUS DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA NAS CONVERSÕES ENTRE OS REGISTROS GEOMÉTRICO BIDIMENSIONAL E SIMBÓLICO FRACIONÁRIO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Tese defendida no Departamento de Educação da UFRPE no dia 28/08/2018 e aprovada pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos, UFRPE
Orientador

Prof.ª Dra. Mônica Lins, UFRPE
Examinadora Interna

Prof.ª Dra. Anna Paula de A. Brito Lima, UFRPE
Examinadora Interna

Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti, UFSC
Examinador Externo

Prof. Dr. Abraão Juvêncio de Araújo, Col. Aplicação UFPE
Examinador Externo

Prof.ª Dra. Luciana Silva dos Santos Souza, Secretaria de Educação do Recife
Examinadora Externa

*Dedico esta pesquisa à minha avó, **Marina Fernandes de M. Almeida** que hoje é a estrelinha de maior brilho no céu.*

AGRADECIMENTOS

À **Deus,** pelo objetivo alcançado!

À minha mãe, **Quitéria Fernandes**, pela compreensão das minhas ausências, por ter estado sempre presente, contornando as minhas faltas, ajudando no que lhe era possível.

Ao meu marido, **Antônio Correia**, por acreditar, pelo incentivo, paciência e companheirismo nesse caminhar.

Aos meus filhos de sangue e de coração, **Daniele Francine, Deyvson Paulo, Edvania Fernandes e Jacqueline Melo**, pelo incentivo, compreensão, e sobretudo, amor e paciência a mim destinados.

Aos meus lindos netos, também de sangue e de coração, **Alice, Adam, Anthony e Lucas** que nos momentos de preocupação trouxeram alegria, amor, iluminaram os meus dias!

Ao meu avô, centenário, **Orlando Faustino**, pela compreensão das minhas ausências.

À minha amiga irmã, **Paula Valéria** pelo apoio dado na parte empírica da minha pesquisa, pelo companheirismo e carinho.

Ao meu orientador prof. **Marcelo Câmara dos Santos** por ter me despertado, lá atrás, no curso de Especialização em Educação Matemática, ocorrido em Arapiraca, Alagoas, a vontade de seguir em frente; por ter sido meu coorientador no mestrado; pela sua dedicação, confiança e orientações durante todo esse caminhar.

À minha sempre orientadora, profa. **Mônica Lins**, orientadora do mestrado, por quem tenho um carinho imenso e gratidão, pelo seu carinho, confiança para comigo e por todas as orientações e encaminhamentos dados.

Aos professores que fazem parte da banca de defesa, prof. **Méricles Thadeu Moretti**, prof. **Abraão Araújo** por terem aceito ao convite e fazerem parte da minha história desde o mestrado, quando participaram, também da banca de defesa deste. Meus sinceros agradecimentos pelas contribuições e encaminhamentos dados.

À profa. **Anna Paula Brito** por ter aceito o convite para participar da banca de defesa, pelo carinho e presteza a mim dedicados.

À **Luciana Santos**, pelas contribuições, carinho e atenção para comigo e por ter aceito ao convite para participar da banca de defesa. Meus sinceros agradecimentos.

À minha amiga **Larissa Santana**, pelos momentos compartilhados discutindo Duval, pela atenção e contribuições. Meus sinceros agradecimentos.

Aos meus maravilhosos amigos de turma, **Bruna, Ivoneide, Roseli, Thiago, Valéria, Zé Roberto, Tereza, Leandro e Ladjane** pelos laços construídos, pelas discussões, momentos compartilhados, pela alegria, pelo carinho.

Aos meus queridos colegas, alunos e professores, participantes do **grupo de pesquisa Fenômenos Didáticos** na classe de matemática, pelas contribuições e encaminhamentos.

RESUMO

Essa pesquisa se propõe a categorizar os graus de não congruência semântica na conversão entre os registros, geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais. Para tanto, tomamos como referência a pesquisa de Duval (2004) para propor uma classificação dos tipos de representações semióticas do registro de representação geométrico bidimensional dos números racionais, com base nas variáveis visuais - dimensionais e qualitativas das figuras geométricas. Também temos como marcos teóricos os estudos de Duval (1994, 2004, 2012b) para identificar os tipos de apreensões geométricas que são necessárias nas conversões entre esses registros e os critérios de congruência semântica, definidos em Duval (2004, 2009, 2011). A nossa pesquisa é composta de duas etapas, sendo a primeira compreendida de uma análise das características e tratamentos específicos a cada registro, e proposição do modelo prévio de categorização dos graus de não congruência semântica entre essas conversões, tendo como base o nosso referencial teórico. A segunda etapa corresponde ao estudo empírico, para validação do modelo, realizado com um total de 381 alunos, pertencentes ao 6° e 9° ano do Ensino Fundamental e 1° e 3° anos do Ensino Médio de cinco escolas da rede Estadual de Ensino de Alagoas, situadas no município de Maceió. A pesquisa empírica contou com a aplicação de um instrumento de pesquisa, contendo 12 itens em que era requisitada a conversão do registro geométrico bidimensional para o simbólico fracionário, além de uma entrevista clínico-crítica com alguns sujeitos participantes da pesquisa. Foram categorizados seis graus de não congruência semântica nas conversões que tinham como registro de partida o geométrico bidimensional e como registro de chegada o simbólico fracionário dos números racionais. Concluímos que o grau 1 de não congruência semântica envolve as figuras geométricas classificadas em nosso estudo como perceptuais com um inteiro, as quais necessitam apenas das apreensões, perceptual e discursiva, das suas unidades figurais e se adaptam bem ao procedimento da dupla contagem. O grau 2 de não congruência semântica envolve as figuras perceptuais com mais de um inteiro, e também, como no nível anterior, necessitam apenas das apreensões, perceptual e discursiva, das suas unidades figurais; entretanto, apresentam algumas unidades figurais que não se correspondem semanticamente com as unidades simbólicas, deixando essas conversões com um nível de dificuldade maior do que o anterior. O grau 3 de não congruência semântica comporta as figuras classificadas como operatórias por inclusão das partes. Nesse nível, é possível realizar um tratamento figural para se obter, na conversão para o registro simbólico fracionário, uma fração irredutível. No grau 4 de não congruência semântica, as figuras geométricas são as operatórias por divisão. É a partir desse nível que os tratamentos figurais são indispensáveis para que seja realizada a conversão, ou seja, além das apreensões, perceptual e discursiva, é requerida a apreensão operatória. No grau 5 de não congruência semântica, as figuras geométricas são classificadas em operatórias por modificação das formas. Apesar de apresentarem partes ou subfiguras com áreas congruentes, as suas formas são heterogêneas, dificultando a visualização da congruência das áreas entre as partes. Finalmente, o grau 6 de não congruência semântica envolve figuras operatórias por modificação das áreas e das formas, as quais necessitam um tratamento figural de maior custo cognitivo.

Palavras-chave: Números racionais, registro geométrico bidimensional, registro simbólico fracionário, conversões, graus de não congruência semântica.

ABSTRACT

This research proposes to categorize the degrees of non-congruence semantics in the conversion between the registers, two-dimensional geometric and fractional symbolic of rational numbers. For this, we take as a reference the research of Duval (2004) to propose a classification of the types of semiotic representations of the register of two-dimensional geometric representation of rational numbers, based on the visual, dimensional and qualitative variables of the geometric figures. Also, we have as a theoretical mark the Durval’s studies (1994, 2004, 2012b) to identify the types of geometrical appreciations that are required in conversions between these records and the criterion of semantic congruence, defined in Duval (2004, 2009, 2011). Our research is composed of two stages, the first one comprised of an analysis of the characteristics and treatments specific to each register, and the proposition of the previous model of categorization of degrees of non-congruence semantic between these conversions, based on our theoretical reference. The second stage corresponds to the empirical study, for validation of the model, accomplished with a total of 381 students, belonging to the 6th and 9th year of Elementary School and 1st and 3rd years of High School of five schools of the State Education Network of Alagoas, located in the city of Maceió. The empirical research was carried out with the application of a research instrument, containing 12 items in which the conversion of the two-dimensional geometric register to the fractional symbolic was requested, as well as a clinical-critical interview with some individuals participating in the research. Six degrees of non-semantic congruence were categorized in conversions that had as a starting register the two-dimensional geometric and as arrival register the fractional symbolic of rational numbers. We conclude that the degree 1 of non-congruence semantics involves the geometric figures classified in our study as perceptual with an integer, which only require the perceptual and discursive apprehensions of its figurative units and are well adapted to the double counting procedure. The degree 2 of non-congruence semantics involves the perceptual figures with more than one integer and also, as in the previous level, only need the perceptual and discursive apprehensions of their figurative units; however, have some units that do not correspond semantically with the symbolic units, leaving these conversions with a higher level of difficulty than the previous one. The degree 3 of non-congruence semantics includes the figures classified as operative by inclusion of the parts. At this level it is possible to perform a figural treatment to obtain, in the conversion to the fractional symbolic register, an irreducible fraction. In grade 4 of non-congruence semantics, the geometric figures are the operative ones by division. It is since that level that the figurative treatments are indispensable for the conversion to take place, that is, in addition to the perceptual and discursive apprehensions, the operative apprehension is required. In degree 5 of non-congruence semantics, the geometric figures are classified into operative by deconstruction of the parts. Although they have parts or subfigures with congruent areas, their forms are heterogeneous, making it difficult to see the congruence of the areas between the parts. Finally, degree 6 of non-congruence semantics involves operative figures by deconstruction of areas and forms, which require a figural treatment of higher cognitive cost.

Keywords: Rational numbers, two-dimensional geometric register, fractional symbolic register, conversions, degrees of non-congruence semantic.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

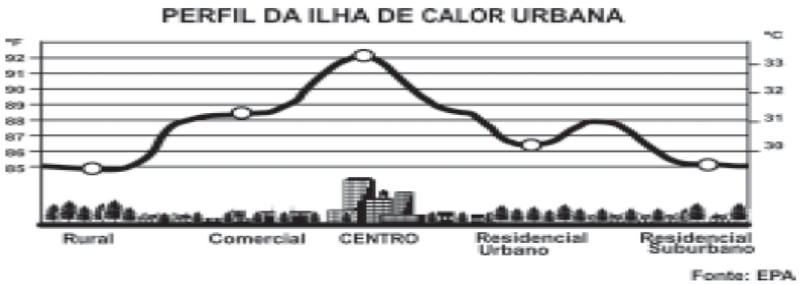
INTRODUÇÃO

Na minha dissertação de mestrado analisei itens do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM que contemplavam o conceito de números racionais, assim como os tratamentos e as conversões que podiam ser realizadas durante a resolução deles. Pude verificar, a partir desse estudo, que a forma como os dados estão dispostos na estrutura dos itens (enunciado, suporte e distratores), bem como, os registros de representação semióticos presentes, podem influenciar, no sentido de deixar evidente a estratégia de resolução a ser empregada, havendo assim uma continuidade semântica entre a organização redacional e a expressão a ser constituída na resolução, ou, ainda, dificultar essa conversão entre registros semióticos, por não apresentar uma continuidade ao *pensamento natural.*

Como exemplo da influência da congruência semântica na resolução de itens do ENEM, na figura 1, apresentamos um item referente à edição 2011 (SILVA, 2013, p. 112).

Figura 1 - Questão 159 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011.

Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{3}{5}$

E) $\frac{3}{4}$

Fonte: BRASIL (2011, p. 26).

De acordo com Silva (2013), o item apresenta um enunciado, “*Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, [...]. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico”,* que traz dados necessários à resolução do item, no registro da língua natural e numérico, “... se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano” e “... inferiores a 31°C.” Seguido por um suporte, que nesse caso é um gráfico, em que são apresentados os picos de temperatura das cinco regiões. Em seguida vem o comando “*Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões [...] às recomendações médicas é”* e as alternativas de respostas, que estão no registro simbólico fracionário.

Segundo Silva (idem), a ideia de número racional envolvida é a de probabilidade. O comando requer a escolha, aleatória, de *uma das outras regiões para morar,* que nesse caso é a razão que relaciona o número de regiões que apresentam um ‘pico inferior a 31°C’ (3) com o número de “outras regiões para morar” (4). Os dados estão dispostos no enunciado (rural, Comercial, Residencial urbano e Residencial suburbano; e, ilhas de calor inferiores a 31°C) e no gráfico que apresenta as temperaturas das cinco regiões.

No entanto, a expressão “*Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar”* possui congruência semântica com a razão, em que ‘1’ equivale ao termo ‘uma’ e ‘4’ à expressão ‘outras regiões para morar’. Entretanto, essa razão não é referencialmente equivalente à expressão acima citada, como podemos ver no parágrafo anterior.

Além disso, o sujeito que não se ater ao comando de escolher ‘*aleatoriamente, uma das outras regiões’*, e, ainda, fizer uma leitura direta do gráfico (que apresenta cinco regiões), poderá incluir na quantidade de regiões que representa o denominador da fração, o centro, ficando, assim, com um total de 5 (cinco) regiões ao invés de 4 (quatro). Esses dois fatores, quer seja, a congruência semântica com uma razão que não é referencialmente equivalente à expressão dada e uma leitura do gráfico, sem relacioná-lo ao comando, podem contribuir para uma diminuição no índice de acertos do item (SILVA, 2013).

Por outro lado, investigando estudos realizados no campo dos números racionais, pude constatar uma escassez de trabalhos que abordam a influência da congruência semântica envolvendo números racionais. Segundo Duval (2012b), substituir uma expressão, um enunciado, por uma expressão matemática -

referencialmente equivalente - pode se constituir em “um salto entre duas redes semânticas, a tal ponto que os próprios indivíduos não se dão conta e, mesmo quando indicada, lhes parece arbitrária” (DUVAL, 2012a, p.100).

Duval (idem) considera que

> Duas expressões podem ser sinônimas ou referencialmente equivalentes (elas podem “querer dizer a mesma coisa”, elas podem ser verdadeiras ou falsas ao mesmo tempo) e não serem semanticamente congruentes: neste caso, há um custo cognitivo importante para a compreensão. (DUVAL, 2012a, p. 100).

Portanto, as conversões não congruentes devem ser privilegiadas na aprendizagem em matemática para promover o desenvolvimento cognitivo do indivíduo (DUVAL, 2012a). Sendo assim, entendemos que as conversões, não congruentes, entre os registros de representação dos números racionais oferecem diferentes dificuldades cognitivas, e portanto, podem apresentar graus de não congruência semântica.

As conversões provocam uma mudança de registro de representação que não se prende apenas ao conteúdo da representação, mas às operações semióticas que irão transformar o conteúdo dessa representação.

Também (as conversões), não se reduzem apenas ao conhecimento dos códigos necessários a uma transformação entre registros, elas exigem uma

> ...necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. Pois são essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinente, que devem ser levadas em consideração, em cada um dos dois registros (DUVAL, 2003, p. 17).

Desse modo, elas possibilitam ao aluno estabelecer relações e analisar aspectos diferentes de um mesmo objeto.

Entretanto, a conversão é uma operação que não é cognitivamente reversível. Um sujeito que converte um registro de representação em outro não converterá, necessariamente no sentido inverso, pois

> A conversão direta e a conversão inversa são duas tarefas cognitivas tão diferentes quanto subir ou descer um caminho íngreme na montanha. Em outras palavras, para que haja coordenação sinérgica de vários registros, é preciso ser capaz de converter as representações nos dois sentidos e não em um único (DUVAL, 2011, p.118).

Do ponto de vista cognitivo as *conversões* são as atividades "*menos espontâneas e mais difíceis de adquirir para a grande maioria dos alunos*" (DUVAL, 2009, p. 63), pois exigem uma coordenação entre os sistemas semióticos, ou mais precisamente, entre as unidades de sentido de cada registro. Quanto mais evidente a relação entre essas unidades pertencentes a cada registro, mais próxima será a conversão de uma "codificação"; por outro lado, quanto menos uma transparecer na outra maior será a atividade cognitiva para essa transformação.

As transformações sejam elas tratamentos ou conversões ocorrem em matemática principalmente por substituição e não por adjunção ou acumulação, pois,

> A cada passo do desenvolvimento do raciocínio, do cálculo ou de um procedimento de resolução, a nova expressão não vem complementar ou enriquecer as expressões anteriores e os dados iniciais, como em um texto descritivo [...]. Essa nova expressão vem, ao contrário, substituir a expressão do passo anterior, em virtude das definições, dos teoremas e das tabelas de operações e de tantas regras de substituição, para que o pensamento progrida a partir dos dados iniciais. (DUVAL, 2012a, p.112)

A substituição funciona por meio de associações realizadas internamente, no indivíduo, dando sentido e continuidade ao pensamento matemático desenvolvido. Essa substutividade é essencial em qualquer mudança de registro para que haja equivalência referencial. Entretanto, Duval (idem) afirma que, geralmente, essa atividade rompe com o pensamento natural do indivíduo promovendo uma estranheza ou o não reconhecimento do objeto matemático em outro registro.

Esse fato acontece, segundo o autor, porque a substituição depende da *congruência* ou *não congruência semântica* das expressões que irão ser substituídas. Ou seja, do quanto, para o sujeito, uma expressão irá transparecer na outra, sendo referencialmente verdadeiras ou falsas. Duas expressões podem ser semanticamente congruentes sem serem referencialmente equivalentes, e, ainda, podem ser referencialmente equivalentes e não serem semanticamente congruentes. Nesses casos, afirma Duval (2012a), o custo cognitivo será maior.

Temos particular interesse nas conversões entre figuras geométricas que representam quantidades contínuas dos números racionais e pertencem ao registro de representações semióticas que denominaremos 'geométrico bidimensional', e as representações do tipo a/b, com b≠0, pertencentes ao registro que chamaremos de 'simbólico fracionário', dos números racionais. O registro geométrico bidimensional dos números racionais é usado prioritariamente na escola para trabalhar o significado parte-todo ((SANTOS, 2005); (CAMPOS; MAGINA; NUNES, 2006); (DAMICO, 2007); (TEIXEIRA, 2008); (SANTOS, 2010), (COSTA, 2011)), fundamental para a construção dos demais significados dos números racionais e, consequente, desenvolvimento conceitual (BEHR et al, 1983); além de ser gerador de linguagem, nesse campo numérico (KIEREN, 1981). As conversões realizadas entre esses dois registros sofrem influências dos tipos de interpretações, denominadas por Duval (1994, 2004) de 'apreensões geométricas', que os elementos básicos constituintes das figuras geométricas, ou 'unidades figurais' demandam, para serem visualizadas.

Damico (2007) afirma que a representação semiótica do número racional, com o significado parte-todo, precisa ser compreendida pelo sujeito de tal forma a indicar os elementos que representam o todo, os elementos que representam as partes e como esses se relacionam. O autor afirma que duas são as formas predominantes da representação semiótica do significado parte-todo dos números racionais, a simbólica fracionária, a/b, pois diferem dos outros números que os sujeitos se deparam; e a geométrica, 'regiões', na maioria das vezes, representadas em retângulos ou círculos, que necessitam da compreensão de medidas para o reconhecimento das partes do todo representadas por figuras geométricas congruentes, ou particionamento do 'todo' em figuras com áreas congruentes. Além disso é necessário identificar o 'todo'. Portanto, sendo então necessárias diferentes estruturas cognitivas para identificar a relação entre "a área correspondente à parte hachurada e a área total da figura" (DAMICO, 2007 p. 69).

Behr, Post (1981) ao trabalharem com distratores[1] visual-perceptuais em atividades com lápis e papel, entre sujeitos de 4ª série do Ensino Fundamental, envolvendo conversões entre registros de representações semióticas dos números racionais, tendo como registro de partida, o geométrico bidimensional (denominado na pesquisa por quantidades contínuas), ou o figural (quantidades discretas), ou o

[1] São informações visuais-perceptuais inconsistentes com a solução buscada

geométrico unidimensional (as retas numéricas); e como registro de chegada, o simbólico fracionário; observaram que os sujeitos apresentam níveis diferentes de capacidades para ignorar os distratores e lidar com as tarefas em nível lógico-matemático. Os distratores foram classificados em ‘consistentes com a tarefa’, ‘irrelevantes’ e ‘inconsistentes com a tarefa’. No caso do registro geométrico bidimensional, as figuras geométricas ‘consistentes’ possuíam o particionamento, explícito, necessário para a conversão no registro simbólico fracionário; as ‘irrelevantes’, necessitavam que o sujeito ignorasse algumas divisões do particionamento explícito para a conversão; e as representações ‘inconsistentes’, que o sujeito desprezasse todo o particionamento explícito da figura geométrica. E apontam como um dos fatores importantes na compreensão do conceito de número racional, a capacidade do sujeito de resolver os conflitos entre o processamento perceptual das informações visuais e o cognitivo das relações lógico-matemáticas.

Corroboramos com as ideias dos autores no sentido de entender que as informações visual-perceptuais podem favorecer ou dificultar as transformações entre o registro geométrico bidimensional e o simbólico fracionário dos números racionais. Pois, nelas estão presentes os elementos característicos básicos ou ‘unidades de sentido figurais’ (DUVAL, 2011) do registro de partida necessários à conversão, podendo se fazerem totalmente explícitos, e então a conversão se assemelharia a uma ‘codificação’, ou pelo contrário, necessitarem serem encontrados, o que demandaria ir além dos elementos perceptivos e operar heuristicamente a representação.

A nossa hipótese é que quanto menos ‘transparecem’ os elementos figurais que estabelecem a relação parte-todo na representação geométrica a ser convertida para o registro simbólico fracionário mais elementos figurais deverão ser ‘descobertos’ ou colocados de forma ‘explícita’, o que levará a diferentes graus de não congruência semântica na conversão entre esses registros. A pesquisa de Campos et al (1995) é um exemplo da relevância desse pressuposto. Foram aplicados nesse estudo, para alunos de 5ª série, três tipos de itens que envolviam conversão do registro geométrico bidimensional dos números racionais para o simbólico fracionário. O primeiro tipo envolvia um ‘todo’ particionado em partes contíguas iguais. Uma representação geométrica típica para a aplicação do procedimento da ‘dupla contagem’, em que o sujeito conta o número de partes pintadas e o número de partes que foi particionado o todo para a conversão no registro simbólico fracionário. O segundo tipo envolvia uma representação a qual também poderia ser utilizado o mesmo procedimento, entretanto as partes pintadas não eram contíguas. O terceiro tipo, não era típico, pois o ‘todo’ não estava explicitamente particionado em partes de áreas iguais, portanto o número total de partes deveria ser descoberto por meio da relação parte-todo, sendo necessário para isso um tratamento de reconfiguração explícita ou não da representação no registro geométrico para a posterior conversão no registro simbólico fracionário.

Os resultados revelaram que o índice de acertos foram igualmente bons e próximos do máximo para os itens 1 e 2, em que as representações estavam particionadas em partes ou subfiguras de áreas congruentes e formas homogêneas[2], entretanto, o item 3 se revelou mais difícil, tendo sido frequente a aplicação da dupla contagem ignorando a não conservação da área das partes. Nesse tipo de erro predominou a congruência semântica entre a apreensão perceptiva das partes e o procedimento da dupla contagem, sem manter a equivalência com referência a relação parte-todo. Duval (2012a) afirma que “a equivalência referencial destaca-se da congruência semântica e, no entanto, o funcionamento espontâneo do pensamento segue prioritariamente a congruência semântica” (idem p. 101). Segundo Duval (idem) as conversões semanticamente não congruentes apresentam graus de não congruência semântica que representam uma importante variação de custo cognitivo.

Os itens do tipo 2 e 3 foram replicados nas pesquisas de Moutinho (2005) com alunos de 4ª e 8ª séries, atuais 5° e 9° anos; Merlini (2005) com alunos de 5ª e 6ª séries, atuais 6° e 9° anos; Silva (2007), com professores do Ensino Fundamental I; e Campos e Magina (2008) com alunos da 3ª e 4ª séries, atuais, 4° e 5° anos. Os resultados de todas essas pesquisas se revelaram próximos aos de Campos et al (1995), apesar dos diferentes níveis escolares dos sujeitos envolvidos.

Esses resultados nos fazem inferir que os itens possuem graus diferentes de não congruência semântica. Os itens 1 e 2, necessitavam apenas da percepção dos elementos figurais, explícitos, para a correspondência com os elementos simbólicos no registro fracionário, no procedimento da ‘dupla contagem’. Número de partes pintadas da figura se relacionando com o numerador; número de partes que o todo foi

[2] Mesma forma geométrica

particionado em correspondência com o denominador da fração a ser obtida. O item 3 diferente dos outros dois itens, necessitava de um ‘outro olhar’ que permitisse uma reconfiguração, explícita ou não, do todo para ser descoberto o número total de partes e, consequente, relação parte-todo. Duval (2004) afirma que o registro geométrico possui tratamentos próprios a ele, que parecem proceder de leis de organização da percepção visual, o que pode tornar uma falsa proximidade entre o tratamento que é requerido nesse registro e aquele que a atividade matemática de fato requer. Dependendo do tratamento a receber, a representação geométrica poderá ‘transparecer’, inicialmente, ou não a solução a ser buscada. Nesse caso, no item 3, existiam alguns elementos figurais implícitos necessários para a correspondência com os elementos simbólicos do registro fracionário.

Várias são as pesquisas que abordam o significado parte-todo e as conversões entre o registro geométrico bidimensional dos números racionais e o registro fracionário ((POST; BEHR; LESH, 1982); (LESH; BEHR; POST, 1987), (CAMPOS et al, 1995); (MERLINI, 2005); (MOUTINHO, 2005); (SILVA, 2007); (CAMPOS; MAGINA, 2008); (SANTOS, 2010)). Entretanto, não encontramos na literatura (SILVA, 2016) pesquisas que tenham realizado uma análise dos graus de não congruência semântica nessas conversões. Ou seja, que estejam voltadas para as características e os tratamentos intrínsecos aos respectivos registros e que necessitam serem considerados no momento da conversão. Bem como, de uma classificação das representações semióticas do registro geométrico bidimensional quanto as suas características e tipos de tratamentos requeridos para a conversão.

1.1 PROPOSIÇÃO DA TESE E OBJETIVOS GERAL E ESPECÍFICOS DA PESQUISA

Temos como pressuposto geral a ideia de que a aprendizagem dos números racionais constitui-se ainda em um desafio a ser enfrentado pela escola, e a nossa hipótese é que a noção de congruência semântica, introduzida por Raymond Duval, pode contribuir para a compreensão de algumas dificuldades enfrentadas pelos estudantes envolvendo esse campo numérico.

Duval (2003, 2011) afirma que os objetos matemáticos não são acessíveis ou observáveis diretamente, necessitando de registros de representação semióticos que os designe. Esse autor considera que a originalidade da atividade matemática está em mobilizar, simultaneamente, ao menos dois registros de representação semiótica ou favorecer a possibilidade de mudar de registro a qualquer momento. Para tal, é necessário que o sujeito articule as variáveis cognitivas que são específicas de cada registro de representação, pois são elas que permitem determinar as unidades de sentido, que são os elementos básicos que constituem as representações semióticas, dotados de um sentido; as quais devem ser consideradas, no momento da transformação, em cada um dos registros semióticos.

As transformações podem ocorrer no interior de um mesmo registro semiótico, denominadas 'tratamento', ou entre diferentes registros semióticos, chamadas de "conversões". São as atividades de conversões que conduzem aos mecanismos subjacentes à compreensão de um objeto matemático. A natureza cognitiva, relativa a uma atividade de conversão, aparece nos fenômenos da congruência e não congruência semântica[3] entre os registros e na heterogeneidade dos dois sentidos de conversão, requeridos em qualquer operação que envolve transformação por conversão (DUVAL, 2003, 2011).

Quanto menos transparecer uma representação do registro de partida, naquela do registro de chegada, maior será a não congruência semântica e, consequentemente, as dificuldades que os sujeitos irão enfrentar para realizar a conversão. De acordo com Duval (2012a) os fenômenos de não congruência semântica podem ser uma das repostas para os fracassos apresentados pela maioria dos sujeitos envolvendo atividades de natureza matemática. A nossa tese é que as conversões entre registros de representação dos números racionais, semanticamente não congruentes, podem ser categorizadas em graus de não congruência semântica, tendo como base a natureza desses registros de representação e as variáveis cognitivas pertinentes a cada registro.

Duval (2011) aponta três critérios que indicam se duas expressões são semanticamente congruentes: 1) correspondência semântica das unidades de sentido próprias de cada registro; 2) univocidade semântica terminal, indicando que a correspondência entre as unidades de sentido é única e 3) mesma ordem das unidades de sentido no registro de partida (registro inicial) e no de chegada. Para que

[3] Congruência e não congruência semântica, de acordo com Duval (2011) é o quanto uma representação contida no registro de partida transparece ou não na representação do registro de chegada, no momento da conversão. Esse conceito será melhor apresentado no capítulo 1.

as expressões sejam semanticamente congruentes esses três critérios devem ser satisfeitos. Na não ocorrência de ao menos um deles, as expressões são ditas não congruentes.

Haverá diferentes graus de não congruência semântica, mantendo-se a equivalência referencial[4], dependendo dos critérios que não foram satisfeitos, determinando, de acordo com Duval (idem), graus de não congruência semântica entre dois registros de representação semiótica. Sendo assim, quais são os graus de não congruência semântica que podemos identificar nas conversões entre os registros de representações semiótica, geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais?

Dessa forma, na tentativa de proporcionar uma compreensão das dificuldades encontradas pelos sujeitos em atividades de matemática envolvendo conversões entre os registros de representações semiótica, geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais, sob o enfoque da congruência semântica, nossa pesquisa teve como **objetivo geral**:

- Propor uma categorização para os graus de não congruência semântica entre as conversões tendo como registro de partida o geométrico bidimensional e como registro de chegada o simbólico fracionário dos números racionais.
- E como **objetivos específicos**:
    - Identificar e caracterizar os tipos de representações do registro geométrico bidimensional dos números racionais
    - Propor uma Classificação, quanto à conversão, dos tipos de representações dos números racionais pertencentes ao registro geométrico bidimensional;
    - Discriminar, para cada tipo de representação dos números racionais no registro geométrico bidimensional, as unidades figurais necessárias para a conversão no registro simbólico fracionário;
    - Caracterizar os casos de não congruência semântica na conversão das representações entre os registros geométrico bidimensional e simbólico fracionário;

[4] Em nossa pesquisa trataremos a congruência ou não congruência semântica sempre relacionada à equivalência referencial.

- Identificar os tipos de apreensões geométricas necessárias para a conversão que tem como registro de partida, o geométrico bidimensional, e como registro de chegada, o simbólico fracionário;
- Classificar em graus de não congruência semântica as conversões entre os registros de representação semiótica dos números racionais, geométrico bidimensional e simbólico fracionário.

Esta pesquisa está estruturada tendo na introdução, justificativa do tema, hipótese, objetivos geral e específicos da pesquisa. O primeiro capítulo, “Dos signos aos registros de representações semióticas”, discorremos sobre as relações entre sujeito, objeto e representações em três etapas do desenvolvimento do conhecimento matemático, tendo como base Duval (1998); até a Teoria dos Registros de representações semióticas, de Raymond Duval.

No segundo capítulo desenvolvemos uma análise das tendências de pesquisas em periódicos da área de educação matemática no campo dos números racionais, incluindo as tendências de pesquisas categorizadas como formação de conceitos dos números racionais.

No terceiro capítulo trazemos uma discussão sobre, os registros de representações dos números racionais, simbólico fracionário e geométrico bidimensional; as características e significados relacionados ao registro simbólico fracionário, além dos tratamentos inerentes a esse registro. Bem como, a classificação das representações do registro geométrico bidimensional, quanto à conversão; suas características e tipos de tratamentos requeridos; além da discussão de resultados de pesquisas que envolveram conversões, entre o registro geométrico bidimensional e o simbólico fracionário.

No quarto capítulo discutimos a classificação teórica quanto aos graus de não congruência semântica entre as conversões que têm como registro de partida o geométrico bidimensional e como registro de chegada o simbólico fracionário, tendo como pressupostos teóricos a classificação dos tipos de representações geométricas bidimensionais, quanto à conversão; os critérios de congruência semântica e os tipos de tratamentos ou apreensões geométricas, requeridos na representação geométrica para a conversão no registro geométrico fracionário.

O quinto capítulo disserta sobre o percurso metodológico da pesquisa empírica realizada com alunos da Educação Básica de cinco escolas públicas do estado de Alagoas, desenvolvida com base na classificação das representações geométricas bidimensionais dos números racionais propostas no quarto capítulo e na categorização preliminar dos graus de não congruência semântica entre os registros de reprepresentações semióticas bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais

O sexto capítulo analisa os dados da pesquisa empírica referentes a proposta de classificação dos graus 1, 2 e 3 de não congruência semântica. Enquanto que o sétimo capítulo discorre sobre os dados referentes aos graus 4, 5 e 6 de não congruência semântica nas conversões entre os registros de reprepresentações semióticas bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais.

Para concluir, as considerações finais, retomaram os objetivos da pesquisa, relacionados a tese a qual defendemos, ampliando a discussão do que já foi analisado; além de trazer as contribuições da pesquisa para o ensino e aprendizagem dos números racionais na escola.

CAPÍTULO 1. DOS SIGNOS AOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

No renascimento, conhecer, na cultura ocidental, significava adivinhar, os conhecimentos distribuídos por Deus no mundo; e os signos naturais eram os representantes desse conhecimento, bastando que eles fossem descobertos, revelados, por meio da interpretação das similitudes e afinidades entre eles. Os signos “eram a linguagem mesma das coisas que os instaurava na sua função significante” (FOUCAULT, 2000 p.80).

A teoria dos signos considerava o sistema triádico composto, pelo que era assemelhado, o semelhante e a semelhança entre eles, ou seja, o que “permitia ver nisto a marca daquilo” (Ib id, pág. 87), mas o semelhante é tanto forma como conteúdo do conhecimento, se configurando numa única figura. Portanto o signo não representa, não remete o objeto representado. Por meio dele você conhece o objeto, tal qual o é, pois se caracteriza como sendo “quase a mesma coisa que o assemelhava”, sem deixar ocultar-lhe qualquer elemento que o compõe.

Entretanto Bacon, segundo Foucault (2000), faz uma crítica ao paradigma da semelhança, por entender que o sujeito é ilusoriamente levado a ver mais regularidade e semelhança entre as coisas, do que realmente elas as possuem. Sendo assim,

> o saber do século XVI deixa a lembrança deformada de um conhecimento misturado e sem regra, onde todas as coisas do mundo se podiam aproximar ao acaso das experiências, das tradições ou das credulidades” (FOUCAULT, 2000 p. 69).

Mas é no início do século XVII, com o racionalismo, que os processos do pensamento deixam de se desenvolverem por similaridades, segundo Foucault (IDEM) é instaurada a ciência da ordem e da medida em que a natureza passa a fazer parte da ordem científica, as semelhanças começam a ser analisadas por relações de identidade e de diferença e essas comparações se fazem, conforme o racionalismo, pela ordem do pensamento, indo do mais simples ao mais complexo.

1.1 SIGNOS COMO REPRESENTAÇÕES DOS OBJETOS

Com a Lógica de Port-Royal, os signos passam a ser tratados como representações dos objetos e são analisados como produzindo a ideia do objeto que representa (significante), ou seja, a representação mental que o sujeito elabora a partir das características áudio ou visuais do signo; e a ideia do objeto representado, que seria o significado do objeto, construído pelo sujeito a partir das representações mentais da ideia do significante, portanto, sendo também uma representação mental. (NOTH, W. 2005). Os signos só são considerados representações do objeto quando imersos nessas relações entre as ideias de significante e significado, isto é, quando ele é dado a conhecer. Se constituindo assim, num ato de conhecimento, no período clássico.

A partir desse período a relação existente entre representação semiótica[5], que aparece como uma fusão da noção de signo e de representação; e objeto, se torna central para a análise do desenvolvimento matemático e científico. As representações, bem como, os métodos utilizados para analisar as relações entre as representações dos objetos representados vão se transformando à medida que os sistemas semióticos vão sendo criados e desenvolvidos, revelando a característica ‘semiótica’ das representações, conforme afirma Duval (1998).

Duval (Ibid) distingue três períodos em que as relações entre representações e objeto representado se apresentaram de formas distintas. O pesquisador teve como referência obras que marcaram fases importantes do desenvolvimento do conhecimento como os Regulae de Descartes, em 1628, as demonstrações dos teoremas da incompletude de Godel, em 1931, e a decomposição por Turing, em 1936, dos processos lógicos em procedimentos que poderiam ser executados por uma máquina.

O primeiro período é discriminado por Raymond Duval, como aquele compreendido entre Descartes e Kant. Nele, há uma estreita ligação entre as representações mentais do sujeito e o objeto representado e a relação entre representação e objeto é de causalidade.

---

[5] São representações de objetos produzidas em sistemas semióticos, como a língua materna e os sistemas numéricos.

O segundo período é marcado pela ruptura da relação entre sujeito e objeto. Corresponde ao período entre as obras de Bolzano, em 1837 e Hilbert, em 1904. As representações semióticas são consideradas independentes das representações mentais e a relação entre objeto e representação é de referência.

O terceiro período compreendido entre as pesquisas de Hilbert, em 1922 e Turing e Van Neumann, é caracterizado pela primazia da organização dos signos sobre os conteúdos do conhecimento. Os sistemas semióticos são vistos como sistemas de produção de informações ou de sentidos e a relação entre representação e objeto é de interpretação (DUVAL, 1998).

1.2 AS REPRESENTAÇÕES MENTAIS

Sendo o conhecimento inseparável de uma atividade de representação, então quais são as condições de validade do conhecimento? Como garantir que as representações mentais são verdadeiramente as representações do objeto dado a conhecer? A Terceira das Meditações Metafísicas de Descartes é, segundo Duval (1998) o primeiro texto em que são analisadas as condições da ‘prova de existência dos objetos’, os quais os sujeitos detém as suas representações.

Para Descartes (2004) o conteúdo das representações deve ser analisado em relação a dois aspectos, qual sejam, o objeto representado e o sujeito que o representa. Quanto ao objeto representado, definir se há uma correspondência entre ele e o conteúdo da representação. E quanto ao sujeito, identificar se ele pode, ou não, estar na origem dessas representações. Se o conteúdo das representações do sujeito corresponde ao objeto e o sujeito não é a origem dessas representações, então existe um objeto real que corresponde as representações do sujeito, e essa análise se constitui na “prova de existência” do objeto representado pelo sujeito. O princípio utilizado para essa justificativa é o da causalidade, que concerne em determinar se o sujeito é ou não a causa do conteúdo de suas representações:

> [...] se a realidade objetiva de alguma de minhas ideias for tanta que eu fique certo de que ela não está em mim, nem formal, nem eminentemente e que, por conseguinte, não posso, ser eu mesmo, sua causa, disto se seguirá necessariamente que não estou só no mundo, mas que alguma outra coisa, que é causa dessa idéia, também existe. (DESCARTES, 2004 p. 85).

Os critérios utilizados para a 'verdade do conhecimento', portanto para assegurar que o conteúdo das representações corresponde ao objeto representado, são a certeza e a evidência (DUVAL, 1998). De acordo com Foucault (2000, p.76), com o racionalismo, 'A verdade encontra sua manifestação e seu signo na percepção evidente e distinta'. Entretanto, como afirma Duval (idem) O princípio de causalidade começa a ser questionado por Kant, quando em carta escrita para Marcus Herz, em 1772, analisa o fundamento sobre o qual se apoia a relação entre representação e objeto representado:

> Se a representação apenas compreendesse o modo no qual o sujeito (Subect) é afetado (afficirt) pelo objeto, seria fácil entender como aquela seria conforme este, como o efeito a sua causa[...] Se aquilo que nós chamamos representação fosse ativo em relação ao objeto, quer dizer, se por ela fosse produzido (hervorgebracht) o objeto, como nós representamos o conhecimento divino em tanto arquétipo de coisas, então a conformidade desta com os objetos também poderia ser compreendida. [...] Mas nosso entendimento com suas representações não é causa do objeto ...., o objeto não é tão pouco a causa das representações do entendimento [...] como é possível uma representação que se refere a um objeto sem que ela seja afetada de modo algum por ele(Kant, 2012 p. 167).

Para Kant, o princípio da causalidade não é suficiente para analisar a relação entre as representações e o objeto quando essas representações são aquelas dos *conceitos puros do entendimento,* que não advém de uma representação passiva de um objeto a partir das impressões dos sentidos ou de uma relação ativa da representação que remete ao objeto, pois em ambas o indivíduo faz uma associação com o mundo sensível, ou seja, que provém da experiência.

As representações dos conceitos *puros do entendimento* são oriundas da *natureza da alma*, portanto não são causadas por um objeto ou são as causas do objeto, mas são representações de um objeto. Dessa forma não existiriam parâmetros para analisar a relação de conformidade entre as representações e o objeto representado. Então, Kant propõe analisar as condições que permitem o acesso aos objetos por meio do conteúdo das representações, como também identificar quais seriam as estruturas internas do sujeito que são capazes de produzir representações e que sejam cientificamente aceitáveis. Essa análise é desenvolvida na Crítica da razão pura e pode ser considerada como um primeiro esboço de uma abordagem cognitiva e epistemológica de aquisição do conhecimento (DUVAL, 1998).

Na Crítica da razão pura, Kant define dois tipos de estruturas do sujeito, espaço e tempo, que são estruturas “a priori”, se caracterizam por serem as “formas puras da intuição sensível”, ou seja, formam o sistema intuitivo, e de onde partem as representações a priori; e as estruturas categóricas, que são relativas aos julgamentos, formando os sistemas conceituais. São esses dois tipos de estruturas que controlam as possibilidades do conhecimento científico, ou seja, é quando existe uma coordenação entre essas estruturas que se tem um objeto do conhecimento. (DUVAL, 1998)

Para Kant, os conhecimentos matemáticos seriam construídos por meio das formas puras a priori,

> São, pois, tempo e espaço duas fontes de conhecimentos, de que podem derivar-se “a priori” diferentes conhecimentos sintéticos, como mostra o exemplo das matemáticas puras, respeito ao conhecimento do espaço e de suas relações. (Kant, Crítica da razão pura, p. 23).

Sendo o caso da Geometria. Mas essa premissa de Kant que subordina os conhecimentos matemáticos a representações a priori de espaço e tempo limita cognitivamente os fundamentos desse conhecimento, levando à exclusão de domínios da matemática como o da análise e da álgebra que nesse período já estava em pleno andamento (DUVAL, 1998)

1.3 INDEPENDÊNCIA DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS FRENTE AS REPRESENTAÇÕES MENTAIS

Para DUVAL (1998) durante o período do desenvolvimento da lógica matemática e de uma reflexão sobre os fundamentos matemáticos e suas demonstrações, ocorre uma ruptura entre as representações, o sujeito e o objeto, separando as representações mentais do sujeito das representações semióticas.

Segundo Clímaco e Otte (2013), entre 1780 e 1800 começaram a ser publicados estudos voltados para a análise da natureza do cálculo, mas nesse mesmo período as soluções para problemas que envolviam os fundamentos da matemática, tendo como base a intuição e demonstrações geométricas, foram se tornando insustentáveis, pois eram encontrados resultados ‘contraditórios’ e ‘pouco férteis’ e os matemáticos começaram a sentir a necessidade de, a partir de Lagrange (1736-1813), excluir das suas demonstrações os conceitos de espaço e tempo e o uso de propriedades geométricas. E, no geral, “no século XIX, ocorre uma mudança qualitativa, que muda a ênfase do sujeito para o social, do particular e do empírico para o geral, da intuição para a comunicação e o conceitual” (CLÍMACO E OTTE, 2013 p. 8).

Sentindo a necessidade de uma reorganização da matemática, Bolzano, que se opõe a Kant quanto às problemáticas entre geral e particular conceito e intuição, traz em sua obra, ‘Doutrina da Ciência, questões referentes à natureza do conhecimento e às verdades científicas. Para ele, a matemática é uma ciência caracterizada por um sistema de proposições que são compostas de sentido e verdade; e esta “não depende das leis de funcionamento do pensamento humano, mas da ciência, a qual só pode estar por demonstração, isto é lógica” (Sébestik, 1992 p.27,293 apud Duval,1998, p.149). Como afirma Clímaco (2007),

> Para Bolzano, conhecimento, ciência e teoria são realidades, e não apenas processos mentais ou julgamentos que nós, sujeitos cognoscentes, fazemos sobre as coisas. E por isso a semântica – ou em outras palavras – a teoria do conteúdo ou significado dos elementos do conhecimento (conceitos, proposições, dentre outros) seria mais importante do que o questionamento sobre como os seres humanos pensam e chegam ao conhecimento (CLÍMACO, 2007 p. 67).

Bolzano considerava que não existiam intuições puras, no sentido de Kant, e que os julgamentos sintéticos se originam dos conceitos de que são compostos e de outras verdades, sendo as proposições matemáticas totalmente fundamentadas em verdades conceituais (CLÍMACO, 2007).

A Teoria da Ciência de Bolzano define um conceito como sendo aquele que denota ou que representa um objeto, se houver um objeto em questão; se esse não existir, o conceito é vazio. A existência do objeto é assegurada por meio da análise das proposições que compõem o conceito, a qual enuncia a sua objectualidade (SÉBESTIK, 1992 apud DUVAL 1998). Para isso, Duval (1998) afirma que Bolzano introduz a noção de ‘proposição em si’, com base nas definições de ‘julgamento’ e ‘enunciado’. O julgamento é o processo mental do sujeito e o enunciado é a expressão linguística que pode ser verdadeira ou falsa. A ‘proposição em si’ é de uma certa forma o sentido do modo real de existência do enunciado, que pode ser alcançado ou totalmente ignorado. Esses são os três objetos que fazem parte de um conceito e que se relacionam entre si. Sendo que o julgamento e o enunciado se configuram num modo real de existência que utilizam mecanismos subjetivos do funcionamento do pensamento; e as proposições em si, como modo de simples subsistência, são as conexões objetivas que consideram apenas fenômenos de verdade e sentido.

De acordo com Duval (1998), considerando as partes objetiva e subjetiva de um conceito, Bolzano separa as ‘representações em si’ que são as relativas as ‘proposições em si’, portanto, objetivas; das ‘representações mentais’ ou subjetivas, que são aquelas ‘existentes na mente de um sujeito’. Então, utiliza o método das variações que ele havia usado para definir funções, para analisar as ‘representações em si’ e as proposições. Esse método consiste em substituir as variáveis de uma ‘representação em si’ ou uma proposição para analisar o valor de verdade das proposições obtidas a partir da proposição inicial. Mas essas substituições devem seguir os critérios de restrições semânticas da língua para não se tornarem proposições ou representações vazias, ou seja, sem objeto. Podendo ocorrerem representações vazias tanto na linguagem natural, com o uso de termos que se contradizem, quanto nas notações simbólicas.

Mas, como afirma Duval (idem p. 153),

> É com Frege que a problemática de uma Teoria da Ciência centra os encadeamentos objetivos da verdade para conduzir a uma análise sistemática dos enunciados, em como eles estão intrinsicamente ligados as representações e as proposições em si, de modo a controlar metodicamente as condições de passagem de uma para a outra e a continuidade dessa passagem (DUVAL, 1998 p. 152)

Para isso, Frege, em 1879, com o Begriffsschrift, procurou estabelecer uma linguagem própria para a aritmética com fundamentos puramente lógicos, tentando criar um registro de representação diferente da língua natural, relacionou a aritmética a lógica. Diferente de Bolzano, que limitou-se apenas a linguagem natural. Na obra, Os Fundamentos da Aritmética, em 1884, Frege apresenta uma definição lógica informal de número, demonstrando as leis aritméticas fundamentais com base na lógica. De 1884 à 1903, completa Os Fundamentos da Aritmética com as Leis Fundamentais da Aritmética (MENEGHETTI, 2010).

O projeto de Gotlob Frege vislumbrava, além de querer definir toda expressão aritmética em lógica (logicismo), ‘mostrar que as proposições lógicas poderiam ser deduzidas de leis lógicas imediatamente evidentes (MENEGHETTI, 2010 p. 113). O propósito em reduzir a Aritmética à lógica não foi alcançado (Ibidem) mas permitiu uma abordagem lógica e cognitiva do funcionamento discursivo da demonstração, ao identificar princípios comuns do funcionamento discursivo entre os registros da linguagem natural e da escrita simbólica (DUVAL, 1998).

O artigo ‘Sobre o sentido e a referência’, de 1892, permite formular esses princípios comuns, dando origem a vários debates de natureza semântica sobre ‘referência’ (idem). Nele o autor discute a tautologia ‘a=a’ a qual é a priori e pode ser chamada, de acordo com Kant, de ‘analítica’, e a equivalência ‘a=b’, que “geralmente contêm ampliações valiosas do nosso conhecimento e nem sempre podem ser justificadas a priori” (FREGE, 2011 p. 21), para distinguir ‘sentido’ de ‘referência’.

A diferença entre ‘sentido’ e ‘referência’ é a resposta de Frege ao problema cognitivo e epistemológico em debate desde Kant, quanto à natureza e o desenvolvimento do conhecimento. Na equivalência ‘a=b’, ‘a’ e ‘b’ se referem ao um mesmo objeto, apresentando aspectos diferentes (sentidos) desse objeto (referência).

De acordo com Duval (1998) a discussão levantada no artigo em questão mostra que Frege considera que reconhecer duas representações diferentes como sendo do mesmo objeto propicia um avanço do conhecimento. Uma representação pode fazer referência a um objeto ao menos para o sujeito que a produz. Entretanto, se essa representação for única, com relação ao objeto, então esse não poderá se dissociar desta representação, confundindo objeto e representação. Dessa forma,

> a grande novidade da análise fregeana do conhecimento, por meio da sua distinção entre sentido e referência (denotação):**relacionar de maneira necessária e estreita os signos e os objetos nos processos do conhecimento**. Pois esse consiste na interação entre o plano dos próprios objetos e o dos modos de suas apresentações. (Duval, 1998 p. 155 tradução nossa)[6].

---

[6] La grande nouveauté de l’analyse frégéenne de la connaissance, à travers as distinction entre sens et référence (dénotation): **ele relie de façon nécessaire et étroite les signes et les objets dans le**

Portanto, as representações dos objetos, em Frege, são distintas descrições do objeto realizadas por meio de sistemas semióticos ou de instrumentos. Sendo assim, não podem ser confundidas com as representações subjetivas dos sujeitos, como suas crenças, impressões e associações. Frege, assim, como Bolzano separa os julgamentos subjetivos dos sujeitos das declarações objetivas que necessitam de sistemas semióticos.

Entretanto, Frege considerou como modelos de sistemas semióticos de representações em matemática apenas as escritas simbólicas utilizadas em álgebra e em análise, cujo cálculo se submete ao processo de 'substituição', 'salva veritate'. E afirmou que o discurso em língua materna deveria também submeter-se a esse processo para favorecer o desenvolvimento do conhecimento, o que suscitou em críticas ao seu trabalho, principalmente por parte de Russell. (DUVAL, 2011).

1.4 A AUTONOMIA DOS SISTEMAS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICOS SOBRE OS OBJETOS DO CONHECIMENTO E OS MODELOS DE ANÁLISE DOS SIGNOS

Para Duval (1998) as axiomatizações, de Dedekind para a aritmética, em 1881; de Hilbert para a geometria, em 1899; e de Zermelo para a Teoria dos Conjuntos em 1907, dão continuidade ao projeto de fundamentação lógica da matemática, iniciados por Bolzano e Frege, mas sem sucesso. Entretanto, recaem no fracasso de colocar a matemática em bases lógicas. No entanto, revelam que os sistemas semióticos são sistemas de 'tratamentos cognitivos', os quais independem das interpretações que se possa ter e do domínio ao qual pertence o objeto, pois

> a ideia essencial é que não há nenhum signo fora de um sistema de signos e, especialmente, que um sistema semiótico é um sistema de tratamento da informação, e não apenas um meio de comunicação: permite criações de sentidos para além das experiências fenomenológicas do sujeito e, para além da experiência aparentemente direta que ele pode ter com certos objetos. **Os sistemas semióticos tornam-se «sistemas de produção» de informações ou de sentido** (DUVAL, 1998 p. 142 tradução nossa)[7].

---

processos de la connaissance. Car celle-ci consiste dans l'interaction entre le plan des objets eux-mêmes et la plan des modes de leur presentation.

[7] l'idée s'ímpose qu'il n'y a pas de signe em dehors d'um système de signes et surtout qu'um système sémiotique et um système de traitement seulement um moyen de comunication: il permet des créations de sens par delà les vécus phénoménologiques du sujet et par delà l'expérience apparemment directe qu'il peut avoir de certains objets. **Les systems sémiotiques deviennent des «systems de production» d'information ou de sens**.

Em 1936 é lançada por Turing uma máquina universal para manipular símbolos e Von Neumann, em 1945, desenvolve uma máquina com uma estrutura funcional voltada para o desenvolvimento do conhecimento, favorecendo o avanço de sistemas semióticos que poderiam ser implementados em computadores e tornando as noções de simulação e modelagem essenciais para a atividade do conhecimento.

Os sistemas semióticos que permitem o desenvolvimento de cálculos são priorizados. Com a autonomia dos sistemas semióticos, a noção de representação passa a ser independente tanto do sujeito quanto da referência prioritária com o objeto. A relação entre representação e objeto é de interpretação, ou seja, os objetos são interpretações dos modelos de sistemas semióticos (DUVAL, 1998).

Por outro lado, no final do século XIX os sistemas semióticos começam efetivamente a ser estudados e modelos de análise referente à diversidade dos signos e da sua função na comunicação e no funcionamento da atividade científica são elaborados. Três modelos distintos surgem independentes e num mesmo período. O modelo de Charles Sanders Peirce, construído entre 1890 e 1910, nos Estados Unidos e o de Ferdinand de Saussure, de signo linguístico, publicado em 1916 em 'Curso de linguística Geral', em Genebra estão relacionados com o estabelecimento da disciplina 'semiótica'. O modelo desenvolvido por Johann Gottlob Frege nos artigos publicados em 1892 e 1894, que ficaram conhecidos pela crítica de Russell, em 1905, junto aos de Peirce e de Saussure formaram a base dos demais estudos que foram desenvolvidos em semiótica (DUVAL, 2011).

A análise dos sistemas dos signos desenvolvida por Saussure foi na área da linguística. Ela mesma, considera os signos relacionados a um sistema semiótico, no caso desse pesquisador, a língua natural; cujas relações de oposição entre eles, no interior desse sistema dariam um 'sentido' a esses signos. Dessa forma, tornando-os 'de sentido' e atribuindo-lhes a propriedade de 'significar'. Isso contribuiu para analisar o 'sentido' no discurso e nas ciências humanas. Saussure denominou de semiologia a ciência dos signos.

O modelo do signo linguístico de Saussure pode ser definido como diádico e mentalista. Diádico porque pressupõe dois aspectos do signo linguístico, o 'significante', que se refere a imagem acústica que o sujeito tem da palavra e o 'significado', relacionado ao conceito que está sendo representado. Dessa forma rejeita o objeto de referência, como compondo o modelo, pois sua Teoria dos signos se inscreve internamente a um sistema semiótico que ‘dá estrutura ao mundo que, de outra forma, seria amorfo’ (NOTH, 2005 p. 31). A relação existente entre significante e significado é arbitrária, pois o ‘conceito’ não mantém uma relação de associação interna com a sequência de sons que formam a ‘imagem acústica’ do signo.

O modelo de signo proposto é considerado mentalista, devido a imagem acústica do signo, tratar-se de uma imagem mental acústica da palavra e não do próprio fenômeno acústico. Esse modelo linguístico dos signos serviu de padrão para o estudo dos sistemas de signos não-linguísticos, sendo o sistema da língua natural o mais completo (SANTAELLA; NOTH, 1999). Saussure não propôs uma classificação para os signos.

Charles Sanders Peirce propôs uma classificação dos tipos de representações que poderiam apresentar uma função cognitiva para o sujeito, com base num modelo triádico de interpretação, resultando em vários níveis hierárquicos de signos. Para Peirce, um signo é a representação de algo para um sujeito (PEIRCE, 2010), sendo, dessa forma, “meios de pensamento, de compreensão, de raciocínio, de aprendizagem” (D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015 p. 59).

Sendo assim, o modelo triádico de signos de Pierce é composto pelo ‘representamen’, o objeto, e o ‘interpretante’. Tendo definido ‘semiose’ como sendo o processo que atribui ao signo uma função cognitiva sobre o intérprete. O representamen é o ‘veículo’ que leva para a mente do sujeito algo externo a ela, ou seja, é a parte material do signo. O objeto é a coisa referenciada ou denotada pelo representamen. O ‘interpretante’ é o resultado da relação entre representamen e objeto, ou ainda, o efeito transmitido, de natureza pragmática, pelo signo para o intérprete (D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015).

A interpretação de um signo para Peirce exige que o intérprete tenha um certo conhecimento anterior do objeto e do signo ao qual ele se refere, a partir de outras experiências, ou seja, o signo ‘pressupõe uma familiaridade com algo a fim de veicular alguma informação ulterior sobre esse algo’ (PEIRCE, 2010 p. 48).

O objeto que é a referência do signo, pode ser ‘imediato’, isto é, como representado pelo signo; ou ser ‘dinâmico’, quer dizer, aquele que conduz a construção do signo e cujo aspecto particular é representado pelo objeto ‘imediato’.

O signo de Peirce possui duas funções, a função ‘representativa’ que é aquela em que o signo representa o objeto por meio de um interpretante; e a função ‘epistemológica’ que é “o uso de um signo por parte de um interpretante como meio para significar um objeto” (D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015 p.61).

De acordo com D’amore, Pinilla e Iori (Idem) os elementos do modelo triádico de signos de Peirce, representamen, objeto e interpretante, remetem respectivamente, a primeiridade, secundidade e terceiridade que são as três categorias as quais o pesquisador fundamenta sua fenomenologia. Sendo,

- Firstness (Primeiridade): qualidade pura, sensação, ideia, possibilidade de existência, vagueza; possibilidade sígnica pura;
- Secondeness (Secundidade): reação, resistência, fato, realização, singularidade, experiência; mero fato sígnico;
- Thirdness (Terceiridade): representação, mediação, hábito, lei, generalidade, lei sígnica. (D’AMORE; PINILLA; IORI, 2015 p.63).

Peirce, com base nas três categorias elencadas acima propõe, inicialmente[8], uma classificação para os signos de acordo com três tricotomias,

> a primeira, conforme o signo em si mesmo for uma mera qualidade, um existente concreto, ou uma lei geral; a segunda, conforme a relação do signo para com seu objeto consistir no fato de o signo ter algum caráter em si mesmo, ou manter alguma relação existencial com esse objeto ou em sua relação com um interpretante; a terceira, conforme seu interpretante representa-lo como um signo de possibilidade ou como um signo de fato ou como um signo de razão. (PIERCE, 2010 p. 51).

Na primeira tricotomia, os signos são classificados, respectivamente, em qualissígno, sinsígno e legissígno. Enquanto que na segunda tricotomia são denominados, respectivamente, de ícone, índice e símbolo. E na terceira tricotomia, os signos são nomeados, respectivamente, em rema, discissígno ou discente e argumento.

[8] Posteriormente Peirce postula uma nova classificação para os signos contendo dez tricotomias, correspondendo a sessenta e seis classes de signos.

1.5 UMA PROPOSTA DE MODELO DE ANÁLISE DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS ADEQUADO A CONDIÇÃO EPISTEMOLÓGICA DA APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

Duval (2011) afirma que os modelos de análise dos signos de Frege, Saussure e Peirce não apresentam nada em comum quanto à definição de signo, critérios de análise e possibilidades do funcionamento cognitivo. E justifica apontando as áreas diferentes em que cada um desses pesquisadores estão inseridos e suas questões que nortearam os estudos.

Para Peirce, cujas áreas de estudo são as ciências em geral e a lógica, sua pergunta de pesquisa envolvia: como analisar a variedade dos tipos de representações no processo de interpretação de seu sentido? Enquanto que Saussure, na linguística, procurava compreender: o que constitui uma língua como um sistema comum de sentido, apesar das mudanças e variações resultantes de suas múltiplas utilizações? E Frege, cuja área de pesquisa era a matemática, nas subáreas análise e aritmética, interessava-se em: como explicar o progresso rigoroso e não tautológico do raciocínio matemático? (DUVAL, 2011).

De acordo com Duval (idem), a especificidade epistemológica do conhecimento matemático é o acesso aos objetos matemáticos, que só é possível por meio das representações semióticas, pois esses objetos não são perceptíveis ou acessíveis por meio de instrumentos. Para atender as necessidades intrínsecas ao conhecimento matemático, esse pesquisador questiona sobre as contribuições ou transposições que podem ser realizadas das pesquisas de Frege, Saussure e Pierce visando um modelo que privilegie uma abordagem semiótica da aprendizagem em matemática.

Para Duval (idem) nenhum dos modelos propostos é totalmente adequado para uma análise semiótica da aprendizagem em matemática, entretanto, suas questões norteadoras podem ser reformuladas, no sentido de atenderem as necessidades específicas dessa área,

> A questão de Saussure pode ser reformulada assim pelos matemáticos:
>
> Quais processos de discriminação permitem RECONHECER AS UNIDADES MATEMATICAMENTE PERTINENTES em uma expressão ou em uma representação semiótica?
>
> A questão de Peirce pode ser reformulada:

> Em função de quais critérios podemos classificar todos os tipos de representações utilizáveis em matemática e no ensino de matemática?
>
> E a questão de Frege:
>
> Quais são os mecanismos de substituição ou de transformação próprios a cada tipo de representação utilizada em matemática? (DUVAL, 2011 p. 36).

Dessa forma, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, estabelece uma abordagem cognitiva da aprendizagem em matemática tendo como base essas questões diretrizes. O pesquisador prefere utilizar em seus estudos a palavra 'representação' ao invés de 'signo', por compreender que '"signo" é normalmente usada para se referir ao usado para comunicar' (DUVAL, 2016 p. 9), ou seja, no caso dos signos semióticos, os caracteres, letras ou símbolos.

A natureza epistemológica da condição de acesso aos objetos matemáticos unicamente pela mobilização de representações semióticas conduz a um aspecto cognitivo e 'matematicamente essencial', as transformações de representações semióticas. Pois,

> É pela dinâmica das transformações semióticas que a sémiosis está no centro dos processos cognitivos do pensamento matemático. Não existe(nenhuma) noésis sem sémiosis, não existe ato matemático de pensamento em transformação de representações semióticas quaisquer que sejam. Aqui, encontramos a verdadeira resposta para a questão: "o que é fazer matemática" (DUVAL, 2011 p. 42).

Sendo assim, toda atividade matemática se constitui na mobilização explícita ou não, de dois tipos de transformações de representações semióticas, uma interna ao sistema semiótico trabalhado, denominada de 'tratamento', a qual a transformação resulta num mesmo tipo de representação semiótica; e a outra, externa a um sistema semiótico mobilizado, chamada de 'conversão' que culmina num tipo diferente de representação semiótica.

Logo, o processo cognitivo de transformações de representações semióticas, condição preliminar para a aquisição dos conceitos matemáticos, depende da discriminação das unidades de sentido[9]

---

[9] Elementos básicos que constituem as representações semióticas, dotados de um sentido para cada nível de organização. Nas figuras geométricas, por exemplo, as unidades de sentido não são os traços,

> que se fundem em uma representação semiótica. Tomemos o exemplo mais trivial de uma frase simples, que, sem proposição subordinativa, comporta:
>
> - O nível de unidades de sentido, que são palavras (substantivos e adjetivos) que se articulam em sintagmas;
> - Os sintagmas nominais e verbais, que se articulam em uma frase (uma proposição enunciada); e
> - Uma proposição enunciada, que se articula com outra proposição em uma progressão de descrição, de uma narração, de um raciocínio ou de uma explicação. (DUVAL, 2016 p. 10).

Nas transformações entre representações semióticas distintas é necessário que sejam discriminadas e, ainda, postas em correspondência, as unidades de sentido pertinentes e pertencentes a cada representação semiótica (DUVAL, 2011).

Entretanto as transformações de representações semióticas, e consequentemente, a discriminação das unidades de sentido pertinentes a cada representação semiótica estão sujeitas a sua organização ou modo de funcionamento, que varia de acordo com a sua possibilidade de produção, subjacente ao sistema semiótico ao qual pertence. E isso faz com que as representações semióticas não ofereçam as mesmas possibilidades de transformações internas ou tratamentos. Ou ainda, a possibilidade de ocorrer um distanciamento cognitivo entre duas representações do mesmo objeto matemático. Por isso, “Distinguir e classificar os tipos de representação semiótica utilizados na matemática é a primeira etapa para elaborar uma ferramenta de análise cognitiva das atividades matemáticas” (DUVAL, 2011 p. 68).

Os sistemas semióticos que permitem as transformações internas das representações semióticas desempenham a função de ‘tratamento’,

> que é cognitiva e epistemologicamente fundamental para o desenvolvimento do pensamento e do conhecimento. Essa função depende inteiramente das operações semióticas de substituições possíveis a ser efetuadas, dado que permitem produzir e provar novos conhecimentos a partir de dados iniciais tomados como hipótese (DUVAL, 2016 p. 11).

Mas esses sistemas semióticos, desempenham também, a função de ‘objetivação’ do sujeito, isto é, a tomada de consciência do sujeito de algo que ele não conhecia antes, além da função de comunicar um conhecimento.

---

mas os agrupamentos de traços que possuem um sentido, que por sua vez é diferente para cada reagrupamento de traços.

Os sistemas semióticos que possuem as funções cognitivas de tratamento e de objetivação, se diferenciam dos ‘códigos’ os quais se prestam apenas a função de comunicar. Sendo assim, são chamados de ‘registros’ por Duval, inspirado por Descartes. Pois, o termo ‘registros’ foi criado por Descartes, em Géométrie I, publicado como apêndice em Discours de la méthode, em 1637, para designar os signos que se prestavam ao processo de substituição, no caso, aqueles referentes à escrita algébrica e às figuras geométricas das seções cônicas (DUVAL, 2011).

Para Duval (idem),

> Um registro se caracteriza pelas operações semióticas que lhe são específicas. Mudar de registro de representação não é só mudar o conteúdo da representação de um objeto, é mudar as operações semióticas a realizar para transformar o conteúdo da nova representação. As operações semióticas próprias aos diferentes registros utilizados na matemática constituem os gestos intelectuais necessários em não importa qual atividade matemática. (DUVAL, 2011 p. 73).

Portanto, Duval (2011) afirma que os registros de representações semióticas desempenham também a função cognitiva de produção de representações. Mas as funções cognitivas de produção, objetivação e tratamento das representações semióticas, específicas do ato de pensar matematicamente, necessitam da tomada de consciência, por parte dos sujeitos aprendentes, dos gestos intelectuais necessários a toda atividade matemática, para que possa agir nessas de forma espontânea e intencional, porque

> A análise do funcionamento cognitivo do pensamento exigida pela matemática mostra, [....] a necessidade de uma mobilização simultânea e coordenada de diversos registros para poder compreender. A atividade matemática real não se limita jamais à utilização de um único registro. Ela ultrapassa sempre as produções explícitas no registro em que efetuamos os tratamentos. Mobilizamos também um segundo registro, seja para antecipar os tratamentos a realizar e, portanto, escolher o registro de tratamento, seja para controlar os tratamentos efetuados no registro escolhido (DUVAL, 2011 p. 116).

Duval (2011) propõe uma classificação para os registros de representações semióticas a qual visa contemplar todos os tipos de transformações de representações semióticas que fazem parte da atividade matemática, sejam elas, específicas à cada registro ou as diversas formas de conversões. Além disso, essa categorização busca favorecer uma análise da distância cognitiva entre pares de registros mobilizados.

Para isso, diferencia os registros discursivos dos não discursivos. Os registros discursivos produzem ‘expressões’, isto é, as unidades de sentido estão dispostas linearmente em função de regras sintáticas. Entre os registros discursivos estão as declarações em língua materna, a língua formal e as escritas simbólicas. Quanto aos que compõem os registros não discursivos estão a visualização geométrica e a visualização em sistemas de coordenadas no plano, pois apresentam a particularidade de possuírem uma organização bidimensional e apreensão simultânea das unidades de sentido.

Os registros também são categorizados, do ponto de vista cognitivo e didático, em monofuncionais ou multifuncionais, dependendo do tipo de tratamento ser desenvolvido por algoritmos ou não. Os registros monofuncionais são aqueles específicos da matemática, cujo tratamento se desenvolve por meio de algoritmos como, os sistemas numéricos e a escrita algébrica. Os multifuncionais são utilizados em todas as áreas do conhecimento, portanto seus tratamentos não são constituídos por algoritmos, a exemplo da língua natural e, o geométrico, cujo tratamento tem como base o reconhecimento das suas formas e de suas relações topológicas.

O cruzamento entre os registros discursivos e não discursivos; e os monofuncionais e multifuncionais resulta no Quadro 1

Quadro 1 - Classificação dos tipos de registros semióticos.

	Registros DISCURSIVOS *Linearidade fundamentada na sucessão* Para a produção, apreensão e organização das expressões.	Registros NÃO DISCURSIVOS *Apreensão simultânea de uma organização bidimensional*
Registros MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos são não algoritmizáveis	As línguas: **três operações hierarquicamente incluídas** (designação de objetos, enunciação e raciocínio) Duas modalidades de produção: Oral e escrita	ICÔNICA: produção à mão livre, conservação interna das relações topológicas características das partes do objeto. CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA: **Três operações independentes** (construção instrumental, divisão e reconfiguração mereológicas, desconstrução dimensional das formas
	Representações AUXILIARES TRANSITÓRIAS para as **operações livres ou externas**	
Registros MONOFUNCIONAIS: As transformações de expressões são **algoritmizáveis**	As ESCRITAS SIMBÓLICAS para as **operações de substituições ilimitadas** (Sistema de numeração, escrita algébrica, línguas formais) Uma modalidade de produção: ESCRITA	Junção entre os pontos ou nós e orientação marcada por flechas. GRÁFICOS CARTESIANOS: **operação de zoom, interpolação, mudança de eixos** ESQUEMAS

Fonte: Duval, 2011 p.118

Os registros que pertencem a uma mesma classificação mas possuem significados operatórios distintos fixados as unidades de sentido das representações semióticas são distintos entre si, a exemplo da escrita decimal e fracionária de um número racional[10] (DUVAL, 2009). Nesse caso, os registros numéricos, fracionário e decimal são classificados como sendo ambos, discursivo e monofuncional.

As transformações de representações semióticas que mobilizam um sistema semiótico diferente do trabalhado inicialmente, ou seja, as conversões, são aquelas que ocorrem entre registros diferentes de representação semiótica. Enquanto que os

---

[10] As representações numéricas fracionária e decimal do número racional possuem tratamentos distintos, portanto possuem significados operatórios diferentes para suas unidades de sentido.

tratamentos são transformações internas a um mesmo registro, pois atuam na modificação de uma mesmo tipo de representação semiótica (DUVAL, 2012c).

Cada um desses quatro tipos de registros apresentam uma operação de substituição das unidades de sentido, específica ou, que os outros registros não a fazem. O 'cálculo' é a operação de substituição específica dos registros discursivos monofuncionais, o qual substitui uma expressão numérica, literal ou algébrica, por outra. Na língua natural, registro discursivo plurifuncional, é o raciocínio dedutivo que funciona substituindo as proposições segundo o esquema modus ponens, ou seja, pela demonstração que se a consequência é verdadeira, então a premissa é verdadeira.

Nos registros não discursivos plurifuncionais, a exemplo das figuras geométricas, é a heurística das figuras. Essa operação consiste na visualização das hipóteses do problema em outra figura, a qual é uma reorganização da figura inicial dada. Enquanto que no registro não discursivo monofuncional, ou seja, os gráficos cartesianos, a operação de substituição específica é o zoom, que consiste em mudar uma primeira graduação de eixos para uma graduação mais fina, substituindo os segmentos de retas ou arcos de curvas semelhantes ou diferentes à aqueles da primeira graduação.

As unidades de sentido que permitem reconhecer a referência, ou 'a que' uma representação se refere, resultam das operações semióticas de designação específicas pra cada registro, discursivo ou não discursivo. Entre os registros discursivos, as representações que são expressões completas ou incompletas possuem unidades de sentido diferentes. Nas expressões incompletas, as unidades de sentido ou unidades de sentido referencial são construídas para designar alguma coisa. Na língua natural correspondem aos sintagmas nominais. Na escrita simbólica correspondem as designações funcionais como, 3x, x-1 ou sintagmas operatórios, como, (x+2) (x-1) (DUVAL, 2016).

Segundo Duval (idem), as expressões completas são compostas de proposições ou equações, cujas unidade de sentido corresponde ao valor de verdade, de indecibilidade[11], de tautologias, etc. Na visualização geométrica as unidades de

[11] Que não pode ser determinada por algoritmos.

sentido referenciais são as unidades figurais, que mudam, de acordo com a operação figural de designação utilizada, quer seja justaposição[12], superposição[13] ou construção instrumental[14]. Na

> visualização gráfica as unidades de sentido são as variáveis visuais qualitativas de um gráfico, e estes valores só podem ser discriminados pelo jogo das oposições visuais entre as diferentes posições e entre as orientações possíveis de uma reta ou de uma curva sobre os dois eixos (DUVAL, 2016 p. 14).

Apenas por meio da correspondência entre as unidades de sentido próprias de cada registro de representação semiótica é possível comparar o conteúdo de duas representações semióticas diferentes e reconhecer se essas representam o mesmo objeto. Entretanto, a dificuldade em realizar essa comparação é devido ao fato de que os conteúdos de cada representação semiótica relacionam unidades de sentido em níveis diferentes de organização.

Para Duval (2016) a compreensão em matemática é,

> não somente reconhecer os objetos matemáticos quando se muda de representação semiótica na mudança de registro, como também poder por si mesmo mudar de registro para mudar a representação dos objetos (DUVAL, 2016 p.21).

Portanto, é a conscientização da necessidade de uma operação de correspondência entre as unidades de sentido específicas a cada registro o ‘primeiro patamar a transpor’ (DUVAL, 2016 p. 23) para aprender matemática. Sendo o ‘segundo patamar’, a compreensão das operações de substituição inerentes a cada registro.

> A superação do que chamamos de os dois patamares de compreensão em matemática se faz pela conscientização dos gestos intelectuais que permitem “fazer matemática”. O primeiro diz respeito à conversão de representações,

---

[12] Visualização de uma figura a qual as subfiguras que a compõe estão lado a lado.
[13] Visualização de uma figura a qual as subfiguras que a compõe estão umas sobre as outras.
[14] Visualização de um figura por desconstrução dimensional das suas subfiguras em retas que são subjacentes a essas formas.

> [...] e o segundo se dá nos tratamentos matemáticos ligados às substituições de representações matemáticas (DUVAL, 2016 p. 27).

Pois, toda atividade matemática requer a mobilização sinérgica de ao menos dois registros de representação.

1.6 AS CONVERSÕES ENTRE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

A conversão se constitui em fazer relacionar conteúdos de representações semióticas diferentes, por meio da correspondência entre as unidades de sentido inerentes a cada registro. Sendo assim, não existem regras previamente definidas de transformação por conversão, pois trata-se de dois registros de representações com características próprias e atendendo a regras distintas de funcionamento. 'É essa inexistência de regras que faz a abordagem dos fenômenos de conversão, facilmente e constantemente observados, ser dificilmente compreensível' (DUVAL, 2007 p. 23 tradução nossa)[15].

As conversões apresentam duas características cognitivamente importantes. A representação produzida por uma conversão tem um conteúdo totalmente diferente da representação de partida, mesmo sendo duas representações do mesmo objeto. Essa diferença entre o conteúdo de cada representação determina a distância cognitiva entre as duas representações, a qual varia de acordo com o registro de partida e o de chegada.

A outra característica é a de necessitarem de operações de substituição, na maioria das vezes, independentes de qualquer tratamento intermediário ou de se recorrer a um conceito, pois "para um dupla de registros dado, os alunos poderão ter sucesso nas conversões em um sentido e fracassarem sistematicamente para a conversão inversa[16]" (DUVAL, 2015 p. 107).

Pois, as conversões submetem-se a uma variação de 'congruência e 'não congruência' entre as representações dos registros envolvidos na transformação que

---

[15] C'est cette inexistence de règles qui rend l'approche des phénomènes de conversion, facilement et constamment observables, si difficilement compréhensible.
[16] Conversão inversa é aquela que se toma como registro de partida aquele que foi o 'de chegada' na conversão anterior, e tem como registro de chegada o anteriormente 'de partida'.

facilita ou inibe o funcionamento cognitivo, a qual demonstra que ‘não existe nenhum isomorfismo entre as representações de um objeto matemático em um registro e suas possíveis representações nos outros registros’ (DUVAL, 2011 p. 124).

Nos casos de ‘congruência’ as conversões são quase ‘imediatas’. O conteúdo de uma representação é associado ao conteúdo da outra representação de forma transparente. As unidades de sentido de ambos os registros se correspondem de forma bijetiva, ou seja, a conversão inversa estará na mesma distância cognitiva que a conversão direta.

Na ‘não congruência’,

> a conversão pode se revelar impossível de efetuar, ou mesmo de compreender, se não houver uma aprendizagem prévia concernente às especificidades semióticas de formação e de tratamento de representação que são próprias a cada um dos registros em presença (DUVAL, 2009 p. 66).

As unidades de sentido de ambas representações não possuem uma correspondência direta, ‘termo a termo’, sendo necessária uma ‘forte argumentação do custo de tratamento” (DUVAL, 2009 p. 67) para que a correspondência entre essas unidades seja realizada.

Duval (2009) estabeleceu três critérios para que haja congruência na conversão entre dois registros de representações semióticas. O primeiro deles é a possibilidade de uma correspondência semântica entre as unidades de sentido, de modo que cada unidade de sentido simples de uma representação, identificada como unidade de sentido elementar, no registro de partida, possa se corresponder com uma unidade de sentido elementar no registro de chegada.

Outro critério é a ‘univocidade semântica terminal’, isto é, cada unidade de sentido elementar do registro de partida corresponde-se com uma só unidade de sentido elementar no registro de chegada.

O terceiro critério, ‘mesma ordem das unidades de sentido’ é utilizado apenas para as conversões entre registros de mesma dimensão. ‘Esse critério, é, sobretudo, importante quando se trata de comparar frases e fórmulas literais (DUVAL, 2009 p. 69). Considera a organização das unidades de sentido que deve ser a mesma para o registro de partida e o de chegada.

As representações semióticas serão congruentes quando os três critérios forem satisfeitos.

> Naturalmente, pode não haver correspondência para nenhum desses três critérios, para dois ou para um. A não-congruência entre duas representações pode então ser maior ou menor. A dificuldade da conversão de uma representação depende do grau de não-congruência entre a representação de partida e a representação de chegada. (DUVAL, 2009 p.69).

As dificuldades relacionadas à não congruência da conversão podem ser agravadas para os registros bidimensionais, como os gráficos cartesianos, as figuras geométricas, ou seja, para os quais se admite ser suficiente “ver” o que as curvas, os desenhos, ‘mostram’ (DUVAL, 2009).

Essas dificuldade não dependem ‘da complexidade conceitual do conteúdo das representações’ que devem ser convertidas, mas

> revelam um fechamento dos registros de representação. Este enclausuramento persiste mesmo depois de um ensinamento tendo aparentemente mobilizado diferentes registros de representação (DUVAL, 2009 p. 80).

Nesse sentido, nossa pesquisa busca analisar as conversões não congruentes que tem como registro de partida o geométrico bidimensional e como registro de chegada o simbólico fracionário dos números racionais.

No próximo capítulo faremos uma revisão bibliográfica dos números racionais em periódicos para uma análise das tendências teórico e metodológicas na área, no período compreendido entre 2006 e 2018.

CAPÍTULO 2. ANÁLISE DOS ASPECTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS DE PESQUISAS RELACIONADAS AOS NÚMEROS RACIONAIS

O capítulo discorre sobre uma revisão bibliográfica dos números racionais nos periódicos nacionais, BOLEMA, REVEMAT, Educação Matemática Pesquisa, e, Zetetiké; além do periódico internacional, Educational Studies in Mathematics, todos disponíveis online, no período compreendido entre 2006 e 2018. E tem como finalidade a análise dos aspectos teóricos e metodológicos desses estudos com o intuito de obter as tendências entre essas pesquisas no que se refere ao ensino e a aprendizagem do campo conceitual dos números racionais, com foco nas pesquisas que foram categorizadas em formação de conceitos.

O Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, surgiu em 1985, vinculado ao programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro, atualmente ´conta com conceito A1 na avaliação qualis CAPES[17] ref. Publica três edições ao ano, e, eventualmente, edições temáticas, com pesquisadores convidados, de acordo com a demanda da comunidade. É constituído de trabalhos que podem ser resultados de pesquisas empíricas, ensaios, resenhas de textos, artigos convidados e resumos de teses e de dissertações defendidas na área de educação matemática.

A revista eletrônica de educação matemática – REVEMAT está vinculada ao Programa de Pós graduação em Educação Científica e Tecnológica – PPGECT, da Universidade Federal de Santa Catarina, teve seu primeiro número publicado em 2006, com periodicidade anual até 2009 e semestral a partir de 2010. Esse periódico está classificado com conceito A2 no sistema de avaliação Qualis CAPES, na área de ensino, e publica pesquisas com temas relacionados à epistemologia, formação de professores e ao ensino e aprendizagem da matemática, com destaque nos estudos semióticos na aprendizagem de conceitos.

A revista Educação Matemática Pesquisa, vinculada ao Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP, teve seu primeiro número publicado em 1999; possui periodicidade

[17] Referente ao quadriênio 2013-2016

quadrimestral, e eventualmente, publica edições temáticas. Atualmente, conta com conceito A2, na avaliação Qualis CAPES. A revista prioriza artigos relacionados as linhas do Programa, matemática na estrutura curricular e formação de professores; história, epistemologia e didática da matemática; tecnologias da informação e, didática da matemática.

O periódico de Educação Matemática Zetetiké, cuja primeira edição foi publicada em 1993, é vinculado a Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas da Unicamp. A revista possui periodicidade semestral, com eventuais números temáticos. Divulga artigos realizados por educadores matemáticos ligados a instituições brasileiras ou estrangeiras e está classificada com conceito A2, na avaliação Qualis CAPES.

O periódico Educational Studies in Mathematics, publica artigos com temas didáticos, metodológicos e pedagógicos no âmbito da educação matemática. É a revista mais antiga, das pesquisadas nesse artigo, tendo publicado seu volume 1 em março de 1969; tendo adquirido o conceito A1, na área de ensino, na avaliação Qualis CAPES.

Os critérios observados para a escolha dos periódicos foram que pertencessem a área de educação matemática, tivessem sido classificados na última avaliação Qualis periódicos CAPES A1 e A2 e pudessem ser acessados online. A busca dos artigos nesses periódicos foi realizada analisando os sumários de todas as edições relativas ao período compreendido entre 2006 e 2018, no sentido de encontrar títulos que remetessem ao tema, números racionais e em caso de dúvidas, recorríamos as palavras-chave e ao resumo da pesquisa. Ao todo foram encontradas 58 pesquisas nos 5 periódicos analisados.

Desses estudos, 40 se tratavam de pesquisas brasileiras encontradas nos periódicos nacionais e 16 pesquisas dentre elas, 8 dos Estados Unidos, 1 da Espanha, 1 de Portugal, 1 da Alemanha, 1 da França, 1 da Austrália, 1 da República Tcheca, 1 da Bélgica e 1 da Turquia foram encontradas no periódico Educational Studies in Mathematics. E ainda, 1 pesquisa da República do Chipre e 1 do México foram encontradas no periódico BOLEMA e 1 pesquisa do Chile no Zetetiké.

A análise bibliográfica foi sistematizada em tabelas, nas quais a primeira coluna fornece um contador relativo às referências; a segunda indica o periódico; a terceira e quarta, respectivamente a identificação do ano e volume do periódico; a quinta o título da pesquisa; a sexta os autores; a sétima a instituição à qual pertencem; a oitava as palavras chaves; a nona a fundamentação teórica; a décima a área de concentração da pesquisa; a décima primeira o foco de análise; a décima segunda a metodologia; a décima terceira os principais resultados e a décima quarta as referências bibliográficas.

A análise das tabelas evidenciou seis categorias de análise, formação de conceitos, formação de professores, currículo, formação de professores e de conceitos, história da matemática, tecnologia e revisão de literatura.

A categoria formação de conceitos concentra todas as pesquisas que tiveram como finalidade analisar ou investigar, os conceitos, propriedades, relações, ou as operações envolvendo o campo dos números racionais. Essa categoria inclui as subcategorias, resolução de problemas que foca em estudos com finalidades diagnósticas; intervenção, em que estão as pesquisas cujo objetivo é trabalhar o conhecimento em sala de aula visando a aprendizagem nesse campo numérico; e, pesquisas teóricas, que concentra os trabalhos cujo objetivo é desenvolver análises teóricas referentes aos conceitos que envolvem os números racionais, ou ainda aquelas que visam analisar como esses conceitos estão sendo abordados em avaliações externas e livros didáticos.

Na categoria formação de professores concentram-se todas as pesquisas cujo objeto de pesquisa é o professor, e o estudo se desenvolve com a finalidade de analisar, investigar, as concepções e os conceitos que esses profissionais em formação inicial, continuada ou apenas atuando no ensino de matemática, detém sobre os números racionais, ou ainda, o processo de ensino que os mesmos desenvolvem nesse campo numérico.

A categoria formação de professores e formação de conceito inclui os artigos que tem como objeto de pesquisa o professor e os conceitos relativos aos números racionais, nos quais são investigados tanto o processo relativo ao ensino quanto as dificuldades de aprendizagem nesse campo conceitual.

As pesquisas que visam investigar como estão sendo abordados os conceitos pertencentes ao campo dos números racionais nas propostas curriculares educacionais, compõem a categoria currículo. Enquanto que os trabalhos que buscam situar historicamente a construção e desenvolvimento desse campo numérico formam a categoria história da matemática.

Na categoria tecnologia estão reunidos os estudos que tem como objeto de análise as potencialidades de recursos tecnológicos no ensino e aprendizagem dos números racionais. Ao passo que a categoria revisão bibliográfica é composta de artigos cujo objetivo é analisar a produção na área.

Do total de artigos catalogados, categorizamos, 35 artigos como formação de conceitos; 13, formação de professores; 2, formação de professores e de conceitos; 6, em currículo; 1, em história da matemática; 1, em tecnologia e 2, em revisão de literatura.

2.1. ANÁLISE DE TENDÊNCIAS DOS ARTIGOS CATEGORIZADOS COMO FORMAÇÃO DE CONCEITOS.

Constatamos com esses resultados que ainda é grande o número de pesquisas que se destinam a análise dos conceitos dos números racionais e de suas relações, a exemplo de pesquisas da década de 80 e 90, como Behr et al (1983), Kieren (1976, 1980, 1981, 1988), Ohlsson (1988), Romanatto (1999). A categoria formação de conceitos foi a única que se manteve presente em todos os anos do período investigado. Nos permitindo afirmar que além de ser aquela em que se enquadraram mais pesquisas, também é a que melhor se distribui no período. O ano de 2008, além de ser aquele em que foram publicadas mais pesquisas na área dos números racionais, por ser esse o ano em que o BOLEMA lançou uma edição temática sobre esse campo numérico; é o que demonstra uma maior variedade de áreas (formação de conceitos, formação de professores e de conceitos, currículo, tecnologia e análise bibliográfica) envolvidas nesses estudos.

O número de artigos categorizados como formação de conceitos equivale a 58% do total das pesquisas catalogadas. A tendência em trabalhar com formação de conceito no campo dos racionais reflete os resultados de pesquisas como Merlini (2005); Moutinho (2005); Rodrigues (2005), Santos (2005) e Damico (2007) que apontam os diferentes significados para os números racionais; como também, os trabalhos de Catto (2000), Maranhão e Igliori (2003) que investigam os diversos registros de representação semiótica desses números como fatores que influenciam para a complexidade do conceito de números racionais e as dificuldades de ensino e aprendizagem nessa área.

Dos 35 artigos, 16 referem-se a resolução de problemas ((MACIEL; CÂMARA DOS SANTOS, 2007), (SILVA; ALMOULOUD, 2008), (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008), (CAMPOS; RODRIGUES, 2007), (SILVA, 2007), (BRIZUELA, 2006), (EMPSON; JUNK; TURNER, 2006), (CHARALAMBOS; PITTA-PANTAZI, 2007), (CLARKE; ROCHEROUCHE, 2007), (HOOF; VERSCHAFFEL; DOOREN(2015); (TUNÇ-PEKKAN,(2015); (GAGATSIS et al, 2016), (ALVAREZ; LEDESMA, 2017), (OLIVEIRA; FERREIRA, 2016), (JUSTULIN, 2016), (HACKENBERG; LEE, 2016)); 12 estudos tratam de intervenção em sala de aula (ADJIAGE; PLUVINAGE, 2007), (SOUZA; OLIVEIRA, 2010), (VAZ; PINHO, 2011); (DAMAZIO,2011), (COUREY et al, 2012), (SANTANNA, PALIS; NEVES, 2013), (PONTE; QUARESMA, 2014), (GUERREIRO; SERRAZINA, 2017), (GUERREIRO, SERRAZINA, PONTE, 2018), (PECK; MATASSA, 2016), (GLADE; PREDIGER, 2017), (MORAIS; SERRAZINA, 2018)) e 7 de pesquisas teóricas ((GUERRA; VAZ, 2008), (LIÃO;2008), (BERTONI, 2008), (SILVA; LINS; CÂMARA DOS SANTOS, 2013, 2014), ROSA et al (2013), (LUCENA; ARAÚJO; CÂMARA DOS SANTOS, 2013)).

As pesquisas relacionadas a resolução de problemas, tinham o objetivo, de maneira geral, de identificar, descrever ou analisar dificuldades ((MACIEL; CÂMARA, 2007, (CAMPOS; RODRIGUES, 2007)), estratégias (CLARKE; ROCHEROUCHE, 2007), (EMPSON; JUNK; TURNER, 2006), construções (CHARALAMBOS; PITTA-PANTAZI, 2007), notações espontâneas (BRIZUELA, 2006), elaboração de sentido (ALVAREZ; LEDESMA, 2017), modelos explicativos (SILVA, 2007), flexibilidade representacional (GAGATSIS et al, 2016), obstáculos didáticos e epistemológicos (OLIVEIRA; FERREIRA, 2016), raciocínio distributivo (HACKENBERG; LEE, 2011) dos alunos , como também propor atividades que favoreçam a compreensão de conceitos relacionados ao campo dos números racionais ((SILVA; ALMOULOUD, 2008), (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008)). Além de investigar relações entre o desempenho dos alunos na resolução de problemas e suas atitudes (JUSTULIN, 2016).

Os conceitos trabalhados nesses artigos foram os significados dos números racionais ((MACIEL; CÂMARA DOS SANTOS, 2007), (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008), (CHARALAMBOS; PITTA- PANTAZI, 2007),(OLIVEIRA; FERREIRA, 2016)) a ideia de unidade (CAMPOS; RODRIGUES, 2007), os invariantes ordem (CLARKE; ROCHEROUCHE, 2007) e equivalência de frações (CHARALAMBOS; PITTA-PANTAZI, 2007), as operações com frações ((SILVA; ALMOULOUD, 2008), (SILVA, 2007), (CHARALAMBOS; PITTA-PANTAZI, 2007), ((GAGATSIS et al, 2016), (JUSTULIN, 20160) com números decimais ((GAGATSIS et al, 2016), (ALVAREZ; LEDESMA, 2017), partilha equitativa (EMPSON; JUNK; TURNER, 2006), particionamento distributivo (HACKENBERG; LEE, 2016).

Enquanto que os sujeitos de pesquisa foram, em sua maioria, alunos do ensino fundamental, mas também estudantes do ensino médio e do ensino superior e Educação de Jovens e adultos. Os estudos que trabalhavam os diferentes significados dos números racionais tinham como referência teórica os estudos de Behr et al (1983, 1984, 1991, 1992, 2004); Kieren (1976, 1980, 1992, 1995) e Vergnaud (1983, 1991, 1996). As pesquisas que tinham a finalidade de identificar os modelos explicativos e as notações espontâneas dos alunos utilizaram como referencial metodológico, a entrevista clínica de Piaget.

Quanto aos resultados obtidos por essa categoria de pesquisa, foi possível distinguir aqueles relativos as estratégias, sucessos, dificuldades, ideias espontâneas, e modelos explicativos expressos pelos alunos e aqueles referentes a atividades e metodologias que auxiliam na construção dos conceitos relativos aos números racionais.

Entre os estudos que tomaram como referência as respostas dos alunos, Brizuela (2006) verificou que ideias espontâneas e representações não-formais de crianças de 5 e 6 anos fornecem um caminho para se ter imagens mais completas a respeito de suas ideias sobre frações. Enquanto que Maciel e Câmara dos Santos (2007) afirmaram que os tipos de erros, cometidos pelos sujeitos, ao resolverem problemas envolvendo as ideias de frações pouco se alteraram com o desenvolvimento da escolaridade, entretanto em algumas séries que trabalhavam números proporcionais (3º Ciclo), os alunos rendiam melhor nas questões de frações como quociente ou parte-todo; e no final do Ensino Médio, em que se trabalha, no ensino de química e física de forma mais acentuada, o emprego das frações centesimais, as questões de frações como operadores obtiveram os melhores resultados.

Empson, Junk e Tuner (2006) observaram que ao resolverem problemas de partilha equitativa, crianças do 1°, 3°, 4° e 5° anos revelaram duas importantes estratégias: coordenação de partes e quantidades, e, de razão e quantidades. Charalambos e Pitta-Pantazi (2007) verificaram que crianças do 5° e 6° anos têm mais sucesso em tarefas envolvendo parte-todo que aquelas com o significado medida e dominar as diferentes interpretações de frações contribui para a proficiência nas operações com frações e equivalência. Campos e Rodrigues (2007) apontaram que a ideia de unidade, importante para a conceptualização dos números racionais, não tem sido incorporada por muitos estudantes, mesmo para alunos de escolaridade mais elevada, como é o caso de alunos do ensino superior e que as práticas pedagógicas parecem não serem suficientes para a apropriação dessas ideias.

Silva (2007) investigando modelos explicativos elaborados por adolescentes e adultos a propósito de problemas que envolvem frações evidenciou apenas uma pequena parcela dos entrevistados capaz de elaborar uma explicação completa para um problema que envolve cálculo com frações. Os demais apresentam explicações parciais ou incorretas, baseadas na percepção e na incompreensão da relação parte/todo. Tunç-Pekkan (2015) ao investigar como as representações gráficas, círculos, retângulos e reta numérica se relacionam com o conhecimento fracionário dos alunos e vice-versa, os estudantes mostraram desempenho semelhante nos itens envolvendo círculo e retângulo em que se exigia a utilização do significado fracionário parte-todo, mas foi significativamente menor nos itens com representação gráfica da reta numérica entre os tipos de problemas.

Enquanto que Hoof, Verschaff e Dooren (2015) ao analisarem a relação entre as propriedades dos números naturais: tamanho, densidade e operações, com o conceito de números racionais apresentados pelos alunos ao longo do ensino fundamental e médio; verificaram que os resultados demonstram uma polarização das propriedades do número natural igualmente forte em tarefas com números decimais ou frações. Além disso, a tendência em aplicar as propriedades de número natural foi mais fraca em atividades envolvendo tamanho dos números racionais, um pouco mais forte em atividades envolvendo operações, e a mais forte nas atividades envolvendo densidade dos números racionais.

Gagatsis et al (2016) ao aplicarem um teste para alunos do 5°, 6°, 7° e 8° anos de escolas primárias e secundárias da República do Chipre, verificaram que existe um padrão de desenvolvimento da flexibilidade representacional na adição de frações e de números decimais, que pode ser classificado em quatro níveis diferentes. No primeiro nível os alunos não desenvolveram as competências de transformação em adição de frações e de números decimais. No segundo nível, há um desenvolvimento da capacidade de realizar os tratamentos de adição de fração e de números decimais no sistema de representação simbólica. No terceiro nível, além dos tratamentos simbólicos, os alunos reconhecem as representações diagramáticas de adição e subtração de frações e números decimais, dados na forma simbólica. No quarto nível, realizam transformações a partir das representações simbólicas de frações e números decimais para representações diagramáticas, reconhecendo-as ou construindo-as; entretanto encontraram dificuldades na transformação de representações diagramáticas para as simbólicas.

Oliveira e Ferreira (2016) evidenciaram que alunos do 2° ano do Ensino Médio da Educação de Jovens e adultos, pesquisados, dominam alguns algoritmos fracionários mas, em geral, não compreendem os significados dos números racionais na representação fracionária, limitando-se apenas ao significado parte-todo.

Justulin (2016) investigou as relações entre o desempenho na solução de problemas e exercícios sobre frações e, as atitudes, em relação à matemática e às frações; além do gênero e da série, entre alunos do Ensino Médio. Concluiu que as correlações de maior intensidade se verificaram entre os rendimentos na prova de algoritmos e na resolução de problemas, como também entre as escalas de atitude em relação à matemática e às frações. Sendo que não foram encontradas diferenças significativas em relação ao gênero, mas foi observado uma tendência de melhorar o desempenho geral conforme a série, não ocorrendo o mesmo quanto às atitudes em relação à matemática.

Hackenberg e Lee (2016) analisaram as relações entre o raciocínio quantitativo dos alunos do ensino fundamental e médio com frações e o seu raciocínio algébrico. E concluíram que quando os alunos operam com o segundo e terceiro conceitos multiplicativos[18], que tem como base, como os alunos criam e coordenam unidades compostas, ou unidades de unidades, demonstram utilizarem-se de um raciocínio

[18] Identificados em Hackenberg e Tillema (2009). Alunos que operam com o segundo conceito multiplicativo (MC2) interiorizaram dois níveis de unidades, tratando os números inteiros como unidade de unidade, por exemplo, 3 é uma unidade composta de 3 unidades. Enquanto que os alunos que operam com o terceiro conceito multiplicativo interiorizaram três níveis de unidades.

distributivo, em problemas de compartilhamento em partes iguais e em retirar frações de incógnitas. Os alunos que operaram com o segundo conceito multiplicativo e que demonstraram raciocínio distributivo em problemas de compartilhamento em parte iguais não evidenciaram ter consciência dos resultados do seu raciocínio. Enquanto que os alunos que operaram com o terceiro conceito multiplicativo apresentaram essa consciência e a construção de um raciocínio distributivo mais avançado ao trabalharem com incógnitas.

As pesquisas cujas atividades e metodologias foram as referências revelaram que atividades envolvendo operações com frações a partir de representações de figuras planas e da concepção parte-todo podem auxiliar na compreensão dos alunos quanto às regras operatórias dos números fracionários (SILVA; ALMOULOUD, 2008); que a metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação pode levar à construção significativa dos diferentes significados de fração e da proporcionalidade (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008). Alvarez e Ledesma (2017) ao investigar a elaboração de sentido na resolução de problemas verificaram que uma aluna do 5° ano da Educação de Jovens e adultos atribuiu sentido aos problemas envolvendo operações com números decimais a partir de situações familiares associadas a sua experiência de vida e de trabalho. A aluna atribuiu sentido ao estabelecer uma relação entre os números decimais e os naturais, no primeiro momento, vindo posteriormente a relacioná-los às frações.

As pesquisas que se constituíram como intervenções em sala de aula se concentraram no ensino fundamental e tiveram como objetivo propor novos procedimentos de ensino para trabalhar os conceitos, equivalência, comparação e ordenação de números fracionários (SOUZA; OLIVEIRA, 2010), (PONTE; QUARESMA, 2014); potenciação de frações (DAMÁZIO, 2011) e frações na reta numérica (SANTANNA PALIS; NEVES, 2013).

Vaz e Pinho (2011) e Courey et al (2012) tomam como referência a música para o ensino de frações; enquanto que Souza e Oliveira (2010) articula a matemática, a leitura e a escrita, utilizando o livro “Doce frações”. Ponte e Quaresma (2014) utiliza a abordagem exploratória para trabalhar ordenação e comparação de números racionais e, Santanna Palis e Neves (2013) trabalham o conceito de frações na reta numérica visando minimizar as dificuldades na passagem da aritmética para a álgebra.

Adjiage e Pluvinage (2007) desenvolveram uma intervenção em sala de aula envolvendo o ensino e aprendizagem dos números racionais e de proporcionalidade, baseado num quadro que emergiu da análise dos autores da complexidade dos problemas de razão, com orientações precisas e um ambiente computacional. Damázio (2011) desenvolveu uma sequência de ensino-aprendizagem envolvendo os princípios e às noções lógico-matemáticas do conceito de potenciação que foram geradas historicamente.

Guerreiro e Serrazina (2017) apoiaram-se na construção e implementação de uma experiência de ensino baseada em Design para trabalharem a percentagem e a sua inter-relação com as representações fracionária e decimal, com alunos do 3° e 4° anos do ensino fundamental. Concluíram que a construção comparticipada de modelos a partir de representações associadas à porcentagem, fortalece a interpretação de relações e facilita a compreensão dos conceitos relativos aos números racionais.

Guerreiro, Serrazina e Ponte (2018) propuseram uma experiência de ensino baseada em Design, para alunos do 3° e 4° anos do ensino fundamental com o objetivo de proporcionar uma construção da compreensão da natureza relacional da percentagem, bem como, verificar de que forma a percentagem contribui para essa aprendizagem, levando-se em conta as diferentes representações dos números racionais. Os resultados fizeram os autores inferirem que os alunos demonstram compreender a natureza relacional da percentagem e que essa compreensão, como também dos conceitos envolvidos nessa noção, contribuem para um entendimento da natureza multiplicativa dos números racionais.

Outra pesquisa com base em Design é a de Peck e Matassa (2016) que propõem uma intervenção para alunos do 9° ano e 1° ano do ensino médio, nos Estados Unidos, no curso de álgebra, obrigatório para alunos do ensino médio, nesse país, para explorar as realidades matemáticas dos alunos e suas reinvenções envolvendo frações e divisões. Os autores verificaram que as realidades dos estudantes iniciantes em álgebra não incluem o subconstruto quociente, podendo causar dificuldades na aprendizagem em álgebra cujos quocientes são quase todos representados por frações.

Glade e Prediger (2017) utilizaram os princípios do Design para desenvolverem uma experiência de ensino para alunos do 6° ano do ensino fundamental, visando o desenvolvimento, pelos estudantes, de modelos, estratégias informais baseadas em modelos e, exploração dessas estratégias, para o desenvolvimento progressivo de regras processuais relacionadas ao caso específico da determinação de parte de parte de fração. A análise dos resultados mostrou que a esquematização progressiva é um processo multifacetado que não pode ser descrito pela internalização de procedimentos gráficos mas que a compactação de conceitos e teoremas em ação é imprescindível.

Morais e Serrazina (2018) com uma metodologia também com base em Design construíram uma experiência de ensino para ser aplicada para alunos do 3° e 4° ano do ensino fundamental de Lisboa, visando compreender as potencialidades de situações, as quais sugerem extensões de conhecimentos incorretas, como meio para promover a construção da aprendizagem de número decimal. Os resultados obtidos revelaram as potencialidades das situações para mobilização de modelos, conceitualização da unidade e compreensão do valor de posição dos algarismos no numeral decimal.

Os resultados obtidos nas pesquisas evidenciam o sucesso dos métodos aplicados para significar e facilitar as relações necessárias para a compreensão nesse campo numérico.

Os trabalhos classificados como pesquisas teóricas ((GUERRA; SILVA, 2008); LIÃO (2008), BERTONI (2008), (SILVA; LINS; CÂMARA DOS SANTOS, 2013, 2014); (ROSA et al, 2013), (LUCENA; ARAÚJO; CÂMARA DOS SANTOS, 2013)) tiveram como objeto de estudo as operações com frações; os signos e os seus significados no conjunto dos números naturais e racionais; e, os significados e as representações dos números racionais.

Como resultados, Guerra e Silva (2008) demonstram que o princípio da contagem e a manipulação de áreas planas exibem estreita relação operatória entre frações e os números inteiros e resultam em significar as técnicas algorítmicas utilizadas nas operações com frações. Lião (2008) observou que são necessários recursos metodológicos que disponibilizem um tempo maior para o desenvolvimento conceitual de frações e suas inter-relações com os processos operatórios. Bertoni (2008) apontou que a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud contempla a noção de esquema, inferências e antecipações dos alunos frente a atividades que envolvam frações.

Rosa et al (2013) ao analisar o livro didático verificou que ele mesmo contempla apenas as significações aritméticas do conceito de fração; a reta numérica não é contemplada; dificilmente possibilita a identificação da grandeza considerada; a unidade de medida é parte do todo; demonstra forte relações com as situações do dia-a-dia; e, a maioria das frações apresentadas é menor que uma unidade. Silva, Lins, Câmara dos Santos (2013, 2014) observaram que no Exame Nacional do Ensino Médio–ENEM alguns significados dos números racionais são priorizados em detrimento de outros.

Lucena, Araújo e Câmara dos Santos (2013) ao analisar as atividades do livro didático que podem favorecer o desenvolvimento de estratégias cognitivas dos alunos quanto aos números racionais verificou um percentual pequeno dessas atividades. Entre essas poucas atividades estão as que propõem, em primeiro lugar, reflexões em relação as regras matemáticas, seguida das que conduzem às reflexões relacionadas à compreensão do problema.

Após a análise das tendências, podemos afirmar que a produção nos periódicos investigados evidenciou a ideia dos números racionais ser considerado um “megaconceito” e portanto, complexo e de difícil compreensão; pois revelou as diferentes frentes em que esse campo numérico é analisado, com acentuado número de pesquisas publicadas categorizadas como formação de conceitos.

Na área de formação de conceitos, o levantamento das pesquisas revelou a tendência em abordar operações com frações, equivalência, ordem e comparação de frações e os significados e as relações entre eles que levam à compreensão do conceito de número racional, sendo nesse último, dado especial importância ao significado medida na reta numérica; ora tendo o aluno como objeto de pesquisa, ora o professor e suas práticas, ora os recursos metodológicos e tecnológicos, ora as propostas curriculares escolares.

Notamos uma escassez de pesquisas que abordassem as relações entre as diversas representações dos números racionais como aspecto que influência sua aprendizagem, apesar de estudos nessa área (Catto (2000); Maranhão, Igliori (2003)) indicarem algumas dificuldades causadas pela mudança de representação no campo dos racionais. Nem tão pouco encontramos pesquisas que analisem os números racionais do ponto de vista da não congruência semântica.

No entanto, concordamos com Duval (2009), quando afirma que

> A não-congruência entre duas representações pode então ser maior ou menor. A dificuldade da conversão de uma representação depende do grau de não-congruência entre a representação de partida e a representação de chegada (DUVAL, 2009, p.69)

Dessa forma, percebemos que são necessárias pesquisas que direcionem o seu olhar para os aspectos da congruência semântica e equivalência referencial na aprendizagem dos números racionais, visando contribuir para a compreensão de certas dificuldades de aprendizagem dos alunos que podem encontrar nessa perspectiva um modo de interpretação.

CAPÍTULO 3. OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS

Nesse capítulo dissertaremos sobre os registros de representações dos números racionais, simbólico fracionário e geométrico bidimensional. O registro simbólico fracionário será analisado, quanto às características, significados relacionados e conceitos envolvidos. Bem como, quanto aos tratamentos que podem ser realizados nesse registro.

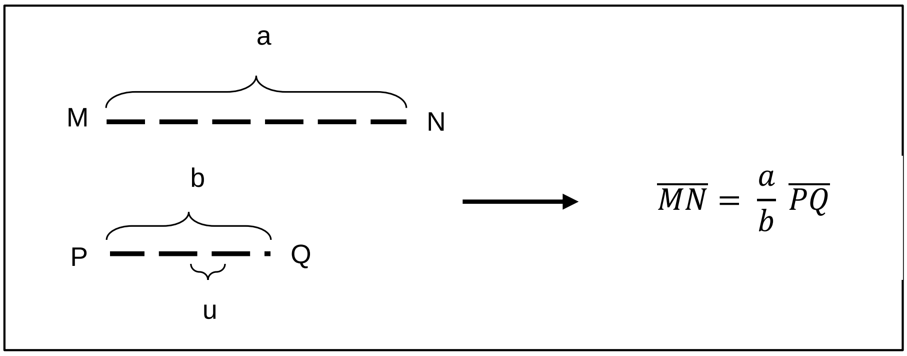
O registro geométrico bidimensional será analisado quanto as suas características, classificação das suas representações, conversão para o registro simbólico fracionário e tipos de tratamento. Finalizamos com uma análise de pesquisas que envolveram conversões, tendo como registro de partida o geométrico bidimensional e de chegada, o simbólico fracionário.

3.1 O REGISTRO SIMBÓLICO FRACIONÁRIO

No registro simbólico fracionário os números racionais são representados na forma $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, onde "a" é chamado de numerador e "b" de denominador. Trata-se de um registro discursivo e monofuncional, pois sua escrita é linear, sequencial, e ele se presta ao desenvolvimento de algoritmos, pelo encadeamento de substituição de suas expressões (DUVAL, 2011).

Caraça (1975) define o número racional na representação fracionária $\frac{a}{b}$, com 'a' e 'b' inteiros e $b \neq 0$, chamado pelo autor de, *número fracionário*, como sendo a medida *do* $\overline{MN}$, considerando $\overline{PQ}$ como unidade e tendo sido dados $\overline{MN}$·, $\overline{PQ}$ e uma unidade de medida comum entre eles, "u". $\overline{MN}$ contendo '*a'* vezes a unidade 'u', e $\overline{PQ}$, '*b'* vezes a unidade 'u'; sendo '*a' não* divisível por '*b',* conforme Figura 2.

Figura 2 - Definição de número fracionário, Caraça (1975).



Fonte: Adaptado de Caraça (1975 p. 35)

Com essa definição, Caraça (1975) dá uma interpretação de medida linear ao número racional na representação fracionária, e acrescenta afirmando que a “divisão de números inteiros *m* e *n* agora pode sempre exprimir-se simbolicamente pelo número racional $\frac{m}{n}$” (CARAÇA, 1975 p.37), portanto, indicando que o ‘número fracionário’ pode também ser visto como quociente entre dois números inteiros.

Kieren (1976), de acordo com a literatura foi o primeiro a discutir sobre a necessidade dos números racionais serem interpretados de várias formas diferentes para que possam ser compreendidos. Sendo assim propôs as seguintes interpretações para os números racionais:

a) Frações que podem ser comparadas, somadas, subtraídas, etc;
b) Frações decimais que formam uma extensão natural, por meio do sistema de numeração, dos números inteiros;
c) Classes de equivalência de frações;
d) Números na forma $\frac{m}{n}$, onde *m* e *n* são inteiros e $n \neq 0$;
e) Operadores multiplicativos;
f) Elementos de um campo quociente ordenado e infinito, onde x= $\frac{m}{n}$, em que x satisfaz a nx=m;
g) Medidas ou pontos na reta numérica.

Com exceção da última interpretação, que envolve a compreensão de pontos na representação da reta numérica, ou seja, no registro geométrico unidimensional dos racionais, todas as anteriores mobilizam a representação simbólica fracionária.

Cada uma dessas interpretações de número racional relaciona-se com estruturas cognitivas diferentes do indivíduo, portanto seria necessário ter compreensão de cada uma delas e como se relacionam (KIEREN, 1976).

Kieren (1980), revendo essas interpretações de números racionais, passa a chamá-las de subconstrutos que interconectados formam o constructo número racional e a considerar como sendo cinco os subconstrutos básicos desse campo numérico: parte-todo, quociente, medida, razão e operador. Esses subconstrutos não são matematicamente e psicologicamente independentes, entretanto representam diferentes padrões dos números racionais; sendo parte-todo e razão aqueles que formam as bases para o desenvolvimento do significado de fração.

A classificação dos subconstrutos dos números racionais é revista posteriormente por Kieren (1988), e outros autores, como Behr et al (1983), Freudhental (1999), Ohlsson (1988), Romanatto (1997) e Nunes et al (2008). De acordo com Behr et al (1992), os subconstrutos que parecem se sustentar ao longo do tempo são parte-todo, quociente, razão, operador e medida.

Para Beht et al (1992), números racionais são elementos de um conjunto infinito de quociente, composto de infinitas classes de equivalência, tendo como elementos dessas classes as frações[19]. As frações, ou seja, as representações $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e b diferente de zero, quando em contextos reais, do ponto de vista pedagógico, apresentam diversas ‘personalidades’.

Romanatto (1997) considera essas ‘personalidades’ dos números racionais como sendo medida (parte-todo na classificação de Behr et al (1992)), quociente, razão, operador multiplicativo, um número na reta numérica (medida) e probabilidade. Dessa forma, “é a própria notação a/b que é o aspecto comum entre as várias relações que assumem os números racionais” (ROMANATTO, 1997 p.99), pois para cada um desses contextos a relação a ser estabelecida entre o ‘a’ e o ‘b’ terá um significado diferente. As ideias, as relações e as operações matemáticas construídas dependerão, dessa forma do contexto trabalhado.

Nunes et al (2008) afirmam que diferentes classificações de situações dos números racionais têm sido propostas, na literatura (Kieren (1988); Behr et al (1983),

---

[19] Compreendidas em nosso estudo como representações fracionárias

Ohlsson (1988); Mack (2001)), mas não ficam claros os critérios utilizados para tais classificações. Com base na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e na ideia de que os símbolos, na representação fracionária dos números racionais, poderiam ter significados diferentes, as autoras distinguem quatro tipos de situações, parte-todo, quociente e operadores, para situações que envolvam quantidades extensivas, e medidas, para situações que envolvam quantidades intensivas[20].

Nas situações que envolvem quantidades extensivas (parte-todo, quociente e operador), o número racional, na representação fracionária, por exemplo, $\frac{3}{4}$, só representa uma mesma quantidade se o todo for o mesmo. $\frac{3}{4}$ de 4 laranjas (3 laranjas), não é a mesma quantidade de laranjas que $\frac{3}{4}$ de 12 laranjas (9 laranjas). Similarmente, se 3 barras pequenas de chocolate são divididas para 4 meninos e 3 barras grandes de chocolates são divididas para 4 meninas, as porções de chocolates são de tamanhos diferentes entre meninos e meninas. Ou ainda, se uma pizza pequena for particionada em 4 partes iguais e tomadas três dessas partes e uma pizza grandes for particionada em 4 partes iguais e tomadas três dessas partes, as porções tomadas relativas as pizzas pequena e grande terão tamanhos diferentes.

Nas situações que envolvem medidas de quantidade intensivas, a diferença no tamanho do todo não muda a quantidade. A mudança de quantidade só ocorrerá quando mudar a razão entre as duas quantidades envolvidas. Por exemplo, a concentração da mistura é a mesma seja para 3 medidas de tinta azul com 4 medidas de tinta branca ou para 6 medidas de tinta azul com 8 medidas de tinta branca.

Em nossa pesquisa de dissertação, Silva (2013), apontamos para a falta de consenso, na literatura, quanto aos significados que podem apresentar os números racionais, nos diversos contextos, então consideramos a classificação proposta por Romanatto (1997), medida (parte-todo), quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade e número na reta numérica; acrescentada do significado porcentagem, proposto por Gomes (2010).

---

[20] Quantidades extensivas são aquelas que envolvem uma relação entre duas quantidades de mesma natureza, por meio de uma lógica parte-todo. Quantidades intensivas são aquelas que envolve uma relação entre duas quantidades de natureza diferentes, ou seja, entre duas magnitudes.

Entretanto, ao revermos esses significados, compreendemos que o significado número na reta numérica, porcentagem e probabilidade não são diferentes quanto a relação que é expressa entre o numerador e o denominador da fração. Entre esses significados, a relação existente entre o numerador e o denominador da fração é uma relação das partes com o todo.

Quando olhamos para a representação $\frac{a}{b}$, como um ponto na reta numérica, a relação que é necessária ser levada em conta é aquela entre ‘b’, como sendo o número de segmentos iguais que foi dividida a unidade e ‘a’, o número de segmentos iguais a 1/b. Ao olhar para a representação $\frac{a}{b}$, significando porcentagem, o numerador (a) necessita ser visto como uma relação entre as partes de uma quantidade ou medida em relação ao todo que representa uma quantidade ou medida fixa, 100. Enquanto que ao olhar para a representação $\frac{a}{b}$, como probabilidade, o numerador (a) representa as chances favoráveis ou necessárias e o denominador (b) as chances possíveis, que envolve o universo de todas as chances (favoráveis ou não favoráveis).

Portanto, consideramos sendo quatro, os significados, ou relações que a representação $\frac{a}{b}$ pode representar: parte-todo, quociente, razão e operador multiplicativo. Os quais são compreendidos com base nas pesquisas de Behr et al (1983) e Romanatto (1997).

A representação simbólica fracionária, $\frac{a}{b}$, em situações que envolvem a relação parte-todo expressa uma ideia que compara a quantidade ou medida de uma ou várias partes do todo em relação a esse todo. O numerador (a) representa a quantidade ou medida da(s) parte(s) que foi tomada do todo e o denominador (b), a quantidade ou medida que foi particionado o todo. O traço de fração significa uma relação entre as partes ou quantidades tomadas, representadas pelo numerador, e o total de partes ou quantidades, representadas pelo denominador.

No significado quociente, a representação simbólica fracionária, $\frac{a}{b}$, expressa uma ideia de divisão entre dois números inteiros, podendo ser do tipo ‘partitiva’ ou ‘quotitiva’. Na relação do tipo partitiva, a representação simbólica fracionária, a/b representa o quociente entre a quantidade de elementos ou medida de ‘a’ que cabe para cada uma das partes de ‘b’. Por exemplo, $\frac{2}{3}$, é a quantidade de chocolate recebida por pessoa ao dividir dois chocolates para três pessoas. Enquanto que na relação quotitiva, a representação simbólica fracionária, a/b, representa o quociente entre uma quantidade ‘a’ e uma quantidade ‘b’ estabelecida como cota. Como exemplo, $\frac{2}{3}$, é o número que representa quantas vezes 2 litros de leite cabem em garrafas de 3 litros, cada uma.

O significado razão, como afirmam Behr et al (1983) é uma relação que transmite a noção de grandeza relativa. Sendo, portanto, mais correto afirmar que é um índice comparativo e não um número, como por exemplo, a relação entre o número de meninos e o de meninas de uma sala (relação de mesma grandeza). A relação expressa na razão é entre parte e parte. Esse significado é considerado por Behr et al (Idem) entre os significados de números racionais o mais ‘natural’ para desenvolver o conceito de equivalência. Se as quantidades apresentam grandezas diferentes, a relação estabelecida é denominada ‘taxa’. Como por exemplo, a densidade, que é obtida pela relação de comparação entre as grandezas, massa (kg) e o volume (m^3), ou seja, $\frac{Kg}{m^3}$.

O significado operador multiplicativo exige da representação simbólica fracionária, $\frac{a}{b}$, interpretação algébrica. No caso de quantidades contínuas, a ideia expressa na representação fracionária é a de ‘esticar’ ou ‘encolher’ as quantidades. Como exemplo, em $\frac{3}{4}\overline{CD}$, a representação simbólica fracionária, tem a função de ‘encolher’ o segmento CD. Entretanto, em $\frac{6}{5}\overline{CD}$ a representação simbólica fracionária tem a função de ‘esticar’ o segmento CD. No caso, de uma quantidade discreta, a representação simbólica fracionária, $\frac{a}{b}$ pode ser pensada, como uma função que transforma um conjunto com ‘n’ elementos, num conjunto com ‘a.n’ elementos, para depois reduzi-lo em $\frac{an}{b}$ (BEHR et al 1983).

Em nossa pesquisa, como nos propomos analisar as conversões entre o registro geométrico bidimensional e o simbólico fracionário dos números racionais, trabalharemos unicamente com o significado parte-todo na representação simbólica fracionária.

3.1.1 Os tratamentos inerentes ao registro simbólico fracionário

A igualdade, a adição e a multiplicação dos números racionais, na representação fracionária $\frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e b é diferente de zero, são dadas por definição no campo dos números racionais, obedecendo às mesmas leis que orientam o campo dos números inteiros.

De acordo com Caraça (1975), a igualdade de dois números racionais, na representação fracionária, é definida como aquela à qual o número $\frac{a}{b}$ é igual ao número $\frac{c}{d}$ quando a.d = b.c. Se c = n.a e d = n.b, então, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Segundo Caraça (Idem) dessa igualdade podemos inferir que "não se altera um número racional quando se multiplica (ou divide) o seu numerador e o seu denominador pelo mesmo número racional" (CARAÇA, 1975 p. 40)

A definição de desigualdade entre dois números racionais quaisquer, na representação fracionária aponta que se os dois números têm,

- o mesmo denominador, será maior (ou menor) o que apresentar maior (ou menor) numerador, $\frac{a}{b} > \frac{c}{b} \Leftrightarrow a > c$ ou $\frac{a}{b} < \frac{c}{b} \Leftrightarrow a < c$;
- o mesmo numerador, será maior (ou menor) o que apresentar maior (ou menor) denominador; $\frac{a}{b} > \frac{a}{d} \Leftrightarrow b > d$ ou $\frac{a}{b} < \frac{a}{d} \Leftrightarrow b < d$;
- numeradores e denominadores diferentes, reduzem-se ao mesmo denominador para serem comparados, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd} > \frac{bc}{bd} \Leftrightarrow ad > bc$; ou, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd} < \frac{bc}{bd} \Leftrightarrow ad < bc$.

A adição entre dois números racionais, na representação fracionária, com denominadores iguais, $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{b}$ será igual a $\frac{a+c}{b}$. Sendo os denominadores diferentes, inicialmente, reduz-se ao mesmo denominador, como em, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$.

A subtração entre dois números racionais, na representação fracionária é realizada por analogia à adição de números racionais, considerando os mesmos denominadores, $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$ e com denominadores diferentes, $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$. Obedece as mesmas propriedades da subtração definidas para número inteiros.

A operação de multiplicação é definida, como podendo ser entre um número racional, na representação fracionária, $\frac{a}{b}$, e um inteiro, 'n',

$\frac{a}{b}$ x n = $\frac{a}{b}+\frac{a}{b}\ldots..+\frac{a}{b}$, 'n' vezes,

o que corresponde a $\frac{a}{b}$ x n = $\frac{na}{b}$, por analogia ao campo dos números inteiros. Mas também, a multiplicação, pode ocorrer entre um número racional, na representação fracionária, $\frac{a}{b}$, e um inteiro, 'n',

n x $\frac{c}{d}=\frac{c}{d}$ x n, (comutatividade, por analogia ao campo dos números inteiros),

n x $\frac{c}{d}=\frac{nc}{d}$.

E no caso geral, a multiplicação ocorre entre dois números na representação fracionária, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

A divisão de um número racional, na representação fracionária, $\frac{a}{b}$, por 'n', um número inteiro, não nulo, é definida como sendo, um número 'x' em que, $\frac{a}{b}$: n = p, se e somente se, n . p = $\frac{a}{b}$.

Por outro lado, n . p = $\frac{a}{b}$, satisfaz a p= $\frac{a}{b\ .\ n}$, portanto,$\frac{a}{b}$: n = $\frac{a}{b\ .\ n}$, ou seja, para dividir um número racional na representação fracionária por um inteiro não nulo, basta multiplicar o denominador pelo número.

Entretanto, se a divisão é entre dois números racionais, na representação fracionária, $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, temos que

$\frac{a}{b}$: $\frac{c}{d} = x$, então, x . $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, mas também, $x = \frac{a.d}{b.c}$, logo,

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c} = \frac{a}{b}.\frac{c}{d}$$

Desde que o divisor não seja nulo, a divisão entre dois números racionais, na representação fracionária é sempre possível (CARAÇA, 1975).

A potenciação, de expoente inteiro, na representação fracionária dos números racionais é definida, por analogia ao campo dos números inteiros, como sendo,

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots\ldots \frac{a}{b}$, n vezes. Logo, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, mantendo todas as propriedades da potenciação dos números inteiros.

A radiciação dos números racionais, na representação fracionária, é definida como sendo, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ = x, se $x^n = \frac{a}{b}$. Logo, se existe $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$, x = $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

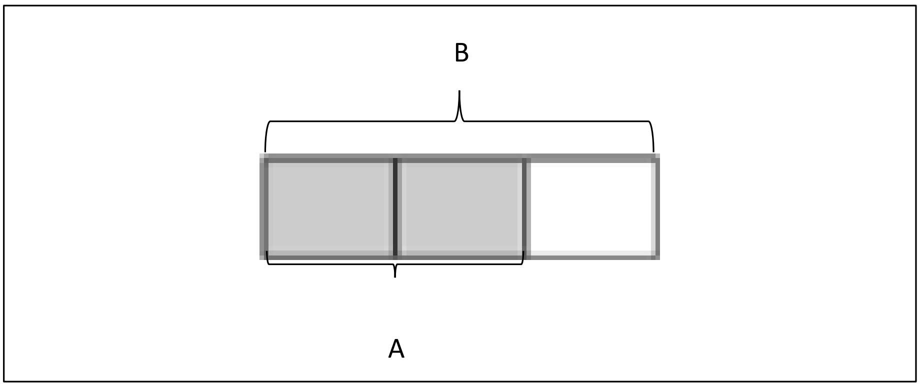
3. 2 O REGISTRO GEOMÉTRICO BIDIMENSIONAL

No registro geométrico bidimensional, os números racionais se apresentam como representações de partes consideradas de polígonos e círculos.

Nesse tipo de registro trabalha-se prioritariamente, na escola, o significado parte todo de número racional. Cada figura representando o inteiro é dividida em “n” partes de mesma área, sendo cada parte equivalente a 1/n e a fração correspondente ao número de áreas congruentes “m”, hachuradas ou pintadas do inteiro, é “m/n”.

Para Post, Behr e Lesh (1982) o significado parte-todo depende diretamente de particionar uma quantidade contínua, compreendida como comprimento, área ou volume, em partes congruentes; ou particionar um conjunto discreto de objetos em partes ou subconjuntos de mesma medida. Os autores afirmam que esse significado é aplicado, por exemplo, quando se tem dois conjuntos (A e B) em que o conjunto A é subconjunto do conjunto B e satisfaz os critérios: (a) o subconjunto A é dividido em partes ou subconjuntos equivalentes (frações unitárias); (b) o conjunto B é dividido em partes ou subconjuntos; (c) A medida de cada parte ou subconjunto de A é equivalente à medida de cada parte ou subconjunto de B. Dessa forma, Post et al (op. cit) ilustram com o retângulo da figura 3.

Figura 3 - Retângulo particionado em partes equivalentes.



Fonte: Post, Behr e Lesh (1982)

A parte sombreada (A) do retângulo (B), tal como particionado, pode ser interpretada como dois terços do todo (retângulo).

As ideias matemáticas de particionamento em áreas congruentes, tais como, quanto maior a área de cada parte, menor será o número de partes do todo, a conservação do todo e a equivalência de frações são intrínsecas ao registro geométrico bidimensional dos racionais. Pois, no particionamento de uma quantidade contínua há uma relação: (a) entre o número de partes que está sendo dividido o todo e a área de cada parte; (b) de equivalência entre a soma das partes e o todo que foi particionado; (c) entre regiões de mesma área do todo que representam quantidades relativas diferentes deste mesmo todo.

O registro geométrico bidimensional dos números racionais é não discursivo (DUVAL, 2011), pois, por terem duas dimensões, exige uma apreensão simultânea ou, não linear, das unidades básicas figurais, como traços, cor e área das partes. É também, multifuncional, de acordo com Duval (idem), pois possui tratamentos próprios e que não se prestam ao desenvolvimento de algoritmos.

De acordo com Duval (2004), o tratamento dispensado ao registro das figuras geométricas é específico deste, ou seja, independe do conhecimento matemático subjacente ao problema ou situação dada; pois "nem sempre é fácil "ver" sobre uma figura as relações ou as propriedades relativas as hipóteses dadas e que correspondem com a solução buscada" (DUVAL, 2004 p. 162).

Duval (2004) afirma que

> É essencial do ponto de vista cognitivo e didático não confundir a possibilidade de tratamento figural com a legitimidade ou a justificação matemática destes tratamentos figurais. A possibilidade dos tratamentos figurais está vinculada com as possibilidades de modificação que surgem das relações das partes com o todo, por exemplo, relações óticas, visuais ou posicionais de uma figura; modificações que podem efetuar-se física ou mentalmente e é independentemente de todo conhecimento matemático. (DUVAL, 2004 p.162)

Entretanto esse autor afirma ainda ser necessário uma coordenação entre os tratamentos figurais e os que provêm de um outro registro, pois os indivíduos que não se dão conta disso reduzirão os tratamentos matemáticos as "evidências imediatas" de uma "constatação perceptiva" no registro das figuras geométricas o que leva a uma falsa aproximação entre os tratamentos dispensados aos dois registros. Pois, para Duval (2004) uma figura geométrica é o entrelaçamento entre as apreensões perceptiva (interpretação imediata das formas geométricas que compõem uma figura geométrica) e discursiva (interpretação do enunciado ou do que é dito da figura geométrica), ou seja, é preciso 'ver' a figura geométrica a partir do que é enunciado sobre ela, sem se deixar influenciar pelas formas geométricas que se destacam dela.

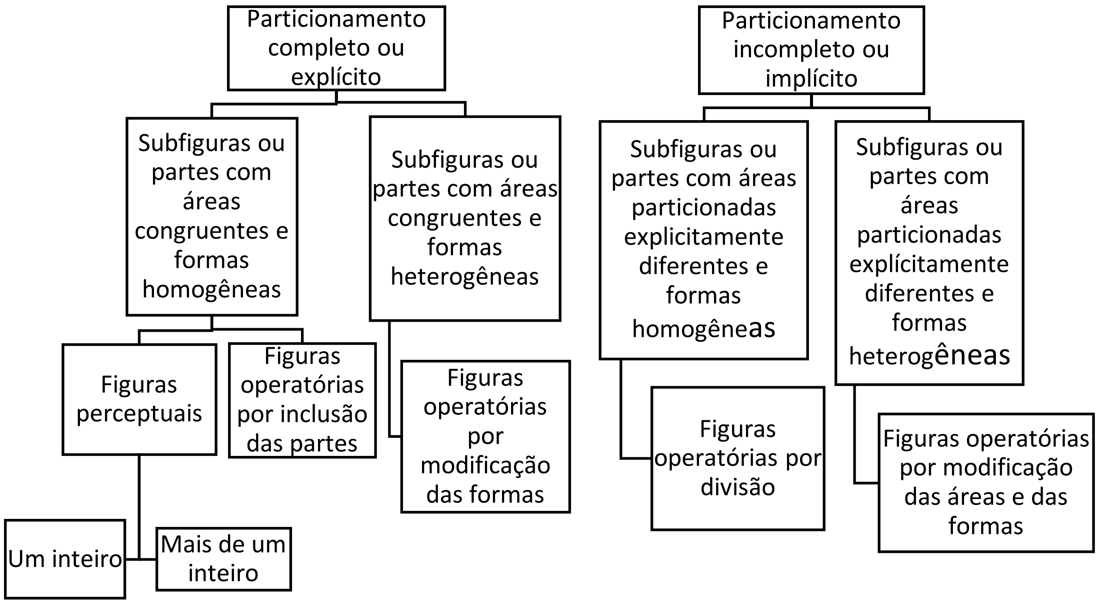
Duval (idem) aponta como tratamento no registro das figuras geométricas, a determinação das unidades figurais que são os elementos básicos constitutivos de uma figura geométrica, as possibilidades de articulação entre elas e as modificações que podem ser efetuadas nas figuras geométricas. Sendo esses tratamentos considerados capazes de cumprir com a função heurística das figuras geométricas.

As unidades figurais podem ser determinadas a partir das variações visuais - dimensionais e qualitativas, das figuras geométricas. As dimensões podem variar entre zero (ponto), uma (reta) ou duas dimensões (área). As variáveis qualitativas são aquelas quanto à forma, linha reta ou linha curva; contorno, aberto ou fechado; variações de tamanho, orientação, granulação, cor, etc (DUVAL, 2004).

Na nossa pesquisa adotamos como base as figuras geométricas trabalhadas em livros didáticos e pesquisas, como Silva (2005), Damico (2007), Giménez e Bairral (2005), Behr et al (1983), nas conversões entre o registro geométrico bidimensional dos racionais e o simbólico fracionário, para considerarmos como variáveis visuais das figuras geométricas que compõem o registro geométrico bidimensional dos números racionais quanto a dimensionalidade, bidimensional e quanto as qualidades, as variações de particionamento explícito de área, congruentes ou não; e de forma, homogêneas ou heterogêneas.

Desse modo, categorizamos as figuras geométricas utilizadas nas conversões entre o registro geométrico bidimensional e o simbólico fracionário dos números racionais, como, aquelas particionadas explicitamente em subfiguras ou partes de áreas congruentes e formas geométricas homogêneas, sem necessidade de recomposição das partes, as quais denominamos de figuras perceptuais; as que são divididas explicitamente em subfiguras ou partes de áreas congruentes e formas geométricas homogêneas com necessidade de recomposição das partes, denominadas, figuras operatórias por inclusão das partes; as que são divididas em subfiguras ou partes com áreas particionadas explicitamente em áreas diferentes e formas geométricas homogêneas que serão chamadas de figuras operatórias por divisão; as que suas subfiguras ou partes possuem áreas congruentes com formas geométricas diferentes, chamadas de operatórias por modificação das formas; e aquelas particionadas explicitamente em áreas diferentes e formas geométricas heterogêneas, que irão compor as do tipo operatórias por modificação das áreas e das formas, conforme Figura 4.

Figura 4 – Classificação das figuras do registro geométrico dos números racionais.



Fonte: autoria própria, 2018.

3.2.1 Características das representações do Registro Geométrico Bidimensional dos Números Racionais

As características das representações do registro Geométrico Bidimensional dos racionais, categorizadas no item anterior, e das quais iremos tratar, são das figuras geométricas utilizadas nas conversões em que se tem como registro de partida o geométrico bidimensional e o de chegada o simbólico fracionário dos números racionais. E essas características se destacam pelo tipo de conversão que é requerida, a qual solicita a fração que representa a parte pintada ou hachurada em relação ao todo.

As figuras perceptuais são polígonos, círculos, correspondentes a um ou mais inteiros, contínuo(s), particionado(s) - com todas as demarcações internas de divisão explícitas - em áreas congruentes e formas[21] homogêneas, justapostas, sendo algumas delas pintadas ou hachuradas, conforme Quadro 2.

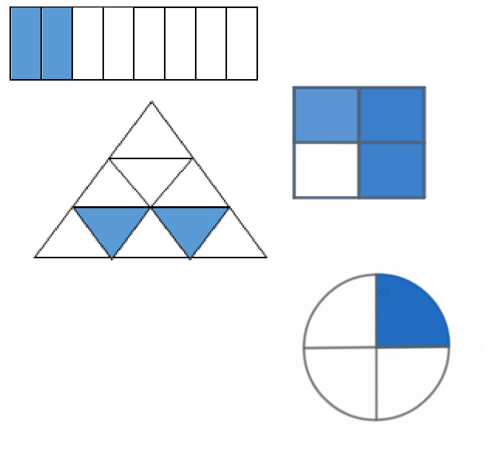
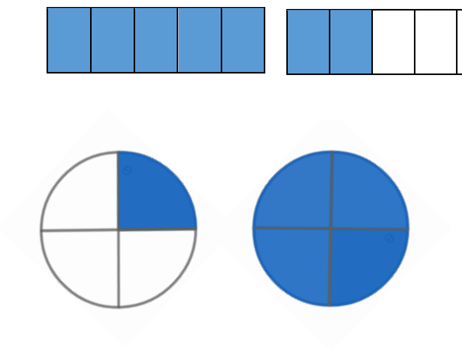
Essas figuras geométricas foram assim denominadas em nosso estudo devido a sua interpretação está voltada para as características relacionadas à forma das

[21] A partir de agora iremos nos referir as formas geométricas das partes ou subfiguras, por 'formas'.

subfiguras ou partes, sendo imediata, automática, sem que sejam necessários tratamentos na figura geométrica para que seja compreendida a relação parte-todo.

As unidades figurais que são os elementos básicos que compõem as figuras geométricas dessa categoria são, dimensional- uma unidimensional, as demarcações internas de divisão do todo; e outra bidimensional - as áreas. Enquanto que as variáveis qualitativas são linhas retas – para os polígonos – e linha curva para os círculos; contornos fechados, cor, áreas congruentes, formas homogêneas – entre as subfiguras ou partes, justaposição das áreas demarcadas.

Quadro 2 – Figuras perceptuais.

FIGURAS PERCEPTUAIS (UM INTEIRO)	FIGURAS PERCEPTUAIS (MAIS DE UM INTEIRO)
	

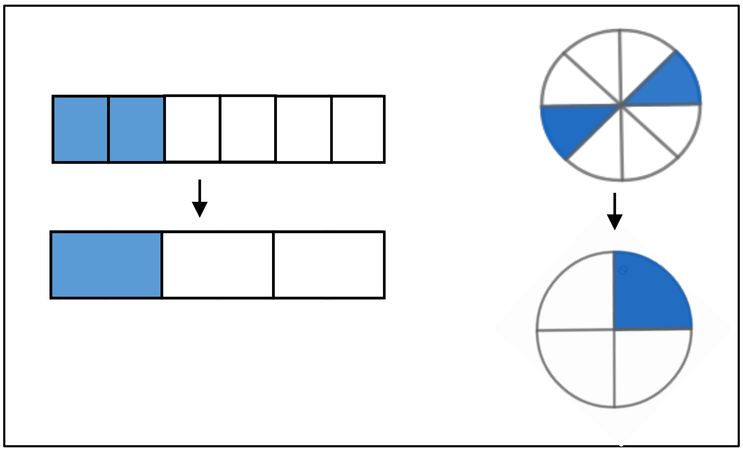
Fonte: autoria própria, 2018

Nas figuras perceptuais que representam um inteiro, de acordo com Carraher, Schliemann (1992), a conversão para o registro simbólico fracionário é realizada a partir de uma dupla contagem, do número de partes que foram pintadas ou hachuradas, e do número de partes que foi particionado o todo, correspondendo literalmente, ou seja, diretamente e respectivamente, ao numerador e denominador da fração. A fração resultado da conversão é denominada pelos pesquisadores em questão de fração de magnitude literal.

As figuras perceptuais são comparadas às denominadas como ‘completas’, na pesquisa de Behr, Post e Silver (1983), em que os autores procuram analisar a influência de distratores perceptuais na resolução de tarefas que requerem a conversão para o registro simbólico fracionário. São assim chamadas pois contêm todas as informações necessárias para esse tipo de conversão.

As figuras operatórias por inclusão das partes são polígonos, círculos, correspondentes a um inteiro, contínuo, particionado - com todas as demarcações internas de divisão explícitas - em áreas congruentes e formas homogêneas, justapostas, sendo algumas delas pintadas ou hachuradas, onde o número de partes pintadas pode ser relocadas como uma nova unidade de medida, permitindo assim, uma reconfiguração das partes que foi dividido o todo, conforme a Figura 5

Figura 5 – Figuras operatórias por inclusão das partes.



Fonte: autoria própria, 2018.

As unidades figurais que compõem as figuras geométricas dessa categoria são, dimensional - unidimensional - as demarcações internas de divisão do todo e outra bidimensional - as áreas. Enquanto que as variáveis qualitativas são linhas retas – para os polígonos – e linhas curvas para os círculos; contornos fechados, cor, áreas congruentes e formas homogêneas entre as subfiguras ou partes, justaposição das áreas demarcadas.

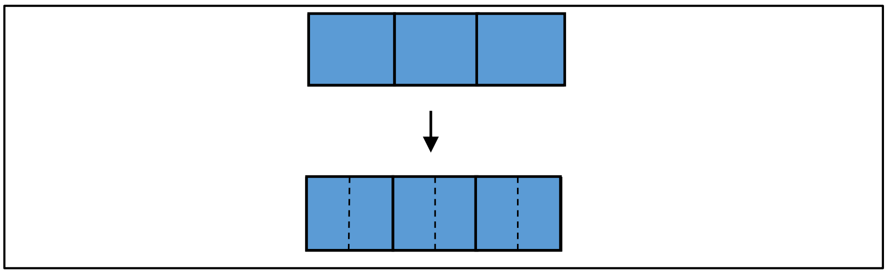
Apesar dessas figuras possuírem todas as informações necessárias para a interpretação parte-todo, de forma perceptual, sem necessidade de tratamento, para a conversão em uma fração de magnitude literal, nesse tipo de figura, podem também ser exploradas as relações de equivalência que, para isso a reconfiguração das partes ou subfiguras, se faz necessário como tratamento figural para esse fim.

Sendo assim, o procedimento da dupla contagem, número de partes pintadas e de partes do todo, dará conta da conversão em uma fração de ‘magnitude literal’ mas não de identificar uma nova unidade de medida para reconfiguração das partes do todo e posterior conversão no registro simbólico fracionário. O todo reconfigurado convertido para o registro simbólico fracionário terá como resultado uma fração de ‘magnitude relativa’, a qual, como afirmam Carraher, Schliemann (1992), possui numerador e denominador equivalentes às respectivas quantidades, número de partes pintadas, número de partes do todo, demonstradas na figura inicial.

Na pesquisa de Behr e Post (1981), as figuras operatórias por inclusão das partes são denominadas ‘irrelevantes’ sendo aquelas que contêm informações que necessitam ser ignoradas para a conversão no registro simbólico fracionário.

As relações de equivalência também podem ser trabalhadas com as figuras perceptuais por meio da reconfiguração por divisão de suas partes ou subfiguras em áreas congruentes, transformando-se, assim, numa figura com uma nova unidade de medida, menor do que a inicial, e com número maior de partes, conforme Figura 6. Sendo assim, a conversão para o registro simbólico fracionário terá como resultado uma fração de magnitude relativa.

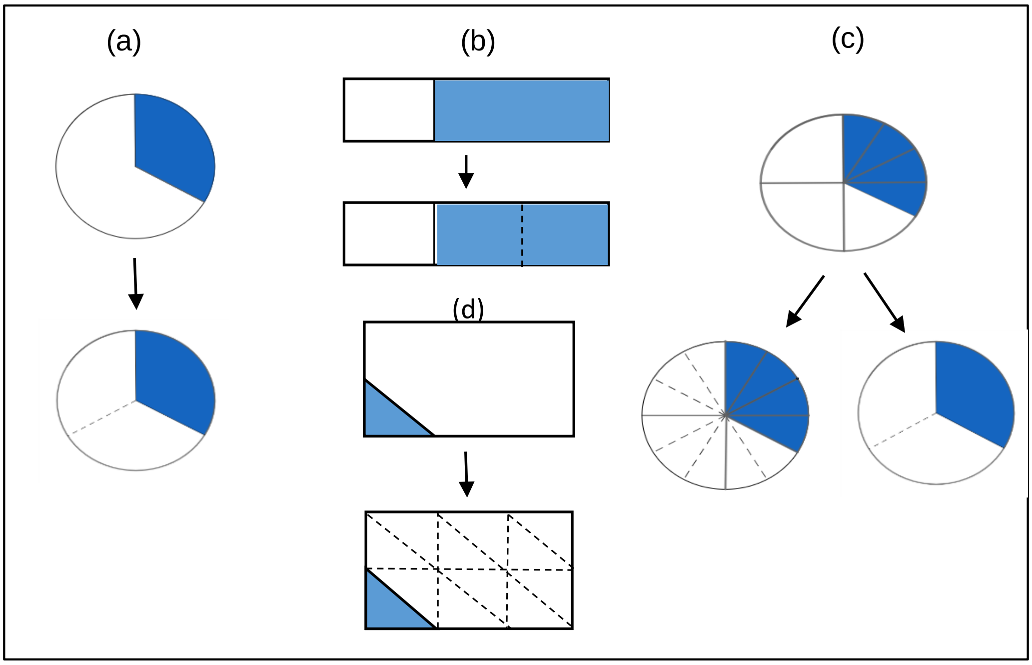
Figura 6 – Figura perceptual reconfigurada por divisão das partes internas.



Fonte: autoria própria, 2018.

As figuras operatórias por divisão são polígonos, círculos, correspondentes a um inteiro, contínuo, particionado – tendo algumas demarcações internas de divisão implícitas- em áreas explícitas diferentes e formas homogêneas, justapostas, sendo algumas delas pintadas ou hachuradas. Foram assim denominadas, por necessitarem de um tratamento, explícito ou não, de descoberta da unidade-parte e da divisão em partes ou subfiguras congruentes para que seja interpretada a relação entre as partes ou subfiguras hachuradas e o todo, conforme Figura 7.

Figura 7 – Figuras operatórias por divisão.



Fonte: autoria própria, 2018

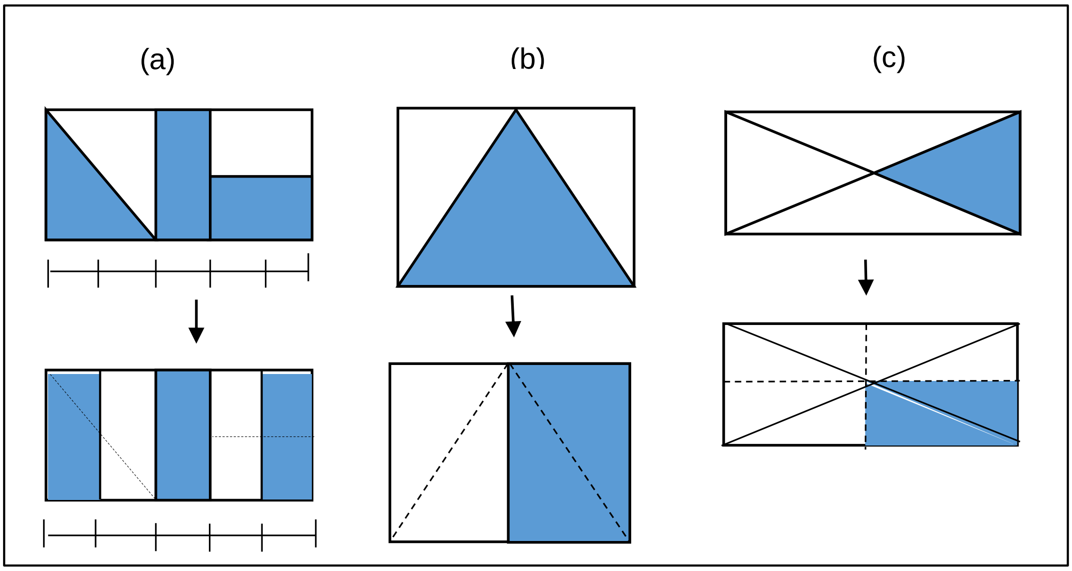
Na Figura 7(a), a unidade de medida é equivalente à área pintada. A figura foi particionada implicitamente em três dessas partes. Na Figura 7(b) a unidade de medida é equivalente à área não pintada. A figura foi particionada implicitamente em três partes, sendo duas delas pintadas. Enquanto que na Figura 7(c) existem duas unidades de medida. Podemos 'ver' o círculo dividido em doze partes de áreas iguais, tendo sido pintadas quatro delas, como também, em três partes de áreas iguais, tendo sido pintada uma delas.

As unidades figurais que compõem as figuras geométricas dessa categoria são, dimensional - unidimensional - as demarcações internas de divisão do todo e outra bidimensional - as áreas. Enquanto que as variáveis qualitativas são linhas retas – para os polígonos – e linhas curvas para os círculos; contornos fechados, cor, mesma forma e áreas diferentes.

Na pesquisa de Behr e Post (1981), as figuras operatórias por divisão são denominadas como ‘incompletas’ pois necessitam de informações que sejam adicionadas as existentes na figura.

As figuras operatórias por modificação das formas são polígonos, correspondentes a um inteiro contínuo, dividido em partes ou subfiguras de áreas congruentes e formas heterogêneas, justapostas, sendo algumas delas pintadas ou hachuradas, necessitando um tratamento na figura de desconstrução das formas das subfiguras, explícito ou não, para que as áreas congruentes sejam percebidas e adotadas como unidade de medida para o estabelecimento da relação das partes com o todo, conforme Figura 8.

Figura 8 - Figuras operatórias por modificação das formas.



Fonte: (a)(b) (SILVA, 2005); (c) (DAMICO,2007)

Na Figura 8 (a), é preciso operar sobre a figura para perceber que as áreas pintadas do triângulo e dos dois retângulos são congruentes. Para isso, tem que se constatar que o lado maior do retângulo particionado foi dividido em três segmentos, sendo que os dois maiores possuem a mesma medida e equivalem, cada um, ao dobro do segmento menor. E por meio do traçado de segmentos de reta realizar a desconstrução das formas das subfiguras para verificar a igualdade das áreas. Matematicamente, pode ser calculada a área das figuras para constatação das igualdades das partes.

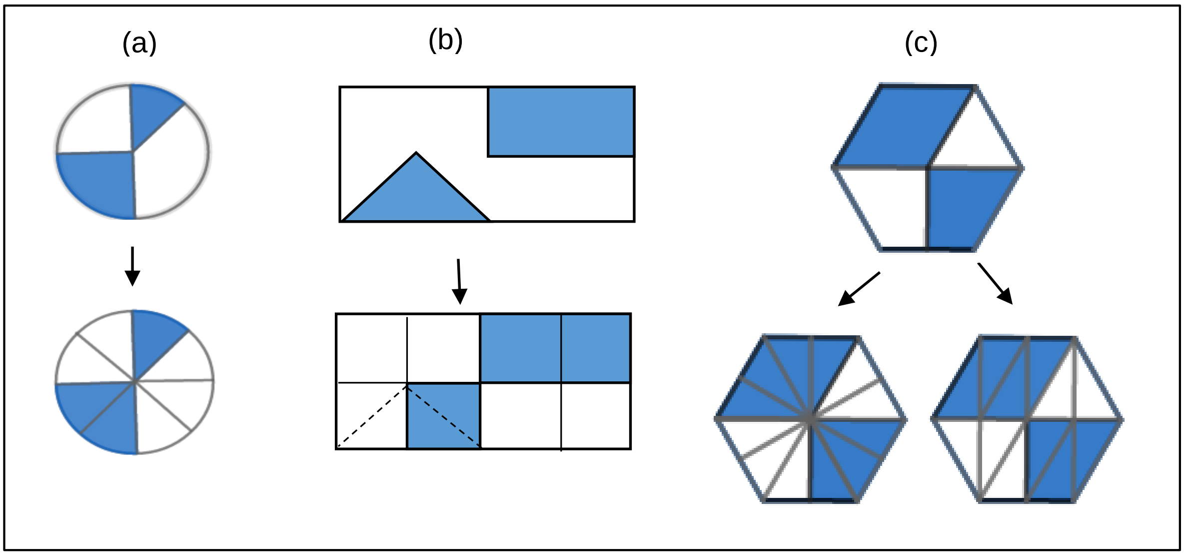
A Figura 8 (b) é um retângulo particionado em triângulos retângulos e isósceles. É necessário operar sobre a figura, por meio de desconstrução das partes, traçando o segmento que divide um dos lados do retângulo unidade ao meio para verificar a igualdade de área das mesmas ou demonstrar matematicamente.

Na Figura 8 (c), traçando os outros dois eixos de simetria do retângulo para desconstrução das formas das subfiguras, é possível verificar que o todo foi dividido em quatro partes iguais e pintada uma delas ou oito partes iguais, sendo duas dessas pintadas. Outra forma de verificar a igualdade das áreas seria calculando as mesmas.

As unidades figurais que compõem as figuras geométricas dessa categoria são, dimensional - unidimensional - as demarcações internas de divisão do todo e outra bidimensional - as áreas. Enquanto que as variáveis qualitativas são linhas retas; contornos fechados, cor, áreas congruentes e formas heterogêneas.

As figuras operatórias por modificação das áreas e das formas são polígonos, círculos, correspondentes a um inteiro contínuo, dividido em partes ou subfiguras de áreas diferentes e formas heterogêneas, justapostas, sendo algumas delas hachuradas ou pintadas, necessitando um tratamento no registro, qual seja a análise da relação existente entre as partes não congruentes e entre elas e o todo para desconstrução das formas das subfiguras e reconfiguração do todo na mesma unidade de medida, conforme Figura 9.

Figura 9 – Figuras operatórias por modificação das áreas e das formas.



Fonte:(a),(c) autoria própria, 2018; (b) Behr e Post (1981)

A Figura 9 (a) foi particionada em quatro subfiguras ou partes de áreas diferentes e formas heterogêneas, sendo pintadas duas delas. É necessário operar sobre a figura geométrica para que uma unidade comum de medida seja estabelecida. Por meio da análise entre as subfiguras ou partes pintadas podemos verificar que uma é o dobro da outra. Utilizando a subfigura ou parte de menor área como unidade de medida, obtemos um particionamento do todo em oito subfiguras ou partes de áreas congruentes e formas homogêneas.

A Figura 9 (b) foi particionada em três subfiguras ou partes de áreas diferentes e formas heterogêneas. Ao operar sobre a figura é verificada a relação entre as partes hachuradas e entre elas e o todo, permitindo descobrir a forma e área da unidade-parte.

A Figura 9 (c) foi particionada em quatro subfiguras ou partes de áreas diferentes e formas heterogêneas. É necessário operar sobre a figura para estabelecer a relação entre as partes ou subfiguras e a unidade de medida. O todo reconfigurado passa a ter doze partes ou subfiguras de áreas congruentes e formas homogêneas.

As unidades figurais que compõem as figuras geométricas dessa categoria são, dimensional - unidimensional - as demarcações internas de divisão do todo e outra bidimensional - as áreas. Enquanto que as variáveis qualitativas são linhas retas – para os polígonos – e linhas curvas para os círculos; contornos fechados, cor, áreas diferentes, justaposição das partes, formas heterogêneas.

As figuras operatórias por modificação das áreas e das formas são comparadas as denominadas como ‘inconsistentes’ na pesquisa de Behr e Post (1981), pois as demarcações internas de divisões devem ser ignoradas e realizada a reconfiguração do todo, com base em uma única unidade de medida. De acordo com esses pesquisadores esses tipos de figuras contêm elementos que atuam como ‘distratores perceptuais’ e tornam a conversão para o registro simbólico fracionário mais difícil de ser realizada pelos sujeitos em fase escolar.

3.2.2 Tipos de tratamentos requeridos pelo Registro Geométrico bidimensional dos Números Racionais

Duval (2011) afirma que as figuras geométricas são representações visuais que permitem reconhecer várias formas geométricas, concebidas como contornos fechados que são justapostos, superpostos ou separados na mesma figura; mesmo que o fato de reconhecer uma forma geométrica implique no não reconhecimento de outras. Uma figura geométrica para ser vista matematicamente necessita desse reconhecimento, implicando numa mudança de olhar sem que seja modificada sua representação visual.

De acordo com Duval (1994), os tratamentos que são intrínsecos às figuras geométricas não estão ligados a nenhum conhecimento matemático particular. Esses tratamentos estão relacionados com as possibilidades de modificações da figura, implícita ou explicitamente, a partir das relações das suas partes com o todo, como, por exemplo, a subdivisão ou inclusão de partes; ou aquelas que podem ser de origem ótica, como os casos de homotetia; ou ainda, posicional, transladando ou rotacionando uma figura.

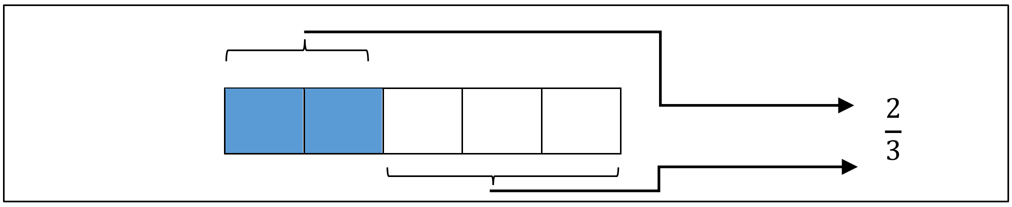
Duval (2011,2012) designa as formas de “ver” as figuras como apreensões do tipo perceptiva, discursiva, operatória e sequencial das figuras. O desenvolvimento do raciocínio envolvendo esse tipo de registro requer a devida distinção entre esses tipos de apreensões.

A apreensão perceptiva de formas geométricas é imediata, automática, espontânea, relativa aos elementos que se destacam da figura geométrica, sem análise dos elementos figurais e que nem sempre corresponde ao objeto matemático procurado. Esse tipo de apreensão está fortemente condicionada a uma congruência semântica entre o enunciado e a respectiva figura geométrica do problema, o que pode, conforme Duval (2012a) abrir ou fechar a porta de entrada para a resolução buscada.

As figuras geométricas normalmente utilizadas nos livros e materiais didáticos para trabalhar os números racionais geralmente se destacam por traços contínuos e fechados, seguindo a lei Gestáltica do fechamento e da continuidade a qual os traços da figura geométrica formam um contorno fechado, destacando uma determinada forma geométrica de um fundo. Essa lei, de acordo com Duval (2012b), acaba por impedir de ver traços mais simples e, assim, outras formas de organizações da figura geométrica; podendo ser a origem entre a diferença de uma ‘interpretação discursiva’, ou seja, uma interpretação das propriedades da figura geométrica, do enunciado, das hipóteses que sustentam o problema; e uma apreensão perceptiva da figura geométrica.

Em nossa pesquisa, as figuras geométricas do tipo perceptuais são círculos, polígonos particionados que apresentam todas as demarcações internas, cujas partes ou subfiguras possuem áreas congruentes e formas homogêneas, sendo algumas delas hachuradas ou pintadas. Impondo ao indivíduo que se detém a apreensão perceptiva, no momento em que realiza a conversão do registro geométrico para o simbólico fracionário, uma sistematização semanticamente congruente a relação parte-parte, ou seja, uma relação entre as partes hachuradas e as não hachuradas. Pois, o que se destaca de forma espontânea, imediata, nesse tipo de figura geométrica é a quantidade de partes pintadas das não pintadas, conforme Figura 10.

Figura 10 – Apreensão perceptiva na conversão do registro geométrico bidimensional para o simbólico fracionário dos racionais.



Fonte: autoria própria, 2018

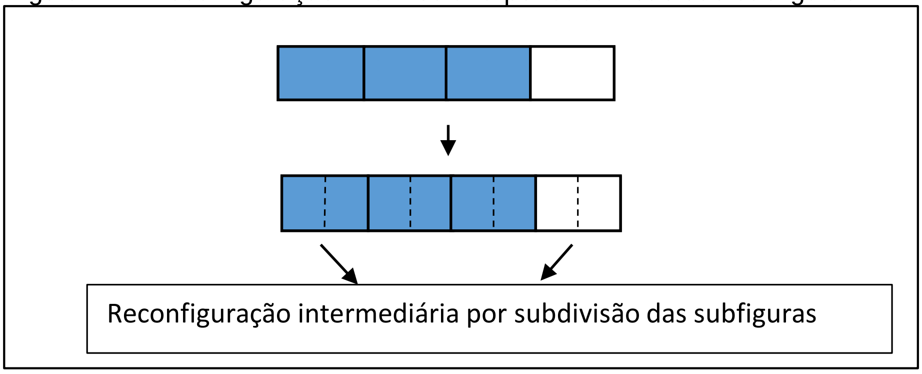
As figuras perceptuais exigem do indivíduo, no momento da conversão, uma ‘interpretação discursiva’ das unidades figurais básicas que compõem a figura geométrica, como número de áreas congruentes pintadas, número de áreas congruentes que o todo foi dividido, bem como, da relação dessas com as unidades de sentido do registro simbólico fracionário, numerador e denominador; como iremos observar no próximo capítulo. Duval (1994) afirma que esse tipo de apreensão em que é necessário apenas o reconhecimento das formas geométricas de uma figura pode ser chamada de gestáltica e corresponde ao nível I das apreensões geométricas. O nível II seria aquele que envolve a apreensão operatória das figuras geométricas.

A apreensão operatória das figuras é aquela “centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas figuras” (DUVAL, 2012b p. 125). Se a modificação ocorrer por divisão ou inclusão das partes da figura geométrica, ou seja, em função das partes com o todo, é chamada pelo autor de ‘mereológica’. Caso a modificação seja para aumentar, diminuir ou deformar a figura geométrica, é denominada de ‘ótica’. Se for necessário transladar, rotacionar a figura geométrica em relação a um eixo de referência, a modificação é do tipo ‘posicional’.

As figuras geométricas que compõem o registro geométrico bidimensional dos números racionais, categorizadas em nosso estudo pelos tipos, perceptuais, operatórias por inclusão das partes, operatórias por divisão, operatórias por modificação das formas e operatórias por modificação das áreas e das formas, podem requerer modificações do tipo ‘mereológica’, pela operação denominada por Duval (2012b) de ‘reconfiguração intermediária’. Esse tipo de tratamento se caracteriza pelo particionamento da figura geométrica em subfiguras ou partes do todo que as contém, podendo ter as mesmas formas geométricas, ou seja, serem homogêneas, terem formas geométricas diferentes ou heterogêneas. O tratamento permite verificar, por exemplo, a congruência entre as áreas das partes ou subfiguras reconfiguradas, ou a equivalência entre o número das partes ou subfiguras pintadas ou hachuradas, reconfiguradas, e o número de partes ou subfiguras pintadas ou hachuradas da figura inicial.

Nas figuras perceptuais, a operação de reconfiguração intermediária pode ser utilizada para subdivisão homogênea das subfiguras, no sentido de obter uma figura em que a relação das partes com o todo desta seja equivalente à relação das partes com o todo da figura inicial, conforme Figura 11. Nesse caso, diríamos, segundo Carraher, Schliemann (1992), que essa relação das partes com o todo após a reconfiguração é de magnitude relativa em relação à figura inicial.

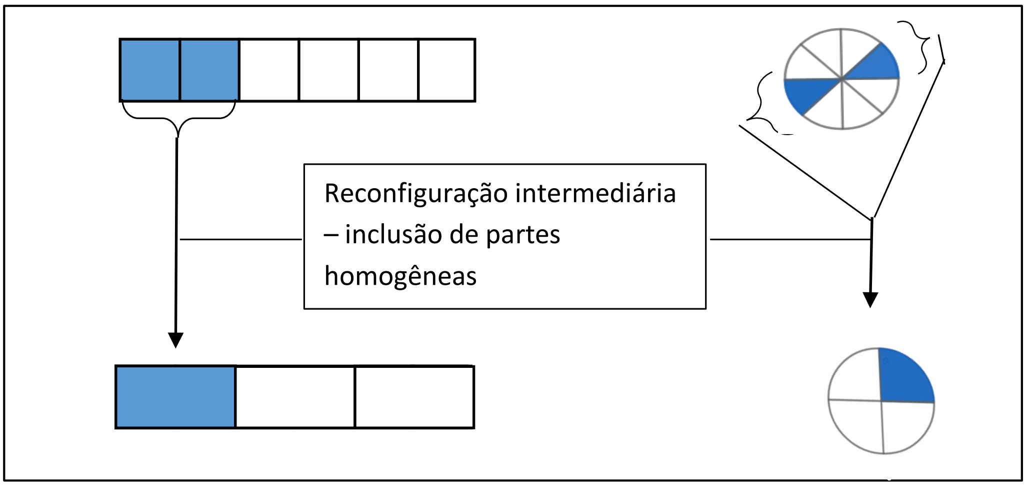
Figura 11 – Reconfiguração intermediária por subdivisão das subfiguras.



Fonte: autoria própria, 2018

Como também, a operação de reconfiguração intermediária pode ser utilizada nesses tipos de figuras para a inclusão de subfiguras de formas homogêneas. A figura assim obtida terá um número menor de partes, entretanto, a relação das partes com o todo desta será equivalente à da figura inicial, conforme Figura 12.

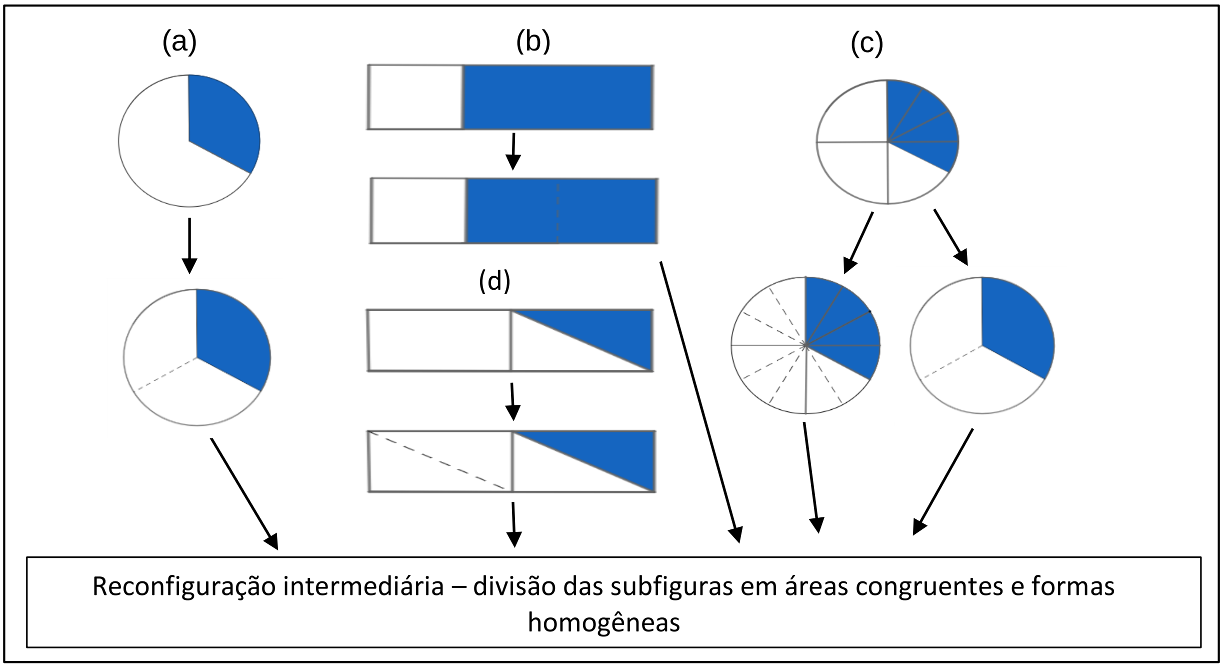
Figura 12 - Reconfiguração intermediária por inclusão das subfiguras.



Fonte: autoria própria, 2018

As figuras operatórias por divisão são aquelas que não possuem o particionamento explícito. A operação de reconfiguração intermediária visa então o fracionamento da figura em subfiguras de áreas congruentes e formas homogêneas, resultando numa figura simetricamente dividida. Em outras palavras, a reconfiguração intermediária será utilizada para particionar o todo, na unidade de medida que permitirá a simetria entre as partes, como se pode verificar na Figura 13.

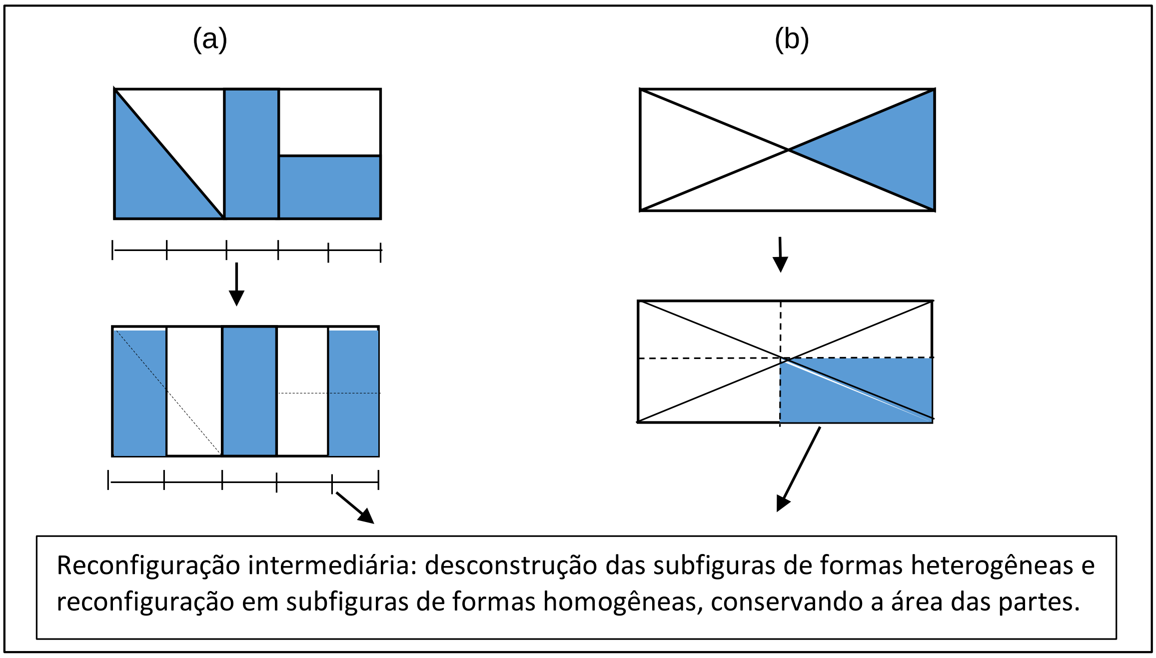
Figura 13 – Reconfiguração intermediária por divisão das subfiguras



Fonte: autoria própria, 2018

Nas figuras operatórias por modificação das formas, a operação de reconfiguração se constituirá na desconstrução das subfiguras de formas heterogêneas e na reconstrução em formas homogêneas para que a congruência das áreas, e consequentemente das partes, possam ser vislumbradas, ver Figura 14.

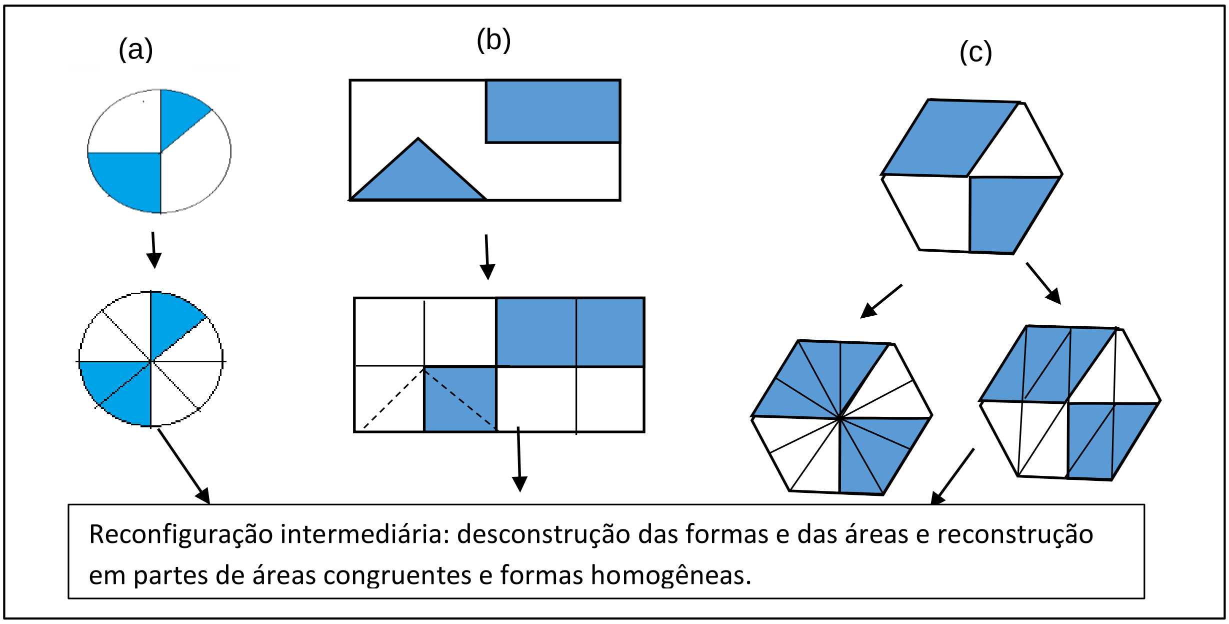
Figura 14 – Reconfiguração intermediária por modificação das formas heterogêneas



Fonte: autoria própria, 2018

As figuras operatórias por desconstrução das áreas e das formas necessitam da operação de reconfiguração intermediária para desconstrução das subfiguras, no que se refere às formas e áreas, para que seja verificada a relação entre as partes hachuradas e não hachuradas e a relação destas com o todo e descoberta a forma e área da unidade-parte, conforme Figura 15.

Figura 15 - Reconfiguração intermediária por desconstrução das formas e áreas heterogêneas



Fonte: autoria própria, 2018

A apreensão sequencial é descrita por Duval (2012b) como requerida em atividades em que seja necessária a construção ou a descrição de uma figura geométrica. No caso de conversão entre os registros dos números racionais, esse tipo de apreensão é requisitado quando realiza a conversão do registro simbólico fracionário para o registro geométrico bidimensional.

3.2.3 As conversões entre o registro geométrico bidimensional e o simbólico fracionário: alguns resultados de pesquisas.

Na pesquisa realizada por Lesh et al (1983) foi aplicado um teste para avaliar os conceitos de números racionais com 650 alunos do 4° ao 8° graus das cidades de Evanston, Minneapolis, DeKalb e Pittsburgh, nos Estados Unidos. No item 31, envolvendo a conversão do registro geométrico bidimensional dos racionais para o simbólico fracionário, a qual a figura geométrica era do tipo que denominamos perceptual, conforme Figura 16, o índice de acertos foi em média de 82,9%.

Figura 16 – Item 31 da pesquisa de Behr e Post (1981)

31. What fraction of this rectangle is shaded?

a. $\frac{1}{5}$ b. 4 c. $\frac{1}{4}$ d. $\frac{3}{2}$ e. not given

Item C-16 (31): .829, Grades 4–8, n = 650.
a) 539 b) 9 c) 70 d) 5 e) 21 na) 6
G4–.674 (19/43) G5–.839 (13/43) G6–.847 (15/60) G7–.938 (13/60) G8–.926 (14/60)

Fonte: Lesh et al (1983)

Entretanto, quando a conversão envolveu uma figura geométrica do tipo que denominamos operatórias por modificação das formas, como no item 33 da mesma pesquisa, destinada a avaliar as operações com números racionais em 210 alunos do 7° ao 8° graus, o índice médio de acertos diminuiu para 45,7%, conforme Figura 17.

Figura 17 – Item 33 da pesquisa de Behr e Post (1981)

33. What fraction of this diagram is shaded?

a. $\frac{3}{5}$, since there are 3 shaded parts and 5 unshaded parts.
b. $\frac{4}{8}$, since $\frac{2}{4}$ of $\frac{1}{2}$ plus $\frac{1}{4}$ of $\frac{1}{2}$ = $\frac{4}{8}$.
c. $\frac{5}{8}$, since $\frac{1}{4}$ of $\frac{1}{2}$ is $\frac{1}{8}$, and $\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$.
d. $\frac{3}{8}$, since $\frac{2}{4}$ of $\frac{1}{2}$ plus $\frac{1}{4}$ of $\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{8}$.
e. not given

Item O-14 (33): .457, Grades 7–8, n = 210.
a) 28 b) 32 c) 18 d) 96 e) 30 na) 6
— — — G7–.450 (15/35) G8–.462 (24–35)

Fonte: Lesh et al (1983)

A solução que leva ao objeto matemático requerido visa fazer o aluno concluir pela igualdade das áreas sombreadas, divisão do inteiro em oito partes de mesma área, e finalmente a conversão buscada, 3/8. Essa solução passa pela reconfiguração da figura geométrica de modo que permita 'ver' a congruência entre as áreas sombreadas.

O índice de acertos foi consideravelmente menor do que o dos itens 31(do teste de conceitos) e 33 (do teste de operações), quando o item envolveu uma figura que denominamos de operatória por modificação das áreas e das formas. O item 35 (teste de operações), conforme Figura 18, requeria do aluno o mesmo tipo de conversão.

Figura 18 – Item 35 da pesquisa de Behr e Post (1981).

34. What part of this diagram is shaded?

a. $\frac{2}{6}$ or $\frac{1}{3}$ b. $\frac{2}{4}$ or $\frac{1}{2}$ c. $\frac{2}{12}$ or $\frac{1}{6}$ d. $\frac{3}{8}$
e. not given

Item O–35 (34): .080, Grades 7–8, n = 210.
a) 55 b) 33 c) 14 d) 17 e) 73 na) 18
— — — G7–.068 (35/35) G8–.092 (35/35)

Fonte: Lesh et al (1983)

A solução buscada passava pela desconstrução das partes ou subfiguras e reconstrução das mesmas em formas homogêneas e áreas congruentes. Para isso, o aluno teria que verificar a relação entre as partes hachuradas e entre elas e o todo contínuo, para descobrir a unidade-parte e a resposta correspondente a 3/8. O índice de acertos foi de apenas 8%, tendo sido o item mais difícil do teste que abordava operações com números racionais.

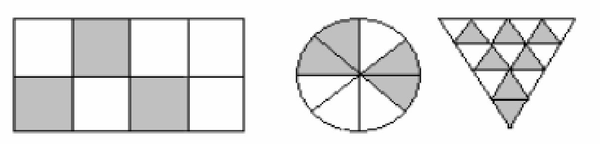
Acreditamos que entre os motivos que justificam o menor índice de acertos, e consequentemente, maiores dificuldades de conversão do registro geométrico bidimensional para o simbólico fracionário dos racionais é a não congruência semântica entre a representação de partida no registro geométrico bidimensional e a representação de chegada no registro simbólico fracionário.

Podemos inferir, pelos respectivos resultados, que entre os itens 31, 33 e 34, que envolviam respectivamente as figuras, perceptual, operatórias por modificação das formas e operatórias por modificação das áreas e das formas; o primeiro item (31), seria aquele com o menor grau de não congruência semântica (82,9% de acertos) e o terceiro, item (34), o que ofereceu maior grau de não congruência semântica (8% de acertos).

Silva (2006) realizou um teste diagnóstico com 630 alunos entre as séries finais do Ensino fundamental e Ensino Médio, de duas escolas públicas de Recife, composto de dez questões envolvendo: os significados dos números racionais parte-todo, quociente e operador; a influência de figuras nos itens; quantidades discretas e contínuas e equivalência de frações. O item seis do teste diagnóstico solicitava a conversão do registro geométrico bidimensional para o simbólico fracionário (Figura 19).

Figura 19 – Item seis da pesquisa do Teste Diagnóstico da pesquisa de Silva (2006).

06) Diga que fração está representada na parte pintada, em cada uma das figuras abaixo: a) b) c)



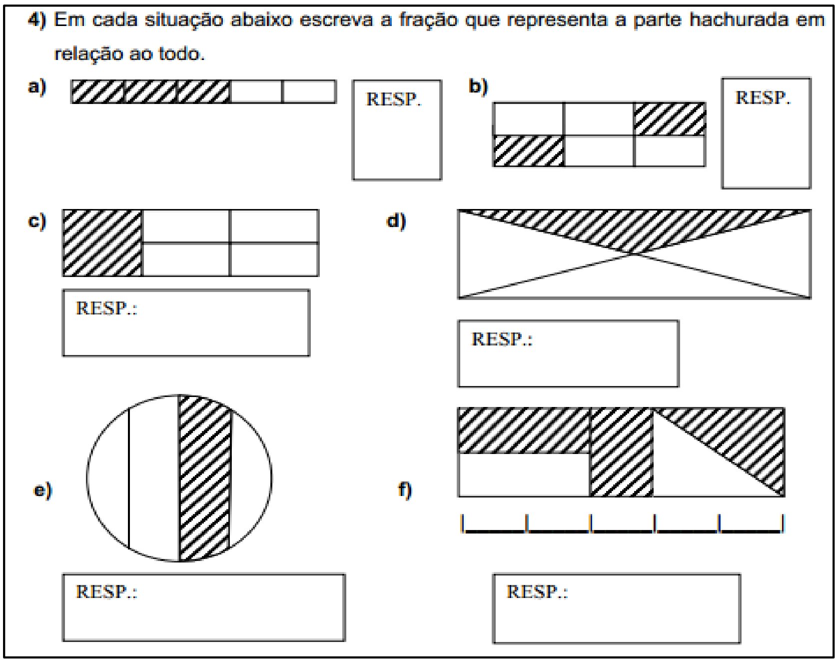
Fonte: Silva (2006) p. 73

No item seis, Silva (2006) utilizou três figuras, das quais a 6(b) poderia mobilizar a ideia de equivalência. As Figuras 6(a) e 6(c) são denominadas em nossa pesquisa de perceptual, por apresentar, explicitamente, todos os elementos necessários para a correspondência com as unidades simbólicas no registro fracionário e ter como solução uma fração de magnitude literal (3/8 e 7/16 respectivamente). A segunda figura, denominamos de operatória por inclusão das partes, pois necessita que as partes ou subfiguras sejam reconfiguradas para termos como solução uma fração de magnitude relativa (1/2). Entretanto, podemos também ter como solução uma fração literal (4/8) para o caso dela ser tratada como uma figura perceptual.

Os resultados obtidos indicaram uma proximidade de acertos entre as conversões relativas às três figuras, tendo sido a Figura 6(b) tratada como perceptual, ou seja, os acertos só envolveram a fração 4/8 como resultado. Em média, foram 45%, 44% e 44%, de acertos, respectivamente, para as conversões envolvendo as Figuras 6(a), 6(b) e 6(c). Esses resultados parecem demonstrar um mesmo grau de não congruência semântica para as conversões que envolvem esses tipos de figuras (perceptuais). Como, também, corroboraram com a nossa pesquisa que tipifica essas figuras como fazendo parte de uma mesma classe[22] (figuras perceptuais), independente das formas geométricas homogêneas que tenham essas partes ou subfiguras.

Damico (2007), investigando os conhecimentos relacionados ao conceito de número racional, com 189 alunos iniciantes e 157 alunos concluintes do curso de licenciatura em matemática, aplicou, entre outros instrumentos, uma avaliação contendo vinte questões envolvendo conceitos fundamentais desse campo numérico. Entre essas questões, o item 4 solicitava a conversão do registro geométrico bidimensional para o fracionário, conforme Figura 20.

Figura 20 - Questão do instrumento 3 de Damico (2007).



Fonte: Damico (2007 p. 126)

[22] Entendemos que a figura 6(b) foi tratada na pesquisa de Silva (2006) apenas como perceptual, por ter tido apenas respostas corretas que tinham como resultado a fração de magnitude literal.

Os resultados obtidos, no item 4, dão conta de um percentual maior de acertos entre os alunos iniciantes, em todas as conversões realizadas, conforme Figura 21. Na letra (e), situação que não representa uma relação parte-todo, pois não há congruência entre as áreas das partes, 73% dos alunos iniciantes e 78,5% dos alunos concluintes associaram a figura à fração 1/4. Apenas 3% dos alunos iniciantes e nenhum aluno concluinte foram capazes de reconhecer a não congruência das áreas. Entretanto, inferirmos que o enunciado da questão sugere ao aluno que todas as representações podem ser representadas por fração, portanto, favorece para que os mesmos tentem encontrar uma fração que satisfaça a letra (e), induzindo, ao nosso ver, o aluno ao erro.

Figura 21 - Resultados obtidos na questão 4 de Damico (2007).

Tabela 4: O subconstruto parte-todo

RESPOSTAS DADAS PELOS ALUNOS	INICIANTES	CONCLUINTES
Associou a fração 3/5 à figura do item *a*.	131 (97,0%)	163 (86,2%)
Associou a fração 2/6 ou 1/3 à figura do item *b*.	129 (95,6%)	160 (84,6%)
Associou a fração 2/6 ou 1/3 à figura do item *c*.	103 (76,3%)	109 (57,7%)
Associou a fração 1/4 à figura do item *d*.	117 (86,7%)	157 (83,1%)
Associou a fração 1/4 à figura do item *e*.	138 (73,0%	106 (78,5%)
Alegou não ter como identificar a fração correspondente à figura do item *e*.	04 (3,0%)	00 (0,0%)
Associou a fração 3/5 à figura do item *f*.	109 (80,7%)	101 (53,4%)

Fonte: Instrumento 3.

Fonte: Damico (2007 p. 126)

Entre as Figuras (a) e (b), podemos observar que a característica das partes serem contíguas (a) ou não contíguas (b) não parecem representar um fator que interfere no momento da conversão, pois os percentuais de acertos entre os alunos iniciantes foram respectivamente, 97% e 95%. E entre os alunos concluintes, 86,2% e 84,6%. Apesar da Figura (b) poder ser convertida numa fração de magnitude relativa, as respostas corretas também envolveram a que leva em consideração o procedimento da dupla contagem, 2/6. Acreditamos que esse foi o motivo das duas figuras terem percentuais próximos, apesar da Figura (b) poder ser explorada heuristicamente e ter também como resultado 1/3. Pois, nas entrevistas realizadas com 15 alunos, foi observado que apenas 4 deles realizaram a conversão fazendo o tratamento da inclusão das partes, inicialmente, para obter uma fração de magnitude relativa.

Entretanto, entre as Figuras (a) e (b), e a Figura (c), a qual denominamos, operatória por divisão das partes, podemos perceber uma diminuição importante no percentual de acertos entre os alunos. Para os alunos iniciantes, acertos de 76,3% e de 57,7% para os concluintes. Esses resultados corroboram com a classificação proposta em nossa pesquisa que indica que essas figuras são de tipos diferentes, (a) e (b) figuras perceptuais (estamos considerando a Figura (b) perceptual devido a pesquisa ter considerado as respostas à esse item referentes a dupla contagem); (c) figuras operatórias por divisão das partes. Indicando, ainda, exprimirem graus de não congruência semântica diferentes no momento da conversão.

Entre as Figuras (d) e (f), as quais classificamos como operatórias por modificação das formas, era preciso realizar um tratamento para que a congruência entre as áreas das partes ou subfiguras fosse visualizada. Os percentuais de acertos para essas duas figuras, entre os alunos iniciantes, foram de 86,7% e 80,7% e, entre os alunos concluintes, de 83,1% e 53,4%. Entretanto, nas entrevistas realizadas com 15 alunos foi constatado que, apesar de terem sido 9 respostas corretas para a conversão da Figura (d), 4 desses sujeitos haviam realizado apenas a dupla contagem. Situação parecida ocorreu com a Figura (f), dos 13 alunos que responderam corretamente, 9 deles utilizaram, tão somente, o procedimento da dupla contagem.

Silva (1997) constatou que a concepção de futuros professores das séries iniciais, ao associarem frações às figuras geométricas, é que necessariamente as figuras deveriam estar particionadas em subfiguras de formas homogêneas e áreas congruentes. Santos (2005), Teixeira (2008) e Costa (2011) reiteram Campos et al (2006) quando afirmam que os professores, participantes das referidas pesquisas ao serem solicitados a elaborar questões envolvendo ícones no campo dos números racionais, priorizaram o significado parte-todo envolvendo figuras geométricas, notadamente, círculos, triângulos e retângulos, divididas em partes ou subfiguras de áreas congruentes e formas homogêneas. Tais práticas reforçam o uso do procedimento da ‘dupla contagem’, com prejuízo da exploração heurística da figura geométrica que leva a compreensão das relações envolvidas: entre as partes, o todo e as partes, e as partes e o todo.

Damico (2007) aponta como sendo um dos sérios problemas subjacentes à compreensão do significado parte-todo, no registro geométrico bidimensional, a fragilidade dos sujeitos relacionada à noção de área. Como também, afirma o pesquisador, que a instabilidade por parte do sujeito na compreensão da unidade e de seu particionamento em áreas congruentes, no registro geométrico bidimensional, levam à dificuldades, quanto à identificar a relação de equivalência, bem como, compreender a adição de frações e o significado do mínimo múltiplo comum (m.m.c.).

Complementando essa ideia, acreditamos que as fragilidades dos sujeitos perpassam pelos tratamentos que são específicos do registro geométrico bidimensional e que não são levados em conta, no momento da aprendizagem desse campo numérico. Pois, como afirmam Campos et al (2006),

> As situações com significado parte-todo, muito usadas no ensino de fração no Brasil, resumem-se, em geral, em dividir uma área em partes iguais, em nomear uma fração como o número de partes pintadas sobre o número total de partes e em analisar a equivalência e a ordem da fração por meio da percepção. Tais ações levam os alunos a desenvolverem seus raciocínios sobre fração baseados principalmente na percepção, em detrimento das relações lógico-matemáticas (CAMPOS et al, 2006 p. 128).

O sujeito, ao não ultrapassar os limites das divisões explícitas identificadas nas figuras e ao não estabelecer a relação parte-todo, não dá significado à necessidade de congruência das áreas das partes ou subfiguras e "valoriza exageradamente o traço das divisões, em detrimento à igualdade das partes." (CAMPOS et al, 1995 p. 11). Para o desenvolvimento da relação parte-todo, as representações geométricas bidimensionais exigem "discussão e comparação do "tamanho" e "formas", o que não ocorre na dupla contagem." (idem p. 13).

Com base nos dados das pesquisas descritas nesse item e nas análises teóricas desenvolvidas durante essa pesquisa, propomos no próximo capítulo uma classificação para os graus de não congruência semântica na conversão entre os registros, geométrico bidimensional e simbólico fracionário, dos números racionais.

CAPÍTULO 4. ANÁLISE E CLASSIFICAÇÃO DAS CONVERSÕES ENTRE OS REGISTROS GEOMÉTRICO BIDIMENSIONAL E O SIMBÓLICO FRACIONÁRIO DOS NÚMEROS RACIONAIS

A análise das conversões que tiveram como registro de partida o geométrico bidimensional e como registro de chegada o simbólico fracionário, ambos registros de representações dos números racionais, teve como base a classificação das figuras geométricas pertencentes ao registro geométrico bidimensional, discutidas no capítulo 3.

Além dela, consideramos como categorias de análise: 1) unidades figurais - definidas a partir das variáveis, visuais - dimensionais e qualitativas (DUVAL, 2004); 2) tipos de apreensões geométricas (DUVAL, 1994, 2004, 2012b) requeridas pelas figuras geométricas do registro de partida, no momento da conversão; 3) as unidades simbólicas do registro de chegada; 4) os critérios de congruência semântica definidos em Duval (2004, 2009, 2011), correspondência semântica entre as unidades de sentido e univocidade semântica terminal.

O terceiro critério de congruência semântica definido por Duval (op.cit), ‘mesma ordem das unidades de sentido’, não foi considerado em nosso estudo, por não ser aplicável, pois o registro geométrico bidimensional, como registro de partida, não necessariamente determina uma ordem de escrita no registro de chegada.

4.1 GRAU 1 DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

Nesse nível estarão as conversões que envolvem as figuras perceptuais que representam um inteiro.

A conversão que tem como registro de partida o geométrico bidimensional dos racionais e como registro de chegada o simbólico fracionário, envolvendo figuras perceptuais, de acordo com Vizcarra e Sallánn (2005), necessita que o sujeito: identifique no registro geométrico as partes congruentes[23] que formam o todo, e

---

[23] Consideramos partes congruentes aquelas que possuem áreas congruentes e formas homogêneas.

aquelas destacadas; realize a dupla contagem, a das partes congruentes do todo e a das partes destacadas; e represente no registro simbólico fracionário o resultado da contagem. Acima do traço de fração estará o valor numérico correspondente ao da contagem das partes destacadas e, abaixo do traço de fração, o valor numérico equivalente à contagem das partes que compõem o todo. Por não ser preciso fazer qualquer modificação na figura, nos leva a afirmar que requer do sujeito uma apreensão do tipo perceptual, conforme Duval (2012b), bem como uma apreensão discursiva entre as unidades figurais e as simbólicas, no registro simbólico fracionário.

.As unidades figurais do registro de partida envolvendo figuras perceptuais, as quais acreditamos influenciar na conversão para o registro simbólico fracionário, são sete, sendo, uma unidimensional, as demarcações internas de divisão do todo, contínuo, em partes congruentes justapostas; uma unidade figural bidimensional, as áreas congruentes das partes ou subfiguras que compõem o todo; além das unidades figurais qualitativas, cor ou hachuramento de algumas das partes ou subfiguras do todo, ausência de cor, formas homogêneas das subfiguras, quantitativo das partes com cor e quantitativo das partes com cor e ausência de cor. Enquanto que as unidades de sentido do registro de chegada são o número natural, que representa o numerador, o traço de fração e o número natural diferente de zero que representa o denominador.

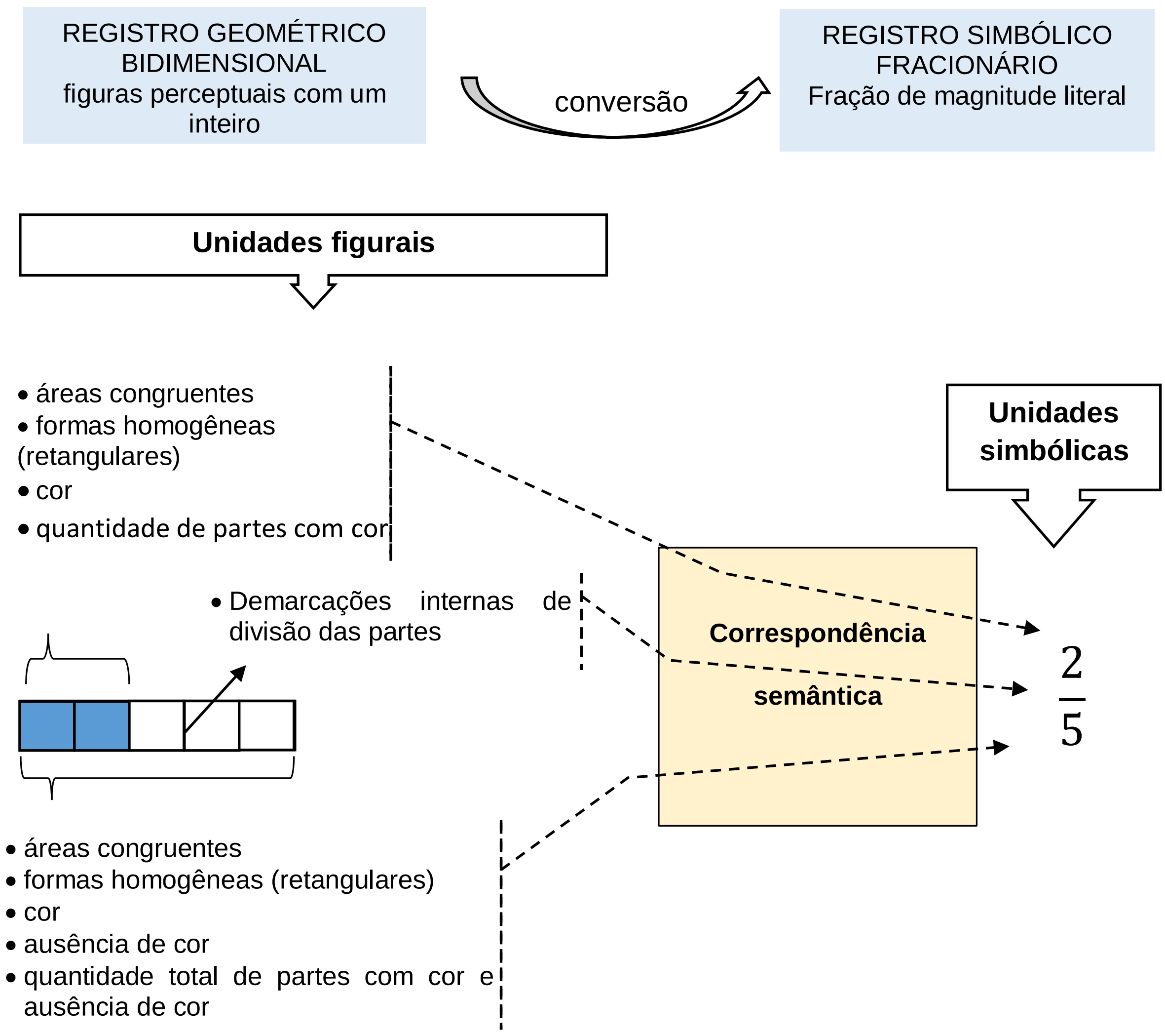
As demarcações internas de divisão do todo, contínuo, em partes congruentes justapostas se correspondem semanticamente, de forma ‘simples’, com o traço de fração, no registro de chegada. Consideramos uma correspondência ‘simples’ porque uma unidade figural, as demarcações internas de divisão do todo se corresponde com uma unidade simbólica, o traço de fração, no registro de chegada. Pois o traço de fração significa uma relação entre as partes congruentes de um todo e esse todo. As demarcações internas de divisão favorecem a visualização das partes congruentes do todo.

As unidades figurais, áreas das partes ou subfiguras congruentes, formas homogêneas das partes ou subfiguras, cor e quantidade total de partes ou subfiguras com cor ou hachuramento, se correspondem semanticamente de forma combinada[24] com o numerador da fração. Enquanto que as unidades figurais áreas congruentes

[24] Correspondência de forma combinada é quando há mais de uma unidade significante no registro de partida se relacionando com uma unidade significante no registro de chegada.

das partes ou subfiguras, formas homogêneas das partes ou subfiguras, cor, ausência de cor e quantidade total de partes ou subfiguras com cor e ausência de cor do todo se correspondem semanticamente com o denominador da fração. A Figura 22 é um exemplo da análise da conversão envolvendo esse tipo de figura.

Figura 22 - Esquema relativo a conversão de não congruência semântica entre uma figura perceptual com um inteiro do registro geométrico bidimensional dos números racionais e a representação simbólica no registro simbólico fracionário.



Fonte: autoria própria, 2018

Áreas congruentes, formas homogêneas e cor são unidades figurais consideradas tanto para a correspondência semântica com a unidade simbólica numerador, quanto para o denominador, como ilustrado na Figura 22. Portanto, o critério de congruência semântica “univocidade semântica terminal” é obedecido apenas entre a unidade figural, demarcações internas de divisão do todo, no registro de partida, e a unidade de significado traço de fração, no registro de chegada, pois uma unidade figural se corresponde com uma única unidade no registro de chegada. Como também, entre as unidades figurais, ausência de cor e quantidade de partes ou subfiguras com cor e ausência de cor do todo, e o denominador da fração.

Como o critério de univocidade semântica terminal não é observado para todas as correspondências semânticas entre as unidades de sentido, inferimos, de acordo com Duval (1995), que não há congruência semântica na conversão entre esses registros, envolvendo as figuras perceptuais com um inteiro, no registro de partida. Sendo assim, o Quadro 3 sintetiza a análise da conversão entre os registros utilizando os critérios de congruência semântica.

Quadro 3 - Critérios de Congruência semântica na conversão entre figuras perceptuais do registro bidimensional dos racionais e a fração no registro simbólico fracionário.

CORRESPONDÊNCIA ENTRE AS UNIDADES DE SENTIDO DOS REGISTROS		SEGMETAÇÃO COMPARATIVA	CORRESPONDÊNCIA SEMÂNTICA ENTRE AS UNIDADES DE SENTIDO	UNIVOCIDADE SEMÂNTICA TERMINAL
Unidades figurais (subfiguras)	Unidades simbólicas			
Áreas congruentes	n	combinada	Sim	não
Formas homogêneas			sim	não
Cor			sim	não
Quantidade total de partes com cor			sim	não
Demarcações internas de divisão do todo	*/*	simples	sim	sim
Áreas congruentes	m	combinada	sim	não
Formas homogêneas			sim	não
Cor			sim	não
Ausência de cor			sim	sim
Quantidade total de partes com cor e ausência de cor			sim	sim

Fonte: autoria própria, 2018

Acreditamos que é a não congruência semântica que leva os sujeitos a erros do tipo ‘relação parte-parte’, apontados pelas pesquisas de Merlini (2005), Santos (2011) como sendo erros frequentes, em que o sujeito em tarefas que necessitam desse tipo de conversão, realizam a contagem das partes ou subfiguras hachuradas para o valor do numerador e das partes ou subfiguras não hachuradas para o denominador. A conversão, ao ser realizada erroneamente dessa forma, preserva o critério da univocidade semântica terminal para a correspondência entre a unidade figural, cor e o valor correspondente ao numerador da fração e entre a unidade figural ausência de cor e o denominador da fração. Dessa forma, favorece a percepção de uma congruência semântica, sem que haja a equivalência referencial. Como afirma Duval (2012a), o funcionamento espontâneo do pensamento tende a manter a congruência semântica. Os sujeitos que se prendem apenas a ela são aqueles em os aspectos visuais sobrepõem aqueles lógico-matemáticos.

4.2 GRAU 2 DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

Nesse nível de não congruência semântica estarão as conversões que envolvem as figuras perceptuais que representam mais de um inteiro, como registro de partida.

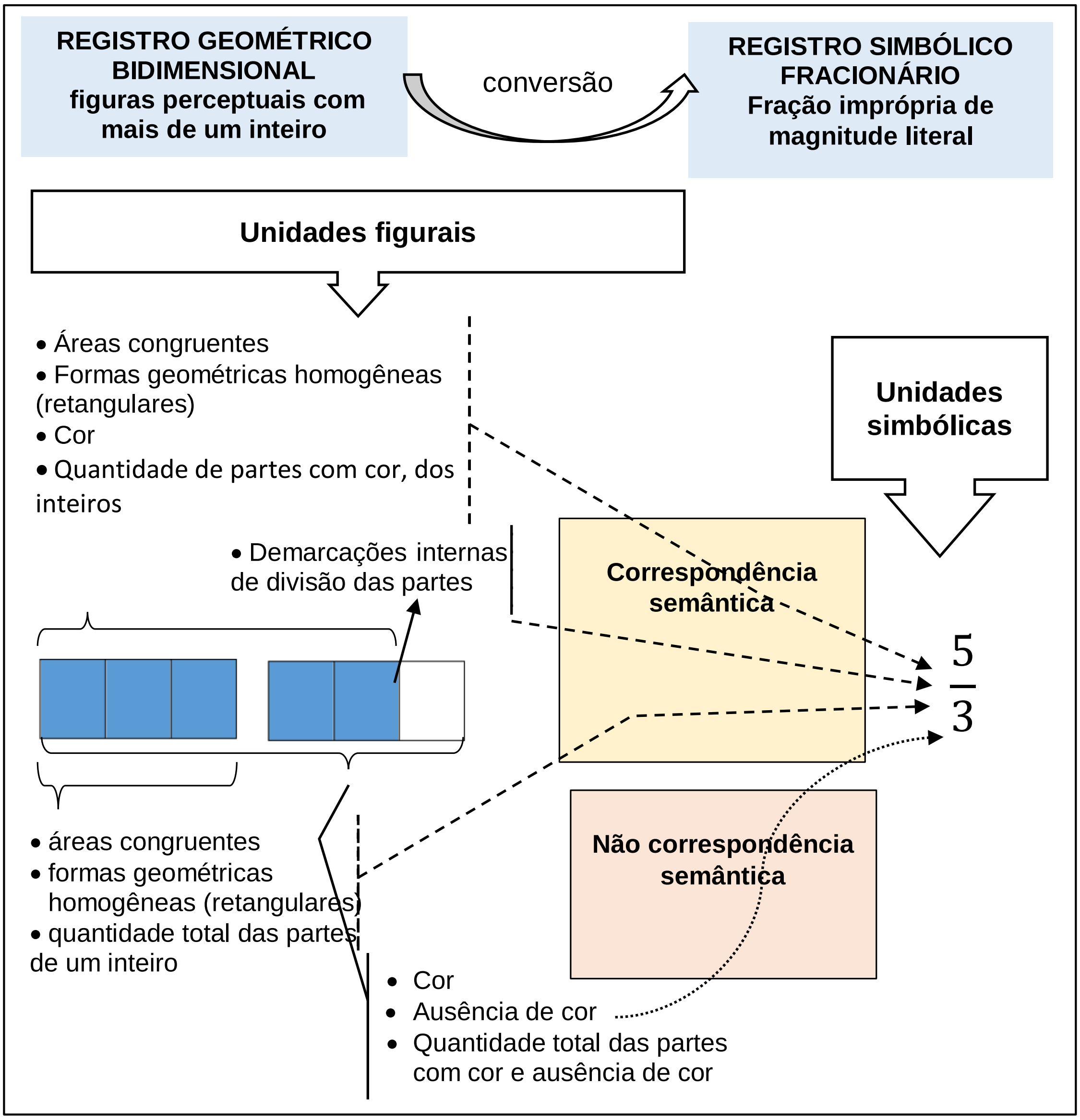
A conversão que tem como registro de partida figuras perceptuais que representam mais de um inteiro, assim como nas conversões de figuras perceptuais com um inteiro, requer do sujeito uma apreensão perceptual e discursiva entre as unidades figurais dos registros envolvidos. Entretanto, o procedimento da dupla contagem para a conversão no registro simbólico fracionário utilizado com as figuras perceptuais, neste caso, em que temos mais de um inteiro, pode se mostrar menos “evidente”. Pois, a unidade simbólica denominador, requer que o sujeito realize uma apreensão discursiva entre ela e a unidade figural, ‘inteiro’. Uma leitura perceptual ou gestáltica das formas, sem essa apreensão discursiva, pode levar a uma contagem de todas as subfiguras ou partes dos todos, como tratando-se apenas de um inteiro.

As unidades figurais do registro de partida são sete, sendo: uma unidimensional, as demarcações internas de divisão do todo, contínuo, em partes ou subfiguras congruentes justapostas; uma unidade figural bidimensional, as áreas congruentes das partes ou subfiguras que compõem os todos; além das unidades figurais qualitativas, cor ou hachuramento das partes ou subfiguras dos todos, ausência de cor, formas geométricas homogêneas das subfiguras, quantitativo total das partes ou subfiguras com cor dos todos e quantitativo total das partes ou subfiguras de um inteiro. Enquanto que as unidades simbólicas do registro de chegada são o número natural que representa o numerador, o traço de fração e o número natural diferente de zero que representa o denominador.

As demarcações de divisão do todo, contínuo, em partes congruentes justapostas se correspondem semanticamente de forma simples, ou seja, diretamente com o traço de fração, no registro de chegada. Há uma correspondência semântica, de forma combinada, das unidades figurais: áreas congruentes das partes ou subfiguras, formas das partes ou subfiguras homogêneas, cor e quantidade total de partes ou subfiguras com cor ou hachuramento dos todos, no registro de partida, com o numerador da fração, no registro de chegada. O mesmo ocorre com as unidades figurais, áreas congruentes das partes ou subfiguras de um inteiro, formas das partes ou subfiguras homogêneas de um inteiro, quantidade total das partes ou subfiguras de um inteiro com o denominador da fração.

A unidade figural quantidade total das partes ou subfiguras com cor e ausência de cor não se corresponde semanticamente com a unidade simbólica, denominador da fração, no registro de chegada; pois no registro de partida teremos mais de ‘um inteiro’. Assim como as unidades figurais cor e ausência de cor não irão corresponder-se semanticamente com o denominador, pois, dependendo do inteiro considerado, ele poderá ter todas as partes ou subfiguras com cor ou não, conforme Figura 23.

Figura 23 – Esquema relativo a conversão entre uma figura perceptual com mais de um inteiro do registro geométrico bidimensional dos números racionais e sua representação simbólica no registro simbólico fracionário.



Fonte: autoria própria, 2018

Quanto ao critério, univocidade semântica terminal, ele é obedecido entre as demarcações de divisão, no registro de partida, e o traço de fração, no registro de chegada; entre as unidades figurais cor, quantidade das partes ou subfiguras com cor dos inteiros e a unidade simbólica, numerador; e entre as unidades figurais, quantidade total das partes ou subfiguras de um inteiro e a unidade simbólica, denominador. Como podemos observar na Figura 23. O Quadro 4 sintetiza a análise da conversão entre os registros utilizando os critérios de congruência semântica.

Quadro 4 – Critérios de Congruência semântica na conversão entre figuras perceptuais do registro bidimensional dos racionais e a fração no registro simbólico fracionário.

CORRESPONDÊNCIA ENTRE AS UNIDADES DE SENTIDO DOS REGISTROS		SEGMETAÇÃO COMPARATIVA	CORRESPONDÊNCIA SEMÂNTICA ENTRE AS UNIDADES DE SENTIDO	UNIVOCIDADE SEMÂNTICA TERMINAL
Unidades figurais	Unidades simbólicas			
Áreas congruentes	n	combinada	Sim	não
Formas homogêneas			sim	não
Cor			sim	sim
Quantidade total de partes com cor			sim	sim
Demarcações internas de divisão do todo	***l***	simples	sim	sim
Áreas congruentes	m	combinada	sim	não
Formas homogêneas			sim	não
cor			não	não
Ausência de cor			não	não
Quantidade total de partes com cor e ausencia de cor			não	não
Quantidade total das partes de um todo			sim	sim

Fonte: autoria própria, 2018

Pudemos observar que a não correspondência semântica que ocorre entre a unidade figural, quantidade total das partes ou subfiguras com cor e ausência de cor; e a unidade simbólica denominador da fração, pode ter relação com os erros comumente realizados pelos alunos que relacionam o denominador da fração com a quantidade total de partes dos todos, ou seja, não reconhecem **o todo,** como referencial, como aponta Rodrigues (2005). Pois, apesar dessas unidades, figural e simbólica, não terem equivalência referencial elas são semanticamente congruentes ao método da dupla contagem, “quantidade total de partes” para o denominador, levando à perda do inteiro como referencial.

4.3 GRAU 3 DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

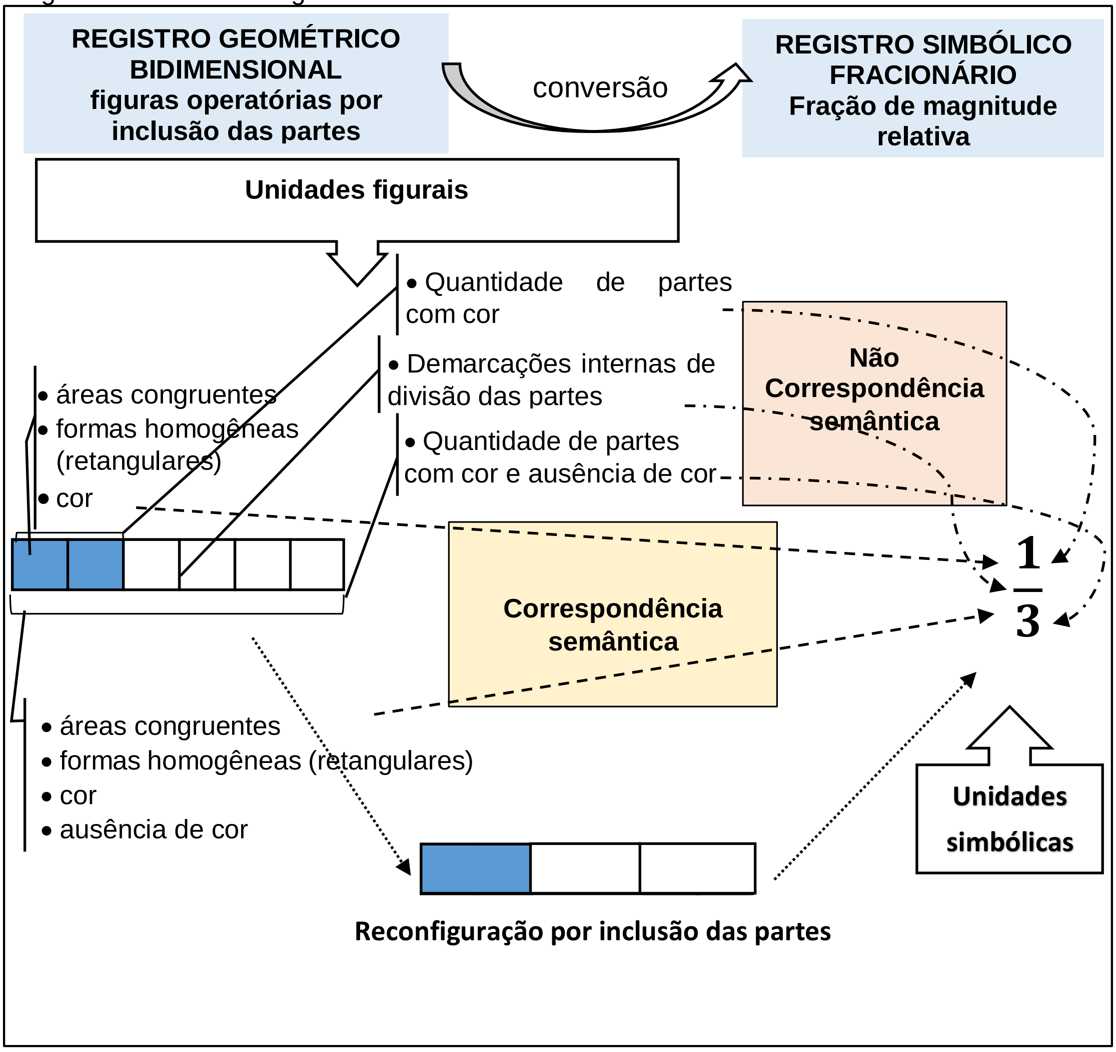
Nesse nível estarão as conversões que envolvem as figuras operatórias por inclusão das partes ou subfiguras, como registro de partida. Nesse grau de não congruência semântica as figuras geométricas, representações do registro de partida, além das apreensões, perceptual e discursiva, podem receber um tratamento figural, para que a conversão no registro simbólico fracionário resulte numa fração irredutível.

Dessa forma, as conversões nesse nível favorecem o desenvolvimento do conceito de equivalência, por meio da apreensão operatória. A operação de reconfiguração intermediária permitirá ao sujeito visualizar no registro simbólico fracionário, além da fração de magnitude literal, uma fração de magnitude relativa, ou seja equivalente à apreendida perceptualmente na figura inicial.

4.3.1 Análise dos critérios de congruência semântica

As unidades figurais do registro de partida são sete, sendo uma unidimensional, as demarcações internas de divisão do todo, contínuo, em partes ou subfiguras congruentes justapostas; uma unidade figural bidimensional, as áreas congruentes das partes ou subfiguras que compõem o todo; as unidades figurais qualitativas, cor ou hachuramento das partes ou subfiguras do todo, ausência de cor, formas geométricas homogêneas das partes ou subfiguras, quantitativo total das partes ou subfiguras com cor do todo e quantitativo das partes ou subfiguras com cor e ausência de cor. Enquanto que as unidades simbólicas do registro de chegada são o número natural que representa o numerador, o traço de fração e o número natural diferente de zero que representa o denominador, conforme Figura 24.

Figura 24 – Esquema relativo à análise da conversão entre uma figura operatória por inclusão das partes do registro geométrico bidimensional dos números racionais e uma fração de magnitude relativa no registro simbólico fracionário.



Fonte: autoria própria, 2018

De acordo com a Figura 24, há uma correspondência semântica, de forma combinada, das unidades figurais, áreas congruentes das partes ou subfiguras, formas geométricas das partes ou subfiguras homogêneas e cor, no registro de partida, com o numerador da fração, no registro de chegada. O mesmo ocorre com as unidades figurais, áreas congruentes das partes ou subfiguras, cor, ausência de cor e formas geométricas homogêneas das partes ou subfiguras com o denominador da fração.

A unidade figural quantidade das partes ou subfiguras com cor não se corresponde semanticamente com a unidade simbólica, numerador da fração, no registro de chegada; pois o numerador da fração corresponderá ao quantitativo de partes ou subfiguras após o tratamento de reconfiguração por inclusão das partes ou subfiguras da figura inicial. Da mesma forma ocorrerá com a unidade figural, quantitativo de cor e ausência de cor da figura inicial, e o denominador da fração, no registro de chegada. As demarcações internas de divisão do todo não irão corresponder-se semanticamente com o traço de fração, pois a relação das partes com o todo que é estabelecida na figura inicial não é a mesma entre o numerador e o denominador da fração.

Quanto ao critério univocidade semântica terminal, ele é obedecido entre as demarcações internas de divisão do todo, no registro de partida e o traço de fração, no registro de chegada. Apesar da correspondência semântica entre essas unidades de sentido ocorrerem apenas após o tratamento figural, as demarcações internas de divisão do todo, no registro de partida se correspondem unicamente com o traço de fração, no registro de chegada. O mesmo ocorre entre as unidade figurais, quantidade com cor e ausência de cor e a unidade simbólica, denominador.

As unidades figurais, áreas congruentes das partes ou subfiguras, formas geométricas homogêneas das partes ou subfiguras, cor e quantidade de partes ou subfiguras com cor no registro de partida, não satisfazem o critério da univocidade semântica terminal, pois se correspondem ao mesmo tempo com duas unidades simbólicas, no registro de chegada, numerador e denominador. O Quadro 5 sintetiza a análise da conversão entre os registros utilizando os critérios de congruência semântica.

Quadro 5 – Critérios de Congruência semântica na conversão entre figuras operatórias por inclusão das partes do registro bidimensional dos racionais e a fração de magnitude relativa no registro simbólico fracionário.

CORRESPONDÊNCIA ENTRE AS UNIDADES DE SENTIDO DOS REGISTROS		SEGMETAÇÃO COMPARATIVA	CORRESPONDÊNCIA SEMÂNTICA ENTRE AS UNIDADES DE SENTIDO	UNIVOCIDADE SEMÂNTICA TERMINAL
Unidades figurais (subfiguras)	Unidades simbólicas			
Áreas congruentes	N	combinada	Sim	não
Formas homogêneas			sim	não
Cor			sim	não
Quantidade total de partes com cor			não	não
Demarcações internas de divisão do todo	**/**	simples	não	sim
Áreas congruentes	M	combinada	sim	não
Formas homogêneas			sim	não
Cor			sim	não
Ausência de cor			sim	sim
Quantidade total de partes com cor e ausência de cor			não	sim

Fonte: autoria própria, 2018

Carraher e Schliemann (1992) apontam para o uso frequente do procedimento da ‘dupla contagem’ nessas conversões, que envolvem as figuras operatórias por inclusão das partes, as quais obtém como resultados frações de magnitude literal e a não compreensão, por parte de muitos sujeitos que se utilizam desse procedimento, da equivalência, entre as frações de magnitude literal e relativa.

A conversão que transforma uma figura operatória por inclusão das partes numa fração, de magnitude literal, requer do sujeito, apenas, uma apreensão perceptual e discursiva das unidades elementares entre os registros, como no grau 1 de não congruência semântica, portanto, não favorece ao desenvolvimento do conceito de equivalência.

4.3.2 Análise da apreensão operatória

As figuras operatórias por inclusão das partes ou subfiguras requerem a apreensão perceptiva, para reconhecimento das formas geométricas homogêneas e congruência das áreas das partes ou subfiguras. Requerem também, apreensão discursiva, para uma análise da relação entre partes ou subfiguras hachuradas e partes ou subfiguras que foi particionado o inteiro; como também uma análise entre as unidades figurais e simbólicas. E ainda, uma apreensão operatória que possibilitará a modificação mereológica da figura inicial e conversão para uma fração de magnitude relativa.

A operação de reconfiguração intermediária global, explícita ou não, é necessária para reduzir proporcionalmente o número de partes ou subfiguras da figura inicial, por meio da inclusão de partes ou subfiguras justapostas de formas geométricas homogêneas e áreas congruentes. A figura obtida terá um número menor de partes ou subfiguras, de mesma forma geométrica que as iniciais, entretanto, com áreas congruentes das partes ou subfiguras equivalentes às anteriores.

Os elementos figurais facilitadores da operação de reconfiguração das figuras operatórias por inclusão das partes ou subfiguras são a simetria, homogeneidade das formas e congruência das áreas das subfiguras ou partes, pois podem favorecer a percepção de uma nova unidade-parte[25], equivalente à anterior, e a consequente modificação da figura inicial por inclusão das partes ou subfiguras.

4.4. GRAU 4 DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

Nesse nível de não congruência semântica estarão as conversões que envolvem as figuras operatórias por divisão, como registro de partida. Esses tipos de figuras dificultam a apreensão da unidade-parte.

A conversão que tem como registro de partida figuras operatórias por divisão das partes ou subfiguras e como registro de chegada o simbólico fracionário requer

---

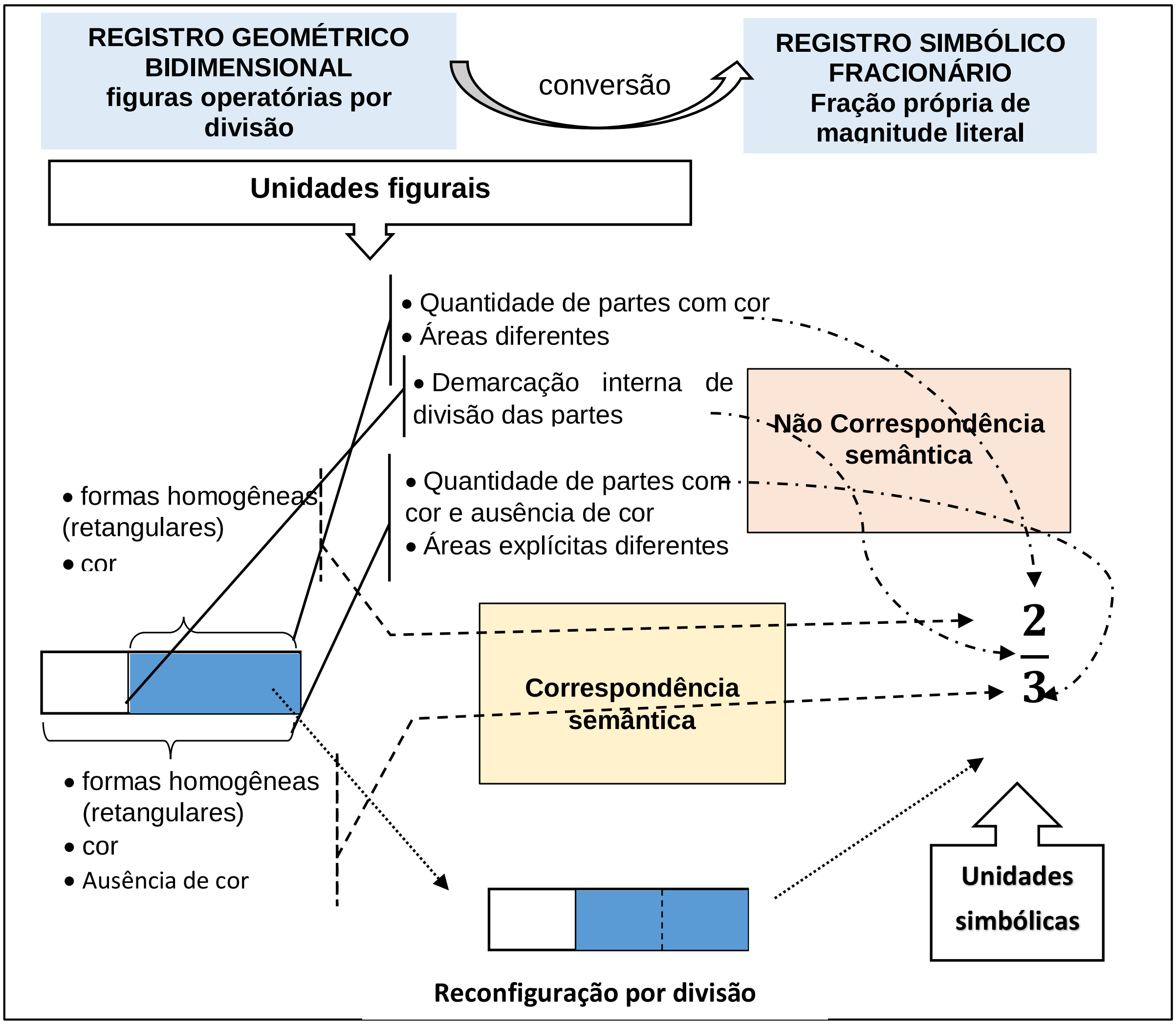
[25] Unidade-parte é a subfigura referência para a divisão do todo em partes congruentes. O quantitativo total dessas subfiguras equivalem ao inteiro.

do sujeito, além das apreensões, perceptual e discursiva das unidades figurais, uma apreensão operatória de reconfiguração, explícita ou não, para divisão em partes ou subfiguras de áreas explícitas congruentes e formas geométricas homogêneas. Esse tratamento permitirá ao sujeito visualizar as parte ou subfiguras de áreas congruentes formas geométricas homogêneas, possibilitando a compreensão da relação parte-todo e a conversão no registro simbólico fracionário.

4.4.1 Análise dos critérios de congruência semântica

As unidades figurais do registro de partida são sete, sendo uma unidimensional, as demarcações internas de divisão do todo, contínuo, em partes ou subfiguras justapostas; uma unidade figural bidimensional, as áreas explícitas diferentes das partes ou subfiguras que compõem o todo inicial; as unidades figurais qualitativas, cor ou hachuramento das partes ou subfiguras do todo, ausência de cor, formas geométricas homogêneas das partes ou subfiguras, quantitativo total das partes ou subfiguras com cor e quantitativo das partes ou subfiguras com cor e ausência de cor. Enquanto que as unidades simbólicas do registro de chegada são o número natural que representa o numerador, o traço de fração e o número natural diferente de zero que representa o denominador, conforme Figura 25.

Figura 25 – Esquema relativo à análise da conversão entre uma figura operatória por divisão do registro geométrico bidimensional dos números racionais e uma fração própria de magnitude literal no registro simbólico fracionário.



Fonte: autoria própria, 2018

De acordo com a Figura 25, as unidades figurais, formas geométricas homogêneas das partes ou subfiguras e cor, no registro de partida, correspondem-se semanticamente, de forma combinada, com o numerador da fração, no registro de chegada. O mesmo ocorre entre as unidades figurais, cor, ausência de cor e formas geométricas homogêneas das partes ou subfiguras e o denominador da fração.

As unidades figurais, quantidade de partes ou subfiguras com cor e áreas explícitas diferentes não se correspondem semanticamente com a unidade simbólica, numerador da fração, no registro de chegada; pois o numerador da fração corresponderá ao quantitativo de partes ou subfiguras após o tratamento de reconfiguração por divisão das partes ou subfiguras da figura inicial. Da mesma forma ocorrerá com as unidades figurais, quantitativo de cor e ausência de cor da figura inicial e áreas explícitas diferentes das partes ou subfiguras e o denominador da fração, no registro de chegada. As demarcações internas de divisão do todo não irá corresponder-se semanticamente com o traço de fração, pois a relação das partes com o todo que estabelece na figura inicial não é a mesma entre o numerador e o denominador da fração.

O critério univocidade semântica terminal, como no grau de não congruência semântica anterior, é obedecido entre as demarcações internas de divisão do todo, no registro de partida e o traço de fração, no registro de chegada; e entre as unidade figurais, quantidade com cor e ausência de cor das partes ou subfiguras e a unidade simbólica, denominador.

Entretanto, as unidades figurais, áreas explícitas diferentes das partes ou subfiguras, formas geométricas homogêneas das partes ou subfiguras, cor e quantidade de partes ou subfiguras com cor no registro de partida, não satisfazem o critério da univocidade semântica terminal, pois se correspondem ao mesmo tempo com duas unidades simbólicas, no registro de chegada, numerador e denominador. O Quadro 6 sintetiza a análise da conversão entre os registros utilizando os critérios de congruência semântica.

Quadro 6 – Critérios de Congruência semântica na conversão entre figuras operatórias por divisão do registro bidimensional dos racionais e a fração própria de magnitude literal no registro simbólico fracionário.

CORRESPONDÊNCIA ENTRE AS UNIDADES DE SENTIDO DOS REGISTROS		SEGMETAÇÃO COMPARATIVA	CORRESPONDÊNCIA SEMÂNTICA ENTRE AS UNIDADES DE SENTIDO	UNIVOCIDADE SEMÂNTICA TERMINAL
Unidades figurais (subfiguras)	Unidades simbólicas			
Áreas diferentes	n	combinada	não	não
Formas homogêneas			sim	não
Cor			sim	não
Quantidade total de partes com cor			não	não
Demarcações internas de divisão do todo	*l*	simples	não	sim
Áreas diferentes	m	combinada	não	não
Formas homogêneas			sim	não
Cor			sim	não
Ausência de cor			sim	sim
Quantidade total de partes com cor e ausência de cor			não	sim

Fonte: autoria própria, 2018

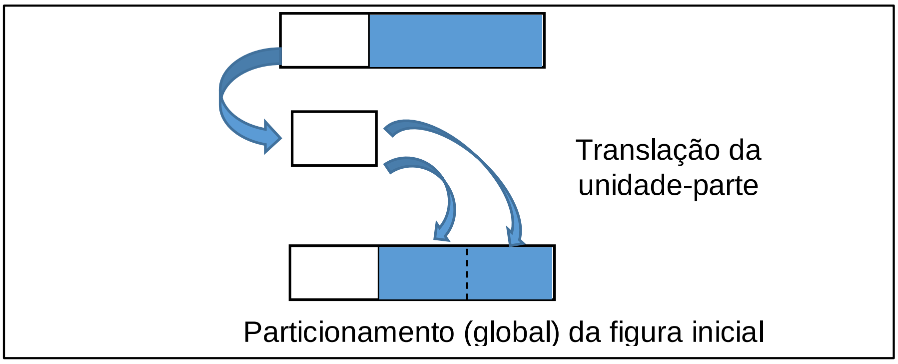
Silva (1997), aponta para o não reconhecimento da unidade-parte, no momento da conversão entre figuras do tipo operatórias por divisão e a representação fracionária. E, consequentemente, o uso do procedimento da ‘dupla contagem’, das partes ou subfiguras, sem o reconhecimento da unidade-parte e divisão equitativa da figura geométrica, ou seja, sem considerar que as áreas das partes ou subfiguras da figura geométrica, dadas inicialmente, são explicitamente diferentes.

4.4.2 Análise da apreensão operatória

As figuras operatórias por divisão requerem uma apreensão perceptual para reconhecimento, das formas geométricas homogêneas e da diferença entre as áreas das partes ou subfiguras. Além de uma apreensão discursiva, do particionamento da figura inicial, e consequente, características e relações, entre as partes ou subfiguras que compõem o inteiro, e entre essas e as unidades simbólicas. E ainda, da apreensão operatória para uma modificação mereológica, ou seja, das partes ou subfiguras que compõem a figura geométrica.

A operação de reconfiguração intermediária global, explícita ou não, é necessária para particionar a figura inicial em partes ou subfiguras de áreas congruentes. Esse particionamento em unidade-parte, que é uma modificação mereológica, poderá ser feito pela translação de uma parte ou subfigura inicial, escolhida como unidade-parte. A figura final terá um maior número de partes ou subfiguras explícitas, que a figura inicial, conforme Figura 26.

Figura 26 - Operação de reconfiguração das figuras operatórias por divisão.



Fonte: autoria própria, 2018

O elemento que torna o tratamento operatório nesses tipos de figuras mais complexo que o anterior, é o particionamento explícito incompleto da figura inicial, que leva ao não reconhecimento imediato da unidade-parte.

4.5 GRAU 5 DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

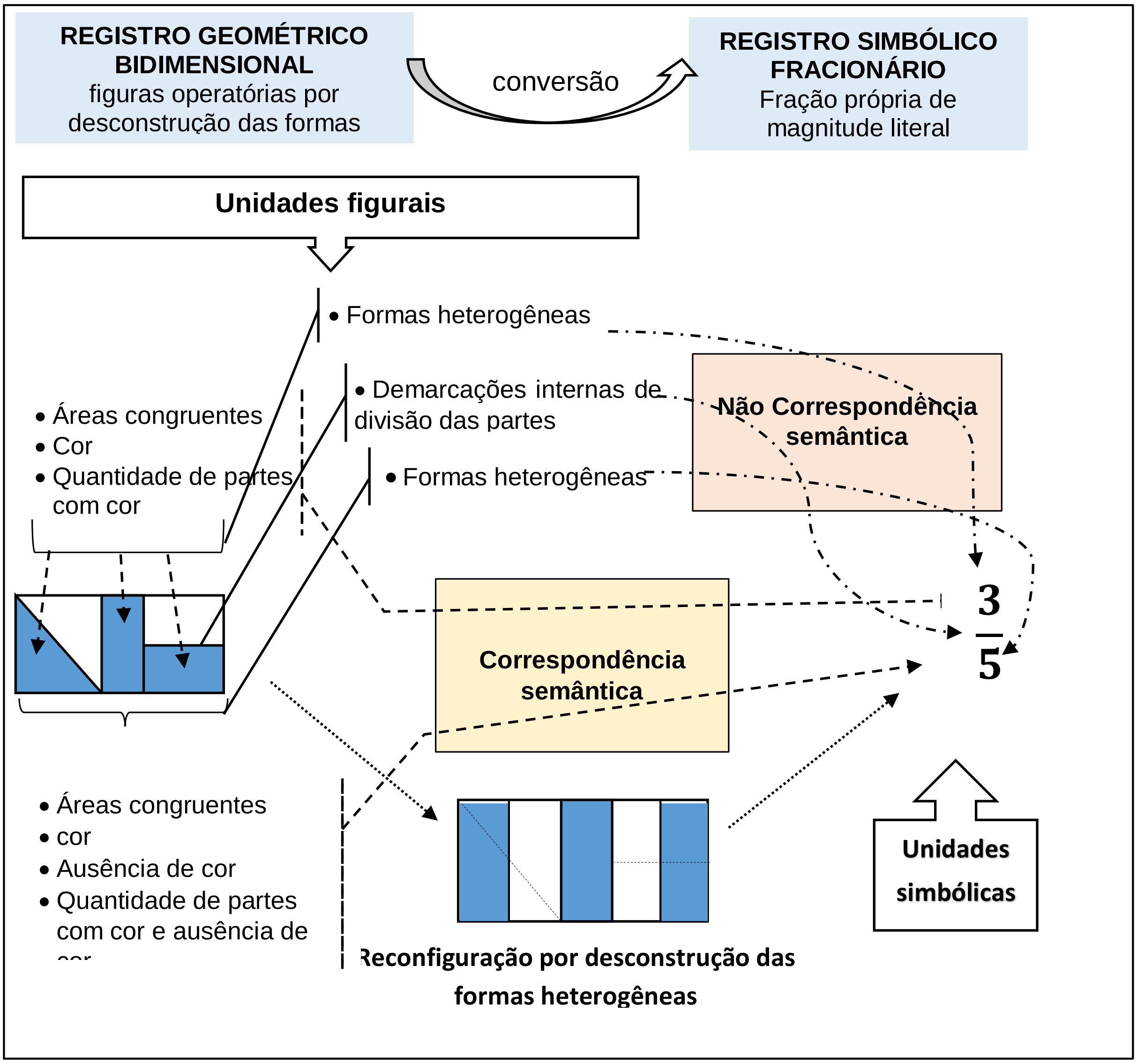
Nesse nível de não congruência semântica, estarão as conversões que envolvem as figuras operatórias por modificação das formas como registro de partida. Esses tipos de figuras dificultam a apreensão da congruência entre as áreas particionadas, pois elas apresentam formas geométricas diferentes.

A conversão que tem como registro de partida, figuras operatórias por modificação das formas, e como registro de chegada, o simbólico fracionário, requer do sujeito além das apreensões, perceptual e discursiva, uma apreensão operatória de reconfiguração, explícita ou não. A operação de reconfiguração pode ocorrer por desconstrução das partes ou subfiguras de formas geométricas heterogêneas e áreas congruentes, e reconstrução dessas em formas geométricas homogêneas de área congruentes. Esse tratamento permitirá ao sujeito visualizar as subfiguras de mesma área e mesma forma geométrica, possibilitando a compreensão da relação parte-todo para conversão no registro simbólico fracionário.

4.5.1 Análise dos critérios de congruência semântica

As unidades figurais do registro de partida são sete: sendo uma unidimensional - as demarcações internas de divisão do todo, contínuo, em partes ou subfiguras justapostas; uma unidade figural bidimensional - as áreas explícitas congruentes das partes ou subfiguras que compõem o todo inicial; as unidades figurais qualitativas - cor ou hachuramento das partes ou subfiguras do todo, ausência de cor, formas geométricas heterogêneas das partes ou subfiguras, quantitativo total das partes ou subfiguras com cor e quantitativo das partes ou subfiguras com cor e ausência de cor. Enquanto que as unidades simbólicas do registro de chegada são: o número natural que representa o numerador, o traço de fração e o número natural diferente de zero que representa o denominador, de acordo com a Figura 27.

Figura 27 – Esquema relativo à análise da conversão entre uma figura operatória por modificação das formas do registro geométrico bidimensional dos números racionais e uma fração própria de magnitude literal no registro simbólico fracionário.



Fonte: autoria própria, 2018

Conforme a Figura 27, as unidades figurais - áreas congruentes, cor e quantidade de partes com cor, no registro de partida - correspondem-se semanticamente de forma combinada, com o numerador da fração, no registro de chegada. O mesmo ocorre com as unidades figurais - áreas congruentes, cor e quantidade de partes com cor e ausência de cor das partes ou subfiguras - e o denominador da fração.

A unidade figural, formas geométricas heterogêneas, não se correspondem semanticamente com a unidade simbólica, numerador da fração, no registro de chegada; pois o numerador da fração corresponderá ao quantitativo de partes ou subfiguras de formas geométricas homogêneas e mesma área após o tratamento de reconfiguração por desconstrução das formas geométricas heterogêneas da figura inicial. Da mesma forma ocorrerá com a unidade figural, formas geométricas heterogêneas e o denominador da fração, no registro de chegada. As demarcações internas de divisão do todo não irá corresponder-se semanticamente com o traço de fração, pois serão modificadas pelo tratamento na figura inicial, conforme Figura 27.

O critério univocidade semântica terminal, como nos graus de não congruência semântica anteriores, é obedecido entre as demarcações internas de divisão do todo, no registro de partida e o traço de fração, no registro de chegada; e entre as unidade figurais, quantidade com cor e ausência de cor, e ausência de cor, das partes ou subfiguras e a unidade simbólica, denominador.

Entretanto, as unidades figurais, áreas congruentes das partes ou subfiguras, formas geométricas heterogêneas das partes ou subfiguras, cor e quantidade de partes ou subfiguras com cor no registro de partida, não satisfaz o critério da univocidade semântica terminal, pois se correspondem ao mesmo tempo com duas unidades simbólicas, no registro de chegada, numerador e denominador. O Quadro 7 sintetiza a análise da conversão entre os registros utilizando os critérios de congruência semântica.

Quadro 7 – Critérios de Congruência semântica na conversão entre figuras operatórias por modificação das formas do registro bidimensional dos racionais e a fração própria de magnitude literal no registro simbólico fracionário.

CORRESPONDÊNCIA ENTRE AS UNIDADES DE SENTIDO DOS REGISTROS		SEGMETAÇÃO COMPARATIVA	CORRESPONDÊNCIA SEMÂNTICA ENTRE AS UNIDADES DE SENTIDO	UNIVOCIDADE SEMÂNTICA TERMINAL
Unidades figurais	Unidades simbólicas			
Áreas congruentes	n	combinada	sim	não
Forma heterogêneas			não	não
Cor			sim	não
Quantidade total de partes com cor			sim	não
Demarcações internas de divisão do todo	***l***	simples	não	não
Áreas congruentes	m	combinada	sim	não
Formas heterogêneas			não	não
cor			sim	não
Ausência de cor			sim	sim
Quantidade total de partes com cor e ausencia de cor			sim	sim

Fonte: autoria própria, 2018

Apesar de ter uma maior quantidade de elementos em correspondência semântica do que os tipos de figuras enquadradas na seção anterior, fator que favorece a passagem de um registro a outro; com as figuras operatórias por modificação das formas, o tratamento a ser empregado no registro geométrico, para que sejam visualizadas as unidades figurais relevantes para a conversão no registro fracionário é o de reconfiguração por desconstrução das formas, diferentemente da seção anterior, em que o tratamento a ser adotado no registro geométrico é a reconfiguração por divisão em subfiguras de áreas congruentes.

A heterogeneidade das formas geométricas das partes ou subfiguras do todo, dificultam a visibilidade da congruência das áreas, e a consequente relação parte-todo. A reconfiguração para desconstrução das formas das subfiguras heterogêneas, favorecerá ao sujeito reconhecer a congruência entre as partes ou subfiguras ao transformá-las em subfiguras de formas homogêneas.

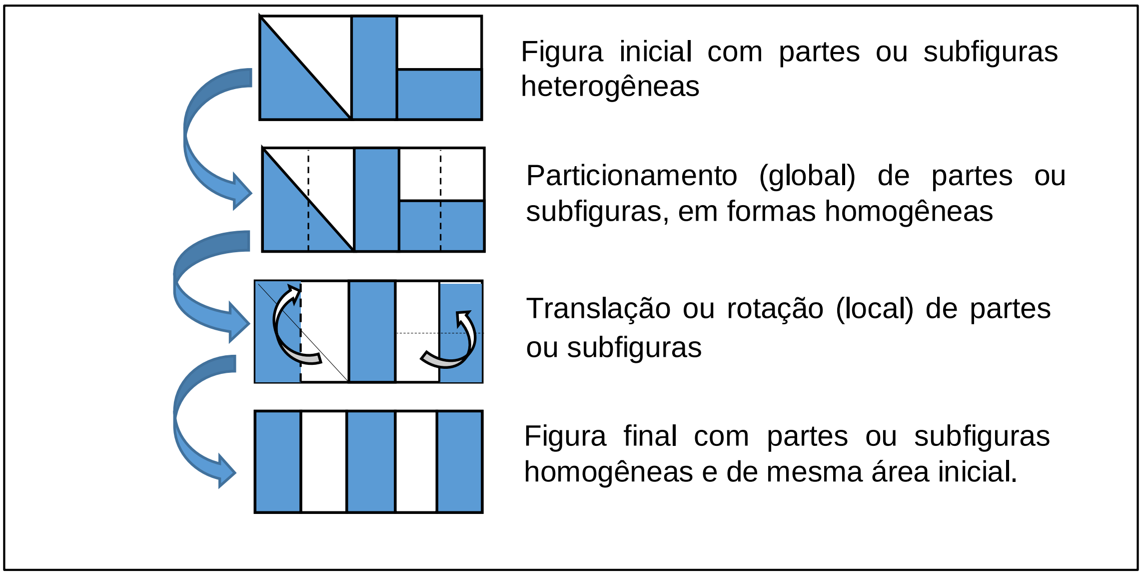
Por outro lado, com esses tipos de figuras, podemos ter a falsa impressão de que houve o reconhecimento da congruência entre as áreas das subfiguras ou partes, na conversão para o registro simbólico fracionário. O procedimento de contagem das partes hachuradas e das partes total do todo é semanticamente congruente com esse tipo de figura geométrica, pois coincide com o número de partes ou subfiguras pintadas e o número total de partes. A conversão pode ser realizada corretamente usando o procedimento mas sem que o sujeito tenha consciência da conservação da área entre as partes, conforme Damico (2007).

4.5.2 Análise da apreensão operatória

As figuras operatórias por modificação das formas requerem uma apreensão perceptiva para reconhecimento das formas geométricas heterogêneas das partes ou subfiguras iniciais. Como também, de uma apreensão discursiva entre essas formas geométricas e suas respectivas áreas, no sentido de compreender a necessidade de modificá-las em formas homogêneas de mesma área inicial, para verificar a congruência das áreas entre as partes ou subfiguras. Além de uma apreensão operatória para uma modificação das partes ou subfiguras que compõem a figura geométrica.

A operação de reconfiguração intermediária, explícita ou não, é necessária para modificar a figura geométrica inicial, de modo que passe a conter partes ou subfiguras de formas congruentes, mantendo suas áreas iniciais. Essa reconfiguração poderá utilizar um particionamento global e movimentos de rotação e ou translação de partes ou subfiguras, sem modificar a área das partes ou subfiguras iniciais, para transformá-las em partes ou subfiguras de formas geométricas homogêneas, como na Figura 28.

Figura 28 - Operação de reconfiguração das figuras operatórias por modificação das formas.



Fonte: autoria própria, 2018

Os tipos de modificações das partes ou subfiguras dependerá da necessidade de cada uma delas, o que pode demandar operações de particionamento global, como também de movimentos de translação e/ou rotação, específicos a esta ou aquela subfigura, sendo assim, operações locais. Essas operações dependerão também, de fatores como a convexidade para a complementaridade de formas.

4.6 GRAU 6 DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

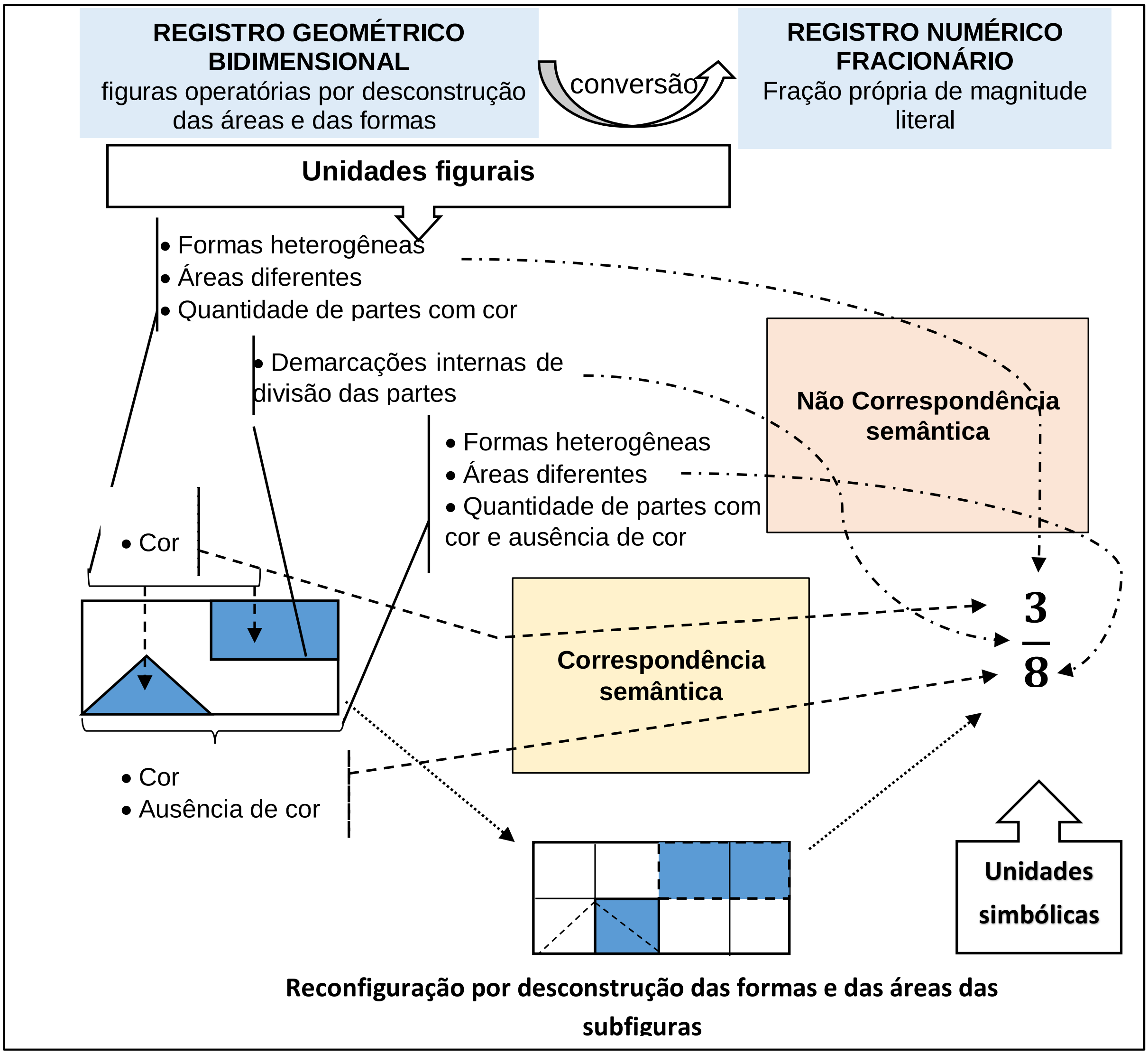
Nesse nível de não congruência semântica estarão as conversões que envolvem as figuras operatórias por modificação das formas e das áreas, como registro de partida. Esses tipos de figuras que possuem partes ou subfiguras com áreas e formas geométricas explicitamente diferentes dificulta a apreensão da relação existente das partes com o todo, ou seja, da quantidade de partes ou subfiguras de mesma área que foi dividido o todo e que foram pintadas.

A conversão que tem como registro de partida, figuras operatórias por modificação das formas geométricas e das áreas, e como registro de chegada, o simbólico fracionário, requer do sujeito além da apreensão perceptual das unidades figurais, uma apreensão operatória, de reconfiguração para modificação das áreas e das formas geométricas das subfiguras, explícita ou não, e reconstrução das subfiguras ou partes em áreas explícitas congruentes e formas geométricas homogêneas.

4.6.1 Análise dos critérios de congruência semântica

As unidades figurais do registro de partida são sete, sendo uma unidimensional - as demarcações internas de divisão do todo, contínuo, em partes ou subfiguras justapostas ou não; uma unidade figural bidimensional - as áreas explícitas diferentes das partes ou subfiguras que compõem o todo inicial; as unidades figurais qualitativas - cor ou hachuramento das partes ou subfiguras do todo, ausência de cor, formas geométricas heterogêneas das partes ou subfiguras, quantitativo total das partes ou subfiguras com cor; e quantitativo das partes ou subfiguras com cor e ausência de cor. Enquanto que as unidades simbólicas do registro de chegada são o número natural que representa o numerador, o traço de fração e o número natural diferente de zero que representa o denominador, conforme Figura 29.

Figura 29 - Esquema relativo à análise da conversão entre uma figura operatória por modificação das áreas e das formas do registro geométrico bidimensional dos números racionais e uma fração própria de magnitude literal no registro simbólico fracionário.



Fonte: autoria própria, 2018

Conforme a Figura 29, a cor é a única unidade figural no registro de partida que corresponde-se semanticamente, de forma combinada, com o numerador da fração, no registro de chegada. O mesmo ocorre entre as unidades figurais, cor e ausência de cor, no registro de partida e o denominador da fração, no registro de chegada.

As unidades figurais, formas geométricas heterogêneas, áreas explícitas diferentes e quantidade de partes com cor não se correspondem semanticamente com a unidade simbólica, numerador da fração, no registro de chegada; pois o numerador da fração corresponderá ao quantitativo de partes ou subfiguras de formas geométricas homogêneas e mesma área, após o tratamento de reconfiguração intermediária. Da mesma forma ocorrerá entre as unidades figurais, formas geométricas heterogêneas, áreas explícitas diferentes e quantidade de partes com cor e ausência de cor e o denominador da fração, no registro de chegada. As demarcações internas de divisão do todo não irão corresponder-se semanticamente com o traço de fração, pois a relação das partes com o todo que é estabelecida na figura inicial não é a mesma entre o numerador e o denominador da fração, no registro de chegada.

O critério univocidade semântica terminal continua sendo obedecido entre as demarcações internas de divisão do todo, no registro de partida e o traço de fração, no registro de chegada; e entre as unidade figurais, quantidade com cor e ausência de cor, das partes ou subfiguras e a unidade simbólica, denominador.

As unidades figurais - cor, áreas explícitas diferentes, formas geométricas heterogêneas das partes ou subfiguras e quantidades de partes ou subfiguras com cor e ausência de cor -, no registro de partida, não satisfaz ao critério da univocidade semântica terminal, pois se corresponde ao mesmo tempo com duas unidades simbólicas, no registro de chegada - numerador e denominador. O Quadro 8 sintetiza a análise da conversão entre os registros utilizando os critérios de congruência semântica.

Quadro 8 – Critérios de Congruência semântica na conversão entre figuras operatórias por modificação das áreas e das formas do registro bidimensional dos racionais e a fração própria de magnitude literal no registro simbólico fracionário.

CORRESPONDÊNCIA ENTRE AS UNIDADES DE SENTIDO DOS REGISTROS		SEGMETAÇÃO COMPARATIVA	CORRESPONDÊNCIA SEMÂNTICA ENTRE AS UNIDADES DE SENTIDO	UNIVOCIDADE SEMÂNTICA TERMINAL
Unidades figurais	Unidades simbólicas			
Áreas diferentes	n	combinada	não	não
Forma heterogêneas			não	não
Cor			sim	não
Quantidade total de partes com cor			não	não
Demarcações internas de divisão do todo	***l***	simples	não	não
Áreas diferentes	m	combinada	não	não
Formas heterogêneas			não	não
cor			sim	não
Ausência de cor			sim	sim
Quantidade total de partes com cor e ausencia de cor			não	não

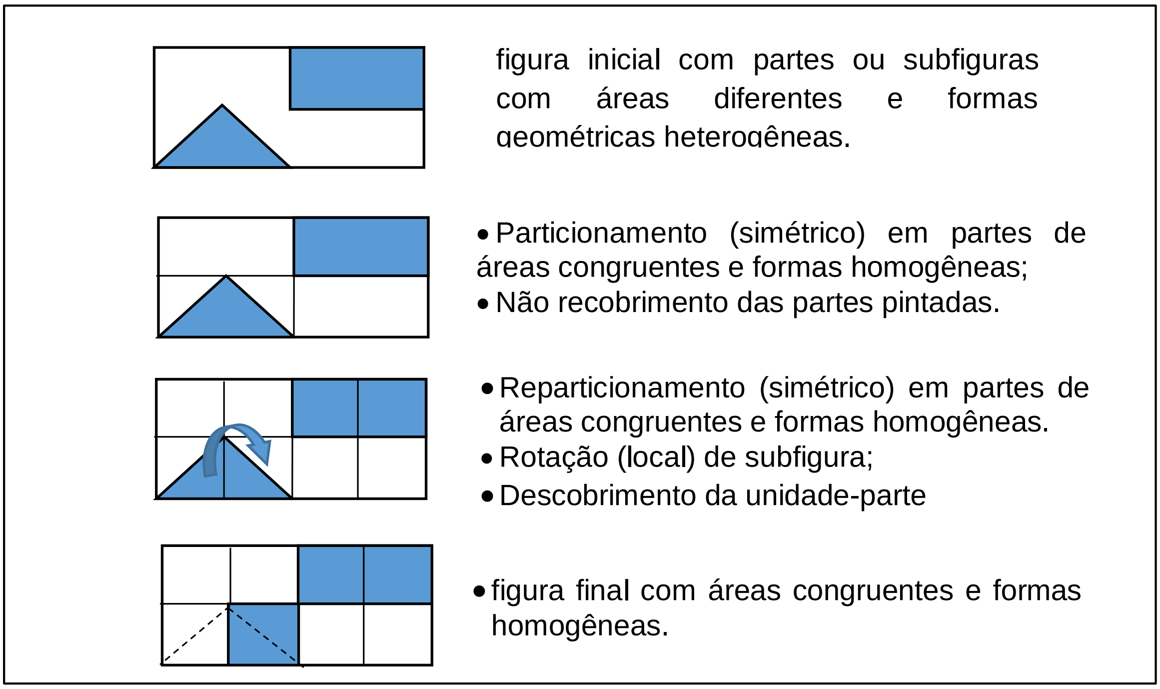
Fonte: autoria própria, 2018

Podemos observar que a falta de correspondência semântica entre os elementos figurais e os simbólicos é a maior entre os tipos de conversões analisados, sendo a cor e a ausência de cor os únicos elementos figurais que permanecem em correspondência semântica com as respectivas unidades simbólicas.

4.6.2 Análise da apreensão operatória

As figuras operatórias por modificação das formas e das áreas requerem uma apreensão perceptiva para reconhecimento das formas geométricas heterogêneas e áreas diferentes das partes ou subfiguras iniciais. Além de uma apreensão discursiva, entre as partes ou subfiguras e a relação entre elas e o todo para obtenção da unidade-parte, que poderá ter ou não a mesma área ou forma geométrica de uma das partes ou subfiguras. Entretanto, para constatação e visualização da relação parte-todo, a figura inicial deverá ser modificada implícita ou explicitamente pela operação de reconfiguração intermediária que poderá envolver as operações de particionamento global; translação e rotação, local, das partes ou subfiguras. Dessa forma, as partes ou subfiguras iniciais com áreas diferentes e formas heterogêneas serão reconfiguradas para conter áreas congruentes entre si e formas homogêneas, conforme Figura 30.

Figura 30 - Operação de reconfiguração das figuras operatórias por modificação das áreas e das formas.



Fonte: autoria própria, 2018

O tratamento figural necessário para a visualização da relação parte-todo, reconfiguração por desconstrução das formas e das áreas das subfiguras ou partes, requer operar tanto de forma global, ou seja, com todas as subfiguras ou partes da figura geométrica, como de forma local – transformando subfiguras específicas, por meio das modificações posicionais de rotação e translação das subfiguras, como no grau anterior. Mas essa reconfiguração poderá acarretar numa figura geométrica totalmente diferente da figural inicial, pois terá subfiguras ou partes com áreas congruentes – quando na figura inicial as áreas eram diferentes – e formas homogêneas, ao invés das heterogêneas inicialmente. Dessa forma, poderá guardar apenas, uma relação de semelhança com os contornos fechados dessa figura geométrica. Sendo assim, acreditamos ser essa a modificação mereológica de maior custo cognitivo, em relação aos graus anteriores.

Os resultados encontrados por Behr e Post (1981), em que analisou no item O-35, a conversão para o registro fracionário, tendo como representação de partida, a figura que tomamos como exemplo nessa seção, corroboram com a nossa análise, pois apontam um índice de acertos de apenas 8% entre 210 alunos de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental. Sendo considerado o item mais difícil do teste realizado.

CAPÍTULO 5. PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA EMPÍRICA

Com base na classificação das representações geométricas bidimensionais dos números racionais propostas no Capítulo 3, e na categorização preliminar dos graus de não congruência semântica, descrita no capítulo 4, foi elaborado um instrumento de pesquisa para validação do modelo proposto dos graus de não congruência semântica entre os RGBidm[26] e o RSF[27] dos números racionais.

Nesse capítulo iremos discorrer sobre as etapas da pesquisa empírica, o instrumento de pesquisa aplicado, a caracterização dos sujeitos de pesquisa e o método de análise quantitativa que será utilizado para análise dos dados oriundos da pesquisa empírica.

5.1 ETAPAS DA PESQUISA EMPÍRICA E DISCRIMINAÇÃO DOS SUJEITOS PARTICIPANTES

A pesquisa empírica foi dividida em duas etapas, sendo a primeira, a aplicação do instrumento de pesquisa, e a segunda constituída de entrevistas a alguns sujeitos participantes da primeira etapa, por meio do método clínico-crítico, proposto por Jean Piaget. Esse método, de acordo com Carraher (1989), tem como característica permitir ao pesquisador ter acesso as argumentações e contra argumentações que os sujeitos utilizam para comparar ou refutar suas hipóteses, durante a realização do teste.

O instrumento de pesquisa é composto de duas questões que solicitam a conversão do RGBidm ao RSF. A primeira questão é composta do item ‘a’ ao item ’j’, sendo cada um deles representados por uma figura geométrica. Enquanto, a segunda questão é composta de dois itens ‘a’ e ‘b’, com duas figuras geométricas, cada item, representando dois inteiros. Essas figuras geométricas são representações que foram classificadas como sendo geométricas bidimensionais dos números racionais, no

[26] Registro geométrico bidimensional
[27] Registro simbólico fracionário

Capítulo 3, e categorizadas em graus de não congruência semântica, no Capítulo 4. Cada dois dos itens que formam as questões do instrumento de pesquisa, correspondem a um determinado grau de não congruência semântica, conforme Quadro 9.

Quadro 9 - Discriminação dos itens do instrumento de pesquisa por Graus de não congruência semântica.

Itens	**Classificação das figuras Geométricas pertencentes ao RGBDim**	**Graus de não congruência semântica**
1A e 1H	Perceptuais com um inteiro	1
2A e 2B	Perceptuais com mais de um inteiro	2
1D e 1G	Operatórias por inclusão das partes	3
1B e 1J	Operatórias por divisão	4
1C e 1E	Operatórias por modificação das formas geométricas	5
1F e 1I	Operatórias por modificação das formas geométricas e das áreas	6

Fonte: autoria própria, 2018

A aplicação do instrumento de pesquisa foi realizada em cinco escolas da rede Pública Estadual de Educação do estado de Alagoas. As escolas foram escolhidas por meio da disponibilidade de turmas e horários. O tempo de aplicação do instrumento de pesquisa foi de uma hora-aula (50 min). Tendo sido aplicado pela pesquisadora, auxiliada pelo professor do horário da aula.

Os sujeitos participantes da pesquisa pertenciam aos 6° e 9° ano do Ensino Fundamental, e 1° e 3° ano do Ensino Médio. A escolha dos anos escolares se deu após um estudo piloto com o 6° e 7° anos e verificado que não houve respostas corretas para todos os itens. Como precisávamos que alguns dos instrumentos respondidos apresentassem todas as respostas corretas, para que pudéssemos verificar empiricamente os itens que pertenciam ao mesmo nível, decidimos aplicar, além do 6° ano que corresponde ao ano em que é previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN - o estudo dos números racionais, o 9° ano, por ser um ano em que se conclui os anos finais do ensino fundamental; além do 1° e 3° anos do Ensino médio, em que é previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio - PCNEM a consolidação da aprendizagem desses números.

Foram um total de 381 sujeitos, sendo 99 sujeitos do 6° ano do Ensino Fundamental, 98 sujeitos do 9° ano do Ensino Fundamental, 90 sujeitos do 1° ano do Ensino Médio e 94 sujeitos do 3° ano do Ensino Médio.

Todos os sujeitos participantes da pesquisa eram inicialmente informados que tratava-se de uma pesquisa de cunho científico e que sua participação estava condicionada a aceitação e entrega do termo de consentimento livre e esclarecido, assinado pelos pais ou responsáveis, o qual possuía todas as informações sobre o trabalho de pesquisa, como também, as condições de sua participação.

A segunda etapa, entrevista clínico-crítica, foi realizada com cinco sujeitos, sendo 2 do 9° ano do Ensino Fundamental, 1 sujeito do 1° ano do Ensino Médio e 2 sujeitos do 3° ano do Ensino Fundamental. Essa etapa ocorria sempre um dia após a aplicação do instrumento de pesquisa na turma do sujeito. Esses eram conduzidos a uma sala, antecipadamente preparada com uma câmera filmadora, para que apenas na presença da pesquisadora, refizesse o instrumento de pesquisa. Os sujeitos foram escolhidos por seu desempenho na primeira etapa. Sendo dado prioridade àqueles que responderam corretamente a maioria ou todos os itens do instrumento de pesquisa. Pois, o índice de sujeitos que acertaram a todos os itens foi considerado muito baixo.

A entrevista constou da aplicação do mesmo instrumento de pesquisa da primeira etapa, ao sujeito, para que o mesmo resolvesse os itens e fosse verbalizando quais os elementos que estavam sendo considerados na resolução dos itens. Durante a resolução, os sujeitos eram questionados pela pesquisadora sobre suas decisões.

5.2 DISCRIMINAÇÃO DO MÉTODO ESTATÍSTICO PARA ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA EMPÍRICA

Os dados levantados a partir da aplicação do instrumento de pesquisa foram catalogados em planilhas eletrônicas do Excel e utilizada a Teoria da Análise Estatística Implicativa (ASI) para análise quantitativa dos dados, por meio do método estatístico desenvolvido no software C.H.I.C. – Classificação Hierárquica Implicativa e Coesitiva.

A Análise Estatística Implicativa, proposta inicialmente por Régis Grás, tem como fundamentação teórica o conceito de implicação estatística ou 'quase-implicação'. E se constitui em um método não simétrico de análise de dependências orientadas. Foi escolhida, nessa pesquisa, por fornecer relações de associação entre as variáveis observadas, como as relações causais de 'causa→ efeito", consideradas, nessa teoria, como quase-regra, num determinado limiar.

De acordo com Grás e Réginier (2015b), o desenvolvimento dessa teoria se deu pela necessidade do autor de métodos estatísticos que permitisse hierarquizar comportamentos de resposta, ou ainda de afirmar "quando o aluno acerta uma tarefa A, então ele acerta também uma tarefa B" ou o inverso" (GRÁS; RÉGINIER, 2015 p. 38). E dessa forma, poder atribuir um valor a esta quase-implicação e estruturar hierarquicamente, em categorias, os resultados encontrados.

O método estatístico CHIC, tendo como base a ASI, realiza cruzamentos entre as variáveis (definidas previamente) e os sujeitos da pesquisa e extrai regras de implicação entre essas variáveis (que podem ser de diversas naturezas), estruturando essas regras em gráficos e árvores hierárquicas. Essas regras têm como base as regularidades entre as variáveis. E ainda, disponibiliza os sujeitos e as suas categorias, responsáveis pelas relações observadas nessas estruturas (GRÁS; RÉGNIER, 2015a).

Ao utilizar o CHIC, os dados devem ser organizados em uma planilha do Excel, com extensão do arquivo em CSV, onde a primeira linha contém as variáveis e a primeira coluna, os sujeitos. As demais linhas e colunas da tabela são lançados os valores 0 ou 1 (se as variáveis forem binárias) indicando a ausência ou a presença da variável.

Para a planilha ser processada no CHIC, abre-se uma janela em que se deve escolher o tipo de cálculo: árvore de similaridade, grafo implicativo, árvore coesitiva ou redução. Para cada uma dessa escolha são criadas três janelas, quais sejam: a que permite a visualização do número de ocorrências, a média, o desvio padrão, o coeficiente de correlação, os índices de similaridade/implicativos/coesitivos e os nós significativos. Outra que informa sobre o arquivo, o coeficiente de correlação, o índice e o valor; e a janela que contém a árvore de similaridade/grafo implicativo/ árvore coesitiva que possibilita a visualização das variáveis e de suas interrelações, que serão objeto de análise dessa pesquisa.

O CHIC constrói, com as variáveis principais (binárias, no nosso caso), uma hierarquia ou um grafo, nos quais as variáveis são ligadas por similaridade (árvore de similaridade), implicação (grafo implicativo) ou inclusão (árvore coesitiva).

A árvore de similaridades apresenta classes de semelhança entre as variáveis, permitindo uma análise das relações entre essas por tipologia e semelhança (e dessemelhança), em níveis decrescentes. Cada nível representa um índice de similaridade. Um nível pode ser significativo, ou seja, mais significante que os outros, do ponto de vista probabilístico. Dessa forma, esses níveis são identificados por um traço vermelho.

O grafo implicativo orientado, de acordo com Grás e Regnier (2015b), apresenta uma rede de relações entre as variáveis, representada em arcos. Cada arco representa uma regra, a → b. Esses arcos são medidos pelo valor de intensidade de implicação, o qual representa a qualidade da regra descrita por cada arco, ou ainda, um nível de confiança probabilística.

A árvore coesitiva é uma rede de relações entre as variáveis, estruturada de forma hierárquica, em classes ordenadas ou níveis de hierarquia e representa as ‘regras de regras’ ou ‘metarregras’, ou seja, ‘se a regra ___ é observada, então, a regra ____ também é observada’. Cada classe apresenta um índice de coesão que varia [0;1]. Algumas classes podem apresentar ‘nível significativo’, significando que a implicação entre as variáveis envolvidas é forte.

A árvore de similaridades, grafo implicativo e árvore coesitiva possuem informações de tipicalidade e contribuição dos indivíduos, as quais podem ajudar na interpretação das classes ou caminhos descritos nessas representações. A tipicalidade é fornecida a partir da definição das variáveis suplementares.

As variáveis suplementares se constituem como os sujeitos participantes da pesquisa e são úteis para a interpretação da tipicalidade e contribuição. Dessa forma, a tipicalidade dessas variáveis é a tipicalidade dos indivíduos que as satisfazem. Ou seja, os sujeitos típicos são aqueles que atribuem ao conjunto das variáveis os valores que são compatíveis com a similaridade ou hierarquia implicativa daquela determinada classe ou caminho. O grupo ótimo será constituído pelos sujeitos mais típicos desses.

A contribuição dos sujeitos, como variáveis suplementares, na formação de cada uma das classes, é outra informação disponibilizada nessas representações. Sendo assim, é possível verificar os sujeitos que mais contribuem com as classes ou caminhos (Grupo ideal ou otimal).

Os sujeitos participantes da nossa pesquisa, total de 381, foram identificados por códigos criados pela pesquisadora, os quais discriminavam ano escolar, escola, número atribuído ao aluno e turma.

As variáveis foram definidas como sendo todas as respostas atribuídas pelos sujeitos a cada item. Ou seja, foram catalogadas as diferentes respostas dadas por todos os sujeitos por item, identificando-as pelo número da questão (1 ou 2), seguida da letra do item (A à J para a questão 1, e, A à B para a questão 2) e a resposta dada pelo sujeito. Como por exemplo, '1A2/7', é a variável que corresponde a resposta 2/7 dada ao item A da primeira questão. Os itens do instrumento de pesquisa foram analisados aos pares, por grau de não congruência semântica, atribuídos previamente no Capítulo 4. .

Dessa forma, para cada grau de não congruência semântica foi estruturada uma planilha do Excel, onde a primeira coluna contém os sujeitos e a primeira linha contém as variáveis suplementares (AL6ANO; AL9ANO; AL1ANO; AL3ANO), seguidas pelas variáveis binárias (diferentes respostas atribuídas ao primeiro item, e depois ao segundo item, por graus de não congruência semântica). As demais linhas e colunas da tabela são lançados os valores 0 ou 1, indicando a ausência ou a presença de cada variável.

Sendo assim, para cada linha que constitui a planilha, teremos no máximo, três colunas que apresentam o valor 1, sendo uma coluna relativa a variável suplementar que corresponde ao ano escolar ao qual o sujeito pertence; e as outras duas colunas corresponde, cada uma, as respostas dadas pelo sujeito aos itens, pertencentes ao grau de não congruência semântica em questão. Se o sujeito só respondeu a um item, teremos apenas, duas colunas cujo valor é igual a 1. E ainda, se o sujeito não respondeu aos dois itens, teremos apenas uma coluna cujo valor é 1.

O número de variáveis, de cada planilha, depende do total de respostas dadas aos itens, portanto, não é fixo. Sendo assim, foram constituídas seis planilhas (uma planilha para cada grau de não congruência semântica), conforme Quadro 10.

Quadro 10 - Variáveis por planilha de pares de itens.

GRAU	PLANILHA/ PARES DE ITENS	VARIÁVEIS
1	1A e 1H	1A2/7; 1A7/2; 1A2/5; 1A5/2; 1A5/1; 1A1/5; 1A1/4; 1A1/7; 1H3/8; 1H8/3; 1H3/5; 1H5/3; 1H3/17; 1H17/3; 1H9/24; 1H24/9; 1H24/12; 1H15/9; 1H9/15; 1H3/15; 1H1/3; 1H3/18; 1H5/8; 1H3/6; 1H6/15; 1H3/24; 1H9/21; 1H4/8; 1H9/18; 1H9/23; 1H3/1; 1H5/4; 1H3/7; 1H9/12; 1H8/2; 1H3/3; 1H21/6; 1H9/14
2	2A e 2B	2A5/3; 2A5/6; 2A3/32/3; 2A6/5; 2A1/5; 2A1/3; 2A5/1; 2A12/3; 2A5/2; 2A3/2; 2A33/1; 2A3/12/1; 2A32/3; 2A4/1; 2A2; 2A6/1; 2A3/33/2; 2A2/5; 2A3/4; 2A32/1; 2A3/3; 2A3/02/1; 2A2/3; 2A4/3; 2A2/1; 2A3/1; 2A1/2; 2A1/6; 2A1/4; 2A1/31/4; 2A31/2; 2A11/4; 2A5/8; 2B5/4; 2B5/8; 2B4/41/4; 2B3/5; 2B5/3; 2B6/10; 2B6/8; 2B11/4; 2B4/2; 2B4/1; 2B41/3; 2B5/6; 2B8/5; 2B5; 2B8/3; 2B3/8; 2B4/44/1; 2B5/10; 2B5/1; 2B4/01/3; 2B2/5; 2B4/41/3; 2B16/5; 2B6/4; 2B0/63/1; 2B1/4; 2B4/3; 2B31/3; 2B4/11/3; 2B4/8; 2B4/43/1; 2B4/4; 2B3/1; 2B1/3; 2B4/6; 2B1; 2B1/8; 2B41/4; 2B12/3
3	1D e 1G	1D1/3; 1D2/6; 1D6/2; 1D2/4; 1D4/2; 1D1/2; 1D4/1; 1D3/6; 1D2/3; 1D3/4; 1G1/4; 1G4/16; 1G16/4; 1G4/11; 1G12/4; 1G4/12; 1G4/17; 1G12/3; 1G3/16; 1G3/12; 1G4/15; 1G16/12; 1G1/17; 1G3/15; 1G10/4; 1G3/17; 1G15/4; 1G1/3; 1G4/14; 1G14/4; 1G4/3.
4	1B e 1J	1B1/4; 1B2/8; 1B8/2; 1B2/6; 1B6/2; 1B7/1; 1B1/7; 1B9/2; 1B2/9; 1B6/1; 1B1/6; 1B7/2; 1B2/7; 1B8/1; 1B1/8; 1B2/1; 1J3/5; 1J6/10; 1J3/18; 1J5/3; 1J3/1; 1J1/3; 1J13/3; 1J16/1; 1J1/2; 1J1/14; 1J3/14; 1J3/16; 1J2/1; 1J1/1; 1J15/3; 1J3/18; 1J13/1; 1J2/2; 1J1,5/2; 1J1/12; 1J3/2; 1J3/17; 1J1/15; 1J3/4; 1J4/6; 1J0,6/1; 1J1/4; 1J2/3; 1J6/4; 1J5/2; 1J4/2; 1J2/1,5; 1J4/7; 1J10/6; 1J6/36; 1J6/5; 1J34/1; 1J2/10; 1J3/21; 1J1/2/2; 1J5/8; 1J2/5; 1J1,25/2
5	1C e 1E	1C1/2; 1C2/4; 1C2/1; 1C1/3; 1C3/1; 1C2/3; 1C3/2; 1C2/2; 1C4/1; 1C1/1; 1C28/40; 1C20/24; 1C3/8; 1C1/8; 1C11/20; 1C3/3; 1C5/1; 1C4/8; 1C20/108; 1C17/40; 1C15/24; 1C16/40; 1E1/4; 1E2/8; 1E4/1; 1E1/3; 1E3/1; 1E1/9; 1E7,5/2,5; 1E2/5; 1E1/23; 1E1/5; 1E6/16; 1E13/24; 1E8/16; 1E6/12; 1E1/6; 1E4/12; 1E4/16; 1E2/4; 1E1/24; 1E2/16
6	1Fe 1I	1F3/8; 1F6/16; 1F8/16; 1F2/6; 1F2/3; 1F8/20; 1F7/16; 1F63/16; 1F2/1; 1F2/5; 1F3/2; 1F5/2; 1F2/10; 1F1/2; 1F4/2; 1F2/12; 1F2/2; 1F4/25; 1F2/4; 1F5/4; 1F2/8; 1F2/16; 1F2/17; 1F16/2; 1F4/4; 1F2/0; 1F3/4; 1F1/3; 1F4/6; 1F4,5/8; 1F4,3/8; 1F6/2; 1F4/16; 1F7/12; 1F8/16; 1F7/36; 1F1,5/4; 1F1/6; 1F1/8; 1F6/32; 1F5/16; 1F1/4 1/2; 1F4/12; 1I7/12; 1I12/7; 1I2/3;1I3/2; 1I2/2; 1I2/4; 1I5/4; 1I2/1; 1I3/1; 1I1/2; 1I2/8; 1I7/5; 1I3/3; 1I4/4; 1I7; 1I1/3; 1I2,5/3; 1I7/10; 1I4/2; 1I4/7; 1I3/4; 1I7/2/6; 1I4/6; 1I2,25/4; 1I5/8

Fonte: autoria própria, 2018

Nossa pesquisa tem interesse em compreender as relações ou quase-implicações entre as respostas dadas aos itens definidos previamente em nosso estudo como pertencentes a um mesmo grau de não congruência semântica; como também na compreensão das metarregras que definiam essas implicações. Por esse motivo, a nossa análise teve como base os grafos implicativos e as árvores coesitivas definidos pelo CHIC, a partir das planilhas elaboradas com as variáveis e os sujeitos descritos nesse subitem.

Inferimos que o sujeito ao responder aos dois itens que, por hipótese, pertencem ao mesmo grau de não congruência semântica, a regra se ‘a então b’ é satisfeita. Ou seja, a relação que ele utilizará para responder ao primeiro item será a mesma que irá usar para responder ao segundo item, pois, a correspondência semântica a ser empregada será entre unidades de sentido (figural e simbólica) que possuem características idênticas por pertencerem a um mesmo grau de não congruência semântica.

CAPÍTULO 6. ANÁLISE DOS DADOS EMPÍRICOS QUANTO AOS GRAUS DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA DO 1 AO 3

A análise dos dados referentes ao instrumento de pesquisa, ou seja, da parte empírica da nossa pesquisa será realizada em dois capítulos.

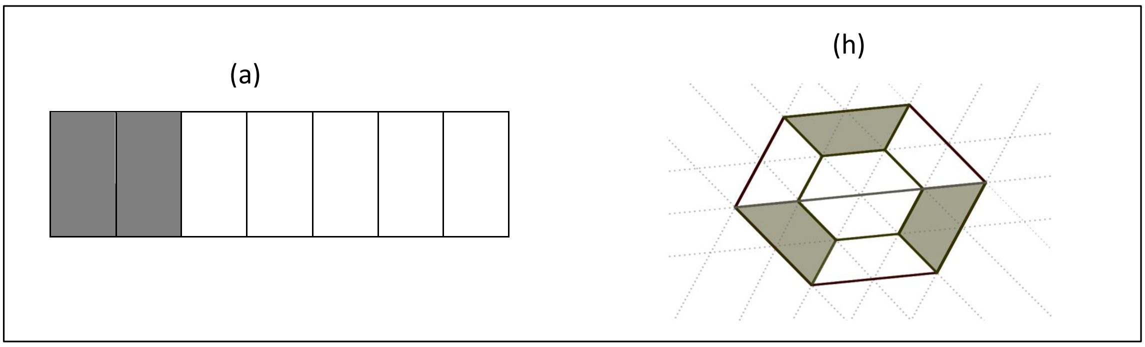
Nesse capítulo faremos a análise dos dados da pesquisa empírica referentes aos itens A e H da primeira questão; A e B da segunda questão; B e J da primeira questão do instrumento de pesquisa que, de acordo com a análise prévia, descrita no Capítulo 4, pertencem respectivamente, aos graus 1, 2 e 3 de não congruência semântica.

Ao final desse capítulo faremos uma síntese da análise dos dados.

6.1. ANÁLISE DOS ITENS A E H REFERENTES AO GRAU 1 DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

As figuras geométricas pertencentes ao Grau 1 de não congruência semântica, aplicadas no instrumento de pesquisa, correspondem aos itens “a” e “h” da primeira questão, representadas na Figura 31.

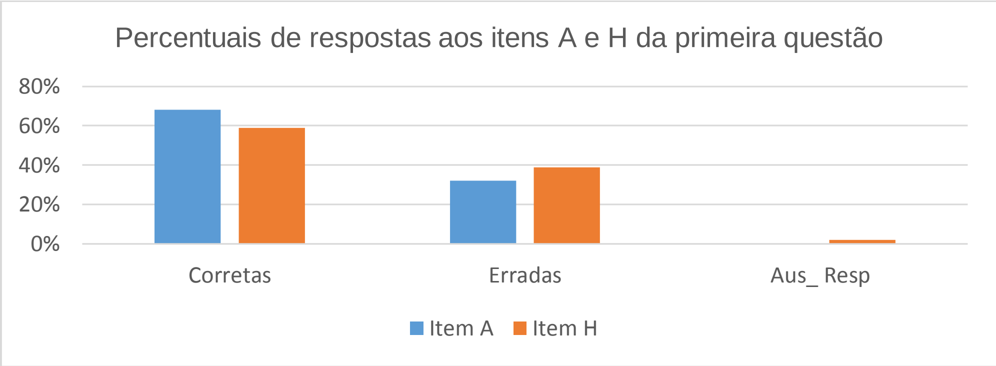
Figura 31 - Item (a) e (h) da primeira questão.



Fonte: autoria própria, 2018

O item A foi respondido por todos os sujeitos participantes da pesquisa (381) e o item H por 371 sujeitos. Do total de sujeitos, 260 (68%) responderam corretamente ao item A (2/7) e 225 (59%) ao item H. Desses últimos, 41% deram como resposta correta ao item, ‘3/8’; e 18%, ‘9/24’ (resposta que considerou as formas das partes ou subfiguras do inteiro como sendo os triângulos), conforme Gráfico 1.

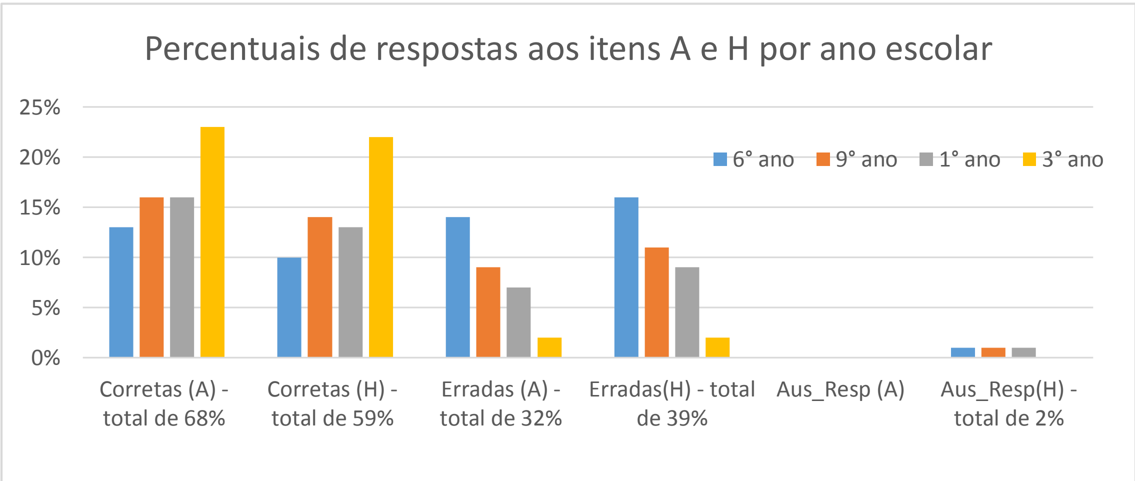
Gráfico 1 - Quantitativo de respostas aos itens A e H da primeira questão.



Fonte: autoria própria, 2018

Dos 68% de respostas corretas ao item A, 23% desses (maior índice de acerto por ano escolar) corresponde ao índice de acertos referentes aos alunos do 3° ano do Ensino Médio. Enquanto que dos 59% de acertos ao item H, 22% deles (maior índice de acerto ao item) correspondem também as respostas dadas por sujeitos do 3° ano do Ensino Médio, conforme Gráfico 2. Constatamos que além dos sujeitos do 3° ano do Ensino Médio possuírem os maiores índices de acertos nos dois itens, esses índices também são muito próximos um do outro.

Gráfico 2 - Percentuais de respostas aos itens A e H por ano escolar.



Fonte: autoria própria, 2018

Podemos observar no Gráfico 2, um certo nivelamento entre os índices de acertos do 9° ano do Ensino Fundamental e 1° ano do Ensino Médio, quanto aos itens A e H. Sendo, 16% de acertos para o 9° ano e para o 1° ano, do total de 68% de respostas certas ao item A. E ainda, 14% e 13%, respectivamente, de acertos entre esses sujeitos no item H, do total de 59% de acertos a esse item.

Entre os alunos do 6° ano, verificamos que o índice de erros é maior que o de acertos nos dois itens, mesmo nesse nível de não congruência semântica em que as figuras geométricas não necessitam de um tratamento para que as unidades figurais necessárias para a conversão no RSF sejam encontradas. Contudo, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), a aprendizagem dos números racionais tendo sido iniciada formalmente na escola, no segundo ciclo da educação básica; no terceiro ciclo, os alunos ainda estão ampliando a compreensão das diferentes representações desses números.

Do total de respostas atribuídas ao item A, 121 respostas, ou seja, 32% do total de respostas e não respostas ao item foram erradas. O Quadro 11 apresenta as respostas erradas, o total de ocorrências relativo a cada uma delas, os percentuais de ocorrências por ano escolar e o percentual total de ocorrências por resposta que obtiveram mais de 3 ocorrências. Além, das respostas apresentadas no Quadro 11, tivemos 4 respostas com erros diversos (2%), com três ou menos ocorrências.

Quadro 11 - Respostas, ocorrências e percentuais de respostas erradas referentes ao item A.

Resposta	Total de Ocorrências	Ocorrências por ano escolar(%)				Total de ocorrências (%)
		6° ano	9° ano	1° ano	3° ano	
2/5	55	4%	6%	3%	1%	14%
7/2	48	7%	1%	3%	1%	13%
5/2	11	2%	0%	1%	0%	3%

Fonte: autoria própria, 2018

Podemos observar no Quadro 11 que o maior número de ocorrências de respostas erradas ao item A (2/5) tem maior percentual de respostas dadas pelos sujeitos do 9° ano do Ensino Fundamental e considera uma relação parte-parte entre o número de partes ou subfiguras pintadas e o número de partes ou subfiguras que foi dividida a unidade. O segundo maior número de ocorrências de respostas erradas

(7/2) tem maior percentual de respostas atribuídas aos sujeitos do 6° ano do Ensino Fundamental e faz referência a uma relação todo-parte, invertendo os valores referentes ao numerador e denominador. Esses tipos de erros são bastante discutidos na literatura. Traremos uma análise mais detalhada desses erros ainda nesse tópico.

As respostas erradas ao item H totalizaram, 146, ou seja, 39% do total de respostas e não respostas atribuídas a esse item. O Quadro 12 ilustra as repostas erradas com mais de três ocorrências. Além, das respostas apresentadas no Quadro 12, tivemos 23 respostas com erros diversos (19%), com três ou menos ocorrências.

Quadro 12 - Respostas, ocorrências e percentuais de respostas erradas referentes ao item H.

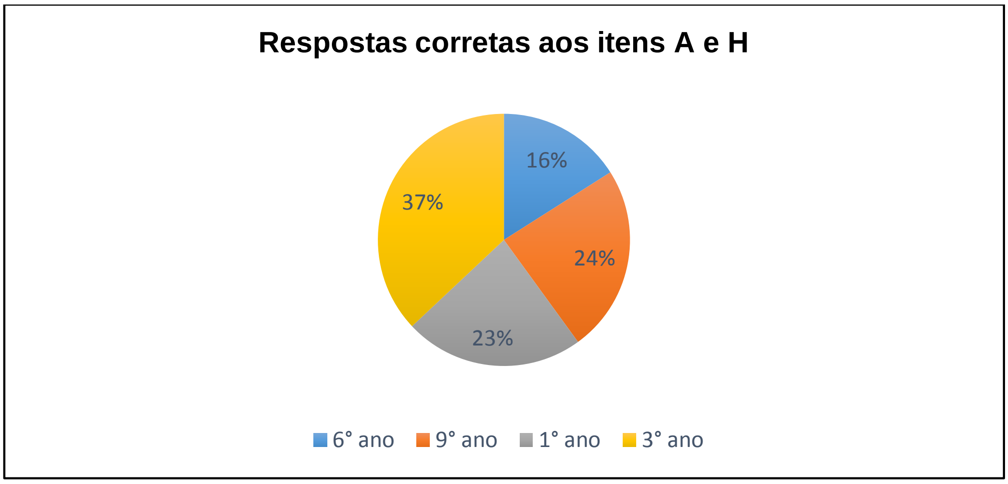
Resposta	Total de Ocorrências	Ocorrências por ano escolar(%)				Total de ocorrências (%)
		6° ano	9° ano	1° ano	3° ano	
3/5	40	7%	13%	6%	1%	27%
8/3	34	15%	1%	6%	1%	23%
5/3	16	6%	1%	3%	1%	11%
3/15	12	1%	7%	0%	1%	9%
24/9	9	1%	1%	4%	0%	6%
9/15	7	2%	1%	2%	0%	5%

Fonte: autoria própria, 2018

De acordo com o Quadro 12, podemos observar, assim como o ocorrido no item A, que também no item H obtivemos um maior número de ocorrências para a resposta errada a qual considera a relação parte-parte (3/5), com maior índice de respostas novamente para os alunos do 9° ano do Ensino Fundamental. O mesmo ocorrendo para o segundo maior índice de respostas erradas para o item H (8/3). Esse tipo de respostas utiliza a ideia todo-parte e obteve um maior índice entre os sujeitos do 6° ano do Ensino Fundamental. Como afirmam Carraher e Schliemann (1992), as conversões entre esse tipo de registro é objeto de estudo nesse ano escolar e ao que parece esses sujeitos aprendem o procedimento da ‘dupla contagem’ mas não sabem como organizar esses dados no RSF.

As intersecções realizadas entre as respostas dadas aos itens A e H indicaram que 225 sujeitos responderam corretamente ao item A e H, sendo 36 alunos do 6° ano, 55 alunos do 9° ano, 51 alunos do 1° ano e 83 do 3° ano do Ensino Médio, conforme Gráfico 3. Os alunos do 3° ano do Ensino Médio foram os que mais acertaram simultaneamente aos itens A e H.

Gráfico 3 - Respostas corretas por série atribuídas aos itens A e H.

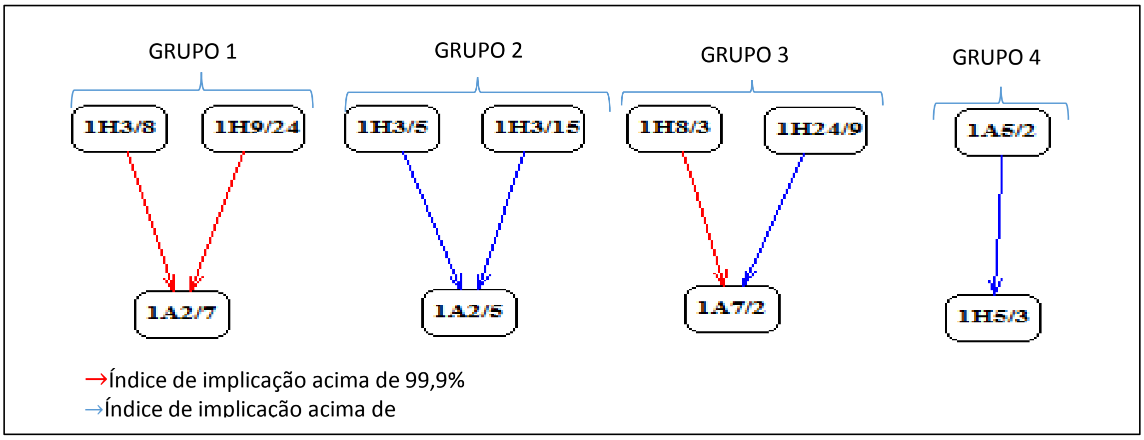


Fonte: autoria própria, 2018

O grafo implicativo da Figura 32, ilustra as quase implicações formadas a partir das intersecções entre todas as respostas dadas aos itens A e H da segunda questão, com índice de implicação acima de 98%.

Os 'caminhos' ou implicações grifados em vermelho possuem um índice de implicação acima de 99,9%, enquanto que os grifados em azul, acima de 98%. É importante observar que as implicações que envolvem as respostas corretas, 1A2/7, 1H3/8 e 1H9/24 apresentam o mesmo índice de implicação (99,9%) e está formando o Grupo 1 de respostas. Os grupos 2, 3 e 4 são formados por caminhos ou implicações que apontam soluções erradas dadas aos itens 'A' e 'H'(índice de implicação acima de 98%).

Figura 32 - Gráfico Implicativo das respostas dadas aos itens A e H.



Fonte: autoria própria, 2018

GRUPO 1:

O caminho 1H3/8 → 1A2/7 (índice acima de 99,9%) indica que os sujeitos que respondem corretamente ao item H(3/8), também respondem corretamente ao item A(2/7). Os sujeitos do 9° ano do Ensino Fundamental foram os mais típicos e também os que mais contribuíram[28] com essas soluções, com um risco de 0,0561 .

O caminho 1H9/24 → 1A2/7 aponta para aqueles que consideram as formas das partes ou subfiguras do inteiro como sendo triângulos e respondem corretamente ao item H(9/24), implicando no acerto do item A(2/7). Os sujeitos do 3° ano do Ensino Médio foram os que mais contribuíram para essas soluções, com risco 0 (zero).

GRUPO 2:

O caminho 1H3/5 → 1A2/5 (índice de implicação acima de 98%) sugere que os sujeitos que respondem '3/5' para o item H são aqueles que respondem 2/5 para o item 'A'.

Enquanto que o caminho 1H3/15 → 1A2/5 (índice de implicação acima de 98%) indica que os sujeitos que respondem 3/15 para o item 'H' (consideram as formas das partes ou subfiguras do inteiro como sendo triângulos, apenas para encontrar o denominador) e 2/5 para o item 'A'.

Os sujeitos do 9° ano do Ensino Fundamental foram os que mais contribuíram com essas soluções, com um risco de 0,00101 e de 0,000 00763 para os respectivos caminhos. Essas soluções demonstram que os sujeitos realizaram na conversão entre os registros, a relação parte-parte[29] discutida na literatura ((CAMPOS et al (1995), SILVA (2006), MERLINI (2005)).

---

[28] Em nossa pesquisa todos os caminhos implicativos e classes de coesão possuem mesma tipicalidade e contribuição, por esse motivo iremos a partir de agora escrever apenas 'contribuição', nos referindo tanto a essa quanto a tipicalidade.

[29] Relação parte-parte é apontada na literatura como sendo aquela em que o sujeito realiza a conversão entre os registros geométrico bidimensional e simbólico fracionário considerando a quantidade de partes ou subfiguras com cor para o numerador e quantidades de partes com ausência de cor para o denominador

GRUPO 3:

O caminho 1H8/3 → 1A7/2 (índice de implicação acima de 99,9%) revela que os sujeitos que atribuem a resposta '8/3' ao item H, respondem '7/2' para o item A. Os sujeitos do 6° ano do Ensino Fundamental foram os que mais contribuíram para essas respostas, com um risco de 0,00000262.

O caminho 1H24/9→1A7/2 (índice de implicação acima 98%) aponta para aqueles que responderam 24/9 para o item 'H' (considerando as partes ou subfiguras do inteiro como sendo triângulos) e 7/2 para o item 'A'. Os sujeitos do 1° ano do Ensino Médio foram os que mais contribuíram para essas respostas, com um risco de 0,00431.

A idéia que parece ser utilizada para as soluções desses caminhos é a relação todo-parte, em que é provavelmente é usado o procedimento da dupla contagem[30] e inversão do numerador pelo denominador, discutida na literatura ((MERLINI (2005), SILVA (2006)).

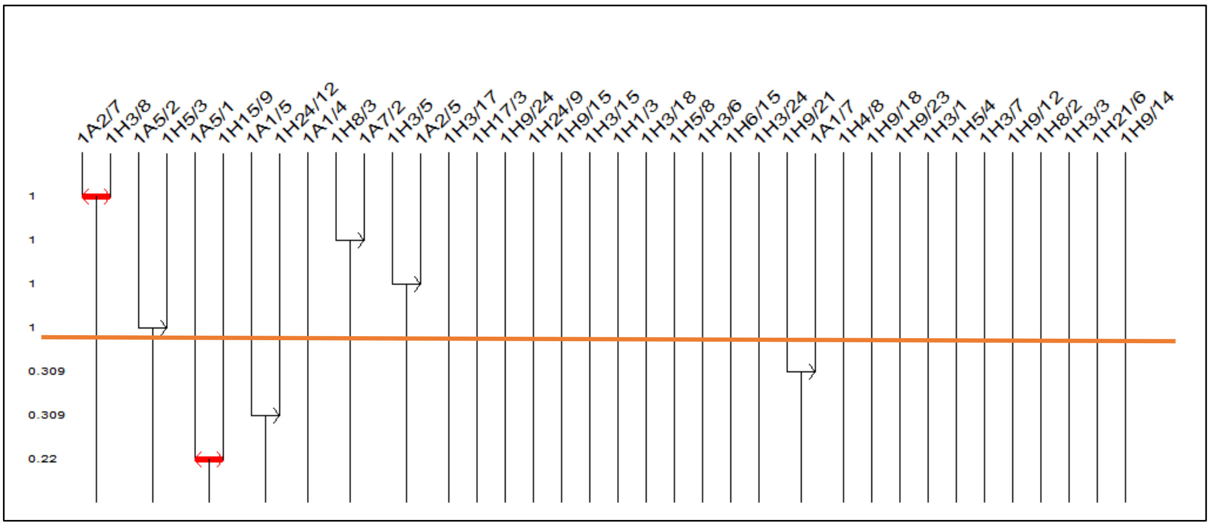
GRUPO 4:

O caminho 1A5/2 → 1H5/3 (índice de implicação acima de 98%), sugere que os sujeitos que respondem 5/2 para o item 'A', atribuem 5/3 para o item 'H'. Os sujeitos do 6° ano do Ensino Fundamental foram os mais típicos e que mais contribuíram com essas soluções, com um risco de 0,0391. Essas soluções apontam para o erro, relação parte-parte com inversão do numerador pelo denominador.

A análise da árvore coesitiva fornece a 'regra' utilizada para a formação das classes de respostas. O nó mais significativo está no nível 1, cuja classe (índice de coesão 1) é formada pelas variáveis mais significativas 1A2/7 e 1H3/8 as quais estão se correspondendo mutuamente. Para efeito de análise iremos considerar quatro níveis que apresentam índice de coesão 1, localizadas acima do traço definido na Figura 33.

[30] Procedimento em que o sujeito contabiliza o número de partes com cor e atribui ao numerador e o número de partes com cor e ausência de cor, atribuindo ao denominador da fração.

Figura 33 - Árvore coesitiva das respostas dadas aos itens A e H.



Fonte: autoria própria, 2018

A dupla implicação formando a classe de nível 1, da Figura 33 (de respostas corretas aos itens A e H), nos leva a inferir que as figuras geométricas que correspondem aos itens A e H possuem as mesmas unidades de sentido necessárias para a conversão entre os RGBidm e RSF, características desse nível, coborrorando com a análise teórica prévia, descrita no Capítulo 4.

Essas respostas indicam que os sujeitos, no momento da conversão (para ambos os itens) entre o RGBidm e o RSF realizaram a correspondência semântica entre a QSf_c[31] e o numerador (2 para o item A e 3 para o item H); e a QSf_c/Ac[32], e o denominador (7 para o item A e 8 para o item H). Ambas unidades figurais[33] possuem mesma forma e mesma área. Sendo assim, os sujeitos podem ter utilizado o procedimento da dupla contagem, conforme Vizcarra e Sallánn (2005).

O procedimento da dupla contagem parece ser adequado nesse nível em que as áreas das partes ou subfiguras e as formas dessas são congruentes. Entretanto não fica claro se o sujeito reconhece essa congruência como unidade figural significante para a conversão no RSF ou apenas utiliza o 'procedimento pelo procedimento'. Ou seja, realiza a dupla contagem por ser uma estratégia de conversão bastante trabalhada em sala de aula para figuras geométricas 'tradicionais'[34], como

[31] Quantidade de subfiguras ou partes com cor
[32] Quantidade de subfiguras ou partes com cor e ausência de cor
[33] partes ou subfiguras com cor e partes ou subfiguras com cor e ausência de cor.
[34] Campos et al (1995) consideram figuras tradicionais aquelas cujas partes ou subfiguras possuem áreas e formas congruentes.

afirmam Campos et al (1995), e que constatamos no trecho da entrevista a aluna 3_ERL.12C, ilustrado no Quadro 13.

Quadro 13 Trecho da entrevista a aluna 3_ERL.12C respondendo ao item A.

Pesquisadora: "3_ERL.12C" essa letra A que você fez, como foi que você pensou? **Aluna**: Eu contei as partes que tinha né. **Pesquisadora**: Sim. **Aluna**: Que é um inteiro, e peguei as que foram utilizadas, que foram duas (2), e coloquei embaixo o denominador sete (7).

Fonte: autoria própria, 2018

Os demais níveis de coesão correspondem às classes de respostas erradas dadas aos itens A e H. Ao nível 2, da Figura 33, com índice de coesão 1, está a classe de respostas {1H8/3,1A7/2}, indicando ser forte a característica de erro de inversão do denominador pelo numerador. Nesses tipo de solução a correspondência semântica entre QSf_c e numerador; e, QSf_c/Ac e o denominador é desprezada.

Acreditamos que o sujeito, reconhece na figura geométrica, as unidades de sentido necessárias para a conversão, QSf_c e QSf_c/Ac, mas não realiza a correspondência semântica entre essas e as respectivas unidades simbólicas. Esse tipo de erro nos faz conjecturar que os sujeitos tentam realizar o procedimento da dupla contagem mas acabam por inverter a relação parte-todo em todo-parte.

Ao nível 3, da figura 33, também com índice de coesão 1, a classe {1H3/5, 1A2/5} revela outro tipo de erro discutido na literatura, a relação parte-parte. Nesse tipo de erro os sujeitos, na conversão entre os registros, relacionam QSf_c ao numerador e QSf_c/Ac ao denominador. Dessa forma, consideram a Sf_c[35] compondo apenas o numerador, ou seja, consideram uma univocidade semântica terminal entre essas unidades de sentido (figural e simbólica) quando deveriam considerar justamente a ausência dessa, conforme Quadro 3 da pág. 100. Pois, as unidades figurais, Sf_c, se relacionam não apenas com o numerador, como também com o denominador da fração (formado pela quantidade de partes ou subfiguras com cor e com ausência de cor).

[35] Subfiguras ou partes com cor

Sendo assim, os sujeitos ao considerar a univocidade semântica terminal entre essas unidades de sentido perdem a noção do inteiro. Como afirmamos no Capítulo 4, compreendemos que os sujeitos que cometem esse tipo de erro prendem-se a uma apreensão perceptual da figura geométrica, destacando as partes com cor daquelas com ausência de cor.

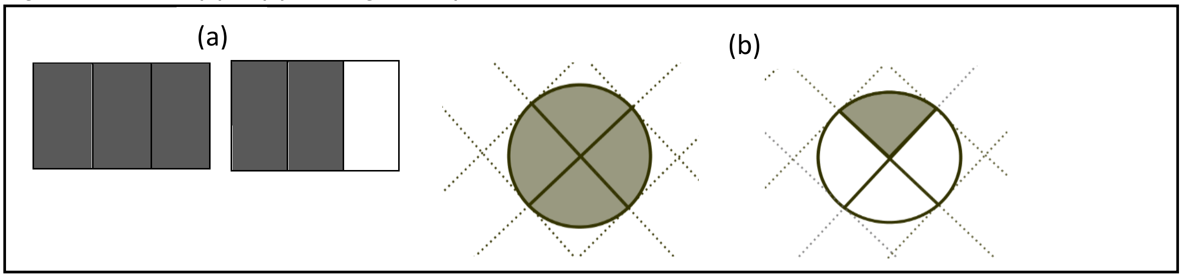
Ao nível 4, a classe de respostas {1A5/2,1H5/3}, com índice de coesão 1, aponta para o erro envolvendo relação parte-parte, com inversão do numerador pelo denominador. Uma junção dos erros das classes dos níveis anteriores descritos. Nessa classe de soluções os sujeitos consideram a univocidade semântica terminal entre as unidades de sentido, QSf_c e o numerador; e a inversão semântica entre a QSf_c/Ac e o numerador, e a QSf_c e o denominador.

Esses resultados corroboraram com a nossa análise prévia quanto as unidades de sentido entre os RGBidm e o RSF que devem ser consideradas no momento da conversão nesse nível, como também acrescenta os principais tipos de erros que podem ocorrer na inobservância de algum desses elementos. Sejam esses a univocidade semântica terminal entre a QSf_c e o numerador; e a inversão semântica entre QSf_c e o denominador, e QSf_c/Ac e o numerador.

6.2 ANÁLISE DOS ITENS A E B DA SEGUNDA QUESTÃO REFERENTES AO GRAU 2 DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

As figuras geométricas pertencentes ao Grau 2 de não congruência semântica, aplicadas no instrumento de pesquisa, correspondem aos itens “a” e “b” da segunda questão, representadas na Figura 34.

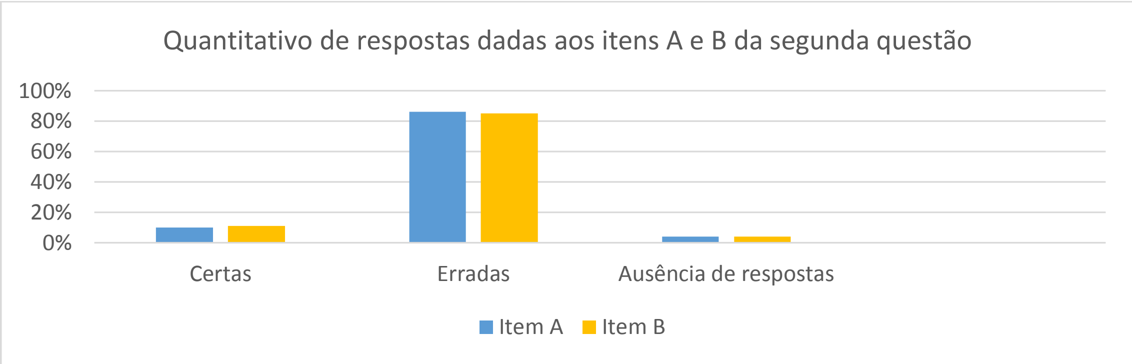
Figura 34 - Item (a) e (b) da segunda questão.



Fonte: autoria própria, 2018

O item A foi respondido por 365 sujeitos e o item B por 366, sendo que 16 deixaram de responder ao item A e 15 sujeitos não responderam ao item B. Do total de sujeitos (381), apenas 38 (10%) responderam corretamente ao item A e 43(11%) ao item B, conforme Gráfico .

Gráfico 4 - Quantitativo de respostas aos itens A e B da segunda questão.

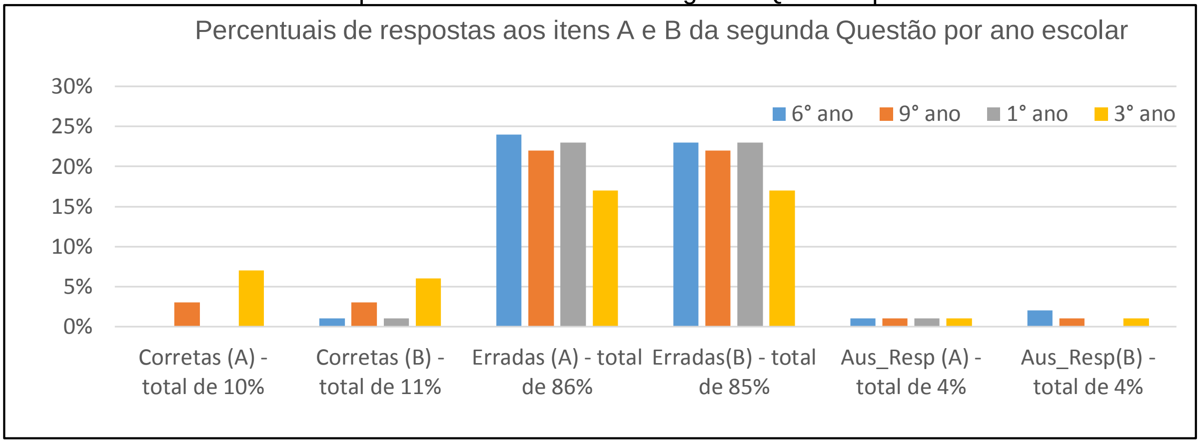


Fonte: autoria própria, 2018

Do total de respostas corretas dadas ao item A, 21 delas equivalem a resposta ‘3/3 2/3’, 10 sujeitos responderam ‘1 2/3’ e 7 atribuíram ‘5/3’ como resposta ao item. No item B, entre as respostas corretas dadas a esse, 23 delas correspondem a ‘4/4 1/4’, 13 sujeitos responderam ‘1 1/4’ e 7 atribuíram ‘5/4’ como resposta. Portanto, podemos observar que a resposta correta que mais prevaleceu aos dois itens é a que considera as duas figuras geométricas separadamente, sendo atribuídas duas frações para cada item.

Os alunos do 3° ano do Ensino Médio foram os que obtiveram o maior índice de acertos aos itens A e B, 7% dos 10% de acertos ao item A e 6% dos 11% de acertos ao item H, conforme Gráfico 5.

Gráfico 5 - Percentuais de respotas aos itens A e B da segunda Questão por ano escolar.



Fonte: autoria própria, 2018

A mesma regularidade podemos observar quanto aos índices de acertos dos dois itens dos alunos do 9° ano do Ensino Fundamental (apenas 3% de acertos para cada item). Enquanto que entre os alunos do 6° ano do Ensino Fundamental e 1° ano do Ensino Médio o índice de acertos ficou em torno de 0% para o item A e de 1% para o item B.

Do total de respostas atribuídas ao item A, 327 respostas, ou seja, 86% do total de respostas e não respostas são de respostas erradas. Desses 86%, 169 ocorrências ou 45% equivale a resposta '5/6', a qual despreza a conservação da unidade, pois relaciona o número de partes ou subfiguras pintadas com o número total de partes ou subfiguras que foram particionadas as duas unidades.O Quadro 14, apresenta as respostas erradas, o total de ocorrências relativo a cada uma delas, o percentual das ocorrências por ano escolar e o total percentual de ocorrências por resposta, daquelas que obtiveram mais de 10 ocorrências (3% do total de erros). Além, das respostas apresentadas no Quadro 14 tivemos 20 respostas com erros diversos (totalizando 14% das ocorrências), com seis ou menos ocorrências, cada uma.

Quadro 14 - Respostas, ocorrências e percentuais de respostas erradas referentes ao item A da segunda questão.

Resposta	Total de Ocorrências	Ocorrências por ano escolar(%)				Total de Ocorrências (%)
		6° ano	9° ano	1° ano	3° ano	
5/6	169	7%	13%	14%	11%	45%
5/1	57	4%	5%	4%	2%	15%
6/5	25	3%	0%	2%	1%	6%
1/5	13	2%	1%	1%	0%	4%
3/2	11	2%	0%	0%	0%	2%

Fonte: autoria própria, 2018

Podemos perceber, de acordo com o Quadro 14 que a resposta errada, '5/6' foi a mais atribuída, nessa categoria, de forma quase regular, pelos alunos de todos os anos escolares. A resposta com o segundo maior número de ocorrências, '5/1', considera uma relação parte-parte, ou seja, número de partes pintadas sobre número de partes ou subfiguras não pintadas. Essa resposta também foi atribuída por sujeitos de todos os anos escolares pesquisados

As respostas erradas ao item B totalizaram, 323, ou seja, 85% do total de respostas e não respostas atribuídas a esse item. O Quadro 15 ilustra as repostas erradas com mais de oito ocorrências. Além, das respostas apresentadas no Quadro tivemos 32 respostas com erros diversos (27% do percentual total de ocorrências), com oito ou menos ocorrências.

Quadro 15 - Respostas, ocorrências e percentuais de respostas erradas referentes ao item B da segunda questão.

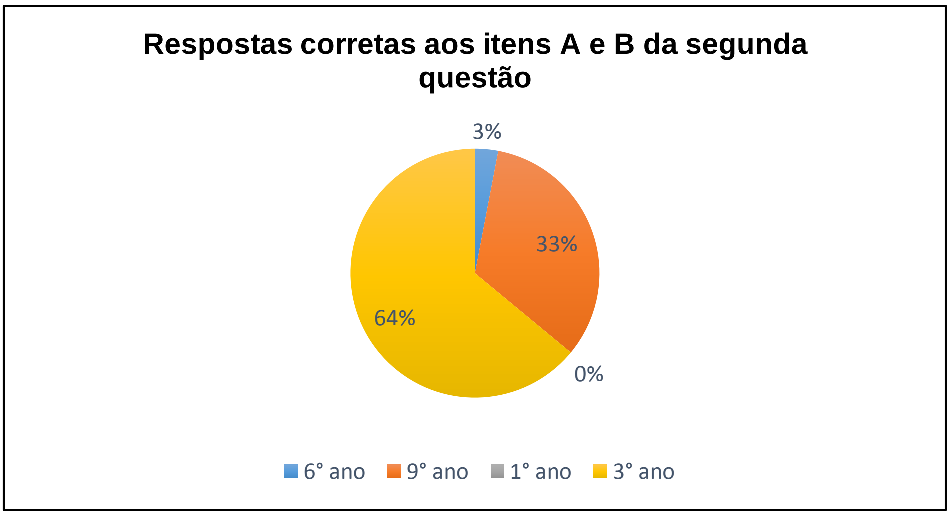
Resposta	Total de Ocorrências	Ocorrências por ano escolar(%)				Total de Ocorrências (%)
		6° ano	9° ano	1° ano	3° ano	
5/8	158	7%	11%	13%	11%	42%
5/3	61	5%	7%	3%	1%	16%
8/5	28	5%	0%	2%	0%	7%
3/5	11	1%	1%	1%	0%	3%

Fonte: autoria própria, 2018

Assim como no item A, a resposta errada que obteve maior número de ocorrências, '5/8', considera uma relação parte-todo, a qual há o desprezo da unidade, sendo, também atribuída de forma quase regular pelos sujeitos de todos os anos pesquisados. A segunda resposta errada de maior número de ocorrências, '5/3", faz referência a uma relação parte-parte, como no item A.

As intersecções realizadas entre as respostas dadas aos itens A e B da segunda questão revelaram que 33 sujeitos responderam corretamente ao item A e ao item B, sendo 1 aluno do 6° ano, 11 alunos do 9° ano e 21 alunos do 3° ano do Ensino Médio, conforme Gráfico 6.

Gráfico 6 - Respostas corretas por série atribuídas aos itens A e B.

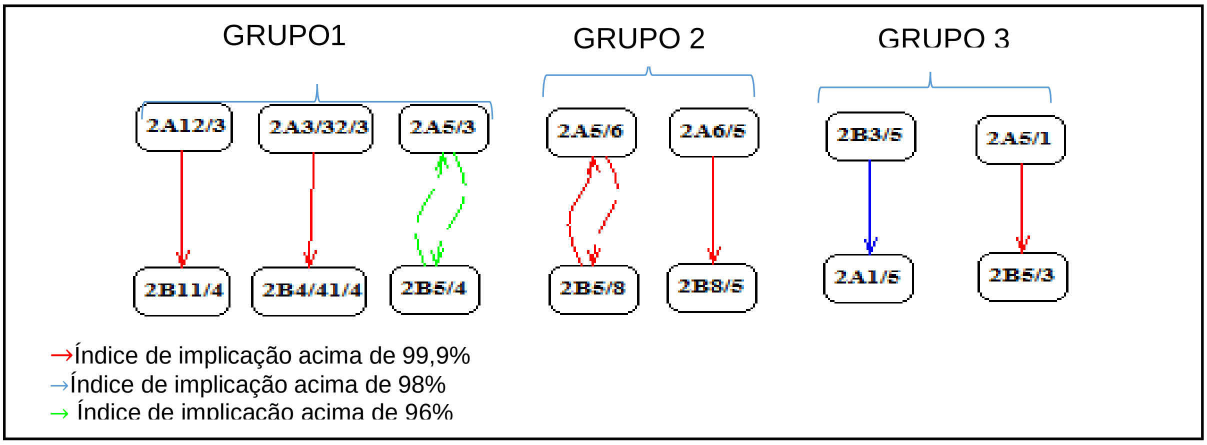


Fonte: autoria própria, 2018

Podemos verificar que entre os alunos do 1° ano do Ensino médio não houveram respostas corretas dadas simultaneamente aos itens A e B. No 6° ano apenas 1 aluno respondeu corretamente aos dois itens. Enquanto que os sujeitos do 3° do Ensino médio foram os responsáveis pela maioria das respostas corretas dadas simultaneamente aos itens.

O grafo implicativo da Figura 35, ilustra as quase implicações formadas a partir das intersecções entre todas as respostas dadas aos itens A e B da segunda questão, com índice de implicação acima de 96%. Os caminhos ou implicações grifados em vermelho possuem um índice de implicação acima de 99,9%, os grifados em azul, acima de 98% e aqueles em verde, superior a 96%. Esses caminhos foram divididos em grupos. O grupo 1 é formado por caminhos os quais as implicações são respostas corretas. Enquanto que os grupos 2 e 3 são formados por implicações entre soluções erradas dadas aos itens. No grupo 2 a relação estabelecida é parte-todo e no grupo 3, parte-parte.

Figura 35 - Grafico implicativo das respostas dadas aos tens A e B da segunda questão.



Fonte: autoria própria, 2018

GRUPO1:

O caminho 2A12/3→2B11/4(índice de implicação acima de 99,9%) indica que os sujeitos que respondem corretamente ao item ‘A’, 1 2/3 (um inteiro e dois terços), também o fazem para o item ‘B’, 1 1/4 (um inteiro e um quarto).Nessas soluções o sujeito trata cada item como tendo uma parte inteira e outra fracionária. Contribuíram com essas soluções os sujeitos do 9° ano do Ensino Fundamental e 3° ano do Ensino Médio, sendo esses últimos os que mais contribuíram para esse caminho, com um erro de 0,00173. Essas respostas foram dadas por 10 alunos (2,62%).

O caminho 2A3/32/3 →2B4/41/4 (índice de implicação acima de 99,9%) sugere que os sujeitos que respondem ‘3/3 2/3’ ao item A são aqueles que respondem ‘4/4 1/4’ ao item B. Apesar de ser uma solução correta,nos parece que os sujeitos tratam as figuras geométricas de cada item, isoladamente, podendo não ter a compreensão do que representa o todo. Os sujeitos que contribuem com essa classe são os alunos do 3° ano do Ensino Médio e os do 9° ano do Ensino Fundamental. Sendo os do 3° do Ensino Médio os que mais contribuem, com um risco de 0,00344. Essas respostas foram encontradas por 18 alunos (4,7%).

O caminho 2A5/3↔2B5/4 (índice de implicação acima de 96%) indica uma dupla quase implicação. Os sujeitos que atribuem ,corretamente, ‘5/3’ ao item A, atribuem ‘5/4’ ao item B e os que atribuem ‘5/4’ ao item B, atribuem ‘5/3’ ao item A. Esse tipo de solução parece levar em consideração o enunciado da questão, “Escreva a fração...’, para apesar de se ter um inteiro e uma fração, a solução ter sido dada pela fração correspondente a quantidade total.Contribuíram com esse caminho, 1 aluno do 6° ano do Ensino Fundamental e 4 alunos do 3° ano do Ensino Médio, sendo esses últimos os que mais contribuíram com erro de 0,00608. Essas respostas foram dadas por apenas 1,3% dos sujeitos.

GRUPO 2:

O caminho 2A5/6↔2B5/8 (índice de implicação acima de 99,9%) indica também uma dupla quase implicação, ou seja, os sujeitos que respondem ‘5/6’ para o item A, respondem ‘5/8’ para o item B. E os que respondem 5/8 para o item B, atribuem ‘5/6’ ao item A. Nesse tipo de solução, em cada item, há o desprezo da conservação da unidade. Os dois inteiros são tratados como um único inteiro, apenas. Assim, no item A, a unidade é compreendida como tendo 6 partes ou subfiguras e no item B, como sendo formado por 8 partes ou subfiguras. Contribuem para esse caminho os alunos de todas as séries pesquisadas. Essas soluções foram dadas por 146 alunos (38,3%). Foi a solução mais atribuída aos itens A e B da segunda questão. Sendo os alunos do 1° ano os que mais contribuíram com essas soluções, com um erro de 0,00334.

O caminho 6/5→8/5 (índice de implicação acima de 99,9%) aponta não só para o desprezo da conservação da unidade, como também, para a inversão da relação parte-todo em todo-parte.Contribuem para esse caminho os alunos de todas as séries pesquisadas, com exceção do 9° ano. A maior contribuição a esse caminho foi dos alunos do 6° ano, com um erro de 0,000555.As respostas foram dadas por 19 alunos (5%).

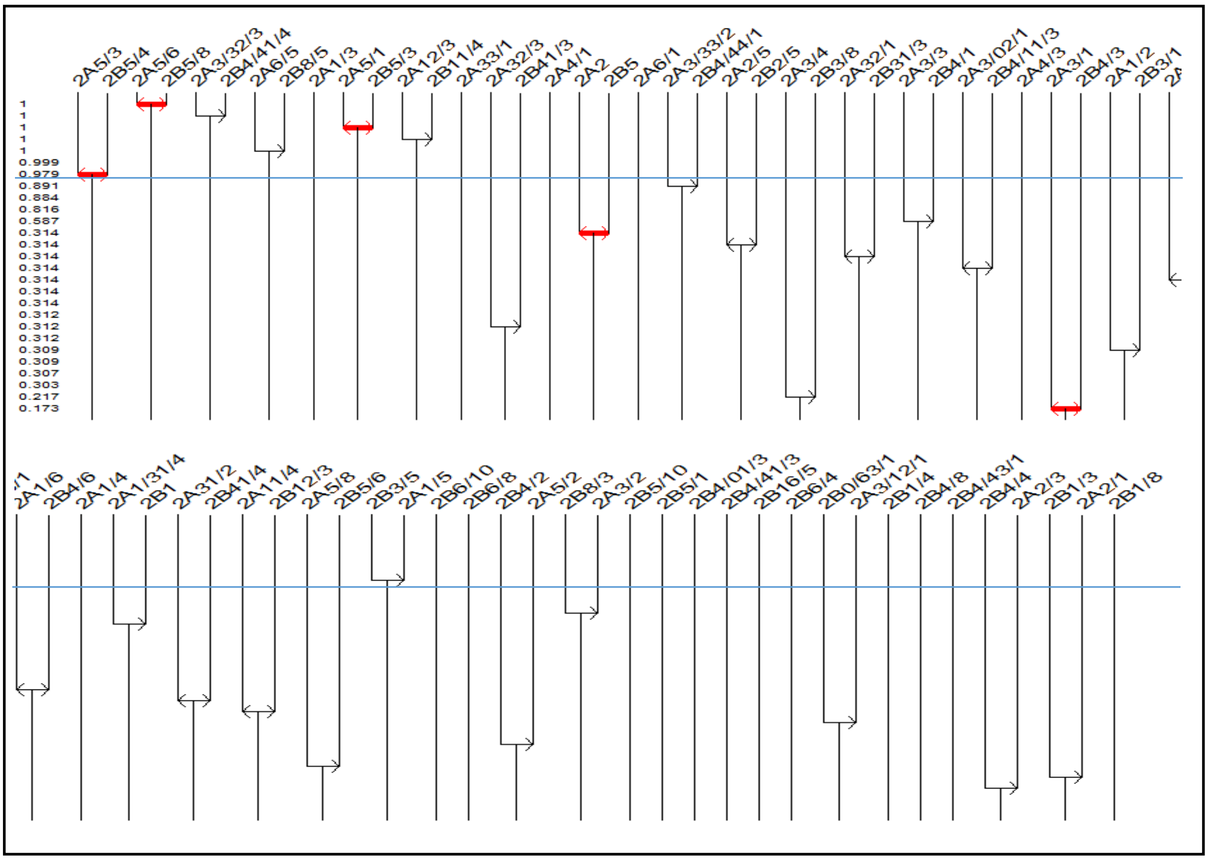
GRUPO 3:

O caminho 2A5/1→2B5/3 (índice de implicação de 99,9%) indica que os sujeitos que responderam ‘5/1’ para o item A, responderam também ‘5/3’ para o item B. Essas soluções consideram, para cada item, uma relação parte-parte entre quantidade de partes ou subfiguras pintadas dos inteiros e quantidade de partes ou subfiguras não pintadas do inteiro.Contribuíram para esse caminho os alunos de todas as séries pesquisadas. A maior contribuição foi dos alunos do 9° ano, com risco de 0,00566. Essas soluções foram atribuídas por 46 alunos (12,1%).

O caminho 2B3/5 → 2A1/5 (índice de coesão de 98%) aponta para aqueles sujeitos que consideram ‘3/5’, como resposta para o item A e ‘1/5’ para o item B. A relação parte-parte indicada nesses tipos de soluções é inversa a do caminho anterior, ou seja, entre partes não pintadas de um inteiro e partes pintadas.Contribuíram com essas soluções os alunos de todas as séries pesquisadas, exceto o 3° ano do Ensino Médio. Os que mais contribuíram foram os alunos do 9° ano do Ensino Fundamental com erro de 0,207. As soluções desse tipo foram atribuídas por 8 alunos (2,1%).

A árvore coesitiva formada com as respostas dadas aos itens A e B da segunda questão apresenta 5 níveis com nós significativos. Dentre esses níveis, 3 apresentam índice de coesão superior a 0,979, localizados acima do traço definido na Figura 36. O nó mais significativo se encontra no nível 1, cuja classe é formada pelas variáveis 2A5/6 e 2B5/8 e tem índice de coesão igual a 1.

Figura 36 - Árvore coesitiva das respostas dadas aos itens A e B da segunda questão.



Fonte: autoria própria, 2018

Entre as classes formadas nos níveis definidos acima do traço da Figura 36, três são constituídas por variáveis que representam as respostas corretas aos itens A e B da segunda questão (2A3/32/3 e 2B4/41/4; 2A12/3 e 2B11/4; 2A5/3 e 2B5/4).

A dupla implicação formando a classe de nível 7, com nó significativo e índice de coesão de 0,979, da Figura 36, nos leva a inferir que as figuras geométricas que correspondem aos itens A e B da segunda questão possuem as mesmas unidades de sentido necessárias para a conversão entre o RGBidm e o RSF, características desse nível, corroborando com a análise prévia, descrita no Capítulo 4, pág. 101.

Essas respostas indicam que os sujeitos, no momento da conversão (para ambos os itens) entre o RGBidm e o RSF realizaram a correspondência semântica entre a QSf_c e o numerador (5 para o item A e 5 para o B); e a QSf_int[36] e o denominador (3 para o item A e 4 para o item B), como constatamos no trecho da entrevista a aluna ‘3_ERL12C’, ilustrado no Quadro 16.

Quadro 16 - Trecho da entrevista a aluna ‘3_ERL12C’ respondendo ao item A da segunda questão.

A pesquisadora pergunta a aluna 3_ERL12C’ como ela havia pensado para responder ao item A da segunda questão e a aluna responde: **Aluna**: Quando tenho um inteiro e preciso de mais, tenho que fazer uma imagem igual para poder pegar a quantidade que eu necessito, que eu preciso. E aí eu vou conservar a quantidade da minha forma, nesse aqui foi três, e peguei cinco.

Fonte: autoria própria, 2018

A aluna responde com um exemplo, que faz alusão à conservação da unidade, ao fazer a conversão entre o RGBidm e o RSF, ou seja fazendo a correspondência semântica entre a unidade figural, QSf_int e a unidade simbólica, denominador da fração.

Nesse nível as unidades figurais, Sf_c e Sf _int[37] também (a exemplo do nível anterior) possuem mesma forma e mesma área, portanto não precisam de tratamento. Entretanto, nesse caso, a unidade figural (QSf_int) que se corresponde semanticamente com o denominador da fração, não responde ao procedimento da dupla contagem o qual considera para o denominador a correspondência semântica

[36] Quantidade de subfiguras ou partes de um inteiro
[37] Subfiguras ou partes do inteiro

entre a quantidade total de subfiguras ou partes com cor e ausência de cor. A presença de mais de um inteiro invalida esse procedimento, pois conduz à contagem de todas as partes ou subfiguras das figuras dadas em detrimento do todo considerado. Fato que acreditamos ser um dos fatores importantes para o número baixo de respostas corretas obtidas nos itens.

A classe {2A12/3; 2B11/4} ao nível 4, índice de coesão 1, revela a relação estabelecida entre os inteiros de cada item, dando a ideia de que os sujeitos compreendem a quantidade total representada nesses. As unidades de sentido utilizadas na conversão entre os registros são para o primeiro inteiro de cada item, a unidade figural, Int[38], e a simbólica, 1 e para o outro inteiro, as mesmas utilizadas na dupla contagem, QSf_c e o numerador (2 para o item A, e 1 para o item B); e a QSf_c/Ac, e o denominador (3 para o item A e 4 para o item B). .

A classe {2A3/32/3;2B4/41/4} ao nível 2, de respostas corretas aos itens, com índice de coesão 1, nos faz conjecturar que a regra é tratar os inteiros correspondentes a cada item separadamente encontrando assim, duas frações para cada item. Dessa forma, as unidades de sentido contempladas são as mesmas utilizadas na dupla contagem, QSf_c e o numerador (3 e 2 para o item A, 4 e 1 para o item B); e a QSf_c/Ac, e o denominador (3 e 3 para o item A, 4 e 4 para o item B). Dessa forma, o item é respondido corretamente mas não podemos afirmar que o sujeito tem a compreensão da quantidade total que representam essas frações, em cada item.

A dupla implicação da classe {2A5/6 , 2B5/8} no nível 1, com o nó mais significativo, indica que é forte a regra estabelecida pelos sujeitos a qual a conversão entre o RGBidm e o RSF utiliza o procedimento da dupla contagem, considerando uma correspondência semântica entre QSf_c e o numerador (5 para o item A e 5 para o B); e a QSf_c/Ac dos dois inteiros e o denominador (6 para o item A e 8 para o item B), sem observar que não há correspondência semântica entre esses últimos elementos (QSf_c/Ac dos dois inteiros e o denominador). Sendo assim, não conservam a unidade. Essa passa a ser tratada como sendo uma nova unidade resultado da junção entre as duas iniciais. Acreditamos que o uso do ‘procedimento pelo procedimento’ leva à perda da unidade de referência e à discretização do

[38] Inteiro

contínuo, ou seja, a figura geométrica passa a ser tratada como um conjunto de elementos discretos, como afirma Rodrigues(2005) e podemos observar no trecho da entrevista ao aluno ‘9_EKA23B’, que responde ao item A da segunda questão, conforme Quadro 17.

Quadro 17 - Trecho da entrevista ao aluno ‘9_EKA23B’ respondendo ao item A da segunda questão.

Pesquisadora: Como foi que você pensou? **Aluno:** Bom, eu olhei cada quadrado individualmente selecionados ou não, coloquei na parte debaixo, foram seis (6), então eu olhei os que estavam selecionados e coloquei em cima.

Fonte: autoria própria, 2018

A classe {2A6/5,2B8/5} ao nível 5, com índice de coesão 1, nos leva a inferir que na conversão entre os devidos registros, a correspondência semântica considerada nessa classe se dá entre as unidades de sentido, QSf_c/Ac dos dois inteiros e o numerador (6 para o item A e 8 para o item B); e a QSf_c e o denominador (5 para o item A e 5 para o item B). Diferencia da classe anterior porque apesar de considerarem as mesmas unidades figurais (QSf_c/Ac dos dois inteiros e QSf_c), realizam a correspondência semântica invertendo as unidades simbólicas (QSf_c/Ac dos dois inteiros e numerdor; QSf_c e denominador).

A dupla implicação da classe {2A5/1;2B5/3} ao nível 3, com índice de coesão 1, indica que foi considerada a correspondência semântica entre a unidade figural, QSf_c e a unidade simbólica,numerador; como também entre a unidade figural, QSf_Ac e o denominador, demonstrando uma compreensão de uma relação parte-parte. Sendo assim, os sujeitos consideram uma univocidade semântica terminal para as unidades de sentido, Sf_c e Sf_Ac. Ao nosso ver esses sujeitos prendem-se a uma apreensão perceptiva da figura geométrica, destacando as partes ou subfiguras com cor das com ausência de cor, conforme discutido no nível anterior.

A classe {2B3/5;2A1/5} ao nível 6, com índice de coesão 0,999, revela que os sujeitos elaboram uma correspondência semântica utilizando as mesmas unidades figurais da classe anterior (Sf_c e Sf_Ac), numa relação parte-parte. Entretanto invertendo a ordem dessas com as unidades simbólicas (Sf_Ac e numerador; Sf_c e denominador).

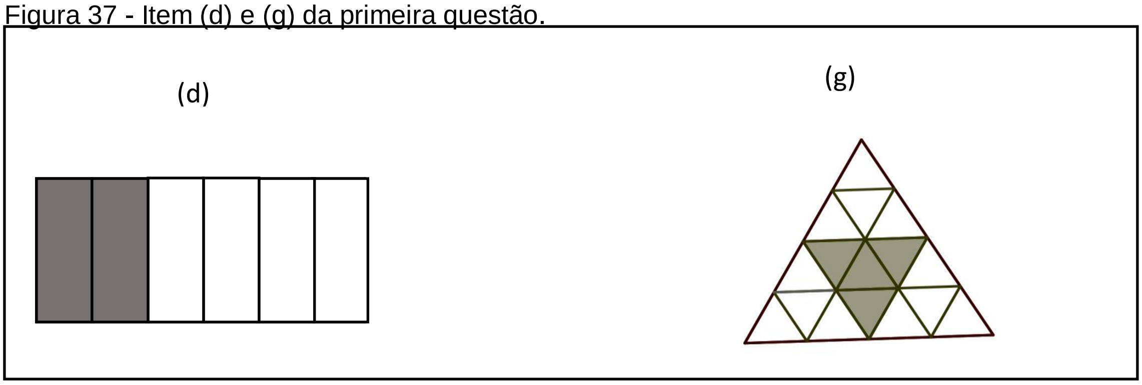
Esses resultados corroboram com a nossa análise prévia que as unidades de sentido a serem consideradas na conversão, nesse nível, são as Sf_c e Sf_int as quais são empregadas na correspondência semântica entre QSf_c e numerador e QSf_int. e denominador.

Os principais erros cometidos nesse nível, consideram uma correspondência semântica entre QSf_c/Ac e o denominador da fração, desprezando a unidade figural Sf_int. Ou ainda, a univocidade semântica terminal entre as unidades de sentido, QSf_c e o numerador; e a inversão semântica entre a QSf_c/Ac e o numerador, e a QSf_c e o denominador.Esses erros nos fazem inferir que o procedimento da 'dupla contagem' é muito presente, com relações entre parte-todo, todo-parte e parte-parte; desprezando a unidade.

6.3. ANÁLISE DOS ITENS D E G REFERENTES AO GRAU 3 DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

As figuras geométricas pertencentes ao Grau 3 de não congruência semântica, aplicadas no instrumento de pesquisa, correspondem aos itens "d" e "g" da primeira questão, representadas na Figura 37.

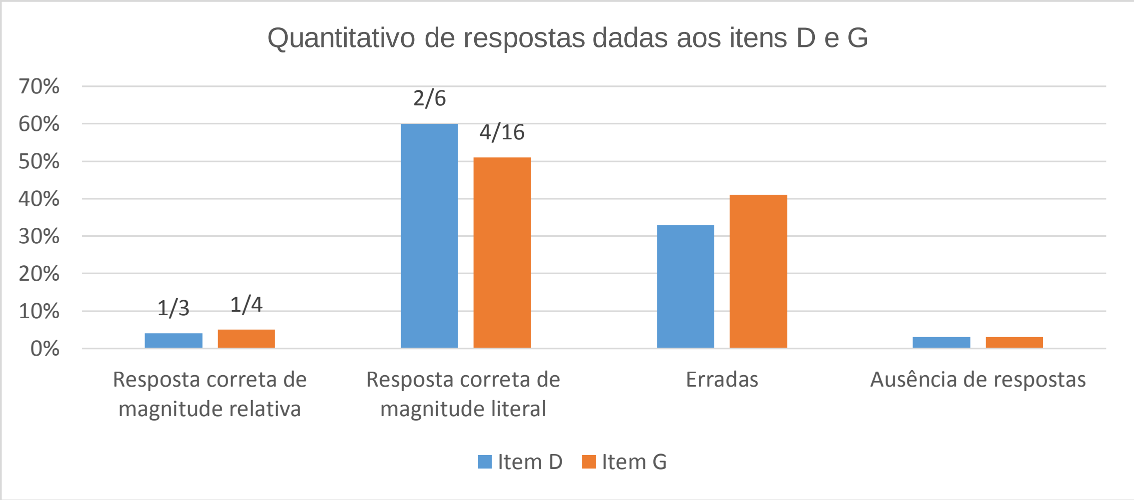
Figura 37 - Item (d) e (g) da primeira questão.



Fonte: autoria própria, 2018

O item D foi respondido por 369 sujeitos e o item G por 368, sendo que 11 deixaram de responder a ambos os itens. Do total de sujeitos (381), 64% deram uma das respostas corretas ao item A, '2/6' (fração literal) ou '1/3'(fração relativa). As respostas corretas, ‘4/16’ (fração literal) ou ‘1/4’ (fração relativa), dadas ao item G foram atribuídas por 55% do total de sujeitos. conforme Gráfico 7

Gráfico 7 - Quantitativo de respostas aos itens D e G.

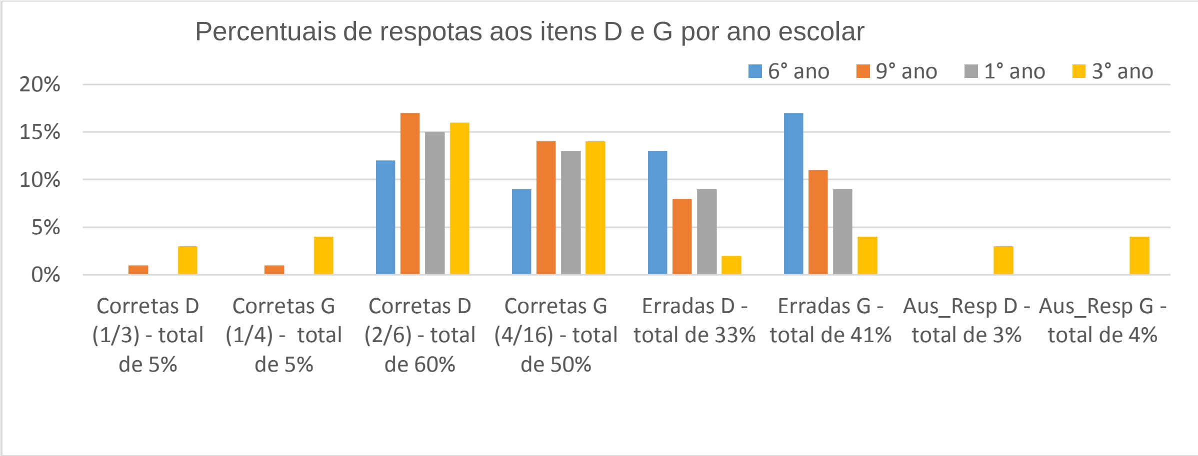


Fonte: autoria própria, 2018

Entre as 369 respostas atribuídas ao item D, 245 delas foram corretas. Entretanto apenas 17 sujeitos deram a resposta correta, ‘1/3’, ou seja, não se prenderam apenas à apreensão perceptual e discursiva das unidades figurais. Portanto, podem ter realizado um tratamento na figura para encontrar a fração irredutível, resultado da conversão no registro simbólico fracionário. Dos 17 sujeitos que atribuíram a resposta ‘1/3’ ao item D, 13 deles foram do 3° ano do Ensino Médio.

O item G apresentou índices próximos aos do item D, pois das 211 respostas corretas ao item, apenas 19 atribuem, ‘1/4’, ao item G. Fração de magnitude relativa equivalente àquela que pode ser visualizada espontaneamente na figura geométrica. Desses 19 sujeitos, 15 pertencem ao 3° ano do Ensino Médio. O gráfico 8, ilustra os índices das respostas corretas de magnitude relativa e literal; das respostas erradas e das ausências de respostas, por item e ano escolar.

Gráfico 8 - Percentuais de respostas aos itens D e G por ano escolar.



Fonte: autoria própria, 2018

No gráfico 8 podemos observar uma certa regularidade entre os índices das respostas aos itens D e G, quanto as respostas corretas por magnitude, como também entre as respostas erradas. Podemos verificar uma regularidade ainda entre os índices de acertos (magnitude literal), aos itens D e G, do 9° ano do Ensino Fundamental e 1° e 3° ano do Ensino Médio. Entre as respostas erradas, o item G apresenta valores um pouco maiores, em todos os anos escolares, que as do item D.

Do total de respostas atribuídas ao item D, 124 respostas, ou seja, 33% do total de respostas e não respostas são de respostas erradas. Desses 33%, 56 ocorrências ou 15% equivale a resposta ‘2/4’, a qual considera uma relação parte-parte, ou seja, número de partes ou subfiguras pintadas sobre número de partes ou subfiguras não pintadas.O Quadro 18 apresenta as respostas erradas, o total de ocorrências relativo a cada uma delas, o percentual das ocorrências por ano escolar e o total percentual de ocorrências por resposta, daquelas que obtiveram mais de 10 ocorrências (3% do total de erros). Além das respostas apresentadas no Quadro 18, tivemos 6 respostas com erros diversos (totalizando 3% das ocorrências), com dez ou menos ocorrências, cada uma.

Quadro 18 - Respostas, ocorrências e percentuais de respostas erradas referentes ao item D.

Resposta	Total de Ocorrências	Ocorrências por ano escolar(%)				Total de Ocorrências (%)
		6° ano	9° ano	1° ano	3° ano	
2/4	56	4%	7%	3%	1%	15
6/2	53	7%	1%	5%	1%	14

Fonte: autoria própria, 2018

As respostas erradas ao item G totalizaram, 157, ou seja, 41% do total de respostas e não respostas atribuídas a esse item. O Quadro 19, ilustra as repostas erradas com mais de dez ocorrências. Além, das respostas apresentadas no Quadro tivemos 16 respostas com erros diversos (11% do total de respostas), com nove ou menos ocorrências, cada uma.

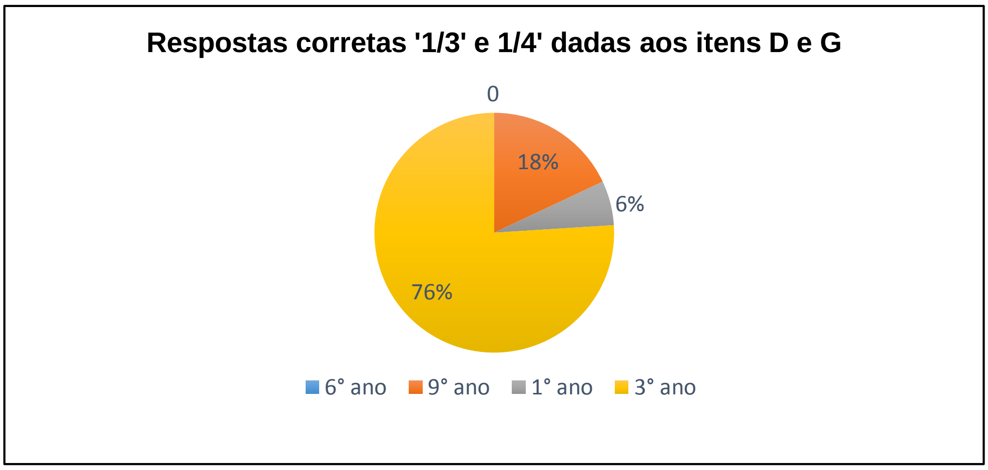
Quadro 19 - Respostas, ocorrências e percentuais de respostas erradas referentes ao item G.

Resposta	Total de Ocorrências	Ocorrências por ano escolar(%)				Total de Ocorrências (%)
		6° ano	9° ano	1° ano	3° ano	
4/12	56	4%	7%	3%	1%	15%
16/4	45	7%	1%	4 %	0%	12%
12/4	14	2%	1%	1 %	0 %	4%

Fonte: autoria própria, 2018

As intersecções realizadas entre as respostas dadas aos itens D e G revelaram que 188 sujeitos atribuíram a resposta correta ‘3/6’ e ‘4/16’, frações de magnitude literal, aos referidos itens. Enquanto que apenas 17 sujeitos deram como resposta correta aos itens A e G, respectivamente, ‘1/3’ e ‘1/4’, frações de magnitude relativa, conforme Gráfico 9.

Gráfico 9 - Respostas corretas ‘1/3’ e ‘1/4’ dadas aos itens D e G.

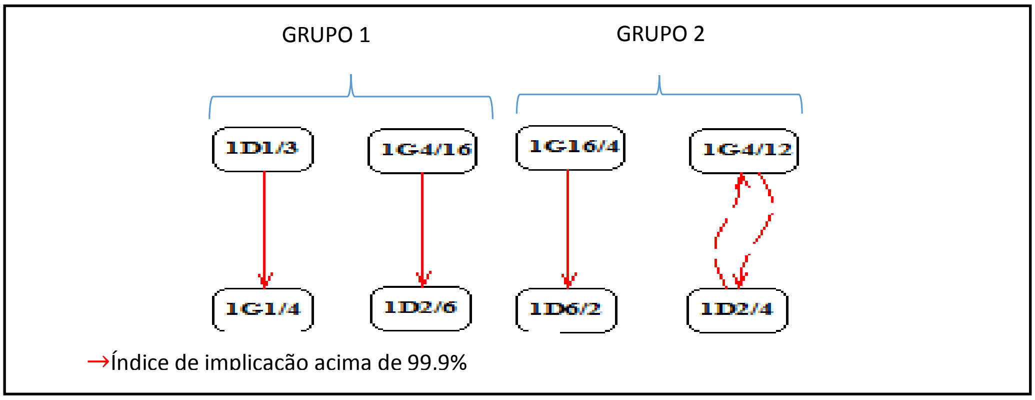


Fonte:autoria própria, 2018

Podemos verificar que entre os alunos do 6° ano do Ensino Fundamental não houveram respostas corretas ‘1/3’ e ‘1/4’ dadas simultaneamente aos itens D e G. No 9° ano foram 3 respostas, enquanto que no 1° ano do Ensino Médio houve apenas 1 resposta. Entre os sujeitos do 3° ano houveram 13 respostas, ou seja, a maioria das respostas corretas dadas simultaneamente aos itens.

O grafo implicativo da figura 38, ilustra as quase implicações formadas a partir das intersecções entre todas as respostas dadas aos itens D e G, com índice de implicação acima de 99,9% para os caminhos descritos. Esses caminhos foram divididos em 2 grupos. O grupo 1 é formado por caminhos de respostas corretas aos itens, sendo um deles com frações de magnitude literal e o outro com respostas de magnitude relativa. Enquanto que o grupo 2 é formado por quase implicações entre soluções erradas dadas aos itens.

Figura 38 - Gráfico Implicativo das respostas dadas aos itens D e G.



Fonte: autoria própria, 2018

GRUPO1:

O caminho 1D1/3→1G1/4 indica que os sujeitos que respondem corretamente ao item D, '1/3' (um terço), também respondem corretamente ao item G, '1/4' (um quarto). Nessas soluções os sujeitos realizam as conversões em frações de magnitudes relativas, ou seja, frações equivalentes as quantidades visualizadas na figura geométrica. Contribuíram com essas soluções todas as séries pesquisadas exceto o 6° ano do Ensino Fundamental. Os alunos do 3° ano do Ensino Médio foram os que mais contribuíram a esse caminho, com um risco de 0,00000542. Essas respostas foram dadas por 17 alunos (4,46%).

O caminho 1G4/16→1D2/6 sugere que os sujeitos que respondem '2/6' ao item D são aqueles que responderam '4/16' ao item G. Nesse tipo de solução as frações encontradas são de magnitude literal, correspondendo às quantidades visualizadas diretamente na figura geométrica. Esse caminho corresponde às soluções mais atribuídas nas conversões entre esses itens (188 respostas), distrbuídas quase uniformemente entre as séries pesquisadas. Sendo 35 respostas do 6° ano; 53 dos 9° anos; 48 respostas atribuídas pelos alunos do 1° ano e 52 por alunos do 3° ano do Ensino Médio. Os alunos do 9° ano foram os que mais contribuíram para essas soluções, com um risco de 0,174.

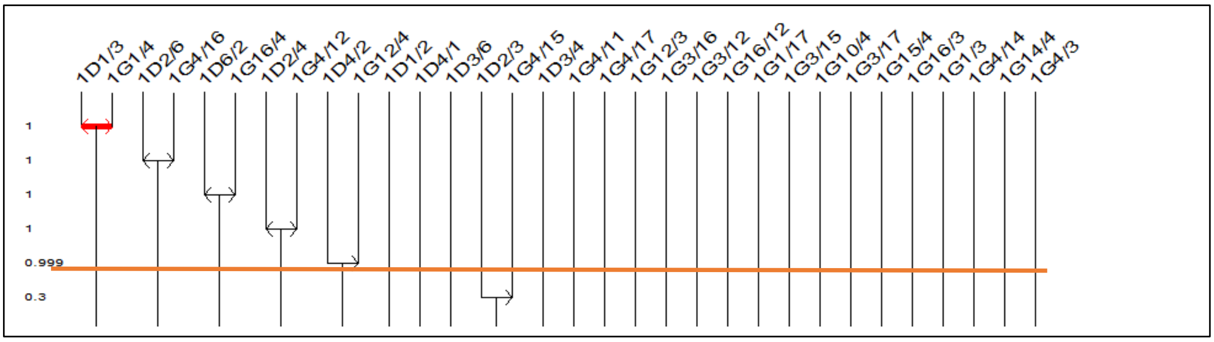
GRUPO 2:

O caminho 1G16/4→1D6/2 aponta para as soluções dadas aos itens D (16/4) e G (6/2) as quais a relação existente entre numerador e denominador é de todo-parte. Contribuíram com essas respostas todas as séries pesquisadas, exceto o 3° ano do Ensino Médio. Os que mais contribuíram com essas soluções foram os alunos do 6° ano do Ensino Fundamental (25), com um risco de 0,0000031. Esse caminho de respostas foi atribuído por 42 sujeitos.

O caminho 1G4/12→1D2/4, dupla implicação, indica que aqueles que respondem ‘4/12’ para o item G, respondem ‘2/4’ para o item D, e os sujeitos que respondem ‘2/4’ para o item D, também atribuem ‘4/12’ ao item G. A relação estabelecida entre numerador e denominador é a parte-parte. Contribuíram com esse caminho 40 respostas dos alunos de todas as séries pesquisadas. Os que mais contribuíram com essas soluções foram os alunos do 9° ano do Ensino Fundamental, com um risco de 0,000687.

A árvore coesitiva formada com as respostas dadas aos itens D e G ilustra 6 níveis de coesão. O nível 1, cuja classe é formada pela dupla implicação entre as variáveis 1D1/3 e 1G1/4, apresenta nó significativo. Dentre os níveis de coesão, 5 possuem índice superior a 0,999, localizados acima do traço definido na Figura 39.

Figura 39 - Árvore coesitiva das respostas dadas aos itens D e G.



Fonte: autoria própria, 2018

A dupla implicação da classe {1D1/3;1G1/4} de nível 1, com nó significativo e índice de coesão 1, da Figura 39 nos leva a inferir que as figuras geométricas que correspondem aos itens D e G possuem as mesmas unidades de sentido necessárias para a conversão entre os RGBidm e RSF, características desse nível, corroborando com a análise prévia, descrita no Capítulo 4, pág. 105.

Essas respostas indicam que os sujeitos, no momento da conversão (para ambos os itens) entre o RGBidm e o RSF podem ter realizado o tratamento da reconfiguração intermediária, implicita ou explicitamente para encontrar as unidades figurais (QsfMod_c[39] e Qsfmod_c/Ac[40]) necessárias para a conversão no registro simbólico fracionário em ambos os itens. Além de corresponderem semanticamente essas unidades figurais às unidades simbólicas fracionárias (numerador e denominador), como podemos observar no trecho da entrevista ao aluno '9_EKA23B', ao responder o item D, no Quadro 20.

Quadro 20 - Trecho da entrevista ao aluno '9_EKA23B' respondendo ao item D.

A pesquisadora pergunta ao aluno como ele havia pensado para responder ao item D e o aluno responde: **Aluno**: Bom, foi basicamente a lógica da letra A e B, eu vi todos os retângulos que tinham ao todo e olhei quantos estavam pintados, e foram dois pintados e seis no total, mas isso aqui dá para simplificar e colocar em um terço, porque seria necessário três do total que foi selecionado para completar toda a área selecionada ou não. **Pesquisadora**: Ok, '9_EKA23B'

Fonte: autoria própria, 2018

Na resposta do aluno '9_EKA23B' observamos que ele realiza um tratamento na figura geométrica, de inclusão das partes ou subfiguras, encontrando uma nova unidade-parte, que corresponde a QSf_c. Reparticiona a unidade, utilizando para isso a nova unidade-parte e contabiliza essa nova quantidade de subfiguras ou partes que contém a unidade. Nessa reconfiguração, a figura passa a ter 1 Sf_c e 3 Sf_c/Ac. Esses elementos figurais são relacionados semanticamente com a fração 1/3.

Por outro lado, foram encontradas respostas a esses itens, na qual o sujeito realiza a conversão para o registro simbólico fracionário sem realizar a modificação da figura geométrica e depois usa o tratamento de simplificação de frações para encontrar o resultado, '1/3'. Entretanto, não podemos afirmar se esses sujeitos reconhecem ou dão significado, na figura geométrica, à fração encontrada, como

---

[39] Quantidade de subfiguras ou partes modificadas com cor.
[40] Quantidade de subfiguras modificadas com cor e ausência de cor

podemos observar no trecho da entrevista a aluna ‘3_ERL12C’, ao responder o item D, conforme Quadro 21.

Quadro 21 - Trecho da entrevista a aluna ‘3_ERL12C’ respondendo ao item D.

A pesquisadora pergunta a aluna como ela pensou para atribuir a resposta ‘2/6’ ao item D:. **Pesquisadora:** E essa daí como foi que você pensou? **Aluna**: Basicamente a mesma coisa, você pega o inteiro, divide ele e ver as partes que estão em negrito ou pintada. **Pesquisadora**: Teria uma outra fração que você poderia representar essa mesma quantidade? **Aluna**: Fazendo a divisão, a simplificação. **Pesquisadora**: Humm. **(A aluna escreve 1/3)** **Pesquisadora**: E você reconheceria esse novo valor ali na figura? Aluna: Acho que não, acho que teria a mesma dificuldade dessa daqui. (**aluna mostra a questão anterior na qual apresentou a dificuldade mencionada na sua fala)**

Fonte: autoria própria, 2018

A aluna ‘3_ERL12C’ utilizou o procedimento de simplificação de frações para encontrar a resposta correta ’1/3’ para o item D. Entretanto não reconheceu, na figura geométrica, o valor encontrado. Podemos inferir que a solução encontrada por meio do uso do procedimento, bastante trabalhado em sala de aula, fez com que a aluna perdesse a compreensão do que representa aquele valor no registro geométrico bidimensional. Constatamos que 10 respostas, das 17 respostas atribuídas aos itens D(1/3) e G(1/4), apresentam o uso do procedimento da simplificação de frações.

A classe {1D2/6; 1G4/16} ao nível 2, com dupla implicação e índice de coesão 1, revela as respostas às quais os sujeitos se prendem à apreensão perceptual e discursiva dos elementos figurais. A conversão para o RSF provavelmente é realizada com o uso da dupla contagem, com correspondência semântica entre a Qsf_c e o numerador; e a Qsf_c/Ac e o denominador da fração. Essa classe contém o maior número de respostas dadas aos itens (188). Os sujeitos parecem não compreender a necessidade do tratamento figural ou simbólico para encontrar a fração irredutível, de magnitude relativa, equivalente às quantidades descritas na figura geométrica inicial, conforme trecho da entrevista ao aluno ‘9_EKA24B’, descrito no Quadro 22.

Quadro 22 - Trecho da entrevista ao aluno ‘9_EKA24B’ respondendo ao item D.

Pesquisadora: E aí como foi que resolveu? **Pesquisadora pergunta ao aluno como ele resolveu o item D, o qual atribuiu como resposta, ‘2/6’.** Aluno: Essa daqui eu olhei para o que já está dividido. Professora: Certo. E teria uma outra fração aqui que representaria essa mesma quantidade? Existiria para você uma outra fração, que você poderia escrever aqui que representasse essa mesma quantidade? **Pesquisadora aponta para a figura.** **Aluno pensa por alguns instantes e responde:** Aluno: Acho que não

Fonte: autoria própria, 2018

O aluno ‘9_EKA24B’ observa as divisões que constam na figura geométrica para elencar as unidades figurais QSf_c e QSf _c/Ac e realizar a conversão para o RSF, por meio da correspondência semântica entre essas unidades e as respectivas unidades simbólicas, numerador e denominador. Esse procedimento é próprio da dupla contagem. Mas não consegue resignificar a figura geométrica com outro particionamento, no RGBidm; ou encontrar uma fração equivalente à solução dada, no RSF.

A classe {1D6/2;1D16/4} ao nível 3, dupla implicação, índice de coesão 1, sugere que os sujeitos se prendem a apreensão perceptual e discursiva dos elementos figurais e realizam a dupla contagem, numa relação todo-parte. Dessa forma, estabelecem a correspondência semântica entre QSf_c e o denominador, e a QSf _c/Ac e o numerador da fração.

A classe {1D2/4;1D4/12} ao nível 4, dupla implicação, índice de coesão 1, revela que os sujeitos se prendem a uma apreensão perceptual das figuras geométricas, consideram uma univocidade semântica terminal para as unidades figurais, Sf_c e Sf_Ac e realizam uma correspondência semântica entre essas e, respectivamente, o numerador e o denominador da fração, como discutido em níveis anteriores.

A classe {1D4/2;1D12/4} ao nível 5, índice de coesão de 0,999, demonstra que a regra utilizada para as soluções considera como na classe anterior, uma univocidade semântica terminal para as unidades figurais, Sf_c e Sf_Ac. Sendo que a relação estabelecida é entre QSf_c/Ac e o numerador; e QSf_c e o denominador da fração.

Esses resultados corroboram com a nossa análise prévia a qual entende que as figuras geométricas pertencentes a esse nível necessitam além de uma apreensão perceptiva e discursiva das unidades figurais, de uma apreensão operatória. O tratamento de inclusão das partes propicia ao surgimento de uma nova unidade-parte e reparticionamento da unidade, com base nessa. As unidades figurais QsfMod_c e Qsfmod_c/Ac encontradas, no tratamento da inclusão entre partes ou subfiguras, se correspondem semanticamente com o numerador e o denominador da fração. A fração encontrada é de magnitude relativa. Nesse nível, as figuras geométricas propiciam ao desenvolvimento do conceito de ‘equivalência, nos RGBidm e RSF.

Podemos inferir também que a estratégia da dupla contagem para a conversão no RSF é muito utilizada nesse nível. Entre os cinco caminhos de soluções analisados, quatro deles utilizam esse procedimento, seja relacionando partes com todo, todo com partes ou partes com partes.

6.4. SÍNTESE DA ANÁLISE DOS GRAUS DE NÃO CONGRUÊNCIA 1, 2 E 3

Ao longo desse capítulo analisamos os dados resultantes da nossa pesquisa empírica quanto ao que defendemos ser os Graus de não congruência semântica 1, 2 e 3 na conversão entre o registro geométrico bidimensional e o simbólico fracionário dos números racionais.

O grau 1 de não congruência semântica corresponde a conversão em que as figuras geométricas pertencentes ao registro de partida (RGBidm) são denominadas nessa pesquisa como sendo figuras perceptuais. Essas figuras são aquelas em que as subfiguras ou partes possuem explícitas as áreas congruentes e as formas homogêneas. Dessa forma, essas figuras geométricas não necessitam de tratamento implícito ou explícito para que a conversão seja realizada. Entretanto, é necessário uma interpretação das suas formas (apreensão perceptiva) e das unidades figurais necessárias para esse fim (apreensão discursiva).

O grau 2 de não congruência semântica envolve as conversões entre os RGBidm e o RSF, cujas representações no registro de partida são figuras perceptuais com mais de um inteiro, diferenciando daquelas do grau 1 de não congruência semântica apenas pela presença de mais de uma unidade.

O grau 3 de não congruência semântica apresenta conversões em que as figuras geométricas, representações do registro de partida, são classificadas, nessa pesquisa, como operatórias por inclusão das partes. Sendo, a partir desse grau de não congruência semântica, possível de se realizar tratamentos ou uma apreensão operatória na figura geométrica, para que todas as unidades figurais necessárias para a conversão sejam visualizadas.

Em todos os graus de não congruência semântica analisados verificamos uma regularidade de acertos, erros e ausência de respostas entre os dois itens pertencentes a cada um dos níveis. Como também, a análise da árvore coesitiva dos três graus de não congruência demonstrou que as figuras geométricas pertencentes a cada grau possuem as mesmas unidades de sentido necessárias para a conversão. Esses resultados corroboram com a nossa classificação prévia das duas figuras geométricas como pertencentes ao mesmo grau de não congruência semântica.

Entre os sujeitos pesquisados, verificamos que os alunos do 3° ano do Ensino Médio foram os que obtiveram maior índice de acertos e os do 6° ano do Ensino Fundamental, o menor. Esses resultados podem ser justificados por ser os primeiros, alunos que estão encerrando a educação básica, portanto, devem ter estudado os números racionais ao longo desta. E os últimos (alunos do 6° ano do Ensino Fundamental) estão apenas iniciando o 3° ciclo do Ensino Fundamental, sendo assim, ainda ampliando os conceitos e representações dos números racionais.

A análise das intersecções realizadas entre as respostas dadas aos dois itens de cada grau de não congruência semântica (grau 1 ao grau 3), demonstraram que o grau 1 de não congruência semântica apresenta o maior índice de acertos simultâneos (59%) aos itens, enquanto que o grau 2 equivale ao menor índice de acertos simultâneos (9%). O grau 3 de não congruência semântica obteve um índice de 54% desses acertos.

Apesar dos baixos índices de acertos do grau 2 de não congruência semântica, mantivemos o grau de classificação dessas figuras geométricas porque temos como base Duval (2004). O referido pesquisador define dois níveis de apreensões das figuras geométricas, sendo o nível 1 para aquelas que requerem apenas o reconhecimento das unidades figurais e o nível 2 as que necessitam de modificações na figura dada. Portanto, os nossos graus 1 e 2 de não congruência semântica estão incluídos no nível 1 de Duval (2004), enquanto que os demais níveis pertencem ao nível 2 do referido autor.

Acreditamos que os baixos índices de acertos do Grau 2 de não congruência semântica estão relacionados a quase exclusão dessas figuras nos livros didáticos e, consequentemente, da sala de aula de matemática. Pois, como afirma Duval (2011) as conversões não são transformações 'espontâneas', necessitam ser trabalhadas em sala de aula para que sejam desenvolvidas as estruturas cognitivas necessárias para tal. Nesse caso, as transformações entre esses registros levam a compreensão da unidade como invariante.

A análise das quase implicações, por meio do Grafo implicativo, e das 'regras' que definem as classes hierárquicas formadas na árvore coesitiva das intersecções entre as respostas dadas ao itens pertencentes a cada grau de não congruência semântica, nos forneceu as características das conversões realizadas entre os RGBidm e o RSF.

As respostas corretas no Grau 1 de não congruência semântica utilizam das apreensões perceptiva e discursiva para considerar as unidades figurais QSf_c e QSf_c/Ac na conversão no RSF, resultando numa fração de magnitude literal.

No grau 2 de não congruência semântica, as respostas que apresentaram maior índice de acertos em ambos os itens, atribuem uma fração para cada figura geométrica, parecendo indicar que os sujeitos estão tratando as figuras separadamente, sem que tenham a compreensão do todo. Também não podemos afirmar se nas respostas que apresentam uma parte inteira e outra fracionária, os sujeitos têm a noção da quantidade como um todo ou apenas das quantidades pertencentes a cada inteiro; diferente das respostas que atribuem aos dois inteiros uma única fração.

No grau 3 de não congruência semântica as figuras geométricas podem submeter-se a uma apreensão operatória antes da conversão no RGBidm para que sejam encontradas as unidades figurais, QsfMod_c e QsfMod_c/Ac. Entretanto, o maior índice de respostas corretas ao índice tem como referência as quantidades descritas nas figuras geométricas que levam às frações de magnitude literal. Essas respostas parecem indicar que os sujeitos não conseguem resignificar a figura geométrica com outro particionamento, no RGBidm, ou encontrar uma fração equivalente à solução dada. Enquanto que as repostas que usam o procedimento da simplificação das frações após a conversão demonstraram que esse procedimento pode levar a perda da compreensão no RGBidm da quantidade representada nesse registro.

O Quadro 23, sintetiza as características das conversões realizadas entre os RGBidm e RSF consideradas 'resposta corretas' por grau de não congruência semântica: as unidades figurais consideradas, os tipos de apreensões utilizadas e as características da representação no RSF.

Quadro 23 - Síntese das conversões das repostas corretas por grau de não congruência semântica.

<table>
<tr><th>GRAU</th><th colspan="2">UNIDADE FIGURAIS CONSIDERADAS</th><th>APREENSÕES UTILIZADAS</th><th>CARACTERÍSTICAS DA REPRESENTAÇÃO NO RSF</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">QSf_c e QSf_c/Ac</td><td>Apreensão perceptiva e discursiva</td><td>Fração de magnitude literal</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>2 frações</td><td>QSf_c e QSf_c/Ac para cada uma</td><td>Apreensão perceptiva e discursiva</td><td>Dupla: duas frações de magnitude literal. Não demonstra compreensão do todo.</td></tr>
<tr><td>Um inteiro e uma fração</td><td>Int: para a unidade;
QSf_c e QSf_c/Ac para a parte fracionária</td><td>Apreensão perceptiva e discursiva</td><td>Dupla: uma unidade e uma fração de magnitude literal.
Demonstra compreensão do todo como sendo composto por duas quantidades.</td></tr>
<tr><td>Uma fração</td><td>QSf_c e QSf_Int</td><td>Apreensão perceptiva e discursiva</td><td>Uma fração de magnitude relativa.
Demonstra compreensão de um todo único.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td colspan="2">QSf_c e QSf_c/Ac</td><td>Apreensão perceptiva e discursiva</td><td>Fração de magnitude literal.
Não demonstra compreender a propriedade da equivalência, nas representações geométrica e simbólica fracionária.</td></tr>
<tr><td colspan="2">QSf_c e QSf_c/Ac</td><td>Apreensão perceptiva e discursiva</td><td>Fração de magnitude relativa. Faz uso da simplificação de frações. Mas não demonstra compreensão da quantidade relativa na figura geométrica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">QSfMod_c e QSfMod_c/Ac</td><td>Apreensão perceptiva, discursiva e operatória</td><td>Fração de magnitude relativa. Faz uso da apreensão operatória, tratamento da reconfiguração intermediária para encontrar as unidade figurais.</td></tr>
</table>

Fonte: autoria própria, 2018

Os graus de não congruência semântica analisados apontam para o uso do procedimento da dupla contagem. No entanto, sem que muitas vezes o sujeito tenha compreensão do que deve ser contado, ou da relação entre essas unidades figurais e as simbólicas fracionárias, levando a erros como a relação parte-parte e a relação todo-parte. No Quadro 24, sintetizamos os principais erros cometidos pelos sujeitos da pesquisa ao realizar as conversões entre os registros, por grau de não congruência semântica.

Quadro 24 - Principais erros cometidos nas conversões entre RGBidm e RSF por grau de não congruência semântica.

Grau de não congruência semântica	**Característica dos erros nas conversões entre RGBidm e RSF**
Grau 1	-Inversão semântica entre QSf_c e o denominador e QSf_c/Ac e o numerador (relação todo/parte); -Univocidade semântica terminal entre a QSf_c e o numerador, e Qsf_Ac e denominador ou vice-versa (relação parte-parte)
Grau 2	-Correspondência semântica entre QSf_c/Ac e o denominador da fração, desprezando a unidade figural Sf_int, ou o seu inverso (relação parte/todo com desprezo da unidade); -Univocidade semântica terminal entre a QSf_c e o numerador, e Qsf_Ac e denominador ou vice-versa (relação parte-parte)
Grau 3	Os sujeitos consideram as quantidades visualizadas na figura, sem tratamento, e realizam: -Inversão semântica entre QSf_c e o denominador e QSf_c/Ac e o numerador (relação todo/parte); -Univocidade semântica terminal entre a QSf_c e o numerador, e Qsf_Ac e denominador ou vice-versa (relação parte-parte)

Fonte: autoria própria, 2018

No próximo capítulo traremos a análise dos graus 4, 5 e 6 de não congruência semântica.

CAPÍTULO 7. ANÁLISE DOS DADOS EMPÍRICOS QUANTO AOS GRAUS DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA DO 4 AO 6

Nesse capítulo faremos a análise dos dados da pesquisa empírica referentes aos itens B e J, C e E, F e I, da primeira questão do instrumento de pesquisa que, de acordo com a análise prévia, descrita no Capítulo 4, pertencem respectivamente, aos graus 4, 5 e 6 de não congruência semântica.

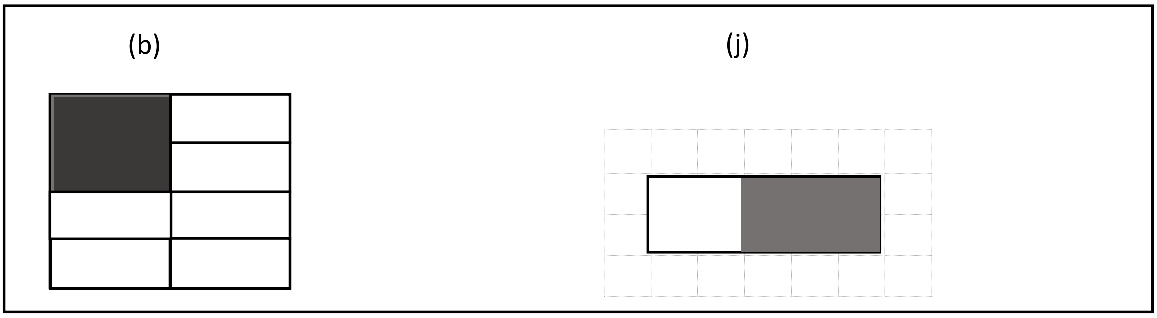
Esses graus de não congruência semântica apresentam a particularidade de necessitarem, além das apreensões perceptivas e discursivas, da apreensão operatória para conversão entre o RGBidm e o RSF.

Ao final desse capítulo faremos uma síntese dos dados encontrados.

7.1. ANÁLISE DOS ITENS B E J REFERENTES AO GRAU 4 DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

As figuras geométricas pertencentes a este nível, aplicadas no instrumento de pesquisa, correspondem aos itens "b" e "j" da primeira questão, representadas na Figura 40.

Figura 40 - Item (b) e (j) da primeira questão.



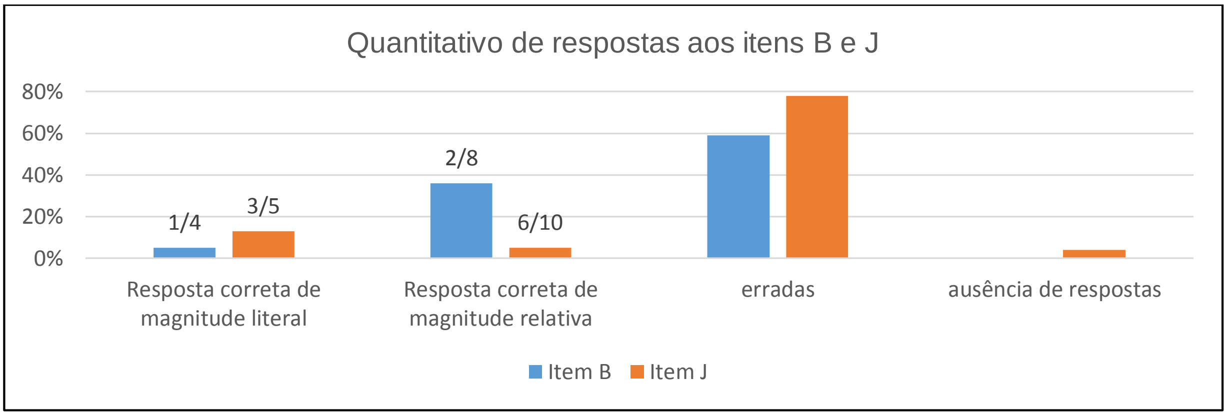
Fonte: autoria própria, 2018

O item B foi respondido por 380 sujeitos e o item J por 367. Sendo assim, 1 sujeito não respondeu ao item B e 14 não responderam ao item J. Do total de sujeitos

(381), 41% deram uma das respostas corretas ao item B, ‘1/4’ (fração relativa) ou ‘2/8’ (fração literal).

As respostas corretas, ‘3/5’ (fração relativa) ou ‘6/10’ (fração literal), dadas ao item J foram atribuídas por 18% do total de sujeitos, enquanto que 78% dos pesquisados erraram o item, conforme Gráfico 10.

Gráfico 10 - Quantitativo de respostas aos itens B e J.



Fonte: autoria própria, 2018

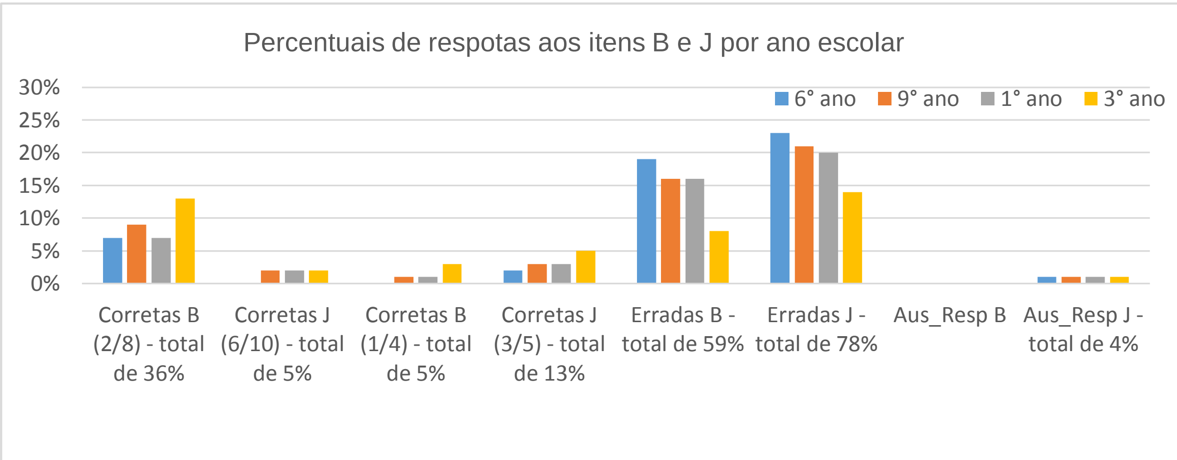
Entre as 380 respostas atribuídas ao item B, 156 delas foram corretas. O maior número de ocorrências (137) se deu para a resposta correta, de magnitude literal, ‘2/8’, indicando que esses sujeitos realizaram o tratamento figural, explícito ou não, de reconfiguração por divisão (particionamento complementar) em subfiguras de mesma área.

Entretanto houve apenas 19 ocorrências para a resposta correta, de magnitude relativa, ‘1/4’, a qual indica que o sujeito pode ter realizado, além da reconfiguração por divisão, também o tratamento de reconfiguração por inclusão das partes ou subfiguras, ou ainda, ter encontrado a fração irredutível após converter no registro simbólico fracionário. Dos 19 sujeitos que atribuíram a resposta ‘1/4’, ao item B, 14 deles foram do 3° ano do Ensino Médio.

O item J apresentou apenas 71 respostas corretas das 367 atribuídas ao item. A resposta correta de maior número de ocorrências (50) é a fração, ‘3/5’; o que nos leva a compreender que esses sujeitos realizaram o tratamento figural de reconfiguração por divisão para particionar em subfiguras de mesma área. Nesse item, como a unidade-parte não estava definida explicitamente (diferentemente do item B), os sujeitos que deram essa resposta ao item podem, no momento do particionamento, no tratamento da reconfiguração por divisão, ter atribuído ‘1/5”, como unidade-parte. Sendo assim, particionaram a unidade em cinco partes ou subfiguras de áreas iguais e a fração ‘3/5’, resultado da conversão terá magnitude literal. Ou ainda, podem ter seguido o particionamento do suporte e particionado a figura geométrica em 10 partes, sendo 6 partes ou subfiguras pintadas, convertendo na fração ‘6/10’ e ter simplificado a fração em ‘3/5’.

A resposta correta ao item J, ‘6/10’, fração de magnitude literal, foi atribuída por 21 sujeitos. Entendemos que esse tipo de resposta agrega a reconfiguração por divisão para o particionamento em partes ou subfiguras de áreas congruentes, com auxílio do particionamento do suporte, sem considerar o tratamento de reconfiguração por inclusão de partes ou subfiguras de áreas congruentes ou a fração equivalente, irredutível. Desses 21 sujeitos, 9 deles foram do 3° ano do Ensino Médio. O gráfico 11 ilustra os índices das respostas corretas de magnitude relativa e literal; das respostas erradas e das ausências de respostas, por item e ano escolar.

Gráfico 11 - Percentuais de respostas aos itens B e J por ano escolar.



Fonte: autoria própria, 2018

No Gráfico 11, podemos observar que as respostas corretas as quais atribuem ‘2/8’ ao item B obtém um maior percentual em relação as demais respostas corretas, sejam do mesmo item ou do item J. Acreditamos que essa diferença se deu pelo fato de que na figura geométrica do item B há uma unidade-parte inicialmente definida (explícita). Essa ao ser reconhecida (apreensão perceptual e discursiva) basta o tratamento de reconfiguração por divisão (particionamento complementar) para definir o total de partes ou subfiguras da unidade para conversão na fração de magnitude literal (2/8).

Nas demais respostas corretas é necessário o reconhecimento da unidade-parte (implícita) para definição do particionamento (apreensão operatória). Ainda no item B, a resposta, ‘1/4’, considera uma unidade-parte modificada (tratamento de reconfiguração por inclusão das partes); ou a fração resultado da conversão no RSF passa por um tratamento de simplificação de frações.

No item J, a figura geométrica não traz uma unidade-parte inicialmente definida, ou seja, a unidade-parte é implícita, podendo ser definida como sendo ‘1/5’ ou ‘1/10’ para o tratamento de reconfiguração por divisão (particionamento). Como consequência teremos como resposta, ‘3/5’ ou ‘6/10’.

Dessa forma, verificamos uma certa diferença de rendimento quando a figura de particionamento explícito incompleto com partes ou subfiguras de formas homogêneas apresenta, ou não, explicitamente, uma unidade-parte inicial. A ausência (explícita) dessa, acarreta a sua descoberta, que com base nos índices inferiores de acertos nos leva a compreender que requer um maior custo cognitivo.

Do total de respostas atribuídas ao item B, 224 respostas, ou seja, 59% do total de respostas e não respostas são de respostas erradas. Desses 59%, 84 ocorrências ou 22% equivale a resposta ‘1/7’, a qual considera uma relação parte-parte com desprezo da congruência entre as áreas das partes ou subfiguras. O Quadro 25, apresenta as respostas erradas, o total de ocorrências relativo a cada uma delas, o percentual das ocorrências por ano escolar e o total percentual de ocorrências por resposta, daquelas que obtiveram mais de 8 ocorrências (2% do total de erros). Além, das respostas apresentadas no Quadro 25, tivemos 9 respostas com erros diversos (totalizando 8% das ocorrências), com oito ou menos ocorrências, cada uma.

Quadro 25 - Respostas, ocorrências e percentuais de respostas erradas referentes ao item B.

Resposta	Total de Ocorrências	Ocorrências por ano escolar (%)				Total de Ocorrências (%)
		6° ano	9° ano	1° ano	3° ano	
1/7	84	4%	8%	6%	4%	22%
1/6	43	1%	6%	3%	1%	11%
8/2	27	5%	0%	1%	1%	7%
2/6	23	4%	1%	1%	0%	6%
7/1	17	1%	1%	3%	0%	5%

Fonte: autoria própria, 2018

As respostas erradas ao item J totalizaram, 296, ou seja, 78% do total de respostas e não respostas atribuídas a esse item. O Quadro 26 ilustra as repostas erradas com mais de oito ocorrências. Além, das respostas apresentadas no Quadro 26, tivemos 38 respostas com erros diversos (25% do total de respostas erradas), com oito ou menos ocorrências, cada uma.

Quadro 26 - Respostas, ocorrências e percentuais de respostas erradas referentes ao item J.

Resposta	Total de Ocorrências	Ocorrências por ano escolar (%)				Total de Ocorrências (%)
		6° ano	9° ano	1° ano	3° ano	
1/2	114	5%	9%	9%	7%	30%
1/1	62	6%	5%	4%	1%	16%
2/1	26	3%	1%	2%	1%	7%

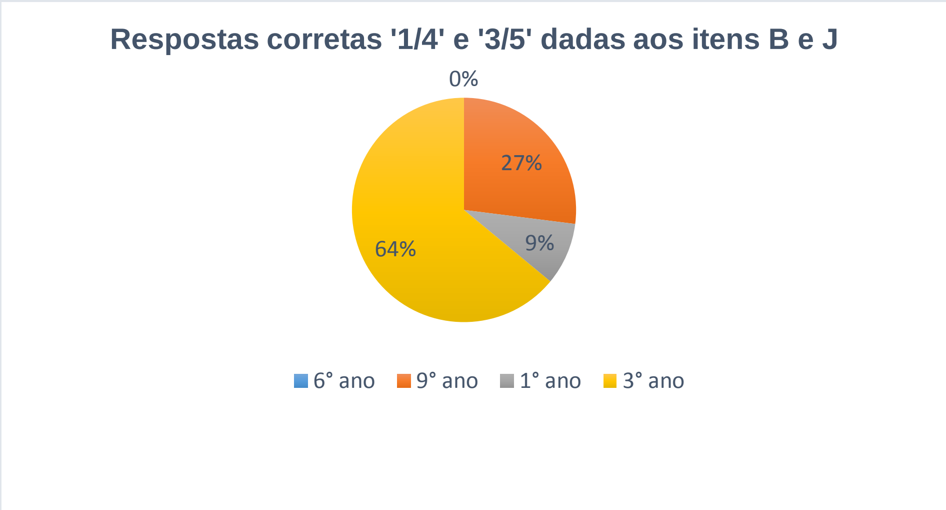
Fonte: autoria própria, 2018

O maior número de ocorrências (114) se deve a resposta errada ‘1/2’, conforme Quadro 26, a qual despreza a conservação das áreas entre as partes ou subfiguras. Podemos inferir que os sujeitos se ativeram a apreensão perceptual das formas geométricas, pois a área pintada é relativamente próxima daquela correspondente a metade da figura geométrica. Ou ainda, desprezaram a conservação das áreas entre as partes ou subfiguras e definiram como unidade-parte a parte ou subfigura pintada, para obter a fração 1/2.

As intersecções realizadas entre as respostas dadas aos itens B e J revelaram que apenas 15 sujeitos (4%) atribuíram as resposta corretas ‘2/8’ e ‘6/10’, frações de magnitude literal, aos referidos itens. Apesar de serem consideradas respostas corretas, essas não exploram todos os recursos que possuem essas figuras. A reconfiguração por divisão (particionamento complementar) é realizada, ou seja, há a conservação das áreas entre as partes ou subfiguras. Entretanto, é desprezado o tratamento de reconfiguração por inclusão das partes para conversão em uma fração de magnitude relativa (fração irredutível).

Outros 33 sujeitos (9%) deram como resposta aos itens B e J, respectivamente, ‘3/5’ (cuja magnitude depende do particionamento complementar) e ‘2/8’ (magnitude literal. E ainda, 11 sujeitos (3%) atribuíram ‘1/4’ (magnitude relativa) ao item B, e ‘3/5’ (cuja magnitude depende do particionamento complementar) ao item J. Essas últimas respostas parecem demonstrar que os sujeitos exploraram todos os tratamentos requeridos, obtendo uma fração irredutível, no RSF, conforme Gráfico 12.

Gráfico 12 - Respostas corretas ‘1/4’ e ‘3/5’ dadas aos itens B e J.

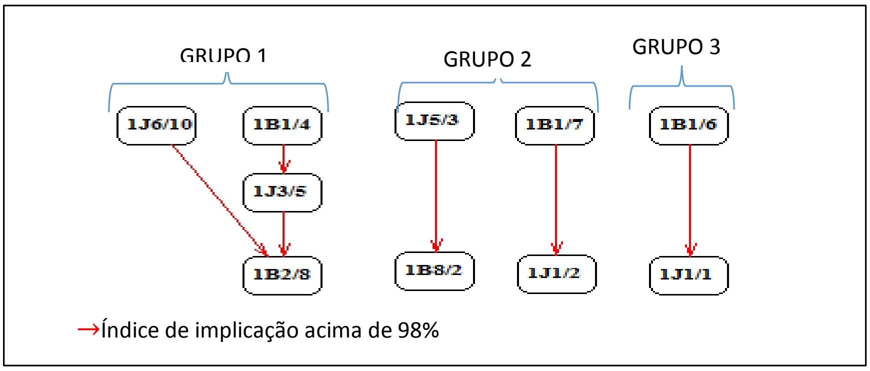


Fonte: autoria própria, 2018

Podemos verificar que entre os alunos do 6° ano do Ensino Fundamental não houveram respostas corretas ‘1/4’ e ‘3/5’ dadas simultaneamente aos itens B e J. No 9° ano foram 3 respostas, enquanto que no 1° ano do Ensino Médio houve apenas 1 resposta. Entre os sujeitos do 3° ano houveram 7 respostas, ou seja, a maioria das dessas respostas corretas dadas simultaneamente aos itens.

O grafo implicativo da Figura 41 ilustra as quase implicações formadas a partir das intersecções entre todas as respostas dadas aos itens B e J, com índice de implicação acima de 98% para os caminhos descritos. Esses caminhos foram divididos em 3 grupos. O grupo 1 é formado por caminhos de respostas corretas aos itens envolvendo frações de magnitude literal e relativa. Enquanto que o grupo 2 é formado por quase implicações entre soluções erradas envolvendo relações parte-todo e todo-parte e o Grupo 3 é formado por caminhos de respostas erradas que estabelecem relação parte-parte.

Figura 41 - Gráfico Implicativo das respostas dadas aos itens B e J.



Fonte: autoria própria, 2018

GRUPO 1:

O caminho 1B1/4 →1J3/5 indica que os sujeitos que respondem corretamente ao item B, ‘1/4’, também respondem corretamente ao item J, ‘3/5’. Nesse tipo de solução a fração, 1/4 é de magnitude relativa. Essas frações são encontradas após o tratamento, explícito ou não, de reconfiguração por divisão (particionamento complementar) para totalizar a figura em unidades-parte, podendo ter sido usado também o tratamento de reconfiguração por inclusão das partes ou subfiguras ou a simplificação de frações. Contribuíram com esse caminho sujeitos do 9° ano do Ensino Fundamental, 1° e 3° anos do Ensino Médio. Os sujeitos do 3° ano do Ensino Médio foram os que mais contribuíram com esse caminho, com um risco de 0,00414. Essas respostas foram dadas por 11 alunos (2,9%).

O caminho 1J6/10→ 1B2/8 sugere que os sujeitos que responderam ‘6/10’ ao item J são aqueles que respondem ‘2/8’ ao item B. Nesse tipo de solução as frações encontradas são de magnitude literal, correspondendo as quantidades visualizadas diretamente na figura geométrica, após o tratamento, explícito ou não, de reconfiguração por divisão para totalizar a figura em unidades-parte. Contribuíram com esse caminho 3,9% do total de sujeitos pesquisados, sendo 6 alunos do 9° ano do Ensino Fundamental, 3 alunos do 1° ano e 6 alunos do 3° ano do Ensino Médio. Portanto, os alunos do 3° ano foram os que mais contribuíram com esse caminho, com um risco de 0,111.

O caminho 1J3/5 →1B2/8 aponta para as soluções corretas dadas aos itens J, ‘3/5’ e B, ‘2/8’. Esse tipo de solução indica que o sujeito realiza o tratamento de reconfiguração por divisão para totalizar a figura em unidades-parte e identifica a unidade-parte no item ‘J’ como sendo ‘1/5’ e no item B, a unidade-parte corresponde a ‘1/8’. Dessa forma, a conversão no RSF obtém como fração, 3/5 para o item J e 2/8 para o item B. Essas frações são de magnitude literal, pois correspondem as quantidades visualizadas na figura geométrica após o tratamento de reconfiguração por divisão. Contribuíram para esse caminho 8% dos sujeitos pesquisados, sendo 6 alunos do 6° ano e 7 do 9° do Ensino Fundamental; 8 alunos do 1° ano e 11 do 3° ano do Ensino Médio. Sendo portanto, esses últimos os que mais contribuíram com esse caminho com um risco de 0,124.

GRUPO 2:

O caminho 1J5/3 →1B8/2 sugere que os sujeitos que respondem ‘5/3’ ao item J, respondem ‘8/2’ ao item B. Nesse tipo de solução a relação estabelecida entre numerador e denominador da fração é de todo-parte. Sugere que o sujeito faz o reconhecimento da unidade-parte e realiza o tratamento de reconfiguração por divisão, entretanto a relação entre os elementos figurais e os simbólicos não está bem estabelecida e ocorre a inversão em todo-parte. Contribuíram com esse caminho, 1,6% dos sujeitos, sendo 4 alunos do 6° ano e 1 do 9° ano do Ensino Fundamental; e 1 aluno do 1° ano do Ensino Médio. Sendo, portanto os alunos do 6° ano do Ensino Fundamental os que mais contribuíram com um risco de 0,0244.

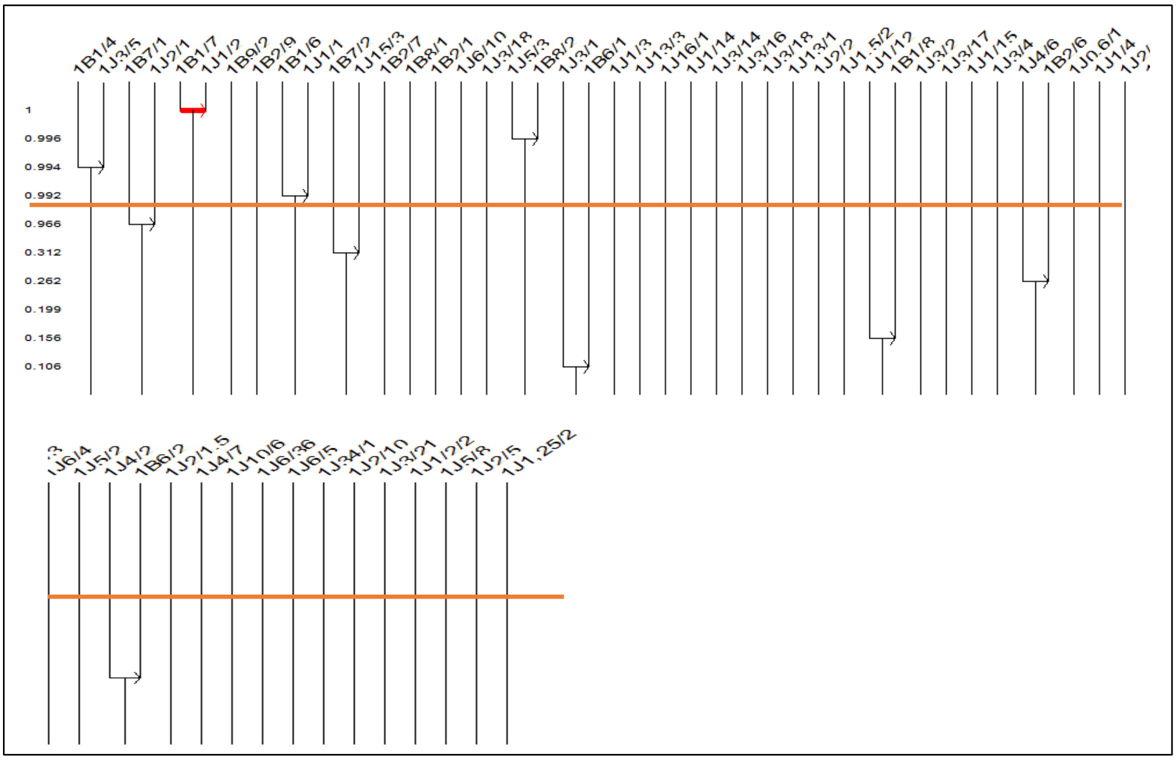
O caminho 1B1/7 →1J1/2 revela que os sujeitos que atribuem a resposta ‘1/7’ ao item B, atribuem ‘1/2’ ao item J. A relação estabelecida entre numerador e denominador da fração é parte-todo, a partir da percepção das formas geométricas das partes ou subfiguras visualizadas inicialmente, com desprezo da conservação das áreas entre as partes ou subfiguras. A unidade-parte estabelecida para ambos os itens equivale a parte ou subfigura pintada. Esse foi o caminho que obteve um maior número de ocorrências (47 ocorrências ou 12% do total de sujeitos). Contribuíram com essas respostas, 10 sujeitos do 6° ano e 14 do 9° ano do Ensino Fundamental; 15 sujeitos do 1° ano e 8 do 3° ano do Ensino Médio. Portanto, os alunos do 1° ano do Ensino Médio foram os que mais contribuíram com um risco de 0,106.

GRUPO 3:

O caminho 1B1/6 →1J1/1 sugere que os sujeitos que respondem ‘1/6’ ao item B são aqueles que respondem ‘1/1’ ao item J. Nessas soluções a relação estabelecida entre numerador e denominador da fração é parte-parte, ou seja, partes ou subfiguras pintadas para partes ou subfiguras não pintadas, a partir da percepção das formas geométricas das partes ou subfiguras visualizadas inicialmente, com desprezo da conservação da área entre as partes ou subfiguras. Mais uma vez a unidade-parte referente aos itens equivale a parte ou subfigura pintada. Contribuíram com esse caminho 5% dos sujeitos pesquisados, sendo 3 sujeitos do 6° ano e 10 do 9° ano do Ensino Fundamental; 5 sujeitos do 1° ano e 1 do 3° ano do Ensino Médio. Sendo assim, os que mais contribuíram para essa classe de repostas foram os sujeitos do 9° ano do Ensino Fundamental, com um risco de 0,00883.

A árvore coesitiva formada com as respostas dadas aos itens B e J ilustra 10 níveis de coesão. O nível 1, cuja classe é formada pela implicação entre as variáveis 1B1/7 e 1J1/2, apresenta nó significativo. Dentre os níveis de coesão, 4 deles possuem índice superior a 0,992, localizados acima do traço definido na Figura 42.

Figura 42 - Árvore coesitiva das respostas dadas aos itens B e J.



Fonte: autoria própria, 2018

A quase implicação da classe {1B1/4;1J3/5} ao nível 3 e índice de coesão 0,994, da Figura 42 nos leva a inferir que as figuras geométricas que correspondem aos itens B e J possuem as mesmas unidades de sentido necessárias para a conversão entre os RGBidm e RSF, características desse nível, corroborando com a análise prévia, descrita no Capítulo 4, pág. Entretanto, a unidade-parte no item B é explícita, enquanto no item J é implícita.

Essas respostas indicam que os sujeitos, no momento da conversão (para ambos os itens) entre o RGBidm e o RSF podem ter realizado o tratamento da reconfiguração por divisão, implícita ou explicitamente, o qual intenciona particionar em unidades-parte, anteriormente identificada (explícita para o item B e implícita para o item J), as partes ou subfiguras da figura geométrica que tem seu particionamento explícito incompleto. Nesse nível, o tratamento pode incluir também o da reconfiguração por inclusão das partes ou subfiguras para encontrar a unidade-parte a ser levada em consideração no momento da conversão. Como podemos observar no trecho da entrevista ao aluno ‘9_EKA23B’, ao responder o item B, no Quadro 27.

Quadro 27 - Trecho da entrevista ao aluno ‘9_EKA23B’ respondendo ao item B.

A pesquisadora pergunta ao aluno como ele havia pensado para responder ao item B, cuja resposta dada foi 1/4 e o aluno responde:

Aluno: o quarto é toda a parte igual, que no caso seria oito porque são divididos em retângulos menores, só que eu coloquei quarto porque a parte selecionada, seleciona dois retângulos, então eu coloquei um quarto porque a parte selecionada são dois retângulos. Então, seria necessário quatro para preencher todo o espaço.

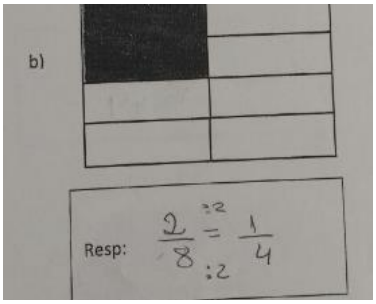
Fonte: autoria própria, 2018.

O aluno 9_EKA23B demonstra ter feito implicitamente a reconfiguração por divisão quando alega que ‘a parte selecionada, seleciona dois retângulos’. Escolhe como unidade-parte, a ‘parte selecionada’, o que demonstra ter realizado o tratamento da reconfiguração por inclusão das partes ou subfiguras, pois afirma que ‘seria necessário quatro para preencher todo o espaço’. Com esse tratamento, a figura geométrica passa a ter 1 Sf_c e 4 Sf_c/Ac. Esses elementos figurais são relacionados semanticamente com a fração 1/4.

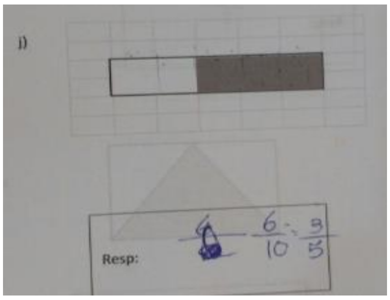
Por outro lado, foram encontradas respostas a esses itens a qual considera o tratamento da reconfiguração por divisão, explícito ou não; encontrando as unidades figurais para conversão no RSF e, o tratamento nesse registro de simplificação de frações. Como podemos observar na resposta dada aos itens B e J, pelos respectivos alunos ‘3_EPM04C’ e 3_ERL15B’, no Quadro 28.

Quadro 28 - Resposta dos aluno ‘3_EPM04C’ e ‘3_ERL15B’ aos item B e J.

Resposta do aluno ‘3_EPM04C’ ao item B



Resposta do aluno ‘3_ERL15B’ ao item J



Fonte: autoria própria, 2018

Entretanto não podemos afirmar se esses sujeitos reconhecem ou dão significado, na figura geométrica, a fração encontrada, como podemos observar no trecho da entrevista a aluna ‘3_ERL12C’, ao responder o item B, conforme Quadro 29.

Quadro 29 - Trecho da entrevista a aluna ‘3_ERL12C’ respondendo ao item B.

Pesquisadora: ...nessa letra B você poderia escrever uma fração que representasse essa mesma quantidade? **Pesquisadora aponta para a resposta escrita da aluna, 2/8.**
Aluna: Acho que sim, se eu simplificar. **Aluna escreve na folha, 1/4**
A pesquisadora pergunta se a aluna reconhece na figura a quantidade descrita na fração.
Aluna: Sim, porque aqui é, basicamente, você simplifica, você acha outro resultado.
Aluna: Aí você consegue visualizar dentro da imagem.
Pesquisadora: Aí como é que você visualiza na imagem?
Aluna: Esse um quarto é isso aqui praticamente **(aluna aponta para a figura geométrica, sem especificar o ‘um quarto’).**
Professora: Hamram, sim.
Aluna: Só que simplificado de dois oitavos.
Pesquisadora: Certo, mais em um quarto, o ‘um’ estaria onde aí?
Aluna: Na peça inteira, eu acho que nessa peça aqui **(Aluna aponta para a figura geométrica)**
Pesquisadora: E o quatro?
Aluna: Agora você me pegou! **(Aluna permanece um tempo em silêncio, mas volta a falar)**. Eu acho que seria a soma. Não, a soma não. Eu não sei

Fonte: autoria própria, 2018

A aluna ‘3_ERL12C’ utilizou o procedimento de simplificação de frações para encontrar a resposta correta ’1/4’ para o item B. Entretanto como ocorreu com o item D, classificado no nível 3 (o qual também trouxemos um trecho da entrevista com a mesma aluna), a aluna supracitada não reconhece na figura geométrica o valor encontrado no RSF após o tratamento de simplificação de frações. Inferimos que o procedimento não contribuiu para significar a fração de magnitude relativa no RGBidm.

Ao nível 1, com índice de coesão 1 e nó significativo, a classe de respostas {1B1/7;1J1/2} indica ser forte a característica de erro que despreza a conservação da área entre as partes ou subfiguras, como também a dificuldade de reconhecimento da unidade-parte quando está inicialmente implícita (item J). O que pode levar a adoção da unidade-parte como sendo equivalente a parte ou subfigura pintada. Conjecturamos, como nos níveis anteriores, que os sujeitos tentam realizar o procedimento da dupla contagem, para estabelecer a relação parte-todo. Entretanto, não consideram a igualdade das áreas das partes, prendendo-se a uma apreensão perceptual, das formas da figura geométrica; e discursiva, em relação a figura geométrica e o procedimento, ‘número de partes pintadas sobre números de partes que foi particionado a unidade’. Dessa forma, estabelecem uma correspondência semântica entre a QSf_c, visualizada, e o numerador da fração (1 tanto para o item B, como para o J), como também entre QSf_c/Ac, visualizada, e o denominador da fração (7 e 2, respectivamente para os itens B e J).

Ao nível 2, com índice de coesão 0,996, a classe de respostas {1J5/3;1B8/2} revela outro tipo de erro, a inversão da relação parte-todo em todo-parte. Como também, desconsidera o tratamento da reconfiguração por inclusão das partes ou subfiguras no item B. A correspondência semântica estabelecida se dá entre QSf_c/Ac (5 para o item J e 3 para o B) e o numerador da fração, e entre QSf_c (3 para o item J e 2 para o B) e o denominador.

Ao nível 4, com índice de coesão 0,992, a classe de respostas {1B1/6;1J1/1} aponta para o erro envolvendo relação parte-parte, com desprezo da conservação da área entre as partes ou subfiguras. Os sujeitos não realizam o tratamento de reconfiguração por divisão em ambas figuras geométricas. Portanto, não reconhecem a necessidade da conservação das áreas das partes ou subfiguras e estabelecem uma correspondência semântica entre QSf_c, não tratadas (1 para o item J e para o

B), e o numerador da fração; e entre a QSf_Ac, também não tratadas (6 para o item J e 1 para o item B), e o denominador.

Esses resultados corroboraram com a nossa análise prévia quanto a necessidade do tratamento de reconfiguração por divisão, explícito ou não, para figuras geométricas nesse nível, como passo que antecede a conversão para o RSF. Pois, essas apresentam um particionamento explícito, incompleto, necessitando ser vislumbrado a congruência entre as áreas das partes ou. Alternativamente, poderá ser necessário, também, como ocorreu nos dois itens analisados, o tratamento da reconfiguração por inclusão das partes ou subfiguras.

Dessa forma, as unidades (figurais) de sentido necessárias para a conversão no RSF não são imediatamente apreendidas. É apenas com o reconhecimento da unidade-parte e do tratamento da reconfiguração por divisão, acrescido ou não do tratamento de reconfiguração por inclusão das partes, que se pode determinar a QSf_c e QSf_c/Ac e a uma apreensão discursiva entre esses elementos e as unidades simbólicas fracionárias, com posterior escrita da fração.

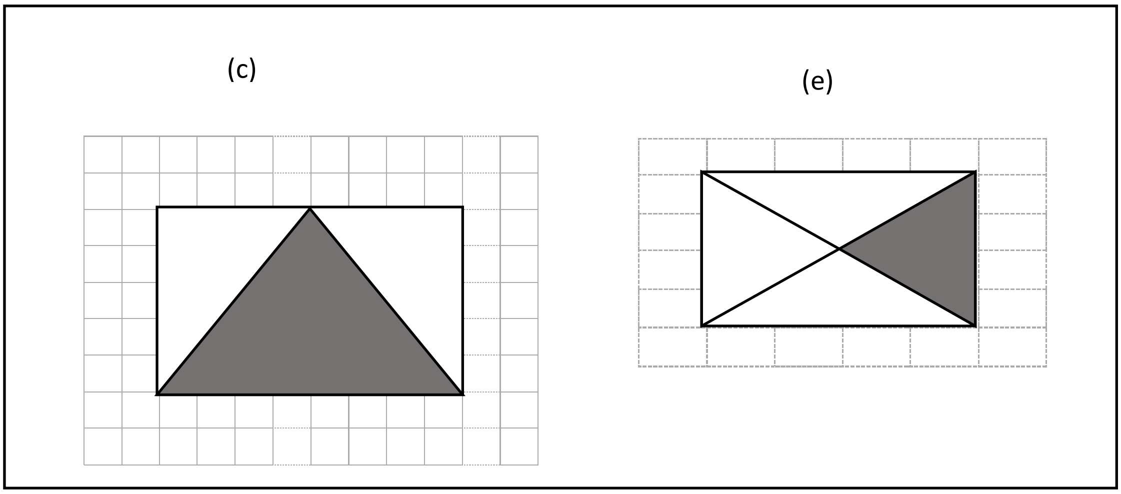
Na análise dos dados empíricos verificamos, com a notável diminuição no número de acertos entre os itens B e J, que parece haver um maior custo cognitivo quando a unidade-parte inicial é implícita, nos tipos de figuras geométricas pertencentes a esse grau de não congruência semântica. E ainda, que com a unidade-parte inicial implícita os sujeitos tendem a atribuir a parte ou subfigura pintada como sendo unidade-parte, como podemos notar na resposta ao item J, ‘1/2’, a qual obteve o maior número de ocorrências ao item.

Os resultados apontam, ainda para os principais erros que podem ser cometidos nesse nível, como o desprezo da conservação da área entre as partes ou subfiguras, a relação todo-parte e a relação parte-parte, essas últimas já descritas em outros níveis. Entretanto, nesse nível, esses erros trazem em sua maioria, uma característica peculiar que é a não conservação da área das partes ou subfiguras.

7.2 ANÁLISE DOS ITENS C E E REFERENTES AO GRAU 5 DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

As figuras geométricas pertencentes a este nível, aplicadas no instrumento de pesquisa, correspondem aos itens “c” e “e” da primeira questão, representadas na Figura 43.

Figura 43 - Item (c) e (e) da primeira questão.

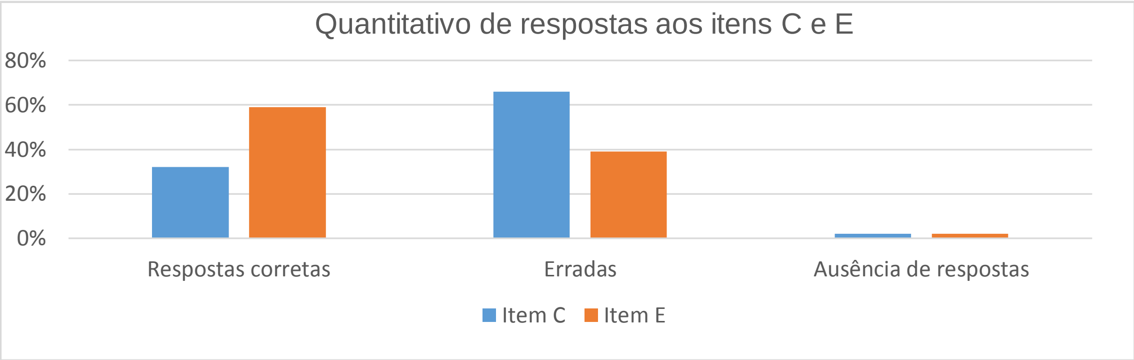


Fonte: Fonte: autoria própria, 2018.

O item C foi respondido por 373 sujeitos e o item E por 371. Sendo assim, 8 sujeitos não responderam ao item C e 10 não responderam ao item E. Do total de sujeitos (381), 32% deram uma das respostas corretas ao item C, ‘1/2’ (fração relativa) ou ‘2/4’ (fração literal).

As respostas corretas, ‘1/4’ (fração literal) ou ‘2/8’ (fração relativa), dadas ao item E foram atribuídas por 59% do total de sujeitos, conforme gráfico 13.

Gráfico 13 - Quantitativo de respostas aos itens C e E.



Fonte: autoria própria, 2018

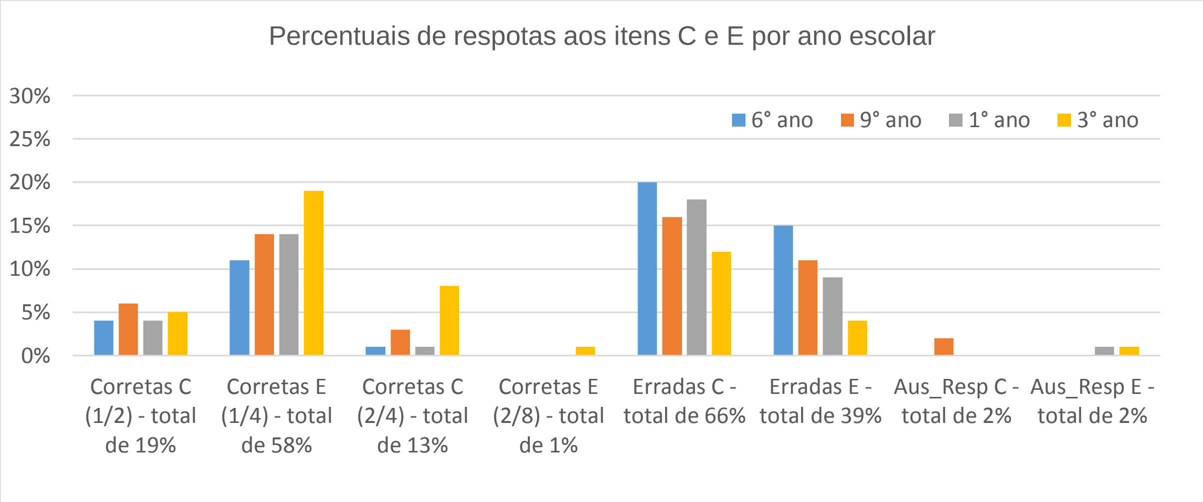
Entre as 373 respostas atribuídas ao item C, 120 delas foram corretas. O maior número de ocorrências (73) se deu para a resposta correta, de magnitude relativa, ‘1/2’, indicando que esses sujeitos podem ter reconhecido a unidade-parte, realizado o tratamento figural, explícito ou não, de reconfiguração por desconstrução das formas geométricas (tratamento explícito ou não de rotação e translação das partes ou subfiguras), além do tratamento de reconfiguração por inclusão de partes ou subfiguras ou ter convertido na fração irredutível.

Entretanto, acreditamos que alguns alunos podem ter apenas realizado a contagem das partes ou subfiguras pintadas e partes ou subfiguras não pintadas, a partir da apreensão perceptiva das formas geométricas, sem se deterem nas formas geométricas diferentes das partes ou subfiguras e na congruência das áreas entre essas. E depois realizado uma apreensão discursiva por meio da correspondência semântica entre os elementos figurais e simbólicos fracionários, numa relação parte-parte.

A resposta correta, de magnitude literal, ‘2/4’, obteve apenas 47 ocorrências. Essa resposta indica que o sujeito pode ter reconhecida a unidade-parte, realizado o tratamento de reconfiguração por desconstrução das formas geométricas das partes ou subfiguras e convertido na fração de magnitude literal. Dos 47 sujeitos, 29 deles foram do 3° ano do Ensino Fundamental.

O item E apresentou 223 respostas corretas das 371 atribuídas ao item. A resposta correta de maior número de ocorrências (216) é a fração, ‘1/4’. Acreditamos que esse alto índice de respostas corretas se deve ao fato de se poder aplicar diretamente o procedimento da dupla contagem, mesmo que não se tenha compreensão da congruência das áreas das partes ou subfiguras. O gráfico 14 ilustra os índices das respostas corretas de magnitude relativa e literal; das respostas erradas e das ausências de respostas, por item e ano escolar.

Gráfico 14 - Percentuais de respostas aos itens C e E por ano escolar.



Fonte: autoria própria, 2018

No Gráfico 14, podemos observar que as respostas corretas as quais atribuem ‘1/4’ ao item E obtém um maior percentual em relação as demais respostas corretas, sejam do mesmo item ou do item C. Acreditamos que esse fato ocorreu devido ao item E apresentar uma figura com particionamento completo, facilitando o procedimento da dupla contagem (parte/todo), muitas vezes sem o reconhecimento da congruência entre as áreas das partes ou subfiguras. Enquanto que no item C o particionamento explícito aparece incompleto, necessitando ser estabelecida a unidade-parte, realizada reconfiguração por desconstrução das formas, para então, ser utilizado o procedimento da dupla contagem (parte/todo).

As respostas corretas ao item C, ‘1/2’, aparecem distribuídas quase uniformemente em todos os anos escolares pesquisados. Entretanto intuímos que muitos sujeitos podem ter utilizado o procedimento da dupla contagem (parte/parte), sendo 1 parte pintada para duas não pintadas. O índice mais baixo de respostas corretas ao item C (2/4) a qual necessita que seja realizado um tratamento na figura antes da conversão, pode estar demonstrando, que poucos sujeitos consideraram a congruência das áreas das partes ou subfiguras que constituem a figura geométrica.

Dessa forma compreendemos que a diferença entre os índices de respostas corretas correspondentes aos itens C e E se deve não ao fato de serem figuras geométricas com características diferentes para a conversão no registro simbólico fracionário mas por apresentarem a unidade-parte explícita ou não. No item E uma unidade-parte é visualizada inicialmente, enquanto que o item C necessita do tratamento de reconfiguração por desconstrução das formas geométricas das partes ou subfiguras, explícito ou não, para que essa seja visualizada.

Do total de respostas atribuídas ao item C, 253 respostas, ou seja, 66% do total de respostas e não respostas são de respostas erradas. Desses 66%, 40%, ou seja, 153 ocorrências equivale a resposta ‘1/3’, a qual considera uma relação parte-parte, com desprezo da congruência das áreas das partes ou subfiguras. O Quadro 28 apresenta as respostas erradas, o total de ocorrências relativo a cada uma delas, o percentual das ocorrências por ano escolar e o total percentual de ocorrências por resposta, daquelas que obtiveram mais de 8 ocorrências (2% do total de erros). Além, das respostas apresentadas no Quadro 30 tivemos 17 respostas com erros diversos (totalizando 12% das ocorrências), com oito ou menos ocorrências, cada uma.

Quadro 30 - Respostas, ocorrências e percentuais de respostas erradas referentes ao item C.

Resposta	Total de Ocorrências	Ocorrências por ano escolar (%)				Total de Ocorrências (%)
		6° ano	9° ano	1° ano	3° ano	
1/3	153	10%	10%	11%	9%	40%
3/1	35	5%	1%	3%	0%	9%
2/1	22	3%	1%	2%	0%	6%

Fonte: autoria própria, 2018

As respostas erradas ao item E totalizaram, 148, ou seja, 39% do total de respostas e não respostas atribuídas a esse item. O Quadro 31 ilustra as repostas erradas com mais de oito ocorrências. Além, das respostas apresentadas no Quadro 31, tivemos 15 respostas com erros diversos (8% do total de respostas erradas), com seis ou menos ocorrências, cada uma.

Quadro 31 - Respostas, ocorrências e percentuais de respostas erradas referentes ao item E.

Resposta	Total de Ocorrências	Ocorrências por ano escolar (%)				Total de Ocorrências (%)
		6° ano	9° ano	1° ano	3° ano	
1/3	53	4%	7%	3%	0%	14
4/1	42	6%	1%	4%	0%	11
3/1	23	3%	1%	1%	1%	6

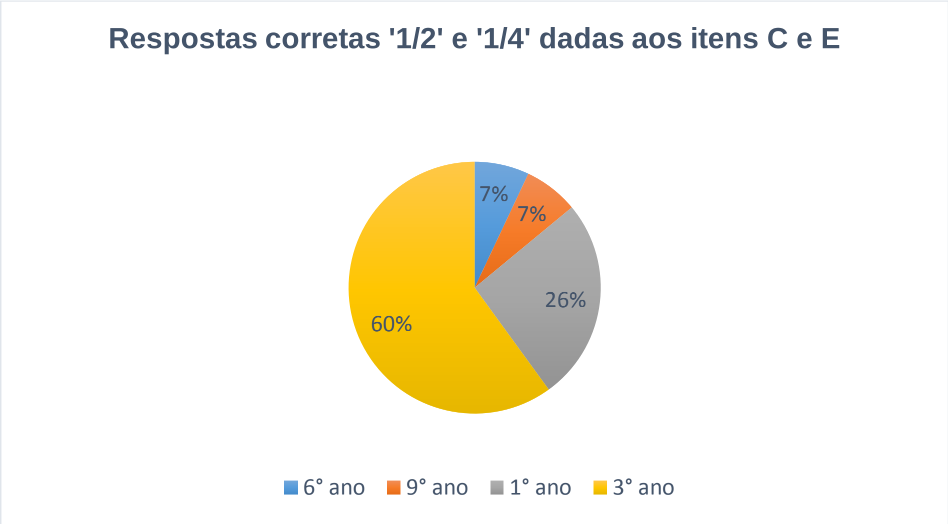
Fonte: autoria própria, 2018

O maior número de ocorrências (53) se deve a resposta errada ‘1/3’, que também considera uma relação parte-parte, como no item anterior. A segunda maior ocorrência (42) é para a que considera a relação todo-parte. Podemos inferir que esses sujeitos não se ativeram as diferentes formas geométricas das partes para verificar a congruência ou não de suas referidas áreas. Aplicaram tão somente o procedimento da dupla contagem, sendo esse parte-parte ou todo-parte.

As intersecções realizadas entre as respostas dadas aos itens C e E revelaram que apenas 7 sujeitos (2%) atribuíram as respostas corretas ‘2/4’ e ‘2/8’, aos referidos itens. Apesar de serem consideradas respostas corretas, essas não exploram todos os recursos que possuem essas figuras. A reconfiguração por desconstrução das formas geométricas pode ter sido realizada em ambos os itens para que os sujeitos tenham encontrado, no item C, duas partes ou subfiguras de formas homogêneas e áreas congruentes pintadas de quatro dessas formas geométricas. Enquanto no item E, foram encontradas duas partes ou subfiguras com formas homogêneas e áreas congruentes de um total de oito. Esse tipo de solução pode ter um índice bem menor de acertos por necessitar ser encontrada em ambos os itens a unidade-parte (1/4 para o item C e 1/8 para o item E) para posterior tratamento de reconfiguração.

Outros 27 sujeitos (7%) deram como resposta correta aos itens C e E, respectivamente, ‘1/2’ e ‘1/4’. Essas respostas corretas parecem demonstrar que os sujeitos exploraram todos os tratamentos requeridos, obtendo uma fração irredutível, no RSF, conforme Gráfico 15.

Gráfico 15 - Respostas corretas ‘1/2’ e ‘1/4’ dadas aos itens C e E.

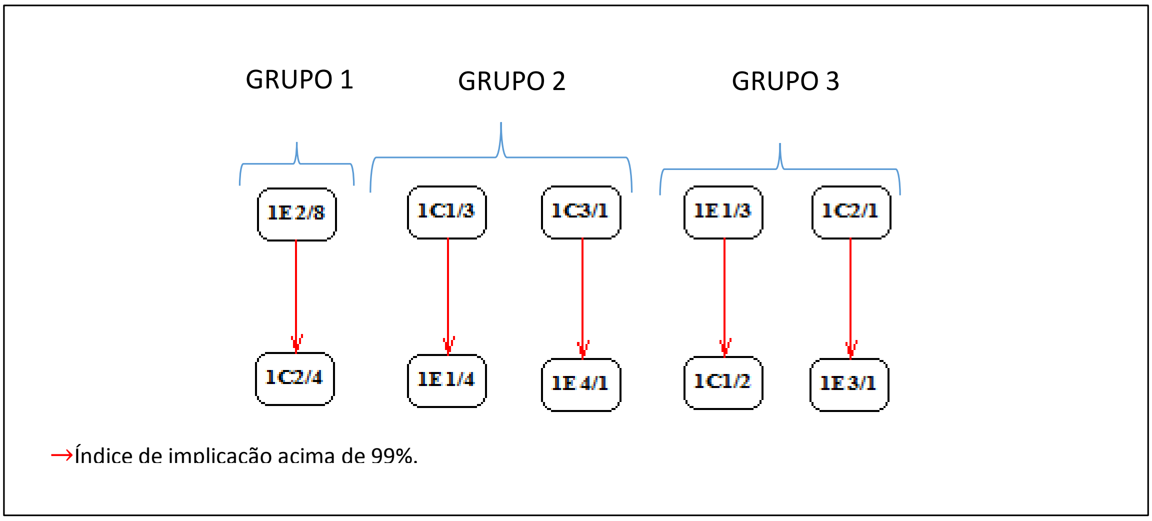


Fonte: autoria própria, 2018

Podemos verificar que entre os alunos do 6° e 9° ano do Ensino Fundamental o percentual de acertos foi o mesmo, apenas 7% ou 2 alunos dos 27 que atribuíram essas respostas aos itens C e E. Entre os sujeitos do 1° ano do Ensino Médio houve 7 respostas (26%), enquanto que os do 3° ano formam a maioria dessas respostas corretas dadas simultaneamente aos itens (16 respostas). Inferimos que esse tipo de resposta exige uma estrutura cognitiva que é adquirida ao longo da educação básica.

O grafo implicativo da Figura 44 ilustra as quase implicações formadas a partir das intersecções entre todas as respostas dadas aos itens C e E, com índice de implicação acima de 92% para os caminhos descritos. Esses caminhos foram divididos em 3 grupos. O grupo 1 é formado pelo caminho de respostas corretas aos itens. Enquanto que o grupo 2 é formado por quase implicações entre soluções erradas envolvendo relações parte-todo e todo-parte e o Grupo 3 é formado por caminhos de respostas erradas que estabelecem relação parte-parte.

Figura 44 - Gráfico Implicativo das respostas dadas aos itens C e E.



Fonte: autoria própria, 2018.

GRUPO 1:

O caminho 1E2/8 →1C2/4 indica que os sujeitos que respondem corretamente ao item E, ‘2/8’, também respondem corretamente ao item C, ‘2/4’. Nesse tipo de solução as frações são encontradas após o reconhecimento da unidade-parte e o tratamento de reconfiguração por desconstrução das formas geométricas. Esse, em figuras geométricas desse tipo, tem a característica de transformar as partes ou subfiguras que apresentam formas geométricas diferentes, em formas geométricas homogêneas para verificação da congruência das áreas. Contribuíram com esse caminho sujeitos do 9° ano do Ensino Fundamental, 1° e 3° anos do Ensino Médio. Os sujeitos do 3° ano do Ensino Médio foram os que mais contribuíram com esse caminho, com um risco de 0,00597. Essas respostas foram dadas por 7 alunos (1,8%).

GRUPO 2:

O caminho 1C1/3 →1E1/4 sugere que os sujeitos que respondem ‘1/3’ ao item C são aqueles que respondem ‘1/4’ ao item E. Nessas soluções a relação estabelecida entre numerador e denominador da fração é parte-todo, a partir da percepção das formas geométricas das partes ou subfiguras visualizadas inicialmente, sem observar a congruência entre as áreas das partes ou subfiguras. Pois, apesar de envolver uma resposta certa ao item E (1/4), é a resposta dada ao item C que nos faz inferir o desprezo à congruência entre as áreas das partes ou subfiguras e o uso indiscriminado do procedimento da dupla contagem (parte/todo). Esse foi o caminho que obteve um maior número de ocorrências (139 ocorrências ou 37% do total de sujeitos) distribuídas quase uniformemente em todos os anos pesquisados. Contribuíram com essas respostas, 34 sujeitos do 6° ano e 39, do 9° ano do Ensino Fundamental; 39 sujeitos do 1° ano e 27, do 3° ano do Ensino Médio. Sendo assim, os que mais contribuíram para essa classe de repostas foram os sujeitos do 1° ano do Ensino Médio, com um risco de 0,0885.

O caminho 1C3/1 →1E4/1 sugere que os sujeitos que respondem ‘3/1’ ao item C são aqueles que respondem ‘4/1’ ao item E. Nessas soluções a relação estabelecida entre numerador e denominador da fração é todo-parte, também, a partir da percepção das formas geométricas das partes ou subfiguras visualizadas inicialmente, sem observar a congruência entre as áreas das partes ou subfiguras. Contribuíram com esse caminho 8,7% dos sujeitos pesquisados, sendo 18 sujeitos do 6° ano e 4 do 9° ano do Ensino Fundamental; 10 sujeitos do 1° ano e 1 do 3° ano do Ensino Médio. Sendo assim, os que mais contribuíram para essa classe de repostas foram os sujeitos do 6° ano do Ensino Fundamental, com um risco de 0,000379.

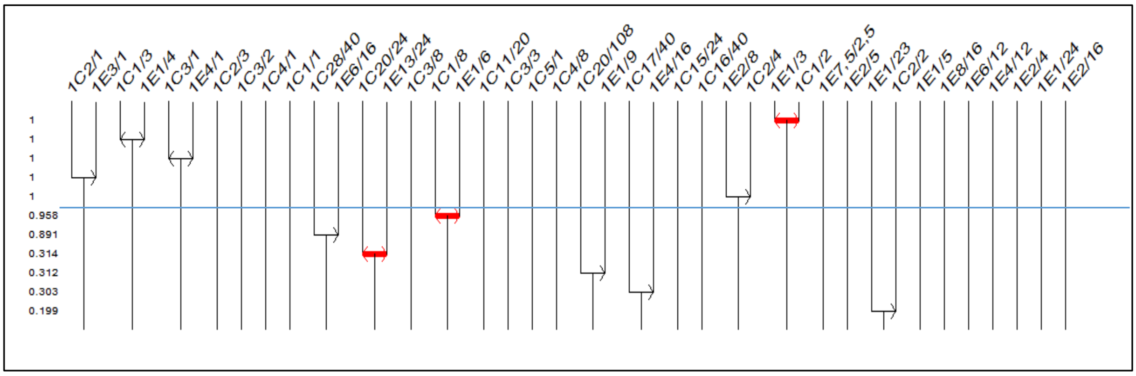
GRUPO 3:

O caminho 1E1/3 → 1C1/2 revela que os sujeitos que atribuem a resposta ‘1/3’ ao item E, atribuem ‘1/2’ ao item C. Apesar de, pretensamente, envolver uma resposta correta ao item C, inferimos que os sujeitos que atribuem essas respostas aos itens estão realizando uma relação parte-parte, a partir da percepção das formas geométricas das partes ou subfiguras visualizadas inicialmente, ou seja, partes ou subfiguras pintadas para partes ou subfiguras não pintadas das figuras geométricas. Contribuíram com esse caminho 10,5% dos sujeitos pesquisados, sendo 11 sujeitos do 6° ano e 21 do 9° ano do Ensino Fundamental; 7 sujeitos do 1° ano e 1 do 3° ano do Ensino Médio. Portanto, os alunos do 9° ano do Ensino Fundamental foram os que mais contribuíram com um risco de 0,000208.

O caminho 1C2/1 → E3/1 sugere que os sujeitos que respondem ‘2/1’ ao item C, respondem ‘3/1’ ao item E. Nesse tipo de solução a relação estabelecida entre numerador e denominador da fração é, como no caminho anterior, parte-parte; a partir da percepção das formas geométricas das partes ou subfiguras visualizadas inicialmente, sendo número de partes ou subfiguras não pintadas sobre número de partes ou subfiguras pintadas. Contribuíram com esse caminho, 3,7% dos sujeitos, sendo 6 alunos do 6° ano e 2 do 9° ano do Ensino Fundamental; 4 sujeitos do 1° ano e, 2 do 3° ano do Ensino Médio. Sendo, portanto os alunos do 6° ano do Ensino Fundamental os que mais contribuíram com um risco de 0,000379.

A árvore coesitiva formada com as respostas dadas aos itens C e E ilustra 11 níveis de coesão. O nível 1, cuja classe é formada pela dupla implicação entre as variáveis 1E1/3 e 1C1/2, apresenta nó significativo. Dentre os níveis de coesão, 5 deles possuem índice igual a 1, localizados acima do traço definido na Figura 45.

Figura 45 - Árvore coesitiva das respostas dadas aos itens C e E.



Fonte: autoria própria, 2018

A dupla implicação da classe {1E1/3;1C1/2}, com nó significativo, ao nível 1 e índice de coesão 1, da Figura 45, nos leva a inferir que é forte a característica de erro que relaciona parte-parte. Pois, apesar da resposta ao item C ser aparentemente correta, é a resposta ao item E, ‘1/3’ que revela a relação que está sendo estabelecida e as unidades de sentido que estão sendo consideradas no momento da conversão no RSF. Dessa forma, é realizada uma correspondência semântica entre QSf_c, visualizada, ou seja, sem considerar que as formas geométricas das partes ou subfiguras são diferentes e podem não possuir a mesma área, e o numerador (1 tanto para o item C, como para o E); e a QSf_Ac (visualizada) e o denominador (2 e 3, respectivamente para os itens C e E).

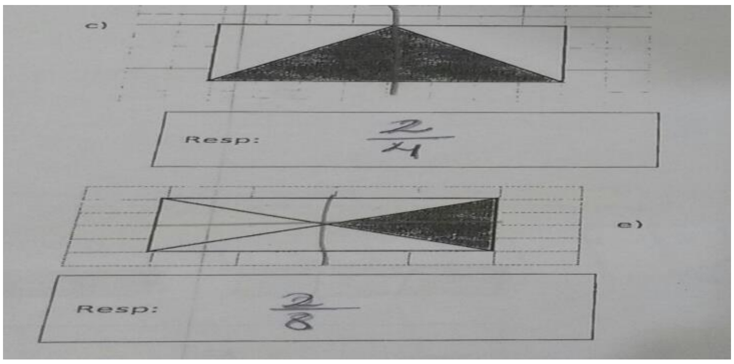
Ao nível 2, a dupla implicação na classe {1C1/3;1E1/4}, índice de coesão 1, revela outro tipo de erro, o desprezo da conservação da área. Apesar da resposta ao item E ser correta, a resposta ao item C nos leva a concluir que o sujeito faz uso da dupla contagem, numa relação parte-todo, para realizar a conversão entre os registros. Sendo assim, a correspondência semântica estabelecida é entre a QSf_c (visualizada) e o numerador (1 tanto para o item C, como para o E); e a QSf_c/Ac (visualizada), e o denominador (3 para o item C e 4 para o E).

A dupla implicação na classe {1C3/1; 1E4/1}, com índice de coesão 1, aponta para o erro envolvendo a dupla contagem numa relação todo/parte, ou seja, a relação inversa àquela estabelecida à classe ao nível 2. A correspondência semântica estabelecida se dá entre QSf_c/Ac (visualizada) e o numerador da fração ((3 para o item C e 4 para o E); e a QSf_c (visualizada) e o denominador (1 tanto para o item C, como para o E).

Ao nível 4, índice de coesão 1, a classe de respostas {1C2/1;1E3/1} indica que a relação estabelecida é a inversa daquela ao nível 1. A correspondência semântica realizada é entre a QSf_Ac (visualizada) e o denominador (2 e 3, respectivamente para os itens C e E); e a QSf_c (visualizada, e o numerador (1 tanto para o item C, como para o E).

Ao nível 5, a classe de respostas {1E2/8;1C2/4}, com índice de coesão 1, revela que no momento da conversão (para ambos os itens) entre o RGBidm e o RSF , os sujeitos podem ter feito o reconhecimento da unidade-parte e realizado o tratamento da reconfiguração por desconstrução das formas geométricas, implícita ou explicitamente, o qual intenciona particionar em unidades-parte que possuem formas geométricas homogêneas e áreas congruentes, como podemos observar, na Figura 46, na resposta dada aos itens C e E, pelo sujeito '3_EPM03B'.

Figura 46 - Resposta do aluno '3_EPM03B' aos itens C e E.



Fonte: autoria própria, 2018

A correspondência semântica é estabelecida entre a QSfMod_c e o numerador (2 para ambos os itens), e QSfMod_c/Ac e o denominador (4 para o item C e 8 para o item E).

Na análise dos dados empíricos verificamos que os tipos de figuras que compõem esse Grau de não congruência semântica requerem uma análise maior das respostas dos alunos, pois podemos ter repostas corretas sem que os alunos tenham utilizado, de fato, os conhecimentos requeridos pelas figuras geométricas no momento da conversão no RSF, como verificado nas classes de respostas referentes aos níveis de coesão 1 e 2.

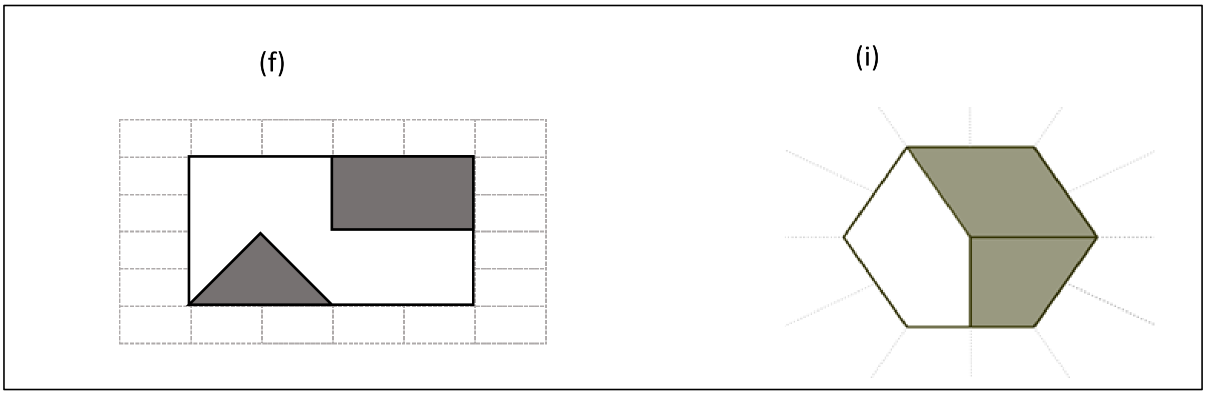
As respostas corretas nesse nível coincidem com aquelas dadas utilizando o procedimento da dupla contagem, na relação parte-todo. Entretanto, a característica particular das figuras geométricas nesse Grau de não congruência semântica é reconhecer que as formas geométricas das partes ou subfiguras são diferentes mas possuem áreas congruentes. Por meio das entrevistas com os sujeitos verificamos a necessidade do reconhecimento da unidade-parte e do tratamento figural da reconfiguração por desconstrução das formas geométricas, como descrito nas nossas análise teóricas desse grau de não congruência semântica, transformando-as em partes ou subfiguras de formas homogêneas para que sejam visualizadas a congruência das áreas entre elas.

Por último, como no grau 4 de não congruência semântica, compreendemos que a relativa diferença de acertos entre os itens se deve a presença ou não de uma unidade-parte, inicial, explícita. O item E apresenta uma unidade-parte, explicitamente, bem definida, enquanto que o item C, não apresenta. Esses resultados corroboram com o que inferimos necessitar de um maior custo cognitivo.

7.3. ANÁLISE DOS ITENS F E I REFERENTES AO GRAU 6 DE NÃO CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

As figuras geométricas pertencentes ao Grau 6 de não congruência semântica, aplicadas no instrumento de pesquisa, correspondem aos itens “f” e “i” da primeira questão, representadas na Figura 47.

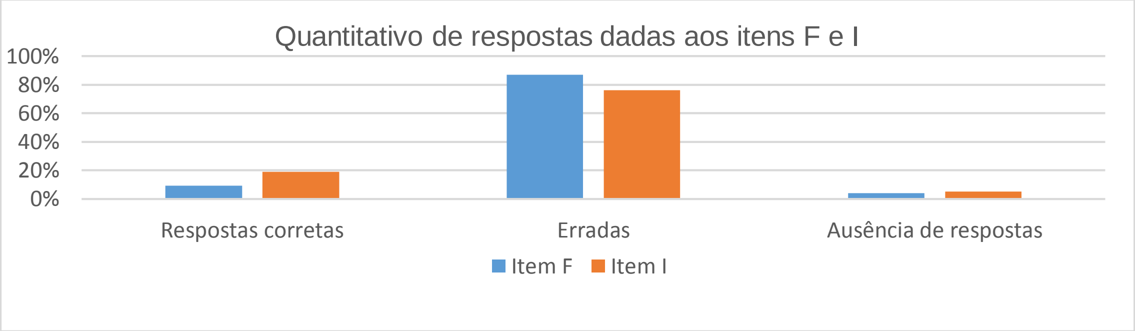
Figura 47 - Item (f) e (i) da primeira questão.



Fonte: autoria própria, 2018

O item F foi respondido por 365 sujeitos e o item I por 364. Sendo assim, 16 sujeitos não responderam ao item F e 17 não responderam ao item I. Do total de sujeitos (381), 9% deram uma das respostas corretas ao item F, ‘3/8’ ou ‘6/16’. Enquanto que no item I, 19% dos sujeitos responderam corretamente, ‘7/12’, conforme Gráfico 16.

Gráfico 16 - Quantitativo de respostas aos itens F e I.

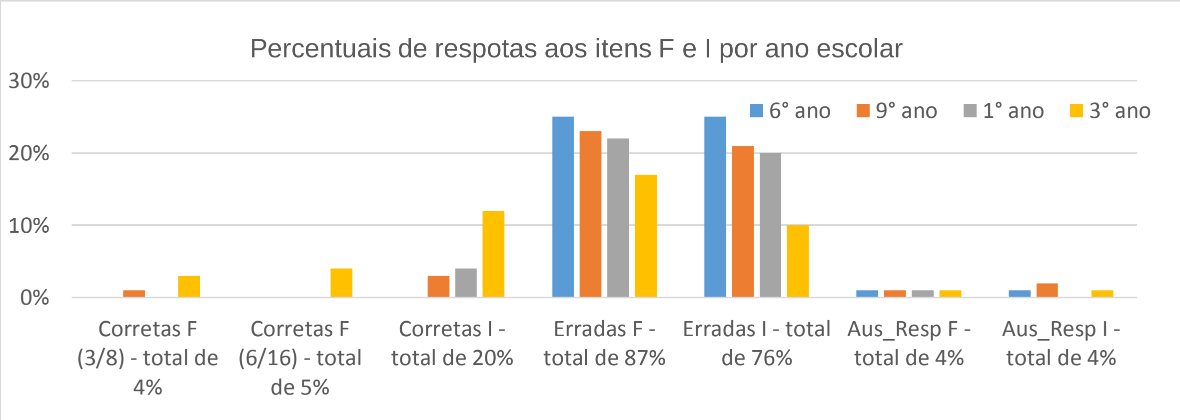


Fonte: autoria própria, 2018

Entre as 365 respostas atribuídas ao item F, apenas 35 delas foram corretas, sendo que 18 sujeitos deram a resposta correta ‘3/8’ e 17 sujeitos, ‘6/16’. Essa última utiliza o particionamento do suporte, sem redimensionar as partes ou subfiguras da figura inicial. Ou seja, não é realizado o tratamento da reconfiguração por inclusão das partes.

O item I apresentou 74 respostas corretas (7/12) das 364 atribuídas ao item. Acreditamos que o particionamento do suporte favoreceu a um maior número de respostas corretas em relação ao item F. Pois, no item F, mesmo utilizando o particionamento suporte, o sujeito deveria ainda utilizar o tratamento de rotação nas partes ou subfiguras para verificar a igualdade das áreas dessas. Enquanto que no item I, esse tratamento adicional não era necessário para visualizar as formas homogêneas e a congruência entre as áreas das partes ou subfiguras. O gráfico ilustra os índices das respostas corretas, erradas e das ausências de respostas, por item e ano escolar.

Gráfico 17 - Percentuais de respostas aos itens F e I por ano escolar.



Fonte: autoria própria, 2018.

No Gráfico 17 podemos observar que não há acertos por parte dos alunos do 6° ano do Ensino Fundamental aos itens F e I. Os alunos do 1° ano do Ensino Médio apresentam um pequeno índice de acertos apenas no item I. Os alunos que mais acertam aos dois itens são os alunos do 3° ano do Ensino Médio. Entretanto, os índices de acertos são muito baixos.

Do total de respostas atribuídas ao item F, 330 respostas, ou seja, 87% do total de respostas e não respostas são de respostas erradas. Desses 87%, temos 26% ou 101 ocorrências equivalentes a resposta ‘2/3’, a qual considera uma relação parte-todo a partir de uma apreensão perceptiva das formas geométricas, com desprezo da heterogeneidade das formas geométricas e das diferentes áreas das partes ou subfiguras. O quadro 32 apresenta as respostas erradas, o total de ocorrências relativo a cada uma delas, o percentual das ocorrências por ano escolar e o total percentual de ocorrências por resposta, daquelas que obtiveram mais de 8 ocorrências (2% do total de erros). Além, das respostas apresentadas no Quadro 32 tivemos 34 respostas com erros diversos (totalizando 21% das ocorrências), com sete ou menos ocorrências, cada uma.

Quadro 32 - Respostas, ocorrências e percentuais de respostas erradas referentes ao item F.

Resposta	Total de Ocorrências	Ocorrências por ano escolar (%)				Total de Ocorrências (%)
		6° ano	9° ano	1° ano	3° ano	
2/3	101	6%	8%	8%	5%	27%
2/1	34	3%	3%	2%	1%	9%
3/2	28	5%	1%	2%	0%	8%
2/6	27	0%	2%	2%	2%	6%
2/4	26	1%	3%	2%	1%	7%
2/2	21	2%	2%	1%	0%	5%
1/2	20	3%	2%	0%	0%	5%

Fonte: autoria própria, 2018

As respostas erradas ao item I totalizaram, 290, ou seja, 76% do total de respostas e não respostas atribuídas a esse item. O quadro 33 ilustra as repostas erradas com mais de oito ocorrências. Além, das respostas apresentadas no Quadro 33 tivemos 19 respostas com erros diversos (11% do total de respostas erradas), com seis ou menos ocorrências, cada uma.

Quadro 33 - Respostas, ocorrências e percentuais de respostas erradas referentes ao item I.

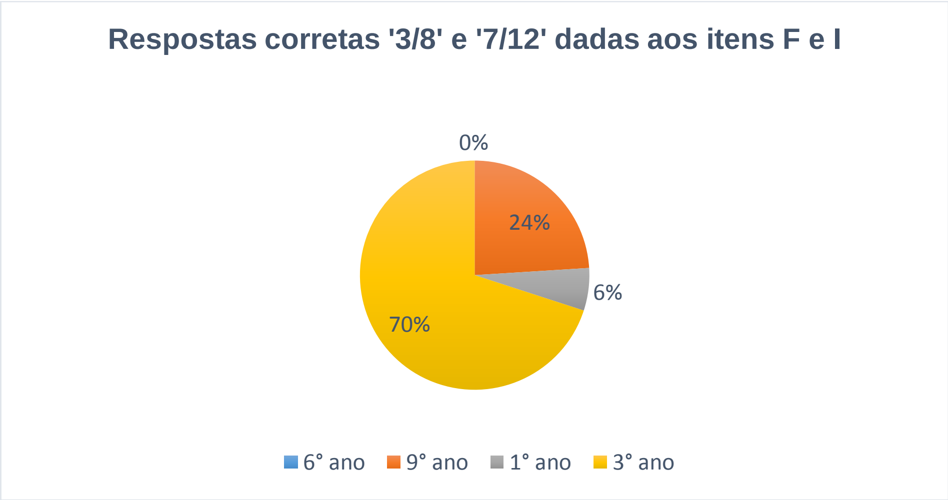
Resposta	Total de Ocorrências	Ocorrências por ano escolar (%)				Total de Ocorrências (%)
		6° ano	9° ano	1° ano	3° ano	
2/3	126	8%	11%	7%	7%	33%
2/1	51	6%	4%	3%	1%	14%
3/2	43	7%	1%	3%	1%	12%
1/2	16	2%	1%	1%	0%	4%
2/2	9	0%	2%	0%	0%	2%

Fonte: autoria própria, 2018

O maior número de ocorrências (126) se deve a resposta errada ‘2/3’, que também considera uma relação parte-todo, como no item anterior. A segunda maior ocorrência (51) é a que considera a relação parte-parte. Podemos inferir que esses sujeitos não se ativeram as diferentes formas geométricas e áreas das partes ou subfiguras. Aplicaram tão somente o procedimento da dupla contagem, sendo esse parte-todo ou parte-parte.

As intersecções realizadas entre as respostas dadas aos itens F e I revelaram que apenas 17 sujeitos (4,5%) atribuíram as respostas corretas ‘3/8’ e ‘7/12’, aos referidos itens. Essas respostas corretas parecem demonstrar que os sujeitos exploraram todos os tratamentos requeridos, obtendo uma fração irredutível, no RSF, conforme gráfico 18.

Gráfico 18 - Respostas corretas ‘3/8’ e ‘7/12’ dadas aos itens F e I.

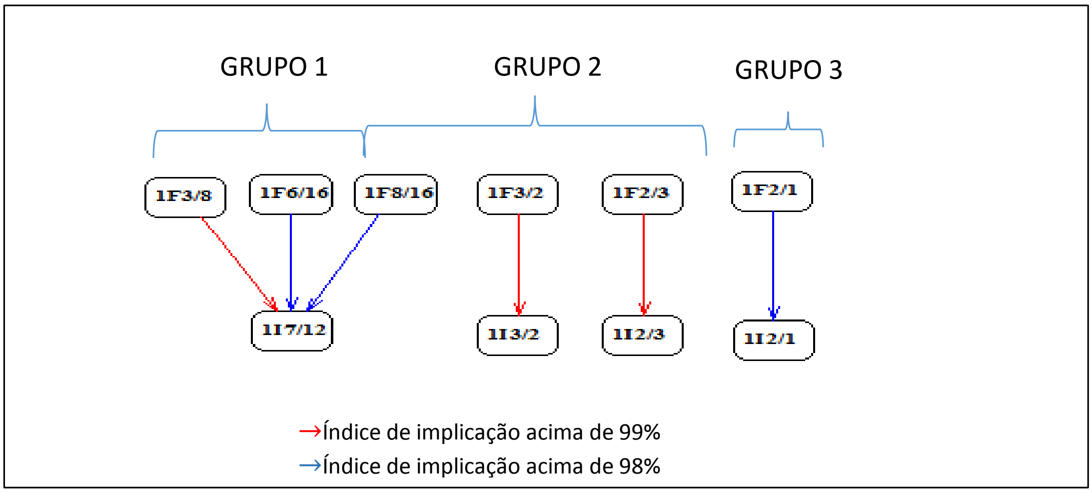


Fonte: autoria própria, 2018

Podemos verificar que os sujeitos do 6° ano do Ensino Fundamental não apresentaram ambas respostas corretas. Entre os sujeitos do 9° ano do Ensino Fundamental houve 4 respostas (24%), enquanto que os do 3° ano foram os que mais atribuíram essas respostas (12 ou 70%). Entretanto, estamos tratando de um Universo de apenas 17 respostas desse tipo. Um índice muito baixo de acertos.

O grafo implicativo da Figura 48 ilustra as quase implicações formadas a partir das intersecções entre todas as respostas dadas aos itens F e I, com índice de implicação acima de 98% para os caminhos descritos. Esses caminhos foram divididos em 3 grupos. O grupo 1 é formado pelo caminho de respostas corretas aos itens. Enquanto que o grupo 2 é formado por quase implicações entre soluções erradas envolvendo relações parte-todo e todo-parte e o Grupo 3 é formado por caminhos de respostas erradas que estabelecem relação parte-parte.

Figura 48 - Gráfico Implicativo das respostas dadas aos itens F e I.



Fonte: autoria própria, 2018.

GRUPO 1:

O caminho 1F3/8 →1I7/12 indica que os sujeitos que respondem corretamente ao item F, '3/8', também respondem corretamente ao item I, '7/12'. Nesse tipo de solução as frações são encontradas após o tratamento da reconfiguração por desconstrução das formas e das áreas, o qual em figuras geométricas desse tipo tem a característica de transformar as partes ou subfiguras que apresentam formas geométricas heterogêneas e áreas diferentes em formas homogêneas e áreas congruentes. No item F, além desse tratamento pode ter sido realizado o tratamento de reconfiguração por inclusão das partes ou subfiguras, ou ainda, ter sido utilizado a simplificação de frações, após a conversão no RSF. Contribuíram com esse caminho sujeitos do 9° ano do Ensino Fundamental, 1° e 3° anos do Ensino Médio. Os sujeitos do 3° ano do Ensino Médio foram os que mais contribuíram com esse caminho, com um risco de 0,00000482. Essas respostas foram dadas por 17 alunos (4,5%).

O caminho 1F6/16→1I7/12 sugere que os sujeitos que respondem corretamente ao item F, '6/16', também respondem corretamente ao item I, '7/12'. Nesse tipo de solução as frações são encontradas após o tratamento da reconfiguração por desconstrução das formas e das áreas. Contribuíram com esse caminho os sujeitos do 9° ano do Ensino Fundamental, 1° e 3° anos do Ensino Médio. Os sujeitos do 3° ano do Ensino Médio foram os que mais contribuíram com esse caminho, com um risco de 0,00000569. Essas respostas foram dadas por 13 alunos (3,4%).

GRUPO 2:

O caminho 1F8/16→1I7/12 revela que os sujeitos que respondem ‘8/16’ ao item F, atribuem ‘7/12’ ao item I. Apesar de acertarem no item I, inferimos que esses sujeitos ainda não consideram a congruência das áreas das partes ou subfiguras. Pois, acreditamos que utilizam o tratamento da reconfiguração por divisão, utilizando o particionamento do suporte na figura inicial, entretanto não compreendem que necessitam fazer a rotação da parte ou subfigura pintada para formar uma unidade-parte. Os sujeitos apenas utilizam o particionamento do suporte e aplicam o procedimento da dupla contagem (parte/todo). Contribuíram com esse caminho sujeitos do 9° ano do Ensino Fundamental e do 1° ano do Ensino Médio. Os que mais contribuíram foram os alunos do 9° ano do Ensino Fundamental com risco de 0,049. Essas respostas foram dadas por 7 alunos (1,84%)

O caminho 1F3/2 →1I3/2 sugere que os sujeitos que respondem ‘3/2’ ao item F são aqueles que respondem ‘3/2’ ao item I. Esses sujeitos fazem uso direto do procedimento da dupla contagem (todo-parte), na figura inicial, a partir de uma apreensão perceptual das formas geométricas das partes ou subfiguras. Contribuíram com esse caminho os sujeitos de todos os anos pesquisados. Os sujeitos do 6° ano do Ensino Fundamental foram os que mais contribuíram, com risco de 0,00000117. Essas respostas foram dadas por 23 alunos (6%).

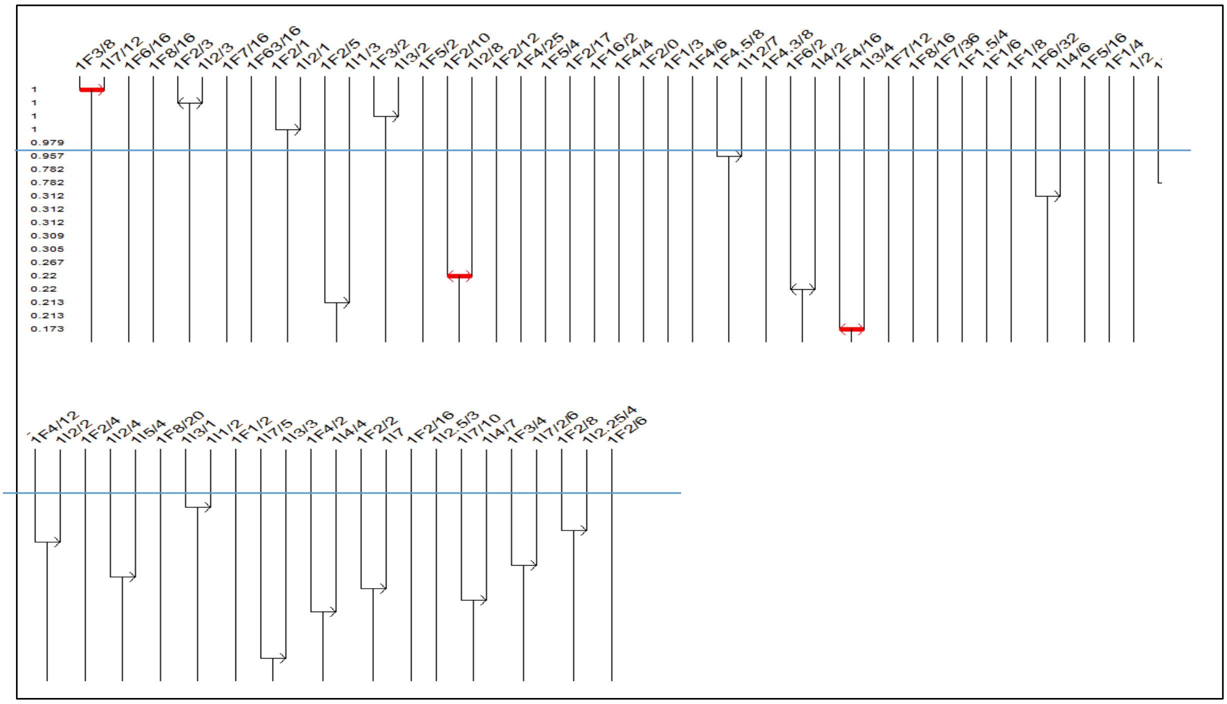
O caminho 1F2/3 →1I2/3 indica que os sujeitos que respondem ‘2/3’ ao item F, respondem ‘2/3’ ao item I. Foi o caminho que obteve um maior número de ocorrências (79). Assim como no anterior, esses sujeitos fazem uso direto do procedimento da dupla contagem (parte-todo), na figura inicial, também a partir de uma apreensão perceptual das formas geométricas das partes ou subfiguras. Contribuíram com esse caminho, 20,7% dos sujeitos. Esses sujeitos estão distribuídos em todos os anos pesquisados. Sendo, os alunos do 9° ano do Ensino Fundamental os que mais contribuíram com um risco de 0,0153.

GRUPO 3:

O caminho 1F2/1 →1I2/1 indica que os sujeitos que respondem ‘2/1’ ao item F, também respondem ‘2/1’ ao item I. Nesse tipo de solução as frações são encontradas fazendo uso direto do procedimento da dupla contagem (parte-parte), na figura inicial, a partir de uma apreensão perceptual das formas geométricas das partes ou subfiguras. Contribuíram com esse caminho os sujeitos de todos os anos pesquisados. Os sujeitos do 9° ano do Ensino Fundamental foram os que mais contribuíram, com risco de 0,125. Essas respostas foram dadas por 21 alunos (5,5%).

A árvore coesitiva formada com as respostas dadas aos itens F e I ilustra 19 níveis de coesão. O nível 1, cuja classe é formada pela quase implicação entre as variáveis 1F3/8 e 1I7/12, apresenta nó significativo. Dentre os níveis de coesão, 4 deles possuem índice igual a 1, localizados acima do traço definido na Figura 49.

Figura 49 - Árvore coesitiva das respostas dadas aos itens F e I.



Fonte: autoria própria, 2018

A quase implicação da classe {1F3/8;1I7/12}, com nó significativo, ao nível 1 e índice de coesão 1, da Figura 49, nos leva a inferir que as figuras geométricas que correspondem aos itens F e I possuem as mesmas unidades de sentido necessárias para a conversão entre os RGBidm e RSF, características desse nível, corroborando com a análise teórica prévia, descrita no Capítulo 4.

Essas respostas indicam que os sujeitos, no momento da conversão (para ambos os itens) entre o RGBidm e o RSF realizaram o tratamento da reconfiguração por desconstrução das formas e das áreas, usando o suporte como apoio para particionar as figuras iniciais em partes ou subfiguras com formas geométricas homogêneas e áreas congruentes. E ainda, no item F, o tratamento de reconfiguração inclui a rotação de partes ou subfiguras (apreensão operatória posicional) para que seja obtido um particionamento com partes ou subfiguras formas homogêneas e áreas congruentes. E os sujeitos podem ter escolhido uma unidade-parte já reduzida, ou realizado o tratamento de reconfiguração por inclusão das partes, ou ainda, simplificado a fração após a conversão. A correspondência semântica é definida entre as QsfMod_c e o numerador da fração (3 ou 6 para o item F e 7 para o item I) e as QsfMod_c/Ac (8 ou 16 para o item F e 12 para o item I).

Podemos observar na Figura 50, na resposta do sujeito 9_EKA23B ao item F, que se apoia no suporte para particionar a figura geométrica inicial.

Figura 50 - Resposta do aluno ‘9_EKA23B’ ao item F.

Fonte: autoria própria, 2018

Ao ser entrevistado o sujeito 9_EKA23B revela os conceitos utilizados para responder ao item, conforme quadro 34.

Quadro 34 - Trecho da entrevista ao aluno ‘9_EKA23B’ respondendo ao item F.

O aluno particiona a figura, como em figura e explica: **9_EKA23B -** eu olhei para o que estavam incompletos e juntei com os que estavam completos **(o aluno se refere aos retângulos encontrados ao particionar a figura usando o suporte)**. Mas aqui, diferente da C e da E o que está do lado não completa. Na verdade completa e ainda sobra uma parte se eu tentar completar com o que está do lado. Então, eu procurei a parte menor e tentei imaginar juntando aqui, aqui pode não ficar exatamente **(aluno risca a figura)** no desenho, mas eu sei que essa parte completa perfeitamente essa aqui (**aluno aponta para a figura a que se refere o que fez)**, [....] sabendo que um lado, sabendo exatamente que é dois retângulos aqui de base, então se um lado completou esse lado, se esse triângulo pequeno completou esse retângulo, então pela lógica já que o outro lado também é igual, essa parte vai completar esse retângulo, eu cheguei à conclusão que aqui haviam dois retângulos preenchidos, e aqui já estava feitos que são quatro retângulos preenchidos. E para chegar no denominador eu olhei a área, quatro retângulos de altura vezes quatro retângulos, que deu dezesseis, então simplifiquei, aqui tinham dois e aqui tinham quatro, eu coloquei seis(6) sobre dezesseis(16), então simplifiquei por dois que deu três(3) sobre oito(8).

Fonte: autoria própria, 2018

O aluno 9_EKA23B utiliza o suporte para particionar a figura e percebe que se rotacionar os triângulos retângulos pintados irá completar a área dos retângulos pintados, formando assim, seis retângulos com mesma área. Ele compreende que existe uma correspondência semântica entre essa quantidade (6) e o numerador da fração. Como também, há uma compreensão da correspondência semântica entre a quantidade total de retângulos que foi particionada a Figura (16) e o denominador da fração. Após a conversão o aluno simplifica a fração encontrada. Percebemos que o sujeito se prende ao particionamento inicial oferecido pelo suporte.

Sendo assim, o sujeito é questionado se consegue visualizar a fração reduzida ‘3/8’ na figura geométrica relativa ao item F. Dessa forma, o aluno 9_EKA23B, responde, conforme quadro 35.

Quadro 35 - Trecho da entrevista ao aluno ‘9_EKA23B’ respondendo ao item F.

Aluno 9_EKA23B: o um(1) desse três(3) seria o triângulo, e os outros dois(2) que seria o quatro(4), já que na primeira fração é o dobro da que é simplificada, o quatro(4) vai ficar pela metade na simplificada, então no caso o restante do dois(2) seria o retângulo

Fonte: autoria própria, 2018

Percebemos que o aluno ‘9_EKA23B’ consegue reconhecer a fração reduzida na figura geométrica. Portanto, para esse aluno, percebemos que o procedimento de simplificação de frações não o fez perder a compreensão da correspondência semântica entre os registros. Entretanto, inferimos que é um procedimento que pode levar a perda da compreensão da correspondência semântica, se não for trabalhado adequadamente em sala de aula pelos professores.

Ao nível 2, a dupla implicação na classe {1F2/3;1I2/3}, índice de coesão 1, revela um erro bastante cometido em todos os níveis as quais a figura geométrica inicial não possui o particionamento total, explícito, o desprezo da conservação da área entre as partes ou subfiguras. Os sujeitos se prendem à apreensão perceptual das formas geométricas iniciais, e discursiva, entre os elementos figurais visualizados e os simbólicos fracionários, numa relação parte-todo. A correspondência semântica é realizada entre a Qsf_c visualizada e o numerador (2 em ambos os itens); e a Qsf_c/Ac e o denominador da fração (3 para ambos os itens).

Ao nível 3, a quase implicação na classe {1F3/2;1I3/2}, índice de coesão 1, sugere outro erro, parecido com o anterior. Entretanto, nessa classe de respostas a apreensão discursiva é realizada entre elementos inversos aos da classe anterior. A correspondência semântica estabelecida é entre a Qsf_c/Ac visualizada e o numerador (3 para ambos os itens) e a Qsf_c visualizada e o denominador (2 para ambos os itens).

Ao nível 4, a quase implicação na classe {1F2/1;1I2/1}, índice de coesão 1, indica o tipo de erro que se prende quase que tão somente a apreensão perceptual das formas geométricas iniciais e discursiva entre os elementos figurais e os simbólicos fracionários numa relação parte-parte; e realiza uma correspondência semântica entre Qsf_c visualizada e o numerador (2 para ambos os itens); e a Qsf_Ac e o denominador (1 para ambos os itens).

Esses resultados corroboram com a nossa análise prévia quanto a necessidade do tratamento de reconfiguração por desconstrução das formas e das áreas, explícito ou não, para figuras geométricas pertencentes a esse grau de não congruência semântica, como tratamento que antecede a conversão para o RSF. Pois, essas figuras geométricas apresentam formas geométricas das partes ou subfiguras, explicitamente, heterogêneas com áreas diferentes, necessitando de um tratamento que possibilite a visualização das partes ou subfiguras com áreas congruentes.

As unidades de sentido necessárias para a conversão no RSF são apreendidas apenas com o tratamento da reconfiguração por desconstrução das formas e das áreas que possibilita tornar as partes ou subfiguras com formas homogêneas e áreas congruentes, permitindo o reconhecimento da unidade-parte e posteriormente da QSfMod_c e QSfMod_c/Ac.

Na análise dos dados empíricos verificamos que as figuras geométricas as quais incluem, no tratamento da reconfiguração por desconstrução das formas e das áreas, a rotação ou translação de partes ou subfiguras parecem oferecer um maior custo cognitivo do que as que não necessitam desse tratamento.

Os resultados apontam que os principais erros que podem ser cometidos nesse grau de não congruência semântica se apoiam na apreensão perceptiva das formas geométricas iniciais, desprezando a heterogeneidade das formas geométricas e as diferentes áreas entre as partes ou subfiguras. Dessa forma, realizam uma apreensão discursiva entre os elementos figurais visualizados inicialmente e os elementos simbólicos (numerador e denominador), numa relação parte-todo (sem uma apreensão operatória); ou todo-parte; ou ainda, parte-parte. As unidades figurais envolvidas nessas relações é a Qsf_c , Qsf_c/Ac, Qsf_Ac, visualizadas inicialmente, ou seja, que não receberam um tratamento de reconfiguração. Esses resultados demonstram a forte influência do procedimento da dupla contagem.

7.4. SÍNTESE DA ANÁLISE DOS GRAUS DE NÃO CONGRUÊNCIA 4, 5 E 6

Nesse capítulo analisamos os dados resultantes da nossa pesquisa empírica quanto ao que defendemos ser os Graus de não congruência semântica 4, 5 e 6 na conversão entre o registro geométrico bidimensional e o simbólico fracionário dos números racionais. Esses graus de não congruência semântica tem em comum a necessidade de uma apreensão operatória, além das apreensões perceptual das formas geométricas e discursiva entre os elementos figurais e simbólicos fracionários.

O grau 4 de não congruência semântica corresponde a conversão em que as figuras geométricas pertencentes ao registro de partida (RGBidm) são denominadas nessa pesquisa como sendo figuras operatórias por divisão. Essas figuras são aquelas que não possuem o particionamento completo explícito. Portanto, as subfiguras ou partes, visualizadas, possuem formas geométricas homogêneas mas áreas diferentes. Sendo assim, necessitam de uma apreensão operatória, de reconfiguração, explícita ou não, por divisão em partes ou subfiguras em áreas congruentes explícitas e formas geométricas homogêneas.

O grau 5 de não congruência semântica envolve as conversões entre os RGBidm e o RSF, cujas representações no registro de partida são figuras operatórias por modificação das formas. As subfiguras ou partes possuem formas geométricas diferentes que dificultam a percepção da congruência das suas áreas. Sendo assim, há a necessidade de uma apreensão operatória, de reconfiguração, por desconstrução das formas geométricas das partes ou subfiguras para verificação da congruência entre essas áreas.

O grau 6 de não congruência semântica apresenta conversões em que as figuras geométricas, representações do registro de partida, são classificadas nessa pesquisa como, operatórias por modificação das formas e das áreas. As partes ou subfiguras apresentam formas geométricas heterogêneas e áreas explicitamente diferentes. Dessa forma, a apreensão operatória, de reconfiguração por desconstrução das formas e das áreas, explícita ou não, favorece a visualização das subfiguras ou partes em formas geométricas homogêneas e áreas explícitas congruentes, necessárias para reconhecimento das unidades figurais que se correspondem semanticamente com os elementos simbólicos fracionários.

Na análise do Grau 4 e 5 de não congruência semântica verificamos que as figuras geométricas que possuem unidade-parte inicialmente definida requerem um menor custo cognitivo do que as que não as apresentam. Enquanto que no Grau 6 de não congruência semântica, os resultados empíricos, nos fazem acreditar que as figuras geométricas que pertencem a esse nível, requerem um maior custo cognitivo, quando no tratamento de reconfiguração por desconstrução das formas e das áreas há a necessidade de rotacionar partes ou subfiguras.

Assim como nos três primeiros graus de não congruência semântica, verificamos que os alunos do 6° ano do Ensino Fundamental foram os que obtiveram menor índice de acertos e os do 3° ano do Ensino Médio, o maior. Sendo que no grau 6 de não congruência semântica, os alunos do 6° ano do Ensino Fundamental não apresentaram acertos.

A análise das intersecções realizadas entre as respostas dadas aos dois itens de cada grau de não congruência semântica (grau 4 ao grau 6), demonstraram que o grau 4 de não congruência semântica apresenta o maior índice de acertos simultâneos (15%) aos itens, enquanto que o grau 6 equivale ao menor índice de acertos simultâneos (8%). Esses resultados corroboram com a nossa classificação prévia dos graus de não congruência semântica.

A análise das quase implicações, por meio do Grafo implicativo e da árvore coesitiva nos forneceu as características das conversões entre os graus de não congruência semântica. Verificamos que nos Graus de não Congruência semântica 4, 5 e 6, as unidades de sentido (figurais) necessárias para a conversão no RSF não são imediatamente apreendidas. Elas necessitam de um tratamento de reconfiguração, por divisão, no Grau 4; por desconstrução das formas, no Grau 5; e por desconstrução das formas e das áreas, no Grau 6, para serem visualizadas. Dessa forma, as unidades de sentido (figurais) em todos esses graus são modificadas (QsfMod_c e QsfMod_c/Ac).

No Grau 5 de não congruência semântica verificamos que a análise das produções dos alunos deve ser acompanhada de uma análise criteriosa dos conceitos utilizados, pois podem ocorrer respostas pretensamente corretas, apenas com o uso do procedimento da dupla contagem, sem reconhecimento das unidades figurais de sentido necessárias para a conversão no RSF.

O quadro 36 sintetiza as características das conversões realizadas entre os RGBidm e RSF consideradas ‘resposta corretas’ por grau de não congruência semântica: as unidades figurais consideradas, os tipos de apreensões utilizadas e as características da representação no RSF.

Quadro 36 - Síntese das conversões das repostas corretas por grau de não congruência semântica 4, 5 e 6.

GRAU	UNIDADE FIGURAIS CONSIDERADAS	APREENSÕES UTILIZADAS	CARACTERÍSTICAS DA REPRESENTAÇÃO NO RSF
4	QSfMod_c e QSfMod_c/Ac	Apreensão Perceptiva Operatória e Discursiva	Fração de magnitude relativa. Faz uso da apreensão operatória, tratamento da reconfiguração por divisão das partes e inclusão das partes ou simplificação de frações
	QSfMod_c e QSfMod_c/Ac	Apreensão Perceptiva Operatória e Discursiva	Fração de magnitude literal. Faz uso da apreensão operatória, tratamento da reconfiguração por divisão das partes.
5	QSfMod_c e QSfMod_c/Ac	Apreensão Perceptiva Operatória e Discursiva	Fração de magnitude literal. Faz uso da apreensão operatória, tratamento da reconfiguração por desconstrução das formas geométricas.
	QSfMod_c e QSfMod_c/Ac	Apreensão Perceptiva Operatória e Discursiva	Fração de magnitude relativa. Faz uso da apreensão operatória, tratamento da reconfiguração por desconstrução das formas geométricas e inclusão das partes ou simplificação de frações
6	QSfMod_c e QSfMod_c/Ac	Apreensão Perceptiva Operatória e Discursiva	Fração de magnitude literal. Faz uso da apreensão operatória, tratamento da reconfiguração por desconstrução das formas e das áreas.
	QSfMod_c e QSfMod_c/Ac	Apreensão Perceptiva Operatória e Discursiva	Fração de magnitude relativa. Faz uso da apreensão operatória, tratamento da reconfiguração por desconstrução das formas e das áreas e inclusão das partes ou simplificação de frações

Fonte: autoria própria, 2018

Assim como nos Graus de não congruência semântica 1, 2 e 3, os graus de não congruência analisados apontam para o uso do procedimento da dupla contagem. Sendo que, nos graus 4, 5 e 6, esse procedimento se apoia diretamente na apreensão perceptiva das formas geométricas iniciais. Os sujeitos não realizam a apreensão operatória que é necessariamente requisitada nesses graus de não congruência semântica, que de acordo com Duval (2011) requer um maior custo cognitivo. Dessa forma, fazem uma apreensão discursiva entre os elementos figurais perceptuais e os elementos simbólicos fracionários, seja numa relação parte-todo, todo-parte ou parte-parte, como descrito no quadro 37.

Quadro 37 - Principais erros cometidos nas conversões entre RGBidm e RSF entre os graus de não congruência semântica 4, 5 e 6.

Graus de não congruência semântica	**Característica dos erros nas conversões entre RGBidm e RSF**
Graus 4, 5 e 6	Os sujeitos consideram as quantidades visualizadas na figura, sem tratamento, e realizam: -Correspondência semântica entre QSf_c (visualizada) e o numerador e QSf_c/Ac (visualizada) e o denominador (relação parte/todo); -Inversão semântica entre QSf_c (visualizada) e o denominador e QSf_c/Ac (visualizada) e o numerador (relação todo/parte); -Univocidade semântica terminal entre a QSf_c (visualizada) e o numerador, e Qsf_Ac (visualizada) e denominador ou vice-versa (relação parte-parte)

Fonte: autoria própria, 2018

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa teve como objetivo geral, propor uma categorização para os graus de não congruência semântica entre as conversões que tinha como registro de partida o geométrico bidimensional e como registro de chegada o simbólico fracionário dos números racionais. Pois, de acordo com Duval (2011) as conversões entre registros submetem-se aos fenômenos de congruência e não congruência semântica que vão indicar o custo cognitivo a ser empenhado no momento das transformações.

Iniciamos o estudo com uma análise dos três períodos distintos entre representações e objeto representado, descritos por Duval (1998) até o estabelecimento da semiótica como disciplina, no séc. XX, culminando com o que acreditamos serem as bases da Teoria dos Registros de representações semióticas de Raymond Duval.

No capítulo 2 desenvolvemos uma análise bibliográfica dos artigos publicados em quatro periódicos nacionais e um internacional, entre 2006 e 2018, cujo foco eram os números racionais. Os artigos encontrados foram categorizados em formação de conceitos, formação de professores, currículo, formação de professores e de conceitos, história da matemática, tecnologia e revisão de literatura. Constatamos um maior número de artigos categorizados como formação de conceitos, a partir da qual realizamos uma análise de tendências teórico e metodológicas, por ser essa a nossa área de pesquisa e entendermos que essa análise traria um panorama do que está sendo discutido nessa área, mas ao mesmo tempo iria situar nosso objeto de pesquisa quanto a esses estudos.

As conversões que propomos categorizar em graus de não congruência semântica envolviam os registros de representações semióticas geométrico bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais. Para tanto, no capítulo 3 analisamos as características e tratamentos pertinentes a cada um deles. No registro geométrico bidimensional verificamos, na literatura, que não existia uma classificação das representações semióticas que lhe são pertinentes. Então, de acordo com Duval (2004), o qual afirma que as unidades figurais podem ser determinadas a partir das variações visuais, dimensional e qualitativa, das figuras geométricas, construímos uma classificação para essas representações semióticas, com base nesses critérios.

Dessa forma, consideramos como representações semióticas do registro geométrico bidimensional dos racionais, as figuras perceptuais que são aquelas cujas subfiguras ou partes possuem áreas congruentes e formas homogêneas, com um inteiro ou mais de um inteiro; as figuras operatórias por inclusão das partes, cujas subfiguras ou partes têm áreas explícitas congruentes e formas homogêneas; as figuras operatórias por modificação das formas, as quais, as suas subfiguras ou partes, contêm áreas congruentes e formas heterogêneas; as figuras operatórias por divisão, que possuem subfiguras ou partes com áreas particionadas, explicitamente diferentes, e formas homogêneas; e as figuras operatórias por modificação das áreas e das formas, cujas subfiguras ou partes possuem áreas particionadas explicitamente diferentes e formas heterogêneas. Após a classificação dessas representações caracterizamos cada uma delas, de acordo, com o que é requerido nas conversões entre o RGBidm e o RSF.

Sendo assim, verificamos que as figuras perceptuais com um inteiro são comparadas às denominadas como ‘completas’ na pesquisa de Behr, Post e Silver (1983) e, conforme Carraher e Schilieman (1992), a conversão para o RSF é realizada a partir de uma dupla contagem, do número de partes que foram pintadas ou hachuradas, e do número de partes que foi particionado o todo, correspondendo literalmente a fração resultado. As figuras operatórias por inclusão das partes, apesar de possuírem todas as informações para a conversão no RSF, de forma perceptual, permitem explorar as relações de equivalência, se realizada a reconfiguração das partes ou subfiguras.

As figuras operatórias por divisão necessitam de um tratamento, explícito ou não, para descoberta da unidade-parte e posterior divisão em partes ou subfiguras de áreas congruentes. Na pesquisa de Behr e Post (1981) elas são classificadas como ‘incompletas’. Enquanto que as figuras operatórias por modificação das formas necessitam de um tratamento, explícito ou não, para desconstrução das formas das partes, heterogêneas, em formas homogêneas, possibilitando a visualização da congruência entre as suas áreas. E, finalmente, as figuras operatórias por modificação das áreas e das formas requerem uma análise da relação existente entre as partes, de áreas não congruentes e formas heterogêneas e entre elas e o todo, para desconstrução das formas das partes ou subfiguras e reconfiguração do todo numa mesma unidade de medida, com formas homogêneas e áreas congruentes.

Os tipos descritos de figuras que compõem as representações semióticas do RGBidm dos racionais, além das apreensões perceptual das formas e discursiva entre os dois registros, podem requerer, na conversão para o RSF, modificações do tipo 'mereológica', pela operação de 'reconfiguração intermediária', caracterizada pelo particionamento da figura geométrica em subfiguras ou partes do todo que as contêm, podendo ter as mesmas formas geométricas, ou seja, serem homogêneas, terem formas geométricas diferentes ou heterogêneas, conforme Duval (2012b).

Tendo como base a classificação das representações semióticas do RGBidm proposta nesses estudo, dos critérios de congruência semântica definidos por Duval (2004, 2009, 2011) e nos tipos de apreensões geométricas descritas por Duval (1994,2004,2012b), propomos uma classificação preliminar dos graus de não congruência semântica na conversão entre o RGBidm e o RSF dos números racionais.

Assim sendo, categorizamos essas conversões em seis graus de não congruência semântica. O grau 1 de não congruência semântica envolve as figuras do tipo perceptual com um inteiro. Essas figuras apresentam uma correspondência semântica entre as unidades figurais - áreas congruentes, formas homogêneas, cor e quantidade de partes com cor- e o numerador. Bem como, uma correspondência semântica entre as demarcações internas de divisão das partes e o traço de fração. E, ainda, uma correspondência semântica entre as unidades figurais - áreas congruentes, formas homogêneas, cor, ausência de cor, quantidade total de partes com cor e ausência de cor - e o denominador. Portanto, apresentam uma correspondência semântica entre todos os elementos figurais e simbólicos necessários para a conversão no RSF, a qual facilita ao procedimento da 'dupla contagem'. Entretanto, acreditamos que é a falta de univocidade semântica terminal da unidade figural 'cor' que conduz a erros como a relação parte-parte.

O grau 2 de não congruência semântica comporta as figuras perceptuais com mais de um inteiro no RGBidm. Na nossa análise da correspondência semântica entre as unidades figurais e simbólicas, verificamos que cor, ausência de cor, quantidade total das partes com cor e ausência de cor não se correspondem semanticamente com a unidade simbólica, denominador. Acreditamos que é principalmente, a falta de correspondência semântica entre a unidade figural, quantidade total das partes ou subfiguras com cor e ausência de cor; e a unidade simbólica, denominador da fração, que leva a erros como o descrito em Rodrigues (2005) - não reconhecimento da unidade como referencial. Ao fazer corresponder essa unidade figural com a simbólica denominador, o sujeito busca erroneamente uma correspondência semântica com o procedimento da dupla contagem.

O grau 3 de não congruência semântica envolve as figuras operatórias por inclusão das partes. Nesse nível, existem unidades figurais que não se correspondem semanticamente quer seja com o numerador, traço da fração ou o com o denominador. O tratamento figural por meio da operação de reconfiguração por inclusão das partes, pode ser utilizado e, dessa forma, a figura geométrica obtida terá os elementos figurais que irão se corresponder semanticamente com as unidades simbólicas numerador e denominador da fração.

No grau 4 de não congruência semântica estão as conversões entre figuras operatórias por divisão, no RGBidm, e a fração, no RSF. Nesse tipo de conversão, os únicos elementos figurais que se correspondem semanticamente com os simbólicos, tanto com o numerador quanto com o denominador, são as formas homogêneas e a cor. Além disso, é necessária a operação de reconfiguração intermediária por divisão das partes para encontrar a unidade-parte e dividir a figura geométrica, explicitamente ou não, em partes com áreas congruentes.

O grau 5 de não congruência semântica envolve as conversões que têm no registro de partida figuras operatórias por modificação das formas. Essas figuras apresentam uma peculiaridade. As conversões podem ser realizadas utilizando o procedimento da dupla contagem, pois são apenas as unidades figurais, ‘formas heterogêneas e demarcações internas de divisão das partes’, que não se correspondem semanticamente com as unidades simbólicas, não acarretando prejuízo quanto ao uso desse procedimento. Compreendemos que essa particularidade conduz a respostas pretensamente corretas mas que não consideram a congruência das áreas entre as partes ou subfiguras. Nesse nível é necessária a reconfiguração das figuras operatórias por modificação das formas para que ocorra a correspondência semântica entre as respectivas unidades figurais e simbólicas.

No maior grau (grau 6) de não congruência semântica, as figuras operatórias por modificação das áreas e das formas são as representações semióticas do registro de partida. A correspondência semântica só irá ocorrer entre a unidade figural, cor e o numerador; e as unidades figurais cor e ausência de cor e o denominador. A ausência de correspondência semântica entre as formas heterogêneas e as áreas diferentes e o numerador e denominador da fração requer que a figura geométrica seja modificada pela operação de reconfiguração para desconstrução das áreas das subfiguras ou partes, podendo envolver além de particionamentos complementares (globais), modificações posicionais de subfiguras de translação e/ou de rotação (locais), de modo que a figura geométrica poderá tornar-se totalmente diferente da figural inicial, guardando apenas, uma relação de semelhança com os contornos fechados dessa figura geométrica. Dessa forma, acreditamos ser essa uma transformação figural de maior custo cognitivo, em relação aos graus de não congruência semântica anteriores.

Na nossa pesquisa empírica buscamos validar o modelo proposto. Tendo sido realizada com um total de 381 estudantes, do 6°e 9° anos do Ensino Fundamental e, 1° e 3° anos do Ensino médio, envolvendo conversões entre os RGBidm e o RSF, no total de 12 itens, dois itens de cada grau de não congruência semântica, além de entrevista com alguns dos sujeitos participantes.

Verificamos que existe uma tendência, em todos os graus de não congruência semântica, do sujeito que responde corretamente a um item, responder também corretamente ao outro item pertencente ao mesmo grau. Como também, aqueles que realizam erroneamente uma das relações, parte-parte ou todo parte, em um item, demonstram fazer a mesma relação no outro item, do mesmo grau de não congruência semântica. Essa constatação corrobora com nossa análise prévia dos graus de não congruência semântica, no que se refere a inferir os pares de figuras geométricas que pertencem ao mesmo grau de não congruência semântica e as unidades figurais que devem ser consideradas na conversão entre o RGBidm e o RSF.

Observamos, quanto as séries pesquisadas que os sujeitos do 6° ano apresentaram, no geral, o menor índice de acertos, enquanto que os sujeitos do 3° ano apresentaram os maiores índices. Inferimos, que apesar das dificuldades encontradas quanto às conversões entre o RGBidm e o RSF, parece haver um certo desenvolvimento desse conhecimento ao longo da educação básica.

Além disso, identificamos com a pesquisa empírica os principais erros que podem ser cometidos em cada um dos graus de não congruência semântica, como também algumas particularidades de cada nível e que não haviam sido contemplados na análise prévia dos graus de não congruência semântica.

O grau 1 de não congruência semântica demonstrou ser o nível em que mais obteve-se acertos, 225 sujeitos acertaram simultaneamente aos itens pertencentes a esse grau de não congruência semântica. Verificamos, como relatado na literatura, que esse é o nível em que o procedimento da dupla contagem parece ser bastante adequado, devido às figuras geométricas exigirem na conversão para RSF apenas as apreensões perceptuais e discursivas e as unidades figurais necessárias para tal se aproximarem dos elementos exigidos para esse procedimento. Entretanto, não fica claro se os sujeitos reconhecem as unidades figurais necessárias à conversão no RSF.

O grau 2 de não congruência semântica apresentou um índice abaixo do esperado de respostas corretas, apenas 33 sujeitos responderam corretamente, de forma simultânea, aos itens correspondentes a esse nível, apesar de a conversão envolvendo figuras perceptuais com mais de um inteiro não necessitar de apreensão operatória. Dessas respostas corretas, somente 5 equivalem a fração imprópria. 18 soluções apresentam uma leitura literal das quantidades referentes a cada unidade e 10 respostas do total consideram um inteiro e uma fração. Sendo assim, inferimos que os sujeitos que deram esses tipos de respostas aos itens podem não estar estabelecendo uma relação entre as duas quantidades para obter a quantidade total referente às duas unidades. O maior índice de respostas erradas dadas aos itens (146), desprezam a conservação da unidade, portanto, as duas unidades são tratadas como um nova unidade, consequência da junção das duas iniciais, o que torna-as mais adequada ao procedimento da dupla contagem.

As conversões que pertenciam ao grau 3 de não congruência semântica apresentaram 205 acertos simultâneos aos itens pertencentes a esse nível. Dessas respostas, 188 foram de magnitude literal, portanto não exploraram todos os recursos da figura geométrica, restringindo-se apenas às apreensões perceptiva e discursiva entre as unidades figurais e simbólicas. Apenas 17 acertos do total de 205 consideram uma reposta de magnitude relativa, ou seja, apresenta uma fração equivalente à visualizada na figura geométrica inicial, que pode ter sido encontrada pelo uso de uma apreensão operatória. Verificamos ainda que entre essas soluções a maioria dos alunos podem ter utilizado o procedimento da simplificação de frações após a conversão; entretanto, constatamos em entrevista que nem todos os alunos conseguem reconhecer na figura geométrica a fração irredutível encontrada no RSF.

No grau 4 de não congruência semântica, as conversões entre o RGBidm e o RSF obtiveram 59 acertos simultâneos. Dessas respostas corretas apenas 11 soluções foram de magnitude relativa, portanto, utilizaram ao menos a reconfiguração por divisão, ou essa, e a inclusão de partes como tratamentos figurais. Verificamos entre os itens propostos para esse grau de não congruência semântica, que parece haver um maior custo cognitivo quando a unidade-parte inicial é implícita. Entre os principais erros cometidos nesse nível está o desprezo da conservação da área das partes ou subfiguras.

O grau 5 de não congruência semântica apresentou 34 acertos simultâneos. Desses, apenas 7 atribuíram respostas com frações irredutíveis, demonstrando terem realizado o tratamento figural do reconhecimento da unidade-parte, reconfiguração por desconstrução das formas geométricas heterogêneas em homogêneas para verificação da igualdade das áreas e posterior tratamento figural de inclusão das partes ou tratamento simbólico de simplificação de frações. As outras 27 soluções corretas encontraram uma fração equivalente à irredutível, o que demonstra terem realizado apenas o tratamento figural de reconfiguração por desconstrução das formas geométricas. Verificamos também nesse nível que parece haver um maior custo cognitivo quando a unidade-parte é inicialmente implícita.

No grau 6 de não congruência semântica foram 30 acertos. Essas soluções utilizam o tratamento da reconfiguração por desconstrução das formas e das áreas, que pode incluir múltiplos particionamentos, rotação e/ou translação de subfiguras, que parecem oferecer um maior custo cognitivo. Dessas, 17 podem ter utilizado também o tratamento da inclusão de partes ou subfiguras ou o procedimento de simplificação de frações no RSF. Os principais erros nesse nível desprezam a heterogeneidade das formas e as diferentes áreas das partes ou subfiguras e realizam a conversão para o RSF lançando mão apenas das apreensões perceptual e discursiva e o procedimento da dupla contagem. Como nos dois graus de não congruência anteriores, parece haver um maior custo cognitivo quando a unidade-parte é inicialmente implícita.

Pudemos constatar em soluções dadas em todos os graus de não congruência semântica que é bastante presente o uso do procedimento da dupla contagem sem que o sujeito tenha a consciência das relações existentes entre as unidades figurais e simbólicas dos registros envolvidos na conversão. Dessa forma, torna-se o uso do ‘procedimento pelo procedimento’. Verificamos também que os sujeitos preferem utilizar um procedimento algorítmico, como a simplificação de frações, a um tratamento figural, o que pode estar demonstrando a massificação desse procedimento em sala de aula, em detrimento de tratar a figura de forma heurística, pois acreditamos que esses tipos de soluções refletem o que é mais trabalhado em sala de aula.

Inferimos ser necessário, para que as conversões entre esses dois registros possam ser significativas, que sejam trabalhadas em sala de aula envolvendo todos os tipos de figuras geométricas classificadas nesse estudo com tratamento heurístico. Sabemos que o nosso estudo tem suas limitações e que pesquisas referentes a intervenções que considerem essas diferenças nas conversões entre o RGBidm e o RSF precisam ser desenvolvidas.

A creditamos que a categorização em graus de não congruência semântica na conversão entre os registros geométrico bidimensional e numérico fracionário dos números racionais, proposta nesse estudo, pode servir como base para a estruturação de propostas pedagógicas, como a produção de sequências didáticas dos livros didáticos de matemática e a implementação de pesquisas envolvendo a engenharia didática que tenham como objetivo o ensino e a aprendizagem do significado parte-todo do número racional na educação básica.

Como também, observamos que essa pesquisa pode servir de base para a formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática tanto nas séries iniciais como nas séries finais do ensino fundamental no que se relaciona às reflexões e discussões sobre a influência da congruência semântica e equivalência referencial nas conversões entre os registros de representações dos números racionais.

Outra sugestão para pesquisas futuras, seria a análise da conversão inversa, ou seja, a análise dos graus de não congruência semântica entre o RSF e o RGBidm. Pois, de acordo com Duval (2011), a conversão inversa pode tornar-se muito diferente da conversão direta, como ‘subir e descer uma ladeira’. Ou ainda, a análise dos graus de não congruência semântica entre o registro da língua natural e o RSF.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADJIAGE, R; PLUVINAGE, F. **An experiment in teaching ratio and proportion**. In: Educational Studies Mathematics. v. 65, p. 149-175. 2007. Disponível em: https://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/10649. Acesso em: 20 jan 2017

ALMOULOUD, S.A.; SILVA, M.J.F. **As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo**, Bolema, Rio Claro, v. 21, p. 55-78. 2008. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/archive. Acesso em: 05 fev 2017.

ALVAREZ, M. H. V; LEDESMA, E.F.R. **El caso de Francisca y el sentido otorgado a los números decimales**. Bolema, Rio Claro, v. 31, n° 58, p.699-718, ago. 2017. Disponível em:http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a09. Acesso em: 07set 2018.

BEHR, M.; POST, T. **The effect of visual perceptual distractors on children's logical-mathematical thinking in rational number situations**. In POST, T.; ROBERTS, M. (Eds), Proceedings of the third annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of mathematics education, Mineapolis: University of Minnesota, p. 8-16. 1981

BEHR, M. J. et al. **Acquisition of mathematics concepts and processes**.New York: Academic Press : Nova York, 1983, p. 91-126.

______________. **Rational number, ratio and proportion**. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, p. 296-333. NY: Macmillan Publishing.1992.

BEHR, M.; POST, T. **The Effect of Visual Perceptual Distractors on Children's Logical-Mathematical Thinking in Rational Number Situations**. In T. Post & M. Roberts (Eds.), Proceedings of the Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Minneapolis: University of Minnesota, 1981, p.8-16.

BERTONI, N.E. **A construção do conhecimento sobre número fracionário**. Bolema, v. 21, p. 209-237, 2008. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/archive. Acesso em: 05 fev 2017.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª series)**: Matemática. Brasília, MEC/SEF, 1998.

______, Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio**: Prova de Redação e de Linguagens, códigos e suas Tecnologias e Prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF, cad. 5, 2011. Disponível em: http://www. portal.inep.gov.br/web/enem/edicões-anteriores. Acesso em: 22 mai 2012.

BRIZUELA, B. **Young children's notations for fractions**. In: Educational Studies Mathematics, V. 62, p. 281-305. 2006. Disponível em: https://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/10649.Acesso em 04 fev 2017.

CAMPOS, T. ; MAGINA, S. ; NUNES, T. **O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias d ensino**. Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.8, n.1, p 125-136. 2006. Disponível em : http://revistas.pucsp.br/emp/issue/archive. Acesso em : 02 fev 2017.

CAMPOS, T et al. J. **Lógica das Eaquivalências. Relatório de Pesquisa não publicado.** PUC - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 1995

CAMPOS, T.M.M.; RODRIGUES, W.R**. A ideia de unidade na construção do conceito do número racional**. Revemat, v. 2.4, p. 68-93, 2007. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/archive. Acesso em: 02 fev 2015.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 6ª edição. Lisboa. 1975.

CARRAHER, W. D.; SCHLIEMANN, A.L. **A compreensão de frações como magnitude relativa**. Psicologia: Teoria e Pesquisa, v.8, N° 1, p. 67-78, 1992. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_issues&pid=0102-3772&lng=en&nrm=iso. Acesso em: 02 fev 2016.

CARRAER, W. D. **O método clínico**: usando os exames de Piaget, São Paulo, Cortez. 161 p.1989.

CATTO, G. G. **Registros de representação e o número racional – Uma abordagem nos livros didáticos**. São Paulo, 2000. 152p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.

CHARALAMBOS, C.Y.; PITTA-PANTAZI, D. **Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions**. In: Educational Studies Mathematics, V. 64, p. 293-316. 2007. Disponível em: https://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/10649. Acesso em: 20 jan 2017.

CLARKE, D.M.; ROCHE, A. **Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction**. In: Educational Studies Mathematics, v. 72, p. 127-138. 2009. Disponível em: https://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/10649. Acesso em: 20 jan 2017.

CLÍMACO, H. A. **Prova e explicação em Bernard Bolzano.** Cuiabá, 2007. 163p. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Mato Grosso. Cuiabá, 2007.

_____________; OTTE, M. F. **Bolzano, a formação da Matemática Pura e a aritmetização da Matemática.** 36ª Reunião Nacional da ANPED. Goiânia, 2013

COSTA, F. M. **Concepções e competências de professores especialistas em matemática em relação ao conceito de fração em seus diferentes significados**. São Paulo, 2011. 175p. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2011.

COUREY, S.J. et al. **Academic music: music instruction to engage third-grade students in learning basic fraction concepts**. Educational Studies in Mathematics, n° 81, 2012. Disponível em: https://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/10649. Acesso em: 20 jan 2017.

DAMAZIO, A. **O processo de elaboração do conceito de potenciação de números fracionários: uma abordagem histórico-cultural**. Bolema, v. 24, p. 219-243, 2011. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/archive. Acesso em: 05 fev 2017.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental**. São Paulo, 2007. 313p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

D"AMORE, B; PINILLA, M.I.F.; IORI, M. **Primeiros elementos de semiótica**: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Trad. Maria Cristina Bonomi. 1ªedição. São Paulo. Editora Livraria da Física, 2015.

DESCARTES, R. **Meditações sobre filosofia primeira**. UNICAMP, São Paulo, 2004.

DUVAL, R**. Les diferentes fonctionnements d'une figure dans une demarche géométrique**. Repères, IREM, 17, p.121-138. 1994.

_________. **Signe et objet (I) – Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre representation et objet**. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM de Strasbourg, 1998. P.139-163. Disponível em: https://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/adsc/volumes/#c14902. Acesso em: 01 fev 2018.

_________. **Registros de representação e números racionais**. In: MACHADO, S.D.A.(org.). Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

_________. **Semiosis y Pensamiento Humano**. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. trad. Myriam Veja Rastrepo. Universidad Del Valle. 2004

__________. **La conversion des représentations: un des deux processus fondamentaux de la pensée**. In J. Baillé (Ed.) Conversion, du mot au concept (p. 9-45). Presses universitaires de Grenoble, 2007. p. 9-45.

_________. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Coleção Contextos da Ciência. Fasc. I. 1ª ed. São Paulo: editora Livraria da Física, 2009.

_________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. 1ª ed. São Paulo: PROEM, 2011.

_________. **Diferenças semânticas e coerência matemática**: introdução aos problemas de congruência. REVEMAT. Florianópolis, Santa Catarina, v.7, n.1, p.97-117, 2012a. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/archive. Acesso em: 02 fev 2015.

_________. **Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência**. REVEMAT. Florianópolis, Santa Catarina, v.7, n.1, p.118-138, 2012b. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/archive. Acesso em: 02 fev 2015.

_________. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. REVEMAT.** Florianópolis, Santa Catarina, v.7, n.2, p.266-297, 2012c. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/archive. Acesso em: 02 fev 2015.

___________. **Les théories cognitives en didactique des mathématiques : lesquelles et pourquoi ?** In: *Isonomia— Epistemologica*. 7. University of Urbino. 2015. Disponível em: http://isonomia.uniurb.it/. Acesso em: 02 fev 2015.

_________. **Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática**. REVEMAT. Florianópolis, V.11 N°2, 2016. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/archive. Acesso em: 02 fev 2015.

EMPSON, S.B.; JUNK, D.; DOMINGUEZ, H.; TURNER, E. **Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: a cross-sectional study of children’s thinking**. In: Educational Studies Mathematics, v.63, p.1-28. 2006. Disponível em: https://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/10649. Acesso em: 20 jan 2017.

FOUCAULT. M. **As palavras e as coisas: uma arqueologia das ciências humanas**. Trad. Salma T. Muchal , 8ª edição, Martins Fontes, São PAULO, 2000.

FREGE. **Sobre o sentido e a referência**. Fundamento – Revista de Pesquisa em Filosofia, v.1, N°3, maio-agosto. 2011. Disponível em: http://www.revistafundamento.ufop.br/index.php/fundamento/issue/archive. Acesso em: 15 mar 2018.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Kluwer Academic Publishers. New York. 1999.

GAGATSIS, A et al. **Fostering representational flexibility in the mathematical working space of rational numbers**. BOLEMA, Rio Claro, v.30, n° 54, p.287-307, abril. 2016. Disponível em http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/11312/7497. Acesso em: 05 set. 2018.

GIMÉNEZ, J. BAIRRAL, M. **Frações no currículo do ensino fundamental: conceituação, jogos e atividades lúdica**s. GEPEM/EDUR, v.2, Rio de Janeiro, 2005.

GLADE, M.; PREDIGER, S. **Students' individual schematization pathways-empirical reconstructions for the case of part-of-part determination for fractions**. Educational Studies in Mathematics, n° 94, p.185-203. 2017. Disponível em: https://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/10649. Acesso em: 20 jan 2018.

GOMES, R. Q. G. **Saberes docentes de professores dos anos iniciais sobre frações**. Rio de Janeiro, 2010. 112p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

GRÁS, R.; RÉGNIER, J.C. **Uma conversa entre Régis Gras [RG] e Jean-Claude Régnier [JCR].** In: Uso do CHIC na formação de educadores. Org. VALENTE, J. A.; ALMEIDA, M. E. B., 1ª edição, Rio de Janeiro, Letra Capital, p. 36-42. 2015b.

____________________ **Origem e desenvolvimento da análise implicativa (A.S.I.)**. In: Uso do CHIC na formação de educadores. Org. VALENTE, J. A.; ALMEIDA, M. E. B., 1ª edição, Rio de Janeiro, Letra Capital, p. 18-35. 2015a.

GUERRA, R.B.; SILVA, S.H.F. **As operações com frações e o princípio da contagem**. BOLEMA, Florianópolis, v. 21, p. 41-54, 2008. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/11312/7497. Acesso em: 05 set. 2018.

GUERREIRO, H.G; SERRAZINA, M.L. **A aprendizagem dos números racionais com compreensão envolvendo um processo de modelação emergente**. BOLEMA, Rio Claro, v.31, n° 57, p.181-201, abril. 2017. Disponível em http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2017000100011&lng=pt&nrm=iso. Acesso em: 05 set. 2018.

GUERREIRO, H.G; SERRAZINA, M.L.; PONTE, J.P. **Uma trajetória na aprendizagem dos números racionais através da percentagem**. Educação Matemática Revista, São Paulo, v.20, n° 1, p. 359-384. 2018. Disponível em: http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p359-384. Acesso em: 07 set 2018.

HACKENBERG, A. J.; LEE, M. Y. **Students' distributive reasoning with fractions and unknowns.** Educational Studies in Mathematics, n° 93, p.245-263. 2016. Disponível em: https://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/10649. Acesso em: 20 jan 2018.

HACKENBERG, A.J.; E.S. TILEMA. **Students' whole number multiplicative concepts: a critical constructive resource for fraction composition schemes**. The Journal of mathematical Behavior, n° 28, 1-18. 2009. Disponível em:

https://www.sciencedirect.com/journal/the-journal-of-mathematical-behavior/issues. Acesso em: 13 fev 2018.

HOOF J.V.; VERSCHAFFEL, L.; DOOREN, W. V. **Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education**. In: Educational Studies Mathematics, V.90, p.39-56, 2015. Disponível em: https://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/10649. Acesso em: 20 jan 2018.

JUSTULIN, A. M. **Um estudo sobre as relações entre atitudes, gênero, série e desempenho em exercícios e problemas envolvendo frações**. REVEMAT, Florianópolis, v.11, n° 2, p. 343-362. 2016. Disponível em : http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n2p343. Acesso em: 07 set 2018.

KANT, E. **Carta a Marcus Herz** . Estudios de Filosofía, vol. 10, 2012. p. 165-172.

_______ **Crítica da razão pura**. Trad. J. Rodrigues de Merege. Disponível em: http://www.cairu.br/biblioteca/arquivos/Filosofia/Critica_Razao_Pura_kant.pdf. Acesso em: 07 set 2018.

KIEREN, T. E. **On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers**. In R. Lesh (Ed.), Number and measurement: Papers from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, 1976.

__________. **Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development**. In: HIEBERT, J. & BEHR, M (eds). Number Concepts in the Midle Grades. v. 2. Reston :NTCM. 1988. p. 163-181.

___________ **Five faces of mathematical knowledge building**. Edmonton: Department of Secondary Education, University of Alberta, 1981.

____________. **The rational number construct – its elements and mechanisms**. In: ________(ed.). Recent Research on Number Learning. Columbia:ERIC, 1980. p. 125-149.

LESH, R.; BEHR, M.; POST, T. **Rational Number Relations and Proportions**. In C. Janiver (Ed.), Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. 1987.

LESH, R.; LANDAU, M.; HAMILTON, E. **Conceptual models in applied mathematical problem solving research.** In R. Lesh & M. Landau

(Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts & Processes (pp. 263-343). NY: Academic Press, 1983.

LIÃO, T. **Os símbolos matemáticos enquanto signos e seus diferentes significados**. REVEMAT, Florianópolis, v. 3.5, p. 55-61, 2008. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/archive. Acesso em: 02 fev 2015.

LUCENA, A. M.; ARAÚJO, L. F.; CÂMARA DOS SANTOS, M. **A metacognição no livro didático de matemática: um olhar sobre os números racionais.** REVEMAT. Florianópolis, v.08, edição especial, p. 209-226, dez. 2013. Disponível em: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8nespp209. Acesso em: 07 set 2018.

MACIEL, A.; CÂMARA, M. **Analisando o rendimento de alunos das séries finais do ensino fundamental e do ensino médio em atividades envolvendo frações e ideias associadas.** Bolema. V. 20, n. 28, p. 163-177, 2007. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/11312/7497. Acesso em: 05 set. 2018.

MACK, N. K. **Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: Partitioning, units, and understanding multiplication of fractions**. Journal for Research in Mathematics Education, 32, 267-295, 2001. Disponível em: https://www.nctm.org/Publications/journal-for-research-in-mathematics-education/All-Issues. Acesso em: 12 mai 2017.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. **A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental**. BOLEMA. Rio Claro, São Paulo, ano 21, n° 31, p.23 a 40, 2008. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/11312/7497. Acesso em: 05 set. 2018.

MARANHÃO, M.C.S.A; IGLIORI, S.B.C. **Registros de representação e números racionais**. In: MACHADO, S.D.A.(org.). Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. cap.4, p.57-70

MENEGHETTI, R.C.G. **Constituição do saber matemático**: reflexões filosóficas e históricas. Londrina. EDUAL, 2010.

MERLINI, V.L. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. Dissertação (mestrado em Educação matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MORAIS, C.; SERRAZINA, M. L. **Extensões de conhecimentos na construção da compreensão de número decimal**. BOLEMA, Rio Claro, v. 32, n° 61, p. 631-652, Ago. 2018. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a16. Acesso em 07 set 2018.

MOUTINHO, L. V. **Fração e seus diferentes significados**: um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do ensino fundamental. São Paulo, 2005. 193p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

NOTH, W. **A Semiótica no século XX**. Annablume, São Paulo, 2005.

NUNES, T et al. **Children's understanding of fractions**. Contrapontos, Itajaí, v.8, n° 3, p. 509-517, set/dez. 2008.

OHLSSON, S. **Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of fractions and Related Concepts**. In : HIEBERT, J. & BEHR, M (eds). Number Concepts in the Midle Grades. v. 2. Reston :NTCM. 1988. p. 53-92.

OLIVEIRA, G. P.; FERREIRA, E. R. **Concepções dos números racionais na representação fracionária: um estudo com alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA)**, REVEMAT, Florianópolis, v. 11, n° 1, p. 148-176. 2016. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/archive. Acesso em: 02 fev 2017.

ONUCHIC, L.L.R.; ALLEVATO, N.S.G. **As diferentes "Personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de Problemas**. BOLEMA, Florianópolis, v.21, p. 79-102, 2008. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a16. Acesso em 07 set 2018.

PECK, F.; MATASSA, M. **Reinventing fractions and division as they are used in algebra: the power of preformal productions**. Studies Educational in mathematics, n° 92, p. 245-278. 2016. Disponível em: https://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/10649. Acesso em: 20 jan 2018.

PEIRCE, C.S. **SEMIÓTICA**. Trad. José Teixeira Coelho Neto. 4ªedição. São Paulo. Perspectiva, 2010.

PONTE, J.P.; QUARESMA, M. **Representações e processos de raciocínio na comparação e ordenação de números racionais numa abordagem exploratória**. Bolema, v. 28, p. 1464-1484, 2014. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a16. Acesso em 07 set 2018.

POST, T.; BEHR, M.; LESH, R. Interpretations of Rational Number Concepts. In L. Silvey & J. Smart (Eds.), **Mathematics for Grades 5-9***, 1982 NCTM Yearbook* (pp. 59-72). Reston, Virginia: NCTM. 1982.

POST, T., BEHR, M., LESH, R. **Interpretations of Rational Number Concepts**. In L. Silvey & J. Smart (Eds.), Mathematics for Grades 5-9, NCTM Yearbook (pp. 59-72). Reston, Virginia: NCTM.1982

RODRIGUES, W. R. **Números racionais**: Um estudo das concepções de alunos após o estudo formal. São Paulo, 2005. 246p. Dissertação (Mestrado em Educação matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

ROMANATTO, M. C. **Número Racional**: Relações necessárias à sua compreensão. Campinas, 1997. 158p. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1997.

________________. **Número racional**: uma teia de relações. In: Zetetiké – CEPEM – FE/UNICAMP. V.7 - n° 12. P. 37-49. jul/dez de 1999. . Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/issue/archive. Acesso em 04 mar 2017.

ROSA, J.E. et al. **Relações entre as proposições para o ensino do conceito de fração com base no ensino tradicional e na Teoria Histórico- Cultural**. Revemat, v. 08, p. 227-245, 2013. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/archive. Acesso em: 02 fev 2015.

SANTAELLA, L.; NOTH, W. **Semiótica**. São Paulo, Experimento, 1999.

SANTANNA, N.F.P.; PALIS, G.L.R.; NEVES, M.A.C. **Transpondo obstáculos: da Aritmética para a Álgebra**. In: Zetetiké – CEPEM – FE/UNICAMP. V. 21, p. 169-195, 2013. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/issue/archive. Acesso em 04 mar 2017.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental. São Paulo, 2005. 196p. Dissertação (Mestrado em Educação matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

SANTOS, L.S. **Análise dos efeitos didáticos emergentes de uma sequência de atividades na aprendizagem do significado parte/todo do número racional**.

Recife, 2010. 269p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências). Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2010.

SANTOS, R.S. **Analisando as estratégias utilizadas pelos alunos da rede municipal do Recife na resolução de questões do SAEPE sobre números racionais**. Recife, 2011. 119 p. Dissertação (Mestrado em Educação matemática). Universidade Federal de Pernambuco, 2011.

SILVA, A. M. **Investigando a concepção de frações de alunos nas séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio**. Recife, 2006. 104p. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências). Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2006.

SILVA, F.A.F. **Significados e representações dos números racionais abordados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM**. Recife, 2013. 153 p. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências). Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2013

SILVA, M.J.F. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. São Paulo, 1997. 208 p. Dissertação (Mestrado em Ensino da matemática). Pontifícia Universidade Católica. 1997.

SILVA, F.A.F.; SANTIAGO, M.L.; SANTOS, M.C. **Análise de itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM que envolvem o conceito de números racionais à luz dos seus significados e representações**. Revemat, v. 08, p. 190-208, 2013. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/archive. Acesso em: 02 fev 2015.

____**Significados e representações dos números racionais abordados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM**. Bolema, v. 28, p. 1485-1504, 2014. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a16. Acesso em 07 set 2018.

SILVA, J. A. **Modelos explicativos elaborados por adolescentes e adultos para o cálculo com frações**: da percepção ao pensamento operatório. Educação Matemática Pesquisa, v. 9, p. 293-318, 2007. Disponível em: http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p359-384. Acesso em: 07 set 2018.

SOUZA, A.P.G.; OLIVEIRA, R.M.M. **Leitura, escrita e matemática**: a apropriação de conhecimentos e a receptividade de alunos da 4ª série do ensino fundamental. Zetetiké, v. 18, p. 173-210, 2010. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/issue/archive. Acesso em 04 mar 2017.

TEIXEIRA, A. M. **O professor, o ensino de fração e o livro didático**: um estudo investigativo. São Paulo, 2008. 194p. Dissertação (mestrado Profissional em Educação matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

TUNÇ-PEKKAN, Z. **An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations**. In: Educational Studies Mathematics, V.89, p.419-441. 2015. Disponível em: https://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/10649. Acesso em: 20 jan 2018.

VAZ, L.J.R.; PINHO, M.O. **Música e matemática** – um minicurso interdisciplinar. In: Zetetiké – CEPEM – FE/UNICAMP. V. 19, p. 179-194, 2011. . Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/issue/archive. Acesso em 04 mar 2017.

VIZCARRA, R.E.; SALLÁN, J.M.G. **Modelos de medida para la enseñanza del número racional em Educación Primaria**. UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n° 1, p. 17-35, 2005. Disponível em: http://www.fisem.org/www/union/indice_2017.php. Acesso em: 15 mar 2018.

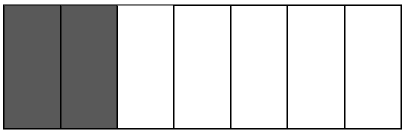
APÊNDICE A
INSTRUMENTO DE PESQUISA

Escola: ____

Aluno (a): ____Turma: ___

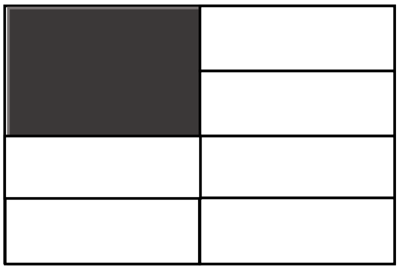
1) Escreva a fração que representa, em cada figura, as partes escuras em relação ao todo.

a)



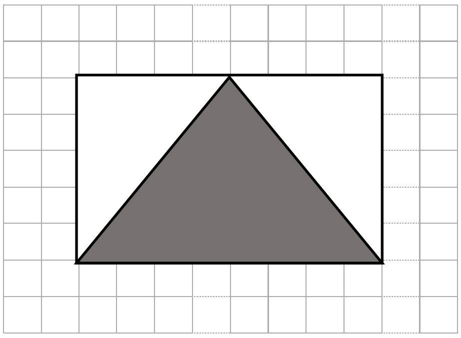
Resp:

b)



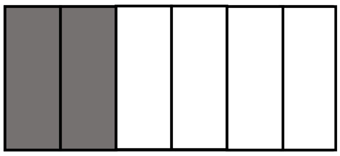
Resp:

c)



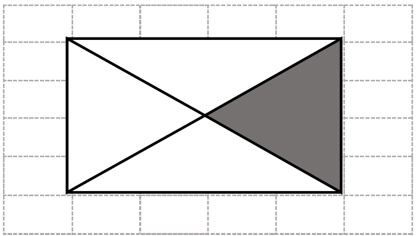
Resp:

d)



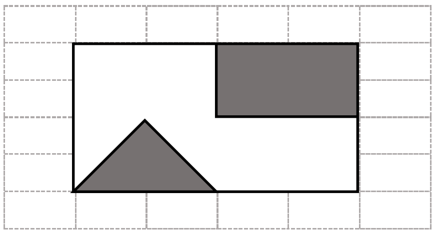
Resp:

e)



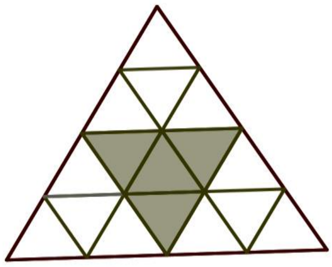
Resp:

f)



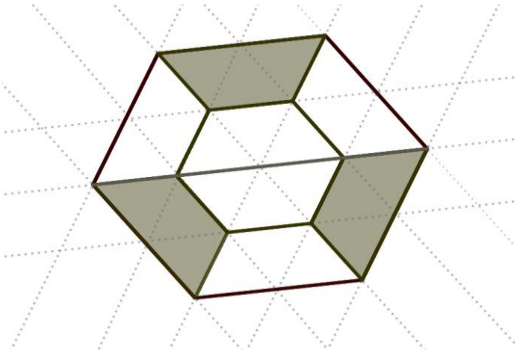
Resp:

g)



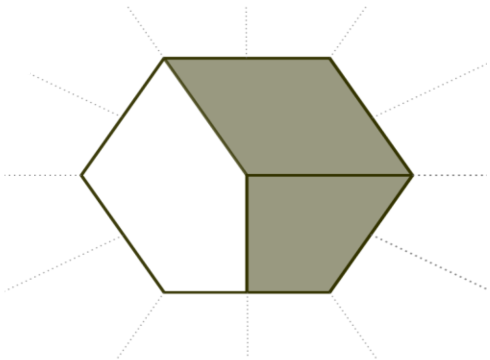
Resp:

h)



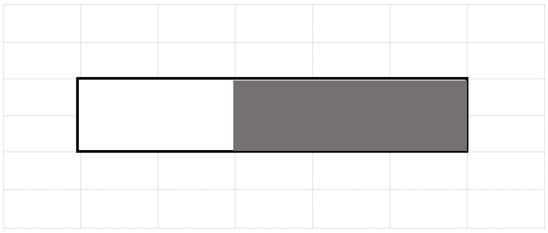
Resp:

i)



Resp:

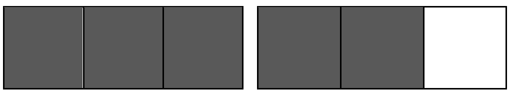
j)



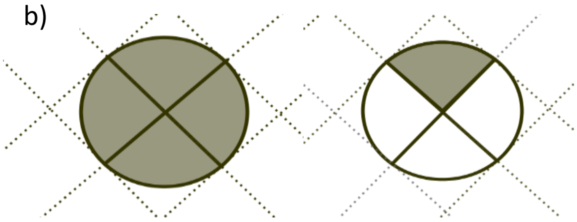
Resp:

2) Escreva a fração que representa as partes escuras em relação ao todo.

a)



b)



Resp:

Resp:

APÊNDICE B

Transcrição da entrevista com o aluno 9_EKA23B ao resolver o instrumento de pesquisa do apêndice A.

Aluno: 9_EKA23B
Escola: EKA

Pesquisadora: 9_EKA23B, como foi que você pensou para escolher escrever essa fração aí?
Aluno: Bom, eu contei cada quadrado, selecionado ou não, então eu olhei os que foram escolhidos, então eu coloquei os que foram escolhidos dentro de uma razão em que o total de retângulos ficam embaixo e os retângulos pintados ficassem em cima.
(Aluno escreve para a letra A, a fração dois sobre sete)
Pesquisadora: Ok, 9_EKA23B.
(O aluno continua respondendo e passa para letra B)
Pesquisadora: E agora?
Aluno: Bom foi basicamente a mesma coisa, só que se fosse colocar por extenso normalmente seria dois sobre oito, só que agora eu simplifiquei porque ficaria mais simples em uma situação mais prática. **(Aluno escreveu a fração já simplificada um sobre quatro)**
Pesquisadora: E você consegue reconhecer essa quantidade aqui na figura?
Aluno: Como assim?
Pesquisadora: Reconhecer essa fração, você consegue me dizer, porque aqui figura **(Pesquisadora aponta para a letra A)** ela corresponde tal qual está aqui, essa figura...
Aluno: Entendi.
Pesquisadora: E essa aqui, você consegue reconhecê-la nessa figura?
Aluno: Sim, um quarto representa essa parte pintada.
Pesquisadora: E onde é que estão os outros?
Aluno: O quarto é toda a parte igual, que no caso seria oito porque são divididos em retângulos menores, só que eu coloquei quarto porque a parte selecionada, seleciona dois retângulos, então eu coloquei um quarto porque a parte selecionada são dois retângulos então seria necessário quatro para preencher todo o espaço.

Pesquisadora: Ok, 9_EKA23B.

(Aluno continua a responder, passa para letra C. Ele faz pequenos riscos na figura)

Aluno: Posso colocar no modo fracionado?

Pesquisadora: Fique à vontade para colocar como você está pensando.

(O aluno escreve a fração vinte e dois sobre quarenta)

Pesquisadora: Agora só explica porque você colocou isso.

Aluno: No caso simplificando seria onze sobre vinte, ms vou deixar vinte e dois sobre quarenta, porque olhando toda a área dá para ver que são cinco quadrados na altura e oito no comprimento, multiplicando um por outro tem a área que são quarenta quadrado, então eu apenas fui contando quantos quadrados completos e os que não, e depois fui vendo quantos estão incompletos e somando para ver quantos seria necessário para completar os quadrados que não estão completos. Então eu peguei os que estão completos e coloquei já aqui e peguei os que estavam incompletos somei todos e dei um aproximado para sair um resultado exato aqui, então somei com as partes que já estavam completas. **(O aluno aponta sempre para a figura)**

Pesquisadora: Ok.

(Aluno resolve a questão D)

Pesquisadora: E agora, como foi que você viu isso aí?

Aluno: Bom, foi basicamente a lógica da letra A e B, eu vi todos os retângulos que tinham ao todo e olhei quantos estavam pintados, e foram dois pintados e seis no total, mas isso aqui dá para simplificar e colocar em um terço, porque seria necessário três do total que foi selecionado para completar toda a área selecionada ou não.

Pesquisadora: Ok, 9_EKA23B.

(O aluno passa a responder a letra E)

Pesquisadora: Então como foi que você fez?

Aluno: Eu fiz quase a mesma coisa que a da C, a diferença é que aqui tinha menos, aqui eram retângulos, e aqui era uma quantidade menor. Eu olhei quantos retângulos já estão completos, e olhei também os que estavam incompletos, e reparei que os que estavam incompletos estavam exatamente pela metade, então o resultado é exato, já que se pegar a metade de um e a outra metade vai acabar dando um exato, e aqui foi metade e metade **(Aluno mostra na figura o que explica)** então igual a um, como mais uma metade e outra metade é dois. Então tinha dois inteiros e dois no total quando somasse os separados, então foram quatro(4) por dezesseis (16), já que aqui a área no total tem quatro de altura e quatro de largura ou de comprimento, e isso dá um área de dezesseis retângulos sabendo que quatro deles estavam pintados eu apenas coloquei quatro de dezesseis e simplifiquei que deu um quarto.

Pesquisadora: EKA23B, você reconhece esse um quarto aí na figura?

Aluno: Sim, esse aqui que foi pintado com a cor escura. **(Aluno mostra o que respondeu na imagem, depois passa a responder a letra F)**

Pesquisadora: Ok, 9_EKA23B. Como foi que você pensou?

Aluno: Bom foi quase a mesma coisa, só que aqui foi algo um pouco **(Pausa)**.É, na verdade foi a mesma coisa que eu fiz na C e na E, eu olhei para o que estavam incompletos e juntei com os que estavam completos **(o aluno se refere aos retângulos encontrados ao particionar a figura usando o suporte)**. Mas aqui, diferente da C e da E o que está do lado não completa. Na verdade completa e ainda sobra uma parte se eu tentar completar o que está do lado. Então eu procurei a parte menor e tentei imaginar juntando aqui, aqui pode não ficar exatamente **(Aluno risca a figura)** no desenho, mas eu sei que essa parte completa perfeitamente essa aqui (**Aluno aponta para a figura a que se refere o que fez)**, então logo que é um triângulo equilátero ou não, na verdade não já que que a base é maior, sabendo que um lado, sabendo exatamente que é dois retângulos aqui de base, então se um lado completou esse lado, se esse triângulo pequeno completou esse retângulo, então pela lógica já que o outro lado também é igual, essa parte vai completar esse retângulo, eu cheguei à conclusão que aqui haviam dois retângulos preenchidos, e aqui já estava feitos que são quatro retângulos preenchidos. E para chegar no denominador eu olhei a área, quatro retângulos de altura vezes quatro retângulos, que deu dezesseis, então simplifiquei, aqui tinham dois e aqui tinham quatro, eu coloquei seis (6) sobre dezesseis (16), então simplifiquei por dois que deu três (3) sobre oito (8).

Pesquisadora: Ok, e essa nova fração que você encontrou, teria como, você reconheceria ela nessa figura?

Aluno: Como assim?

Pesquisadora: Teria como você apontar quem são as três partes de oito na figura ou você só consegue reconhecer simplificando?

Aluno: Ah sim, você está perguntando quais partes eu conheço usando essa fração **(Aluno aponta para a fração que escreveu simplificada: três sobre oito).**

Pesquisadora: Se essa fração **(Professora aponta para a fração simplificada**) você consegue reconhecer diretamente aqui nessa figura.

Aluno: Ah sim, os três oitavos, eu reconheço um oitavo vindo daqui já que eu simplifiquei por dois, e aqui dois dezesseis avos é o triângulo, então já que eu simplifiquei por dois vai ser a metade, então o um seria o um (1) desse três (3) seria o triângulo, e os outros dois (2) que seria o quatro (4), já que na primeira fração é o dobro daqui que é simplificada, o quatro (4) vai ficar pela metade na simplificada, então no caso o restante do dois (2) seria o retângulo que era representado pelo o número quatro do número seis na primeira fração.

Pesquisadora: Ok, 9_EKA23B.

(**O aluno vira a folha e passa a responder a letra G)**

Pesquisadora: E agora?

Aluno: Bom eu olhei quantos triângulos haviam preenchendo o triângulo maior e eu olhei quais estavam selecionados, então eu fui vendo que haviam quatro (4) selecionados, e no total haviam dezesseis (16), já que são quatro partes iguais selecionadas, sendo que apenas essa aqui está de cabeça para baixo **(o aluno mostra o que está falando**), já que tem quatro partes e tem quatro triângulos selecionados, então eu multipliquei quatro por quatro, já que tem quatro partes de quatro triângulos, então cheguei ao resultado de dezesseis e como haviam quatro triângulos selecionados, eu coloquei quatro para indicar os selecionados. E na simplificada eu apenas basicamente ignorei esses triângulos menores e olhei apenas este triângulo (**aluno mostra na figura**), estes triângulos divididos aqui, ignorando os triângulos pequenos.

Pesquisadora: Ok 9_EKA23B.

(**aluno resolve a letra H)**

Aluno: Pronto.

Pesquisadora: Teria uma outra fração que você poderia representar essa mesma quantidade?

Aluno: Não que eu consiga perceber agora.

Pesquisadora: Ok, como foi que você fez para, como foi que você pensou?

Aluno: Eu prestei atenção nos que a forma mostra que são os triângulos, e todos os triângulos são iguais, então eu olhei e percebi que todos, que todas as formas poderiam muito bem ser redesenhadas em triângulos, então eu vi todos os triângulos que foram selecionados, e não vi está figura como essa figura formada no total, apenas os triângulos, então eu olhei os triângulos selecionados que eram um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove (**aluno conta).** Nove(9) triângulos de vinte e quatro(24) triângulos que eu contei ao perceber que este, estás partes selecionadas cada uma tinha três triângulos, então eu percebi que tinha uma, duas, três, quatro, cinco, seis, sete, oito (**aluno conta mostrando o que está se referindo).** Oito partes cada uma indicadas por três triângulos, então eu multipliquei três por oito que deu vinte e quatro (3x8=24) que foi a quantidade total de triângulos, e ao nove, eu cheguei ao nove apenas prestando atenção que cada parte tinha três triângulos, e que tinham três partes selecionadas, multipliquei a quantidade de partes pela a quantidade de triângulos existente em cada parte.

Pesquisadora: Ok, e volto a lhe perguntar você teria uma outra fração que representaria essa mesma quantidade?

Aluno: Não exata.

Pesquisadora: Ok.

Aluno: Espere. **(o aluno escreve três por oito ao lado da outra fração)**

Pesquisadora: Como foi que você fez para encontrar essa nova fração?

Aluno: Eu apenas prestei atenção que todas as partes eram iguais, então pelo o que eu mesmo falei, percebi que tinham essas partes (**aluno mostra**), e que tinham três selecionadas, então já que todas as partes eram iguais, teria sim como criar uma fração inteira, inteira entre aspas já que resultando em um número decimal, já que todas as partes são iguais, individualmente sem contar os triângulos, eu percebi que colocando elas, são exatamente iguais, então eu contei as partes selecionadas individualmente ignorando os triângulos e coloquei elas aqui, então eu prestei atenção em todas as partes iguais selecionadas e não selecionadas, ignorando disso aqui ser hexágono, ignorando que, quer dizer levando em consideração essa linha eu percebi que dava para formar esse hexágono com as duas partes, com duas partes iguais da mesma figura que eu vi. Então eu apenas coloquei individualmente cada parte colocando embaixo e prestando atenção nas partes selecionada em colocando em cima.

Professora. Ok.

(Aluno continua e passa para letra I)

Pesquisadora: Você pode explica 9_EKA23B?

Aluno: Sim, quando eu fiz essa primeira fração eu ignorei essas linhas **(Aluno aponta para as linhas na figura)**, eu apenas imaginei outras linhas, ou melhor, explicando de uma forma que dá para ver na imagem, eu ignorei essas linhas **(O aluno mostra as linhas fora da figura)**, e apenas levei em consideração essas que geram triângulos maiores e que davam para contar individualmente, e percebi que as partes selecionadas eram equivalentes a três triângulos maiores e metade de um deles então eu coloquei três e meio sobre a quantidade de triângulos maiores que representavam ao todo que são seis, já que colocando três triângulos maiores dos que poderiam ser vistos davam para fazer esse hexágono com seis triângulos dos grandes. Então na outra fração que é maior, entre aspas, eu levei em consideração essas linhas aqui **(Aluno volta a mostrar as linhas fora da figura)** que eu havia ignoradas no início, então eu fiz isso apenas para não deixar essa vírgula porque isso atrapalharia numa divisão futura, então eu contei em triângulos menores, na verdade a princípio eu coloquei essa fração não por causa das linhas e sim porque havia esse vírgula cinco (3,5) aqui, então eu multipliquei por dois já que é uma fração equivalente, então eu apenas multipliquei a primeira fração por dois por seria uma fração equivalente e que estaria presente na imagem através das linhas que foram mostradas pela questão.

Pesquisadora: Ok.

(Aluno continua a resolver agora a letra J)

Pesquisadora: Pode me falar como foi que você pensou?

Aluno: Sim, para colocar o número que fica embaixo da fração eu apenas calculei a área como eu fiz em várias outras aqui, multiplicando a altura pela largura, e então eu fui olhando individualmente imaginando os retângulos como se fossem desenhados aqui por retângulos pequenos que já são mostrados na imagem, então eu prestei atenção em quantos já estavam selecionados, apenas multiplicando o que estavam do lado, os da altura e os da largura calculando apenas a área dos selecionados, então ficaram seis selecionados de dez, então simplifiquei para ficar mais simples apenas ignorando essas linhas do meio imaginando quadrados ao invés de retângulos, e ficou ainda um pouco mais simples porque foi apenas imaginar cinco(5) partes ao invés de dez(10), e contar individualmente três(3) de cinco(5) partes.

Pesquisadora: Ok.

(O aluno volta a responder outra questão onde pede para que escreva a fração que representa as partes escuras em relação ao todo)

Aluno: Pronto.

Pesquisadora: Como foi que você pensou?

Aluno: Bom, eu olhei cada quadrado individualmente selecionados ou não, coloquei na parte debaixo, foram seis (6), então eu olhei os que estavam selecionados e coloquei em cima.

Pesquisadora: Ok. 9_EKA23B teria uma outra forma de você representar esta quantidade?

Aluno: Está? **(aluno aponta para a letra B do segundo quesito)**

Pesquisadora: É, quando da letra A, quanto da letra B, teria uma outra forma de você representar numericamente essa fração aí? Colocar uma outra fração que representasse essa mesma quantidades desse inteiros?

Aluno: Eu só consigo pensar em multiplicar a fração, de uma fração equivalente.

Pesquisadora: Faça então.

Aluno: A letra B foi tão simples quanto a A, apenas eu olhei ao todo e vi quantos estavam selecionados.

Pesquisadora: Ok então 9_EKA23B, obrigada.

APÊNDICE C

Transcrição da entrevista com o aluno 3_ERL12C ao resolver o instrumento de pesquisa do apêndice A.

Aluno: 3_3_ERL12C

Escola: ERL

Pesquisadora: Coloca teu nome.

Aluna: Vou colocar.

Pesquisadora: 3_ERL12C, essa letra A que você fez, como foi que você pensou?

Aluna: Eu contei as partes que tinha né.

Pesquisadora: Sim.

Aluna: Que é um inteiro, e peguei as que foram utilizadas, que foram duas (2), e coloquei embaixo o denominador sete (7).

Pesquisadora: Certo. Vamos para a outra.

(Aluna volta a responder a próxima letra)

Pesquisadora: E esse aí, 3_ERL12C?

Aluna: Basicamente a mesma coisa, só que como aqui ela não tá tracejado com alguma coisa eu deveria dividir ela para saber as partes iguais para saber o que pega para fazer a fração.

Pesquisadora: E me diga uma coisa, e nessa letra B você poderia escrever uma fração que representasse essa mesma quantidade? Pesquisadora aponta para a resposta escrita da aluna, 2/8.

Aluna: Acho que sim, se eu simplificar. **(Escreve na folha, $\frac{1}{4}$)**

Pesquisadora: E você consegue ver essa fração que você escreveu aí na figura?

Aluna: Sim, porque aqui é basicamente você simplifica você acha outro resultado.

Pesquisadora: Humrum.

Aluna: Aí você consegue visualizar dentro da imagem.

Pesquisadora: Aí como é que você visualiza na imagem?

Aluna: Esse um quarto é isso aqui praticamente **(aluna aponta para a figura geométrica, sem especificar o 'um quarto'**

Pesquisadora: Hamram, sim.

Aluna: Só que simplificado de dois oitavos.

Pesquisadora: Certo, mais um quarto, o 'um' estaria aonde aí?

Aluna: Na peça inteira, eu acho que nessa peça aqui **(Aluna aponta para a figura geométrica).**

Pesquisadora: E o quatro?

Aluna: Agora você me pegou! **(Aluna permanece um tempo em silêncio, mas volta a falar)**. Eu acho que seria a soma, não, a soma não, eu não sei.

Pesquisadora: Tudo bem, vamos para letra C então.

Aluna: A c eu não fiz.

Pesquisadora: A c fez não?

Aluna: Não.

Pesquisadora: Ok.

(Aluna volta a responder a outra letra)

Pesquisadora: E essa daí como foi que você pensou?

Aluna: Basicamente a mesma coisa, você pega o inteiro, divide ele e ver as parte que estão em negrito ou pintada.

Pesquisadora: Teria uma outra fração que você poderia representar essa mesma quantidade?

Aluna: Fazendo a divisão, a simplificação.

Pesquisadora: Hum.

(**Aluna escreve como seria o que falou)**

Pesquisadora: E você reconheceria esse novo valor ali na figura?

Aluna: Acho que não, acho que teria a mesma dificuldade dessa daqui. (**Mostra a questão anterior na qual apresentou a dificuldade mencionada na sua fala)**

Pesquisadora: Tá ok então, vamos para letra E.

(Aluna volta a responder)

Aluna: Essa daqui eu também não sei. **(Mostra a letra F da atividade)**

(Aluna resolve a letra F, traçando linha na figura)

Pesquisadora: Então como foi que você pensou?

Aluna: Essa aqui também não deu, porque não completou aqui **(Mostra o que fez)**, aí eu coloquei cinco, porque no caso colocaria seis mais aqui não completou o quadrado inteiro e aí eu não sei como é que eu representaria. E aí através dos quadriculados, eu peguei esse para saber em quantas partes do inteiro tá partindo para poder saber qual é o denominador.

Pesquisadora: Ok, e tem uma outra fração aqui que você poderia representar essa mesma quantidade aí?

Aluna: Só simplificando. (**Escreve como pode simplificar)**

Pesquisadora: Você consegue reconhecer essa fração agora na figura?

Aluna: Sim.

Pesquisadora: Então me mostra.

Aluna: Aqui seria um inteiro, que ele pegou, que seria o um de quatro partes. **(Aluna mostra a sua visão da figura)**

Pesquisadora: Ok.

Aluna: Posso virar?

Pesquisadora: E voltando para cá **(Aponta para letra B)**, essa fração você não consegue não reconhecer ali?

Aluna: Não.

Pesquisadora: Nem a outra né? Você consegue reconhecer?

Aluna: Não.

Professora. Tudo bem, tem uma outra função que represente essa quantidade?

Aluna: Seria um quarto né.

Pesquisadora: E você reconhece essa quantidade na figura?

Aluna: Acho que sim, porque aqui forma um triângulo, de quatro triângulos desenhados aqui **(Aponta para a imagem)**, dessas partes aqui, e aí formaria os quatros triângulos né. E aí seria a parte tomada de quatro.

Pesquisadora: Ok.

Aluna continua a resolver as questões.

Pesquisadora: 3_ERL12C essa fração, você consegue ver ela aqui?**(Aponta para imagem)**

(Aluna volta a contar as quantidades na figura)

Aluna: Sim, as oito partes aqui em negrito fazem a divisão, dá oito pedaços, e são três tomadas, né. **(Continua a responder)**

Pesquisadora: Como foi que você fez aí?

Aluna: É eu usei o pontilhado, com ajuda do pontilhado para saber como faz para dividir em partes. Posso ir para a próxima?

Pesquisadora: Pode. Você consegue ver essa mesma quantidade na figura?

Aluna: Sim, são três partes tomadas de cinco né, três do cinza, e cinco do inteiro. Posso continuar?

Pesquisadora: Sim.

(A aluna volta a responder outra questão onde pede para que escreva a fração que representa as partes escuras em relação ao todo)

Pesquisadora: Ok, 3_ERL12C como foi que você para achar essa ilustração?

Aluna: Quando tem um inteiro e preciso de mais e tenho que fazer uma imagem igual para poder pegar a quantidade que eu necessito, que eu preciso. E aí eu vou conservar a quantidade da minha forma, nesse aqui foi três, e peguei cinco.

Pesquisadora: Obrigada.

APÊNDICE D

Transcrição da entrevista com o aluno 9_EKA24B ao resolver o instrumento de pesquisa do apêndice A.

Aluno: Aluno 9_EKA24B

Escola: EKA

Pesquisadora: 9_EKA24B, como foi que você fez essa questão, o que você encontrou esses valores?

Aluno: Na A?

Pesquisadora: Na letra A.

Aluno: Primeiro eu olhei os dois que está pintado, e os restos vazio, aí eu contei todos e coloquei embaixo, os sete, e os dois pintados em cima o valor.

Pesquisadora: Ok.

(O aluno volta a responder a outra questão, enquanto a pesquisadora observa)

Pesquisadora: E isso aí como foi que você pensou?

Aluno: Eu pensei que se fazer em quadrado não vai dá, aí eu dividi em triângulo.

Pesquisadora: Pode riscar a figura, pode riscar sem problema nenhum.

(O aluno risca a imagem)

Aluno: No meio.

Pesquisadora: Isso dividiu em triângulo e...? E como foi que você achou esse valor?

(Aponta para a resposta do aluno)

Aluno: Eu olhei os triângulos divididos...

Pesquisadora: Os dois.

Aluno: E os dois em branco.

Pesquisadora: E essa quantidade aqui? **(Pesquisadora novamente aponta para resposta do aluno)**

Aluno: É o valor de todos, e o de cima é só o valor dos que estão pintados.

Pesquisadora: Ok. Quer fazer a B?

(Aluno responde)

Pesquisadora: E então como foi que você pensou?

Aluno: A ‘’B’’ eu dividi por igual, como já está dividido aqui, aí eu só fiz passar a linha para dividir.

Pesquisadora: Pode passar a linha.

(Aluno traça a linha onde ele indicou que fez a divisão)

Pesquisadora: Passar uma linha imaginária na verdade, né.

Aluno: Foi.

Pesquisadora: Agora eu notei que aqui você escreveu com um traço de fração e aqui, e aqui você não está escrevendo com o traço de fração. **(Aponta para as resposta do aluno)**

(Aluno passa o traço de fração nas suas respostas anteriores)

Pesquisadora: Ok.

(**Aluno volta a responder)**

Pesquisadora: E aí, como foi que resolveu?

Aluno: Essa daqui eu olhei para o que já está dividido.

Pesquisadora: Certo. E teria uma outra fração aqui que representaria essa mesma quantidade? Existiria para você uma outra fração, que você poderia escrever aqui que representasse essa mesma quantidade? **(Aponta para a figura e questiona ao aluno)**

Aluno: **(Pensa por alguns instantes)** Acho que não.

(Aluno volta a responder)

Pesquisadora: Ok então, pode ir para letra E. E aí como foi que você pensou?

Aluno: A ‘’E’’ porque já está dividido, só que os triângulos não são iguais né, aí eu deixei assim mesmo.

Pesquisadora: Ok, então vamos para ‘’F’’.

Aluno: A ‘’F’’ eu divido em triângulos tudo, para deixar igual. **(Traça linhas dividindo a figura).**

Pesquisadora: É voltando só um pouquinho esse valor que você colocou aqui em cima corresponde ao que 9_EKA24B?

Aluno: Porque tem dois triângulos que já está pintado, esse aqui fica metade e metade **(Mostra a figura)**, aí eu junto. Aí dá o três.

(Aluno continua a resolver as questões)

Pesquisadora: Nessa resposta poderia existir uma outra fração que correspondesse a essa mesma quantidade pintada em relação ao toda da figura?

Aluno: Só se eu facilitar né, dividir por dois, para diminuir o valor.

Pesquisadora: Então como seria se você fizesse isso?

Aluno: Eu dividiria por dois o quatro e o dezesseis, aí ficava dois oitavos.

Pesquisadora: Poderia, pararia aí ou existiria uma outra fração que também representaria essa mesma quantidade.

Aluno: Acho que pararia aí.

Pesquisadora: E você consegue ver essa quantidade (**Mostra na atividade)**, isso aqui na figura?

Aluno: Só se eu dividir por dois, para facilitar.

Pesquisadora: Como?

Aluno: Dividindo por dois.

Pesquisadora: Essa daqui como você já fez?

Aluno: Sim.

Pesquisadora: Mas essa quantidade aqui dois sobre oito, você consegue visualizar aqui na figura como você visualizou o quatro sobre dezesseis?

Aluno: Não.

Pesquisadora: Ok.

(Aluno volta a responder)

Pesquisadora: O que foi que você fez, 9_EKA24B?

Aluno: Eu dividi, porque esse daqui não tá a mesma coisa que esse, eu só fiz traçar as linhas como está aqui em cima.

Pesquisadora: Do jeito que você traçou agora, o que isso é... Você traçou para que ele fique de que forma?

Aluno: Para dividir tudo e ficar o valor igual.

Pesquisadora: Certo.

Aluno: O valor certo.

Pesquisadora: Para escrever esse valor de cima você fez o quê?

Aluno: Só fiz contar o que já estão pintados.

Pesquisadora: E o de baixo?

Aluno: Todas.

Pesquisadora: Ok.

(Aluno continua a responder)

Pesquisadora: Você poderia dizer agora o que foi que você fez?

Aluno: Aqui eu botei os pintados, e eu não dividi nos triangulozinho porque tá tudo em formatos iguais.

Pesquisadora: Ok. Como foi que você fez agora, 9_EKA24B?

Aluno: Aqui eu dividi pela linhazinha que está traçada já, só fiz dividir, botar o todo embaixo e os que estão pintados em cima.

Pesquisadora: E existe uma outra fração que você possa representar essa mesma quantidade?

Aluno: Só se eu dividir os dois valores por dois.

Pesquisadora: Fazendo isso como é que fica?

Aluno: Aí o seis ficaria três, e o dez, cinco, fica três quintos.

Pesquisadora: Três quintos, e você reconheceria essa fração três quintos aqui na figura?

Aluno: Na figura?

Pesquisadora: Sim, teria como você apontar quem são os três quintos na figura?

Aluno: Se eu não traçasse taria no meio. Aí ficava os três quintos.

Pesquisadora: Ok.

(O aluno volta a responder outra questão onde pede para que escreva a fração que representa as partes escuras em relação ao todo)

Aluno: No caso aqui daria um inteiro, né?

Pesquisadora: É. Aluno e aí se fosse para escrever uma fração só que representasse essa duas, essa quantidade total aqui. **(Aponta como o aluno deve observar)** Como é que você escreveria?

Aluno: Cinco sextos.

Pesquisadora: Você pode escrever aí?

Aluno: **(Escreve)** Botar do lado de fora ou dentro?

Pesquisadora: Pode ser dentro mesmo. Ok, e a letra B?

Aluno: Aqui é o inteiro também, né. **(Responde a questão de acordo com as figuras)**

Pesquisadora: Humrum. E como é que você escreveria isso em uma fração só?

Aluno: Escreveria cinco oitavos.

Pesquisadora: Você pode colocar aí do lado.

(**Aluno responde escrevendo na questão)**

Pesquisadora: Cinco oitavos por quê? **(Indaga ao aluno após sua resposta)**

Aluno: Porque iria juntar tudo, aí aqui tem quatro, aqui tem quatro. Aqui os quatro estão pintados e aqui só tem um, aí eu juntava quatro com mais um cinco, quatro com mais quatro dá oito.

Pesquisadora: Ok, 9_EKA24B.

APÊNDICE E

Transcrição da entrevista com o aluno 3_ERL13C ao resolver o instrumento de pesquisa do apêndice A

Aluno: 3_ERL13C

Escola: ERL

Pesquisadora: Pronto 3_ERL13C, dois sétimos né 3_ERL13C?

Aluna: É.

Pesquisadora: Aí, como foi que você fez, diga aí?

Aluna: Tem sete pedaços e dois estão usados, então dois sobre sete. Entendeu?

Pesquisadora: Dois sobre setE, humrum. Certo.

(Aluna volta a responder a próxima questão)

Pesquisadora: E aí 3_ERL13C?

Aluna: Essa aqui, porque são, aqui na verdade não tem oito exatamente, tem sete, só que esse aqui tá meio que ocupando o espaço de dois **(Mostra na imagem o que está falando**), então suponho que seja dois sobre oito.

Pesquisadora: Dois sobre oito, e aqui nessa caso, você poderia escrever essa mesma quantidade que está aqui (**Pesquisadora aponta),** só que com outra fração além de dois oitavos?

Aluna: Olha eu não sou muito boa, mais acho que deve ter, só não estou sabendo como, talvez fique um sobre quatro, num sei.

Pesquisadora: Mas você acha que um sobre quatro representaria essa mesma quantidade?

Aluna: Não sei (**risos).**

Pesquisadora: Pronto, então vamos para letra C.

Aluna: **(Traça um linha na figura)** Aqui acho que faz assim e fica tamanhos iguais, aí eu vou ter dois(2) sobre quatro(4), a mesma coisa daqui **(Aponta para questão anterior)**, como se esse ocupa o espaço de dois.

Pesquisadora: Então, o que preciso, você olhando para essas três figuras que você fez até agora, o que é preciso para você escrever aquela fração, o número de cima é o quê?

Aluna: É o que tá pintado, o que você pegou no caso.

Pesquisadora: Certo, mais aqui nesse caso você precisou dividir essa figura, num foi verdade, você precisou dividir, porque além de ter, além de ser pintado o que ele tem que ter também?

Aluna: Ele tem que ter a mesma proporção, mesmo tamanho.

Pesquisadora: Aqui você acha também que poderia escrever outra fração que representaria a mesma quantidade?

Aluna: Acho que sim, só não sei dizer qual. **(risos**)

Pesquisadora: Não sabe.

(Aluna continua a responder)

Aluna: Essa é a mesma coisa daqui. **(Aponta para a primeira figura que respondeu)**. Essa aqui eu não fiz **(Mostra a letra E)**, essa aqui eu não sei.

Pesquisadora: Não sabe, mas porque você não sabe?

Aluna: Eu não sei como dividir isso, porque na minha cabeça eu estou vendo isso diferente um do outro, e eu não estou sabendo dividir isso para ficar na mesma proporção, então eu não sei**. (Mostra a figura da qual menciona na fala)**

Pesquisadora: Certo.

(Aluna continua a responder, ela traça linha na figura)

Pesquisadora: Certo como foi que você fez para achar o seis?

Aluna: Eu dividi, essa tem quatro aqui, e esse aqui tem esse espacinho que eu acho que é preenchido por esse aqui **(Aponta para o que fez na figura)** aí fica seis, aí no total aqui tem dezesseis. **(Vira a folha e continua a responder).**

(Aluna conta os triângulos na imagem)

Aluna: Espera aí eu estou confusa.

Pesquisadora: Não se preocupa você tem o tempo que você...

Aluna: Pronto, esse aqui é porque é o mesmo tamanho, aí eu contei as partes que estão pintadas, e as partes que tem no total.

Pesquisadora: Aí olhando para essa figura você consegue ver é uma outra forma de resolução disso aí? Ou uma outra fração que também representasse essa quantidade?

Aluna: Sim, espera aí. Um sobre quatro, porque esse triângulos aqui tem o mesmo forma aí eu poderia só dividir só quatro e pintar só um.

Pesquisadora: Hum. Certo, então poderia ser um sobre quatro, ok.

(Aluna continua a responder)

Aluna: Essa aqui é a mesma coisa, tem o mesmo tamanho, mais só tem três pintados, são oito. E pode fazer de outra forma, dividir todas esses negocinhos aqui e contar quantos pintar. **(Mostra na imagem como pode ser feito)**

Aluna: Esse aqui é mesma coisa que tem atrás, e não está muito reto mais eu acho que tem o mesmo tamanho, então ...

Pesquisadora: Ok.

Aluna: Tá bom (**risos)**

Pesquisadora: Não não, deu para entender.

(A aluna volta a responder outra questão onde pede para que escreva a fração que representa as partes escuras em relação ao todo)

Pesquisadora: E isso daqui, por quê?

Aluna: Bom isso eu perguntei a outro professor quando o de cima tá maior, aí ele ensinou que é só você desenhar outra figura igual do lado e pintar o que está sobrando. É isso.

Pesquisadora: Muito Bem

APÊNDICE F

Transcrição da entrevista com o aluno 1_ERL25C ao resolver o instrumento de pesquisa do apêndice A

Aluno: 1_ERL25C

Escola: ERL

Pesquisadora: Ok, 1_ERL25C essa letra A como foi que você fez para responde-la?

Aluno: Aqui tem sete e só dois são pintados, então dois de sete. **(o aluno aponta para o que está falando, ele continua resolvendo, passa para letra B)**

Pesquisadora: E agora 1_ERL25C, como você fez aí?

Aluno: Dois aqui **(o aluno traça uma linha na figura na parte que está pinta),** de oito.

Pesquisadora: Ok, e nessa letra B 1_ERL25C teria alguma outra fração que representasse essa mesma quantidade que tá aí marcada, existiria uma outra fração também que você poderia colocar aí?

(O aluno passa alguns minutos em silêncio observando a questão)

Aluno: Aqui poderia ser um só **(Aponta para parte pintada)**

Pesquisadora: Sim...

Aluno: De sete.

Pesquisadora: De sete? Será? Poderia ser também um de sete?

(Aluno fica um tempinho em silêncio e diz)

Aluno: Não, acho que não dá certo.

Pesquisadora: Tá ok, tudo bem, vamos para letra C.

(Aluno volta a responder)

Pesquisadora: Certo, como foi que você pensou aí?

Aluno: Eu pensei assim, divide aqui no meio **(Faz um traço pequeno).**

Pesquisadora: Pode fazer o traço sem problema.

(Aluno faz o traço na imagem)

Aluno: Divide em quatro. **(Conta as partes)**, e aqui as duas que tá pintada.

Pesquisadora: E mais uma vez eu pergunto: Teria uma outra fração que você poderia representar ao invés de ser dois de quatro? Você consegue ver de alguma?

(Aluno observa em silêncio por algum tempinho, e não responde a indagação da professora)

Pesquisadora: Tá, tudo bem então vamos para letra D.

Aluno: Aqui tem seis , e peguei dois.

Pesquisadora: E tem outra fração, você ver outra fração?

(**Aluno fica em silêncio)**

Pesquisadora: Então vamos para letra E.

Aluno: Aqui eu dividi para ter oito e peguei o pintado, e dei o resultado. **(Escreve dois sobre oito como resposta)**

Pesquisadora: Mais uma vez eu pergunto: Teria uma outra fração, um a outra fração que poderia representar essa mesma quantidade?

(Aluno fica em silêncio)

Pesquisadora: Então vamos para letra F.

(Aluno observa a imagem e conta depois escreve sua resposta, e faz traço na figura)

Pesquisadora: E essa, 1_ERL25C, como foi que você pensou?

Aluno: Aqui e peguei esses quadrados, e pensei que tivesse dezesseis, porque tá pintado assim, **(Aponta para figura, depois continua traçando linhas)**, aí um, dois, três, quatro, cinco, seis.

Pesquisadora: Ok.

(O aluno vira a folha e continuar resolvendo as questões, agora a letra G)

Pesquisadora: Teria uma outa fração que você poderia representar essa quantidade aí?

(Aluno fica novamente em silêncio e não responde, passando para próxima letra, a letra H)

Pesquisadora: Como foi que você fez isso aí, 1_ERL25C?

Aluno: Eu cortei assim **(Mostra como se tivesse feito traços dividindo a figura)**, aí contei de um em um. Aqui deu vinte e quatro, e nove são os pintados.

(Continua a responder, passando para letra I. Primeiro ele escreve sete sobre 12, depois traça linhas na figura. Em seguinte passa a responder a letra J).

Pesquisadora: Se você sentir necessidade de riscar a figura, pode riscar antes de colocar a fração tá, não tem nenhum problema.

(Aluna observa a figura da letra J e escreve seis sobre dez, depois risca a figura)

Pesquisadora: Como foi que você fez aí?

Aluno: Cortei tudo em dez e peguei os seis pintados.

Pesquisadora: Teria uma outra fração que você poderia representar? Um outra fração que você poderia representar a mesma quantidade?

(Aluno fica em silêncio e observa)

Pesquisadora: Você pode escrever a fração, pretencialmente diferente, mais que represente a mesma quantidade?

(O aluno fica em silêncio mais depois escreve a fração quatro sobre dez)

Pesquisadora: Qual foi a relação que você fez aí?

Aluno: Peguei os quatro de dez **(Aponta para os quatros quadrado que não estão pintados)**

Pesquisadora: Mas que represente a mesma quantidade em relação as partes pintadas? Seria como?

Aluno: Não.

Pesquisadora: Não, tudo bem.

(O aluno volta a responder outra questão onde pede para que escreva a fração que representa as partes escuras em relação ao todo)

Aluno: **(Escreve na primeira letra a fração cinco sobre seis).** Cinco de seis ao todo.

Pesquisadora: Você pegou todas as partes?

Aluno: Sim isso. **(Continua a responder a próxima letra)**

Aluno: Quatro mais quatro que dá oito **(Aponta para as figuras),** e os pintados cinco.

Pesquisadora: 1_ERL25C, só mais uma pergunta, você falou para mim que aqui **(Professora vira a folha e aponta para letra)** seria de sete depois disse não, não pode. Por que não pode? Você não disse a fração sete, por que não representaria, porque você depois disse que não pode, não dá certo?

Aluno: Porque esse aqui é maior do que todos.

Pesquisadora: Ok, só isso mesmo.

ANEXO A

AUTORIZAÇÃO

Eu,____, portador(a) do RG_____________________________, diretor(a) da Escola ____, venho por meio desta, autorizar a realização, nesta Unidade de Ensino, da pesquisa da doutoranda Fernanda Andréa Fernandes Silva, intitulada **"Graus de não congruência semântica nas conversões entre registros de representações semióticas dos números racionais"**, sob a orientação do Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos, do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE.

Declaro estar ciente de que para esta pesquisa será feita coleta de dados com alunos da referida Escola. O material coletado será de uso exclusivo do projeto de pesquisa para fins acadêmicos, e o nome dos estudantes será mantido em sigilo para preservação da identidade dos sujeitos pesquisados. Além disso, não será feita menção ao nome da Escola, sendo usado um nome fictício de modo a preservar a identidade institucional.

Atenciosamente,

____

Diretor(a)

(Assinatura sob carimbo)

ANEXO B

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título da Pesquisa: "**Graus de não congruência semântica nas conversões entre registros de representações semióticas dos números racionais**"

Pesquisadora: Fernanda Andréa Fernandes Silva

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

O(A) aluno(a)____está sendo convidado(a) a participar desta pesquisa que tem como objetivo propor uma categorização para os graus de não congruência semântica entre as conversões, tendo como registro de partida o geométrico bidimensional e, como registro de chegada, o simbólico fracionário dos números racionais.

Ao participar deste estudo o aluno(a) permitirá que o pesquisador realize seu trabalho. O(A) aluno(a) tem liberdade de se recusar a participar ou ainda se recusar a continuar participando em qualquer fase da pesquisa, sem qualquer prejuízo para o mesmo. Sempre que quiser, poderá pedir mais informações sobre a pesquisa através do telefone da pesquisadora do projeto.

A participação nesta pesquisa não traz complicações legais. Os procedimentos adotados nesta pesquisa obedecem aos Critérios da Ética em Pesquisa com Seres Humanos conforme Resolução no. 196/96 do Conselho Nacional de Saúde. Nenhum dos procedimentos usados oferece riscos à sua dignidade.

As informações coletadas neste estudo serão estritamente confidenciais. Somente a pesquisadora e o orientador terão conhecimento dos dados.

A participação nesta pesquisa não dará ao(à) aluno(a) nenhum benefício direto. No entanto, acreditamos que este estudo contribuirá com a aprendizagem dos números racionais, visto que trará informações importantes sobre conceitos associados as transformações entre as representações semióticas nesse campo numérico. Este estudo será publicado em congressos e revistas nacionais e internacionais e, além disso, a pesquisadora se compromete a divulgar os resultados obtidos aos participantes da pesquisa.

O(A) aluno(a) não terá nenhum tipo de despesa para participar desta pesquisa, bem como nada será pago por sua participação.

Após estes esclarecimentos, solicitamos o seu consentimento de forma livre para que o menor sob sua responsabilidade participe desta pesquisa. Portanto preencha, por favor, os itens que se seguem:

Confiro que recebi cópia deste termo de consentimento, autorizo a execução do trabalho de pesquisa e a divulgação dos dados obtidos neste estudo.

Tendo em vista os itens acima apresentados, eu, de forma livre e esclarecida, manifesto meu consentimento em autorizar que o(a) aluno(a) constante neste termo participe da pesquisa.

Nome e Assinatura do responsável pelo Participante da Pesquisa

---

Fernanda Andrea Fernandes Silva

Pesquisadora: Fernanda Andréa Fernandes Silva, RG 706.085, TELEFONE PARA CONTATO: (82) 98820-0029

E-mail:fernandaandrea@ig.com.br

Orientador: Marcelo Câmara dos Santos, TELEFONE PARA CONTATO: (81)

988342050

E-mail: marcelocamaraufpe@yahoo.com.br

ANEXO C

AUTORIZAÇÃO DOS PAIS OU RESPONSÁVEIS

Fui convidado(a) a autorizar a participação do menor sob minha responsabilidade como voluntário(a) dessa pesquisa, tendo sido suficientemente informado(a) segundo o que li e o que me foi explicado a respeito da mesma. Ficaram claros os propósitos do estudo, as garantias de confidencialidade e de esclarecimentos permanentes bem com o fato de que a participação na pesquisa é isenta de despesas.

Eu, ____, autorizo voluntariamente o menor sob minha responsabilidade a participar deste estudo e poderei retirar o meu consentimento a qualquer momento, antes ou durante o mesmo, sem penalidades ou perda de qualquer benefício que eu possa ter adquirido com a minha participação neste estudo.

Assinatura do responsável:

____

RG:______________________

Declaro que obtive de forma apropriada e voluntária o Consentimento Livre e Esclarecido deste colaborador para a participação neste estudo.

Assinatura do pesquisador responsável pelo estudo

____

Maceió, ___/___/___ .

ANEXO D

Termo de Anuência

Prezado Estudante,

Você está sendo convidado a participar de uma pesquisa que tem como objetivo propor uma categorização para os graus de não congruência semântica entre as conversões, tendo como registro de partida o geométrico bidimensional e, como registro de chegada, o simbólico fracionário dos números racionais.

Ao participar deste estudo o(a) Sr.(Sra.) permitirá que o pesquisador realize seu trabalho. O(A) Sr(Sra.) tem liberdade de se recusar a participar e ainda se recusar a continuar participando em qualquer fase da pesquisa, sem qualquer prejuízo para o(a) Sr.(Sra.). Desta forma, sempre que quiser, poderá pedir mais informações sobre a pesquisa através do telefone da pesquisadora do projeto.

A participação nesta pesquisa não traz complicações legais. Os procedimentos adotados nesta pesquisa obedecem aos Critérios da Ética em Pesquisa com Seres Humanos conforme Resolução no. 196/96 do Conselho Nacional de Saúde. Nenhum dos procedimentos usados oferecem riscos à sua dignidade.

Os sujeitos participantes da pesquisa terão sua identidade preservada, não sendo identificados. Os dados coletados serão utilizados exclusivamente para a pesquisa de responsabilidade de Fernanda Andréa Fernandes Silva, sob a orientação do Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos, intitulada: “Graus de não congruência semântica nas conversões entre registros de representações semióticas dos números racionais”.

Obrigada.

____

Nome do Estudante