L'UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2

LYON France

École Doctorale ED485 EPIC [Éducation, Psychologie, Information et Communication] en Sciences de l'Éducation.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PPGEC

Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade

Les concepts de mesures de tendance centrale et de dispersion dans la formation statistique en lycée au Brésil et en France. Approche exploratoire dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie de champs conceptuels

Os conceitos de Medidas de Tendência Central e de Dispersão na Formação Estatística no Ensino Médio no Brasil e na França. Abordagem Exploratória no Quadro da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria dos Campos Conceituais

Volume I

Recife, 2013

Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade

Les concepts de mesures de tendance centrale et de dispersion dans la formation statistique en lycée au Brésil et en France. Approche exploratoire dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie de champs conceptuels

Os Conceitos de Medidas de Tendência Central e de Dispersão na Formação Estatística no Ensino Médio no Brasil e na França. Abordagem Exploratória no Quadro da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria dos Campos Conceituais

Volume I

Thèse en cotutelle dans le cadre des conditions requises pour l'obtention du titre de docteur en Sciences de l'Éducation à l'Université Lumière Lyon2

Tese em cotutela como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Ensino de Ciências pela Universidade Federal Rural de Pernambuco

Directeur de thèse (orientador) de l'Université Lumière/Lyon2:
Jean-Claude Régnier.

Orientadora (directrice de thèse) da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE): Anna Paula de Avelar Brito Lima

Recife, 2013

Ficha catalográfica

A553c Andrade, Vladimir Lira Veras Xavier de
Os conceitos de medidas de tendência central e de dispersão na formação estatística no ensino médio no Brasil e na França. Abordagem exploratória no quadro da teoria antropológica do didático e da teoria dos campos conceituais = Les concepts de mesures de tendance centrale et de dispersion dans la formation statistique en lycée au Brésil et en France. Approche exploratoire dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie des champs conceptuels / Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade. – Recife, 2013.
2 v. (233; 315 f.) : il.

Orientadores: Anna Paula de Avelar Brito Lima e Jean-Claude Régnier.
. Tese em co-tutela (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Educação e L'Université Lumière Lyon 2 (Doutorado em Sciences de l'Éducation). Recife, 2013.
Referências.

1. Medidas de tendência central e de dispersão 2. Transposição didática 3. Teoria antropológica do didático 4. Teoria dos campos conceituais 5. Ensino médio I. Lima, Anna Paula de Avelar Brito, orientadora II. Régnier, Jean-Claude, orientador III. Título

CDD 507

FOLHA DE APROVAÇÃO

Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade

Les concepts de mesures de tendance centrale et de dispersion dans la formation statistique en lycée au Brésil et en France. Approche exploratoire dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie de champs conceptuels

Os conceitos de Medidas de Tendência Central e de Dispersão na Formação Estatística no Ensino Médio no Brasil e na França. Abordagem Exploratória no Quadro da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria dos Campos Conceituais

Thèse en cotutelle dans le cadre des conditions requises pour l'obtention du titre de docteur en Sciences de l'Éducation à l'Université Lumière Lyon2

Tese em cotutela como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Ensino de Ciências pela Universidade Federal Rural de Pernambuco

Orientador (directeur de thèse) Directeur de thèse de l'Université Lumière/Lyon2:
Jean-Claude Régnier:

Orientadora (diretora de tese) da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE):
Anna Paula de Avelar Brito Lima

Defendida e aprovada em: 13 de novembro de 2013.

Banca examinadora

____

Profa. Dra. Anna Paula DE AVELAR BRITO LIMA
Presidente/1ª examinadora/orientadora UFRPE
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

____

Prof. Dr. Jean-Claude RÉGNIER
2º examinador/orientador Université Lumière Lyon 2
Instituição: Université Lumière Lyon2

____

Profa. Dra. Mônica Maria LINS SANTIAGO
3ª examinadora interna
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

____

Profa. Dra. Nadja Maria ACIOLY-RÉGNIER
4ª examinadora interna
Instituição: Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

____

Prof. Dr. Jorge Tarcísio DA ROCHA FALCÃO
5º examinador externo
Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

____

Prof. Dr. Saddo AG ALMOULOUD
6º examinador externo
Instituição: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer as inúmeras oportunidades que tive na vida, da família que tenho, das pessoas que conheci, das oportunidades que me foram dadas em um mundo com tantos problemas sociais. Essas oportunidades propiciaram o caminho que trilho hoje. Este caminho almejado também é fruto do desejo de trilhá-lo que corresponde a uma escolha de vida que envolve a vontade e o prazer por ensinar e pesquisar. Destaco por outro lado a responsabilidade social deste caminho trilhado.

Agradeço à Anna Paula de Avelar Brito Lima, uma grande orientadora e querida amiga, que desde que nos conhecemos sempre me norteou no caminho das pesquisas. Agradeço pela sua grande paciência e por tudo que tive a oportunidade de aprender com você, não apenas para a tese, mas para a vida. Agradeço também por ter me apresentado a duas pessoas que tenho grande apreço: o professor Jean-Claude Régnier e a professora Nadja Acioly-Régnier.

Ao meu querido orientador e amigo professor Jean-Claude Régnier, por todo o apoio e orientação durante este meu percurso profissional e com quem sempre estou aprendendo algo novo. Essa trajetória, que começou antes da tese na organização/participação de eventos científicos, no debate e realização de pesquisas precedentes. Pelos contatos e percursos profissionais, que me ajudaram a abrir as portas nesta nova etapa da minha vida, que avança no sentido do ensino e da pesquisa e pelas suas obras que foram utilizadas como alicerce para construção da tese.

À professora Nadja Maria Acioly-Régnier que teve um papel muito importante durante o meu percurso, assim como no desenvolvimento desta tese e pelas suas importantes contribuições teóricas, como também pela sua obra que utilizei como referência. Agradeço pelas inúmeras sugestões e orientações para o aperfeiçoamento desta e pelo apoio com quem sempre contei. Agradeço por ter aceitado participar da banca de defesa.

À minha querida esposa, Paula Virgínia Chaves Cabral Andrade e amiga de todos os momentos. Com quem dividimos e compartilhamos juntos o nosso trajeto nesta existência. Pela sua paciência e apoio que sempre teve neste percurso da tese, assim como em outros percursos. Com quem compartilho, lado a lado, nossos sonhos, alegrias e momentos dificéis. Pelo que pude aprender com você, pelas trocas, por tudo, o meu agradecimento.

Ao professor Saddo Ag Almoloud pelas inúmeras e pertinentes sugestões fornecidas durante a qualificação que foram muito importantes para o aperfeiçoamento desta tese. Pela suas obras que li e que me auxiliaram na construção da tese. Agradeço também por sua aceitação em participar da minha defesa, pela sua vinda a Recife diante de tantas ocupações profissionais em São Paulo.

Ao professor Jorge Tarcísio da Rocha Falcão, que tive a oportunidade de assistir diversas palestras em eventos científicos, como também de ler seus textos. Que apesar das inúmeras atividades que desenvolve, aceitou participar da defesa, o meu agradecimento.

À professora Mônica Maria Lins Santiago, que apesar das inúmeras atribuições, aceitou participar da banca de defesa, o meu agradecimento.

Agradeço à banca escolhida, formada por pesquisadores altamente qualificados que enobrecem e trazem importantes contribuições à minha pesquisa.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências da UFRPE, com que tive a oportunidade de discutir e ampliar a minha pesquisa, em especial à professora e orientadora, Anna Paula de Avelar Brito Lima, à professora Edenia Maria Ribeiro do Amaral, à professora Heloísa Flora Brasil Nóbrega Bastos (que contribuiu também como minha orientadora no mestrado) e à professora Helaine Sivini Ferreira (professora e coordenadora do programa).

Aos professores da Universidade de Lyon 2 e Lyon 1, com quem tive a oportunidade de expor a minha pesquisa, cursar disciplinas, enquanto aluno de Lyon 2, e participar de eventos científicos e cursos. Em especial ao professor Jean-Claude Régnier, à professora Nadja Acioly-Régnier, ao professor Christian Buty e ao professor Bernard Coutanson, o meu agradecimento.

Ao professor Bernard Coutanson, obrigado pelas inúmeras sugestões, pelas orientações dadas durante os períodos em que estive em Lyon, na França.

Aos membros do grupo ADATIC, coordenado pelo professor Jean-Claude Régnier, com a participação do professor Christian Buty e da professora Nadja Acioly-Régnier, pelas suas inúmeras contribuições e aos colegas de diversos países (Brasil, China, Colômbia, França (Continental e Nova Caledônia), Haiti, Madagascar, Rússia, Senegal, Síria, Tunísia e Uruguai) que participavam do grupo pelas sugestões e apoio.

Aos nossos amigos e pesquisadores que conhecemos em Lyon e que contribuíram em nossa pesquisa, em especial à Núbia Frutuoso, Gimena Perez, Marie Baraud, Paulo Andrade, Cristina Elyote Marques, Sônia Matos e Diane Diaz.

Ao professor Marcelo Câmara dos Santos, pelas contribuições e apoio durante a minha pesquisa de doutorado e desde antes como pesquisador e professor.

Ao nosso colega, professor e pesquisador Abraão Juvencio de Araújo, pelas sugestões e orientações sobre a TAD.

À nossa amiga, professora e pesquisadora Lúcia de Fátima Araújo pelas suas contribuições.

Aos colegas do grupo de pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática pelas sugestões e contribuições.

Aos nossos colegas, da primeira turma de doutorado em Ensino das Ciências da UFRPE, Gisela Rodrigues, Kilma Lima, Marcos Barros, Nadja Almeida, Rita Patrícia e Suzane França.

Aos professores e colegas do Departamento de Matemática da UFRPE pelo incentivo em participar do doutorado, em especial, aos professores: Cícero Monteiro de Souza, Marny Pessoa Araújo e Ana Paula Guedes de Andrade.

Ao professor Gérard Leloup pela forma especial com que explora o aprendizado da língua francesa, pelo que aprendi com você.

Ao professor Patrick Chevin pelas contribuições na língua francesa.

À minha querida família que sempre contribuiu na minha formação e incentivou a realização do doutorado. Em especial, à minha querida mãe, Maria José Lira Véras de Andrade, que sempre se preocupou com a minha formação, norteando o caminho para o estudo e em especial à apreciação da arte e da cultura, ensinando a ver que o "essencial é invisível aos olhos" (SAINT-EXUPÉRY). Ao meu pai, José Bonifácio Xavier de Andrade, que desde cedo iniciou a minha entrada no mundo do conhecimento, pelos inúmeros debates criados em casa, junto com os meus irmãos nas mais diversas áreas do conhecimento, e em especial à Sociologia, do qual foi professor da UFPE. Aos meus irmãos, com quem sempre aprendi muito e aos demais membros queridos da minha família.

Aos demais amigos e familiares, que de alguma forma, contribuíram para o caminho que trilhei e não foram citados no meu agradecimento.

Em função de ser aluno da Universidade de Lyon 2 e realizar parte da minha pesquisa na França, tive que me ausentar mais de uma vez do Brasil para desenvolver atividades nesse país. Contei em um período com uma bolsa de apoio da FACEPE e em outro período com uma bolsa da CAPES, fundamentais para o desenvolvimento das minhas pesquisas na França, para participar das atividades enquanto doutorando da universidade de Lyon 2 (cursar disciplinas, participar de seminários etc) e atuar no laboratório ICAR ligado à escola doutoral EPIC 485. Assim, gostaria de agradecer às agências financiadoras:

- FACEPE – Bolsa AMD que custeou uma parte de um período de 2 meses na França.
- CAPES – Bolsa que custeou o período mais longo de 1 ano em que estive na França. Bolsa CAPES – PDSE.

Agradecemos à Universidade Federal Rural de Pernambuco pela liberação para realização do doutorado, em especial ao Departamento de Matemática. Ao magnífico Reitor, na época da assinatura do convênio, Valmar Corrêa de Andrade, pela assinatura do convênio e o apoio para realização do doutorado. Ao professor José Carlos Dubeux, que na época da assinatura do acordo era coordenador das relações internacionais e até pouco tempo Pró-Reitor de pesquisa e pós-graduação, pelo apoio dado e pelo importante papel que exerceu no crescimento e ampliação das relações internacionais na UFRPE.

Agradecemos também o importante apoio da Universidade Lumière Lyon 2, da escola doutoral EPIC 485 e ao conselho Regional Rhône-Alpes.

Agradecemos a Deus por tudo.

RESUMO

A Estatística é importante para a educação científica e cidadã e por essa razão ela é adotada nos programas do ensino fundamental e médio de vários países, entre eles, o Brasil e a França. Dois conceitos fundamentais da estatística descritiva são as medidas de tendência central e de dispersão. Partindo de problemas identificados em diversas pesquisas sobre a aprendizagem dessas medidas na educação básica e em cursos de graduação, propomos como hipótese que existe uma relação entre esses problemas e a forma como esse saber é transposto para o livro didático e os programas. Consideramos também que essas medidas devem ser ensinadas de forma articuladas com a dispersão. Nesse sentido, este estudo tem por objetivo a análise da forma como as medidas de tendência central e de dispersão são apresentadas nos programas e em alguns livros didáticos utilizados no Brasil e na França no ensino médio. Para esta investigação, realizamos uma pesquisa bibliográfica. Apoiamos este estudo em diversos teóricos e pesquisas. Destacando em especial a teoria antropológica do didático e a teoria dos campos conceituais. Entre os resultados produzidos, temos a própria proposta de sistematização da pesquisa pela tese, um capítulo sobre o saber científico relativo às medidas de tendência central e de dispersão e a análise da transposição didática dos programas e dos livros que envolvem uma discussão sobre as características desses elementos no Brasil e na França. Os resultados indicam limitações entre os programas e livros selecionados, o que pode indicar que em parte os problemas indicados, nas pesquisas levantadas, estão relacionados à forma como esse conhecimento é transposto nos programas e livros didáticos.

Palavras-chave: medidas de tendência central e de dispersão; transposição didática; teoria antropológica do didático; teoria dos campos conceituais; ensino médio.

Título: Os conceitos de Medidas de Tendência Central e de Dispersão na Formação Estatística no Ensino Médio no Brasil e na França. Abordagem exploratória no quadro da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria dos Campos Conceituais.

RÉSUMÉ

La statistique est d'une grande importance pour l'éducation scientifique et citoyenne, et a été adoptée pour cette raison dans les programmes des collèges et lycées dans plusieurs pays, parmi lesquels le Brésil et la France. Les mesures de tendance centrale et les mesures de dispersion sont deux concepts fondamentaux de la statistique descriptive. À partir des problèmes identifiés dans différentes recherches sur l'apprentissage des mesures de tendance centrale et de dispersion dans l'enseignement secondaire et supérieur, nous formulons l'hypothèse qu'il existe une relation entre ces problèmes d'apprentissage et la façon dont ce savoir est transposé dans les manuels et les programmes. Nous considérons également que ces mesures doivent être enseignées en articulation avec la dispersion. Dans ce sens, cette étude se propose d'analyser la façon dont les mesures de tendance centrale et de dispersion sont présentées dans les programmes et dans certains manuels scolaires utilisés dans les lycées Brésiliens et Français. L'objet principal de cette recherche a donc été la réalisation d'une recherche bibliographique. Cette étude s'appuie sur un ensemble de recherches et de théories, et en particulier sur la théorie anthropologique de la didactique et la théorie des champs conceptuels. Les résultats produits incluent une proposition de systématisation de notre recherche de thèse, un chapitre sur le savoir scientifique relatif aux mesures de tendance centrale et de dispersion ainsi que l'analyse de la transposition didactique des programmes et des manuels scolaires qui comportent une discussion sur les caractéristiques de ces éléments au Brésil et en France. Les résultats indiquent des limitations parmi les programmes et les manuels scolaires sélectionnés, ce qui peut indiquer que les problèmes mis en évidence dans les recherches étudiées sont en partie liés à la façon dont cette connaissance est transposée dans les programmes et les manuels scolaires.

Mots-clé: mesures de tendance centrale et dispersion; théorie anthropologique du didactique; théorie de la transposition didactique, théorie des champs conceptuel; Lycée.

Titre: Les concepts de Mesures de Tendance Centrale et de Dispersion dans la Formation Statistique en Lycée au Brésil et en France. Approche exploratoire dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique et de la Théorie de Champs Conceptuels

ABSTRACT

The statistic has a great importance in the scientific and civic education, and was adopted for this reason in the programs of middle and high schools in several countries, among which Brazil and France. Central tendency measures and dispersion measures are two fundamental concepts for descriptive statistic. From the problems identified in various researches about learning central tendencies and dispersion in secondary and higher education, we hypothesize that there is a relation between these learning problems and the way this knowledge is transposed in handbooks and school programs. We also consider that these measures must be taught articulated with dispersion. In that sense, this study offers to analyze how central tendency and dispersion measures are presented in some programs and handbooks used in Brazilian and French high schools. The main objet of this research was the realization of a bibliographical research. This study is built on various theories and researches and in particular the anthropological theory of didactics and the theory of conceptual fields. The results produced include the proper proposition of systematization of the thesis research, a chapter about the scientific knowledge related to central tendency measures and dispersion measures as well as the analysis of didactic transposition of the programs and scholar handbooks that include a discussion about the characteristics of these elements in France and Brazil. The results show limitations among the selected handbooks and programs, which points out the problems highlighted in the studies are partly linked to how this knowledge is transposed in programs and handbooks.

Key-words: Central tendency measures and dispersion measures; anthropological theory of didactics; theory of conceptual fields; high schools.

Title: The concepts of central tendency measures and dispersion in Brazilian and French high schools' statistical training. Exploratory approach within the frame of anthropological theory of didactics and conceptual fields theory.

LISTA DE FIGURAS DO VOLUME I

LISTA DE GRÁFICOS DO VOLUME I

LISTA DE QUADROS DO VOLUME I

LISTA DE TABELAS DO VOLUME I

LISTA DE FÓRMULAS DO VOLUME I

LISTA DE PROPRIEDADES SOBRE A MÉDIA ARITMÉTICA

LISTA DE OBSERVAÇÕES SOBRE A MÉDIA ARITMÉTICA

LISTA DE PROPRIEDADES SOBRE A MEDIANA

LISTA DE OBSERVAÇÕES SOBRE A MEDIANA

LISTA DE PROPRIEDADES SOBRE A MODA

LISTA DE OBSERVAÇÕES SOBRE A MODA

LISTA DE PROPRIEDADES SOBRE A AMPLITUDE

LISTA DE PROPRIEDADES SOBRE A VARIÂNCIA

LISTA DE OBSERVAÇÕES SOBRE A VARIÂNCIA

LISTA DE PROPRIEDADES SOBRE O DESVIO PADRÃO

LISTA DE OBSERVAÇÕES SOBRE O DESVIO PADRÃO

LISTA DE PROPRIEDADES SOBRE INTERVALO INTERQUARTIL

LISTA DE OBSERVAÇÕES SOBRE INTERVALO INTERQUARTIL

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IASE	International Association for Statistical Education (Associação Internacional para a Educação Estatística).
INED	Institut national d'études démographiques (Instituto Nacional de Estudos Demográficos – França).
INSEE	Institut national de la statistique et des étude économiques (Instituto Nacional da Estatística e dos Estudos Econômicos - França)
ISI	International Statistical Institute (Instituto Estatístico Internacional)
LD	Livro Didático
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação (Brasil)
MEN	Ministère de l'éducation nationale (Ministério da Educação Nacional/França)
MTCD	Medidas de Tendência Central e de dispersão
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática)
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
OD	Organização didática
OM	Organização matemática
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PCN+EM	Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio
PNE	Plano Nacional de Educação
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PNLEM	Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SFdS	Société Française de Statistique (Sociedade Francesa de Estatística)
TAD	Teoria antropológica do didático
TCC	Teoria dos campos conceituais
TD	Transposição didática

SUMÁRIO DO VOLUME I

INTRODUÇÃO

A nossa preocupação com o ensino, a pesquisa e extensão vêm de mais de uma década enquanto professor e pesquisador de uma universidade federal. No caso mais específico das pesquisas com a estatística, o nosso desenvolvimento nesse rico campo iniciou-se com o professor Jean-Claude Régnier que conheci nas atividades de organização do 2º SIPEMAT em 2008. Nessa ocasião, tivemos também um grande prazer de iniciar um longo período de trabalho com a professora Anna Paula de Avelar Brito Lima e da participação no grupo de pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática. Junto com o professor Jean-Claude Régnier publicamos alguns artigos, frutos de pesquisas em conjunto na área da Didática da Estatística (ANDRADE; RÉGNIER, 2010, 2009a, 2009b). Junto com a professora Anna Paula de Avelar Brito Lima, participamos de diversas atividades, inclusive da organização em conjunto de um livro (ANDRADE, V. L. V. X. de.; ARAÚJO, L. F.; BRITO LIMA, A. P.; LIMA, I. M. da S., 2010) junto ao grupo de pesquisa em Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática, no qual a transposição didática e mais recentemente a teoria antropológica do didático (TAD) vem sendo objeto de investigação, tendo em especial como produto as teses de doutorado de Araújo (2009) e Bessa de Menezes (2010) que utilizamos como referência nesta tese.

Outra questão pertinente é o nosso interesse pelo tema. Em nosso percurso dentro da didática da estatística, observamos algumas pesquisas que apontavam para dificuldades na aprendizagem das medidas de tendência central, pesquisas que envolviam da educação básica ao ensino superior. Esses estudos apresentavam uma análise do processo final da transposição didática que pode ser representado pelos traços dos alunos, ou dito de outra forma, a resposta escrita a questões propostas pelos pesquisadores, o que nos levou a pensar sobre o processo de transposição didática. Então surgiu a ideia de investigá-los em uma pesquisa de doutorado. Outro ponto importante era nortear o caminho desta pesquisa. Nesse sentido, tivemos a sugestão da professora Anna Paula de na investigação sobre a transposição didática das medidas de tendência central e dispersão utilizarmos como aporte teórico a teoria antropológica do didático que fazia parte das discussões do grupo de pesquisa, no Brasil (com a defesa de tese de Araújo em 2009) e de Bessa (2010), no mesmo ano que entrei no doutorado. A teoria antropológica do didático acrescenta em nossas pesquisas elementos teóricos que permitem aprofundar a discussão sobre a transposição didática. Acrescentamos a essa teoria, outra teoria também robusta, que foi a teoria dos campos conceituais utilizada pelo nosso orientador da França e que também veio enriquecer a nossa tese de doutorado. Dessa forma, esses elementos teóricos que dão suporte à pesquisa se entrelaçam num percurso profissional de um professor e pesquisador.

A nossa pesquisa se insere dentro do quadro de uma cotutela, assim temos dois vínculos no doutorado, um no Brasil e outro na França. O primeiro vínculo do doutorado é como aluno do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) e o outro vínculo como aluno da Universidade de Lyon 2, na França, na linha de pesquisa UMR 5191 ICAR (Interações, Corpus, Aprendizagem, Representações) ligada à Escola Doutoral ED 485 EPIC "Educação, Psicologia, Informação e Comunicação". O doutorado em Ensino das Ciências e Matemática da UFRPE é novo, sendo esta tese a primeira defendida no programa. Esse programa foi avaliado pela CAPES em nível 4. Já o ICAR foi avaliado em nível 1 (nível máximo no padrão europeu). O convênio de cotutela é feito de aluno por aluno em uma seleção. Ele é assinado entre os dirigentes de cada universidade (no Brasil, o reitor; e na França, o diretor). Esse acordo de cotutela é o primeiro da Universidade Federal Rural de Pernambuco. Ele obriga o doutorando a participar das atividades nas duas universidades. Assim, durante todo o percurso de doutorado, quando não estava fazendo atividades em uma universidade estava na outra. Ao contrário de um estágio doutoral (chamado de doutorado sanduíche), no qual o pesquisador vai coletar os dados. Na cotutela era necessário participar de diversas atividades como doutorando da universidade francesa Lyon 2, além da coleta de dados. Dessa forma, tivemos um ritmo intenso de atividades que gerou um enriquecimento como professor/pesquisador. Na França tivemos a oportunidade de trabalhar em um grupo de pesquisa com doutorandos de quase todos os continentes. Considerando que um doutorado, muito mais que um produto (uma tese), é um processo que qualifica transformando o doutorando em um pesquisador com mais experiências. A vivência enquanto doutorando em cotutela foi bastante rica, ampliando os nossos conhecimentos e contatos em um mundo globalizado do conhecimento e da pesquisa.

1.1. JUSTIFICATIVA

O tema desta pesquisa se insere dentro da didática da estatística. A Estatística conduz a indagações sobre a natureza do conhecimento científico que procura no lugar de uma "verdade", um conhecimento provisório que possibilite a interação com o mundo, permitindo fazer previsões sobre eventos que venham a ocorrer (ANDRADE; RÉGNIER, 2009a). O espírito estatístico se propõe à "renúncia da utilização sistemática da ideia de verdade para procurar dominar a de 'aparente verdade', de plausibilidade" (RÉGNIER; BRAGA, 2008, p. 3). A formação estatística se faz presente em situações do dia a dia em que são necessárias tomadas de decisões, a correta interpretação de uma informação divulgada pelos meios de comunicações, o planejamento familiar etc. Dessa forma, um maior destaque da estatística na educação básica serve de apoio para o desenvolvimento das competências básicas à formação do cidadão, como também à preparação para estudos posteriores.

O ensino de Estatística tem sido uma preocupação desde a criação do International Statistical Institute (ISI) em Londres, em 1885. Em 1948, o ISI cria um comitê específico para a educação que visava formar e criar um número suficiente de técnicos em estatística (BATANERO, 2001). Em 1991, a ISI cria o IASE (International Association for Statistical Education), uma das preocupações do IASE é com o ensino de estatística em qualquer nível de escolaridade (BATANERO, 2001).

A crescente importância da estatística na formação básica, como também a atuação de diversas instituições, como as citadas sobre o ensino de estatística, levou a um crescimento dessa área, inclusive na educação básica. Podemos observar isso em 1980, quando o National Council of Teachers of Mathematics (NTCM) dos Estados Unidos apresentou um conjunto de orientações para o ensino de Matemática no documento "agenda para a ação". Essas recomendações tiveram uma influência em reformas que ocorreram no mundo. Entre os pontos de convergência dessa reforma, temos a "importância de trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo já no ensino fundamental, por exemplo, elementos de estatística, probabilidade e combinatória, para atender a demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos" (BRASIL, 1998, p.20).

Essas orientações se refletem na proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que organizam os conteúdos do ensino fundamental em quatro grandes blocos. A estatística é representada pelo bloco **tratamento da informação**. A inclusão desse bloco é destacada como forma de "evidenciar sua importância, em função de seu uso atual na sociedade". Esse documento destaca ainda a importância para "calcular algumas medidas estatísticas como média, mediana e moda com o objetivo de fornecer novos elementos para interpretar dados estatísticos" (BRASIL, 1998, p.52).

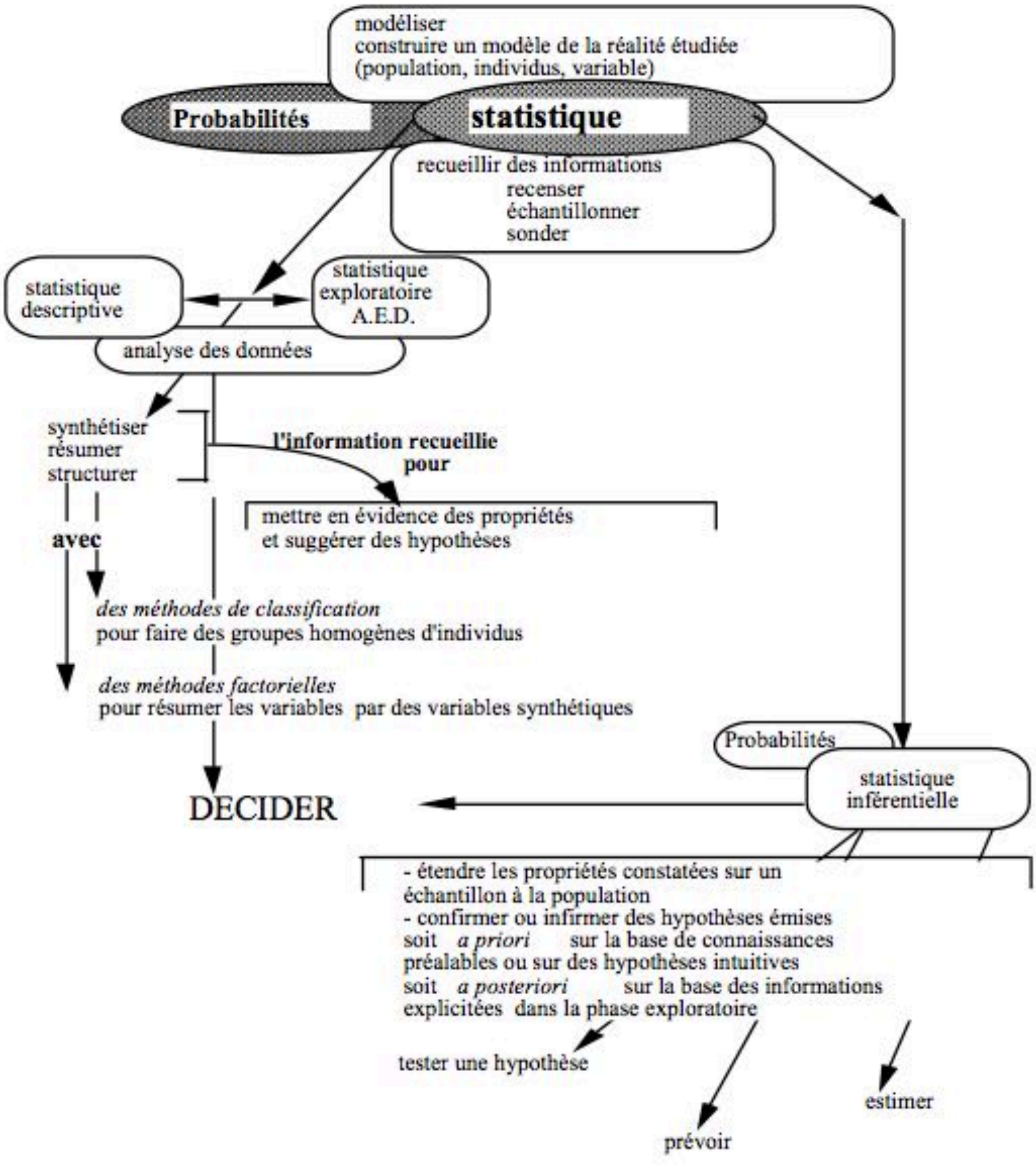
No Brasil, podemos observar nos Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio (PCN+EM) a divisão dos conteúdos do ensino médio em torno de três eixos ou temas, sendo um deles a análise de dados (BRASIL, 2002). Nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCEM), por sua vez, temos uma proposta de divisão dos conteúdos do ensino médio de Matemática em quatro blocos, sendo um deles a análise de dados e probabilidade.

O NCTM propõe a organização dos conteúdos de Matemática para o ensino fundamental em cinco padrões de conteúdos. Devido à importância já destacada, a estatística forma um desses padrões de conteúdos chamado de **análise de dados e probabilidade**. No ensino médio (high school), a análise de dados e probabilidades continuam como um dos cinco padrões de conteúdo (WALLE, 2009).

Na França, os conteúdos de matemática para o ensino fundamental são organizados em torno de quatro domínios, sendo um deles a **organização e gestão de dados**. No ensino médio (Lycée) a estatística continua sendo um elemento relevante. Os conteúdos de Matemática para o primeiro ano do ensino médio, na França (tronco comum para o lycée geral e tecnológico), agrupa essa disciplina em três grandes temas, um deles é a **estatística e a probabilidade**.

A Estatística pode ser dividida em duas grandes áreas: estatística descritiva e inferencial. Para analisar um grande volume de dados e extrair conclusões é mais fácil quando eles se apresentam de forma resumida. Dessa forma, a estatística descritiva oferece técnicas que permitem de forma sistemática "organizar, descrever, analisar e interpretar dados oriundos de observações ou experimentos realizados em qualquer área do conhecimento" (CAZORLA; SANTANA, 2010, p. 115). Já na estatística inferencial, procura-se partindo de uma amostra, utilizando-se métodos adequados, fazer previsões sobre uma população. Mann (2006, p.4,) destaca que a probabilidade estabelece uma "medida de que um determinado fenômeno venha a acontecer, atua como uma ligação entre a estatística descritiva e a estatística inferencial". Régnier (1998a) apresenta um aprofundamento dessa descrição, como podemos observar na figura 1. Esse autor esclarece que temos dois níveis. No primeiro nível temos na estatística descritiva o estudo dos modos de utilização e tratamento dos dados, no sentido da produção e descrição das informações. Em um segundo nível, a estatística inferencial "estende estas informações descritas a um domínio de validade não explorada diretamente, com, se possível, um controle de riscos incluindo no raciocínio indutivo" (RÉGNIER, 2000b, p. 194, tradução nossa).

Figura 1 – Esquema dos objetivos e das operações atribuídos à estatística



Fonte: Régnier (1998a, p. 8).

A estatística descritiva deve ser, segundo documentos que orientam o currículo, explorada desde a educação básica. Os dados podem ser apresentados por meio de tabelas, gráficos e medidas descritivas numéricas. As medidas descritivas numéricas são bastante úteis quando precisamos descrever um conjunto de dados. Dentre as medidas numéricas, uma das mais utilizadas é a média aritmética.

A média aritmética, pela sua relevância, está presente nas propostas curriculares para o ensino de Matemática na educação básica em diversos países, inclusive o Brasil. Sendo também um tema abordado em cursos superiores. Cazorla (2002, p.29-30) destaca que "a maioria dos dados relatados em revistas científicas utilizam a média e as inferências lidam, quase que exclusivamente, com médias ou diferenças entre médias". Ela esclarece que "Isso decorre do fato da média proporcionar indicador que pode ser interpretado como um escore típico que representa um conjunto de dados" (Ibid., p.30). Dessa forma, podemos observar a importância do conhecimento desse conceito e aplicação do mesmo, tanto pelo cidadão como pelo pesquisador, o que reforça a importância do ensino desse tema.

Apesar da importância desse assunto, observamos em diversos estudos problemas com o ensino e/ou a aprendizagem da média (POLLATSEK; LIMA; WELL, 1981; MEVARECH, 1983; GOODCHILD, 1988; STRAUSS; BICHLER, 1988; ZAWOJEWSKY, 1988; LEON; ZAWOJEWSKY, 1990; LI; SHEN, 1992; CAI, 1995; GAL, 1995; MOKROS; RUSSELL, 1995; WATSON, 1996; BATANERO, 2000; CAZORLA, 2002; STELLA, 2003; LIMA, 2005; GITIRANA et al, 2010; KHALIL, 2010; CARVALHO, 2011). Tais pesquisas envolvem desde alunos do ensino fundamental até o ensino superior. Essas apontam para o estágio final de um processo de produção e difusão do conhecimento que inicia na academia e finaliza com o aluno. Um processo interinstitucional: instituições produtoras do saber, instituições de transposição do saber e instituições de ensino.

Esses problemas não se limitam à média, existem estudos como o realizado por Batanero, Mayén e Díaz (2009) com 518 estudantes no México que indicam problemas nas respostas apresentadas pelos estudantes na educação básica a questões sobre mediana. Como também estudos que envolvem a média, mediana e moda (MERINO, 2003; MAYÉN et al, 2007; MAYÉN, 2009; LEITE, 2010; MAYÉN; BATANERO, 2011).

Ao tratarmos das medidas de tendência central, devemos considerar além da média e da mediana, a moda. Nem sempre a média é a medida de tendência central mais adequada para apresentar um conjunto de dados. Em dados qualitativos a moda se apresenta como a mais adequada. Dependendo da forma como os dados se organizam, podemos utilizar a mediana. Dessa forma, não adianta apenas conhecer essas medidas descritivas, é importante saber em que situações utilizá-las e qual a mais adequada. A forma como os dados se apresentam também pode indicar qual medida é mais adequada ou se faz sentido utilizar essas medidas. Em função dessas razões expostas, faz-se necessário também explorar a dispersão.

Apesar da importância das medidas de posição e da assimetria e curtose, as medidas de tendência central e de dispersão são as mais exploradas na educação básica e por essa razão escolhemos como objeto de investigação. Estudos realizados na França (RÉGNIER, 2013) apontam para problemas no ensino superior para o cálculo do desvio padrão, indicando assim problemas com essa medida de dispersão.

Os problemas com o ensino das medidas de tendência central, apresentados em diversas pesquisas que vão desde a educação básica aos cursos superiores, conduziram-nos ao seguinte questionamento: qual o papel dos programas e dos livros didáticos na existência desses problemas? Inicialmente realizamos um estudo sobre esse saber científico (as medidas de tendência central e de dispersão). Um estudo que toma como referência a forma como esse saber é apresentado por alguns estatísticos que são respeitados pela sua produção na área da estatística ou pesquisadores conhecidos na área da didática da estatística. Também foi feito um levantamento de pesquisas sobre o ensino e/ou aprendizagem das medidas de tendência central e de dispersão formando um outro capítulo desta tese. Algumas propriedades e observações sobre esse saber científico foram confrontadas com pesquisas sobre o ensino e/ou aprendizagem aprofundando a discussão. Do saber científico para os programas e livros didáticos temos um processo de transposição didática.

A transposição didática trata das mudanças por que passa o saber científico até chegar à sala de aula, constituindo-se como um saber a ser ensinado. Em um primeiro momento, temos a transposição do saber científico para os programas de ensino e em um segundo momento, temos a passagem desses para o livro didático. A essa fase, Chevallard (1991) chamou de transposição didática externa. O segundo momento, compreendido como transposição didática interna, tem lugar na sala de aula e é realizado pelo professor. Nessa fase, temos como elementos: o professor, o saber (a forma como o professor e o aluno se relacionam com esse saber) e o aluno. Brito Menezes (2006, p. 83) destaca que:

> [...] na relação didática, o professor nem sempre (quase nunca, na verdade) terá acesso ao saber 'original', mas à sua adaptação/deformação, através dos manuais de ensino e livros didáticos e ainda responsável por mais uma adaptação, que acontecerá no seio da relação didática.

Nessa adaptação, influenciam a concepção de como o aluno constrói o conhecimento e também na relação que o professor tem com esse conhecimento. Essa relação faz com que o tempo de exposição (CÂMARA DOS SANTOS, 1997, p.5) e a forma como este conhecimento é apresentado mudem conforme muda o objeto de estudo.

Embora as reflexões fundadas na noção de transposição didática permitam-nos avançar bastante em relação à diferença dos saberes nos vários níveis: comunidade científica, documentos oficiais de ensino, livro didático e sala de aula, entendemos que a análise desse saber em cada um desses níveis exige um aprofundamento que nem sempre conseguimos atingir, ancorando-nos apenas nesse primeiro enfoque de Chevallard.

É o próprio Chevallard (1985, 1991, 1992, 1996, 1999, 2002a, 2002b, 2003, 2009) que nos dá o suporte teórico que permite aprofundar tal análise, ao propor a teoria antropológica do didático e abrir espaço para a análise da praxeologia do saber.

O livro didático tem um papel relevante na transposição didática como podemos observar nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 86): “o livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, gerando, muitas vezes, a concepção de que ‘o mais importante no ensino da matemática na escola é trabalhar o livro de capa a capa’”. Essa importância do livro na transposição reforça a necessidade de investigação de como as medidas de tendência central são tratadas nos livros didáticos, quais os limites dessa apresentação e possíveis relações com a natureza dos problemas encontrados nas pesquisas investigadas e que podem estar associados à forma como ela é apresentada no livro didático. Considerando que a disposição desse saber a ser ensinado no livro influencia a forma como o docente trata esse saber a ser ensinado e que por sua vez possui um papel importante na apropriação do mesmo pelo discente.

Dessa forma, nesta pesquisa, procuramos analisar além do saber (científico e a ser ensinado) a forma como ele se apresenta nos programas de ensino e nos livros didáticos do Brasil e a França. O nosso foco é a educação básica, mais precisamente o ensino médio. Nossa escolha se deu por diversas razões:

- É no ensino médio que o aluno sistematiza muito do que viu no ensino fundamental;
- Nos PCN+EM e nos livros didáticos do Brasil no ensino médio, observamos uma apresentação mais completa da dispersão;

- Na França[1], as medidas de tendência central e de dispersão são apresentadas no ensino médio (Lycée).

Outra questão que pode ser colocada sobre a nossa pesquisa é porque foi escolhido além do Brasil, a França. Ao tomarmos como referência a TAD, podemos dizer que as instituições de transposição didática, elaboração do livro e do programa são diferentes e mereceram ser investigadas essas diferenças. Quando consideramos do ponto de vista do programa no Brasil, temos orientações e na França, esse programa tem força de lei e possui características diferentes que repercutem no livro didático desses dois países. No caso do livro didático da França, ele deve seguir com um maior rigor o programa, sendo inclusive uma parte desse programa apresentado nesse manual, como forma de mostrar que o livro atende às instruções oficiais. No Brasil, apesar do programa oferecer sugestões, temos um sistema de avaliação do livro didático, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) que tem um papel fundamental na regulamentação da qualidade desses livros didáticos produzidos no Brasil. Outro aspecto importante é que não se podem considerar as mudanças porque passam o ensino de forma isolada, mas podemos observar a influência dos programas e os pesquisadores de um país sobre o outro. Nos programas que iremos apresentar no Brasil, podemos ver a influência do National Council of Teachers of Mathematics (NTCM) dos Estados Unidos, da Didática Francesa e das pesquisas na França e etc. A França tem uma forte contribuição teórica na área da educação matemática que exerce influência nos programas de matemática no Brasil. Assim, consideramos que comparar os programas e os livros didáticos, considerando suas diferenças e seus aspectos positivos no sentido de contribuição para o aperfeiçoamento de ambos é importante. Outro aspecto é que os problemas que apresentamos no ensino das medidas de tendência central e de dispersão não se limitam ao Brasil, mas também a diversos países, entre eles a França. Por último, dentro do quadro de uma cotutela, o estudo do programa e livro didático do Brasil e da França pode oferecer contribuições às instituições brasileira e francesa envolvidas.

Dessa forma, a nossa pesquisa se restringiu ao ensino médio no Brasil e na França. Neste estudo, investigamos as relações entre os problemas identificados sobre a compreensão e aplicação do conceito das medidas de tendência central e a forma como essas medidas são apresentadas nos programas dos governos brasileiro e francês e em algumas coleções de livros didáticos nesses dois países. Observamos também a necessidade de não se limitar às

[1] As medidas de tendência central são vistas no ensino fundamental na França. Contudo, no ensino médio, elas são vistas de forma mais elaborada junto com a dispersão.

pesquisas que citamos anteriormente sobre as medidas de tendência central e de dispersão, uma vez que essas não abrangem as MTCD como um todo. Assim, com base em algumas das características desse saber científico (levantadas nesta pesquisa) e apoiando-se num referencial teórico consistente, desenvolvemos uma metodologia de análise dos programas e livros didáticos. Entre as teorias utilizadas por nós, nesta pesquisa, destacamos a teoria do antropológico do didático (TAD) que vem sendo utilizada em pesquisas recentes de doutorado em educação no Brasil (ARAÚJO, 2009; BESSA DE MENEZES, 2010) e em outros países como a França (MATHIEU-WOZNIAK, 2005). A TAD também vem sendo objeto de congressos internacionais, sendo realizados até o momento três congressos internacionais sobre a teoria antropológica do didático. O primeiro e o terceiro foram realizados na Espanha nos anos de 2005 e 2010. O segundo congresso internacional sobre a teoria antropológica do didático foi realizado em 2007 na França. Um termo muito utilizado na TAD é o de Praxeologia. O estudo praxeológico pode envolver o estudo do conhecimento matemático (praxeologia matemática) e a maneira como se apresenta o estudo deste tema (praxeologia didática).

Ressaltamos que a nossa proposta de análise, além da TAD, inclui a teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1990, 1996). Essa última permite ampliar o olhar para as situações que envolvem as questões indicadas nos livros didáticos que se apresentam como geradora de dificuldades na compreensão do conceito das medidas de tendência central e de dispersão ou por outro lado podem permitir ampliar o nível de conceptualização deste conceito. Tomando por referência essas características e justificativas desta pesquisa, passamos a explicitá-la em torno de objetivos de pesquisa.

1.2. OBJETIVOS DE PESQUISA

Tomando por base o que foi exposto, apresentamos o objetivo geral desta pesquisa junto com os objetivos específicos.

1.2.1. OBJETIVO GERAL

Analisar a transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os programas e livros didáticos de matemática do ensino médio do Brasil e da França, procurando levantar se existem limitações na transposição didática que possam influenciar o processo de ensino-aprendizagem dessas medidas no ensino médio do Brasil e da França.

1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Caracterizar o saber científico, o conceito e as organizações praxeológicas das medidas de tendência central e de dispersão;
- Desenvolver uma proposta de análise das medidas de tendência central e de dispersão nos programas e livros didáticos de matemática franceses e brasileiros;
- Analisar a forma como as medidas de tendência central e de dispersão são apresentadas em coleções de livros didáticos de matemática e nos programas do ensino médio no Brasil e na França.

1.3. HIPÓTESES

Partimos de uma hipótese geral:

H_G. Existem limitações na transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os programas e para os livros didáticos de matemática do ensino médio no Brasil e na França.

Com base nesta, apresentamos hipóteses específicas resultantes do detalhamento da hipótese geral que serão testadas:

H1. Existem limitações na transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os programas de matemática brasileiros e franceses do ensino médio.

H2. Existem limitações na transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os livros didáticos de matemática brasileiros e franceses do ensino médio.

H3. As limitações na transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os programas de matemática brasileiros e franceses do ensino médio são de naturezas diferentes.

H4. As limitações na transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os livros didáticos de matemática brasileiros e franceses do ensino médio são de naturezas diferentes.

Essas hipóteses indicam que existem limitações. Consideramos que essas limitações podem ser pela ausência ou pouca exploração dos elementos que consideramos em nossa metodologia como importantes para a construção do conceito das medidas de tendência central e de dispersão. Quando colocamos naturezas diferentes, queremos dizer que o que pode ser uma ausência no livro do Brasil, pode ser algo explorado ou pouco explorado no livro da França, em função das diferenças dos programas e dos livros em cada país.

1.4. ESTRUTURA DA TESE

A tese está dividida em três grandes partes.

- Parte 1: Fundamentos teóricos e elementos de pesquisa;
- Parte 2: Problemática e metodologia da construção e tratamento dos dados;
- Parte 3: Resultados, discussões e prolongamentos.

Na primeira parte, tratamos da transposição didática e como ela se insere dentro da nossa pesquisa. Abordamos no segundo capítulo desta parte, o levantamento do saber científico que envolve as medidas de tendência central e de dispersão. No terceiro capítulo, tratamos da revisão de literatura das pesquisas sobre o ensino e aprendizagem das medidas de tendência central e de dispersão (MTCD). No quarto capítulo, abordamos a teoria antropológica do didático que dá um suporte para analisar a transposição didática, das praxeologias e outros elementos dos programas e livros didáticos analisados. No quinto capítulo, tratamos da teoria dos campos conceituais e as MTCD. E como esta teoria pode dar suporte para análise de algumas das situações presentes nos livros didáticos brasileiros e franceses. No sexto capítulo, apresentamos o ensino médio no Brasil e na França e as características dos programas e livros didáticos nos dois países.

A segunda parte desta tese trata da problemática e metodologia da construção dos dados. Ela é dividida em dois capítulos. No primeiro, fizemos uma retomada das questões trazidas na introdução e como a primeira parte foi importante para aprofundar esta discussão. Logo, apresentamos assim uma problematização das questões da tese e retomamos as hipóteses. No segundo capítulo, tratamos da construção e tratamento dos dados. Este foi dividido em duas seções. Na primeira abordamos os programas e na segunda os livros didáticos. Procuramos nestas duas seções descrevemos que elementos serão levados em conta para analise e tratamento dos dados e como ela foi feita. Foram também abordadas as questões da seleção da amostra do programa e do livro, os períodos selecionados, características e codificações dos elementos analisados.

Na terceira parte, apresentamos os resultados, discussões e prolongamentos. Esta parte esta organizada em três capítulos. O primeiro capítulo versa sobre o programa, apresentamos uma análise de como as MTCD estão descritas pelos programas, tratamos da questão da codeterminação didática (TAD), procuramos levantar elementos que pudessem remeter as praxeologias e o desenvolvimento do conceito das MTCD, como também observar os limites destas apresentações comparando sempre a proposta brasileira com a francesa. No segundo capítulo apresentamos os resultados e análises sobre os livros didáticos. Para isto, fazemos uma análise inicial da participação da estatística, da estatística descritiva e mais especificamente das MTCD dentro de sete coleções brasileiras e francesas selecionadas. Indicamos assim como está planejado o ensino nos livros destes dois países, os limites e problemas com esta forma de organização. Na segunda parte, selecionamos uma coleção de cada país, para uma análise mais detalhada das questões apresentadas tanto do ponto de vista da análise praxeológica, como também, das situações que envolvem estes conhecimentos (T.C.C.). No terceiro capítulo, apresentamos o prolongamento das discussões, indicando os limites desta tese e o que pretendemos fazer para dar continuidade à pesquisa iniciada com a tese.

No final da tese, apresentamos uma grande síntese com uma parte que trata da conclusão geral.

PARTE 1: FUNDAMENTOS TEÓRICOS E ELEMENTOS DE PESQUISA

Tomando por base os objetivos e hipóteses desta pesquisa, organizamos a parte 1 em 6 capítulos:

1) Transposição didática;
2) Exploração do saber científico estatístico: o caso das medidas de tendência central e de dispersão;
3) Revisão da literatura das pesquisas sobre o ensino e aprendizagem das medidas de tendência central e de dispersão;
4) A teoria antropológica do didático e as medidas de tendência central e de dispersão;
5) A teoria dos campos conceituais e os conceitos das medidas de tendência central e de dispersão nos livros didáticos;
6) O ensino médio no Brasil e na França.

A nossa pesquisa procurou investigar de que forma as MTCD são apresentadas nos livros didáticos e nos programas de Matemática do ensino médio. Dessa forma, iniciamos essa parte tratando do fenômeno da transposição didática, na qual nos apoiamos nesta pesquisa.

Para investigar a transposição do saber científico, consideramos necessário inicialmente analisar este saber, quais suas características e propriedades. Para isso, recorremos a instituições e estatísticos conhecidos.

Da Rocha Falcão (2008) destaca que "os conteúdos ministrados em sala de aula vêm efetivamente de um contexto de produção do saber, sofrendo transformações e "adaptações" para uso em sala de aula". Na sala de aula, esse saber sofre transformações e aparece através dos livros didáticos, entre outros meios que podem ser usados pelo docente. Esse processo de mudanças continua até o que é aprendido. As pesquisas na área de educação estatística indicam problemas com o aprendizado das medidas de tendência central e de dispersão (MTCD). Assim, consideramos importante levantar esses problemas, alguns deles podem ser aparentemente lógicos para as entidades produtoras do saber. Contudo, eles podem apresentar obstáculos à aprendizagem (RÉGNIER, 2000b, 2011b), necessitando de criações didáticas, observações que informem alguns aspectos dessas medidas e organizações didáticas que levem o aluno a refletir sobre o saber. Dessa forma, algumas das propriedades e observações sobre o saber científico foram balizadas com base nos resultados desta pesquisa, neste capítulo. Este capítulo também serviu de base para certas reflexões sobre o processo de transposição didática.

Ao investigarmos no segundo capítulo deste volume o saber científico relativo às MTCD e noções introdutórias que serviram para delimitar a forma como tratamos alguns termos, representações e conceitos da estatística, destacamos que este saber não é consensual, ou seja, ele pertence a instituições humanas nas quais existem divergências. Para dar suporte a isso, nos apoiamos na teoria antropológica do didático. Um conceito importante nessa teoria é o de instituição. Segundo a TAD, um determinado saber é de uma instituição (que pode ser um grupo de pesquisadores, por exemplo, de uma universidade ou uma entidade como a SFdS). Este saber de uma instituição sofre adaptações para fazer parte de outras instituições. Um outro elemento importante desta teoria são as praxeologias. A noção de praxeologia, tal como formulada por Chevallard (1999) na teoria antropológica do didático, pode ser utilizada para análise das instituições produtoras de saber e de ensino e as suas práticas através de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Dessa forma, consideramos que, para analisar as medidas de tendência central e de dispersão nos livros e programas, devemos investigar essas praxeologias. Quando pensamos no ensino, consideramos que as praxeologias não dão conta de tudo. As revisões de literaturas sobre as pesquisas que envolviam a aprendizagem das medidas de tendência central e de dispersão nos conduziram a pensar também sobre o conceito destas medidas e a teoria dos campos conceituais que traz um importante aporte teórico para uma reflexão apoiada no ensino de conceitos.

No quinto capítulo desta primeira parte tratamos da teoria dos campos conceituais. Com base nas pesquisas levantadas, fizemos uma investigação sobre o ensino dos conceitos das medidas de tendência central e de dispersão e como esta teoria poderia fornecer instrumentos para investigar nos livros didáticos e programas, possíveis limitações que poderiam estar associadas à deficiência na construção desses conceitos. As questões levantadas neste capítulo servirão de base para, na segunda parte desta tese, propormos elementos que serão investigados nesta pesquisa.

No sexto capítulo, fizemos uma apresentação do ensino médio no Brasil e na França, suas características, as normas oficiais que tratam da mesma e os elementos que utilizamos para definir que parte do ensino médio será analisado na França, uma vez que mesmo no ensino médio geral, temos na França, ao contrário do Brasil, três percursos definidos a partir do segundo ano do ensino médio.

As conclusões desta primeira parte servirão de base para a segunda parte desta tese apresentada em um segundo volume. Esta segunda parte trata da problemática e da metodologia da construção e tratamento dos dados.

1. TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

O saber científico apresenta obedecendo a uma forma de apresentação e de validação aceita pelo meio no qual ele deve ser apresentado. Este meio é formado por uma comunidade científica e deve, a princípio, estar em acordo com o paradigma aceito por esta comunidade. Quando se trata de um saber em matemática, esse processo deve obedecer às regras de um sistema lógico-dedutivo.

O saber tal como apresentado nas academias precisa modificar-se, transformar-se e sofrer adaptações em um saber a ser ensinado. Esse processo de transformação, de deformação do saber, de maneira que ele adquira uma roupagem didática foi chamado de transposição didática. Neste processo serão selecionados os saberes que deverão ser transpostos. Estes saberes podem não ser a preocupação atual dos cientistas, pode representar outra época na evolução das ciências, com outro paradigma dominante, contudo pode se considerar adequado para um determinado nível de escolaridade. Um exemplo disso é o ensino da mecânica clássica nas aulas de Física do ensino médio. O Teorema de Pitágoras representou em uma determinada época um avanço na matemática. Os Elementos de Euclides (2009) apresentam uma demonstração deste teorema. Atualmente ele é utilizado como ferramenta na resolução de problemas simples e não como um objeto de investigação dos matemáticos. Apesar de não ser um objeto de estudo dos matemáticos, pode ser uma ferramenta para estes. Na Educação Básica, ele é considerado como objeto de estudo.

A ideia de transposição didática foi proposta por Michel Verret (BETTONE et al, 2004) e aparece no seu livro intitulado "temps des études" no qual ele afirma "toda prática de ensino de um objeto pressupõe com efeito a transformação de fato, a transformação prévia deste objeto em objeto de ensino" (VERRET, 1975, p. 140, tradução nossa). Algumas ideias apresentadas neste texto são desenvolvidas por Yves Chevallard na primeira escola de verão em didática da matemática em 1980 (BETTONE et al., 2004).

Devido ao importante papel de desenvolvimento desta ideia por Yves Chevallard (1985, 1991), dando um corpo teórico consistente na análise do fenômeno da transposição didática, a transposição didática é muitas vezes associada a Chevallard. Chevallard (1991) apresenta como uma problemática se considerar, em um projeto social de ensino e aprendizagem, conteúdos do saber científico serem pensados como conteúdos a ensinar. Como se pudéssemos apresentar no primeiro ano do ensino fundamental a matemática que é discutida na academia pelos matemáticos. Como se o processo de elaboração dos programas levassem em conta apenas o saber das academias. A transposição didática vem apresentar a ideia que o saber se modifica quando se transforma em saber a ser ensinado.

Chevallard (1991, p. 39) apresenta uma definição para a transposição didática quando ele afirma que "o 'trabalho de um objeto do saber a ensinar faz um objeto de ensino é chamado transposição didática". Chevallard (1991) apresenta dois níveis de transposição, a "transposição didática em um sentido restrito (stricto sensu)" e a "transposição didática em um sentido amplo (lato sensu)". No primeiro sentido, temos a passagem de um objeto específico do saber que passa por transformações adaptativas para uma versão didática deste objeto. Podemos, por exemplo, ter um conceito apresentado por um matemático e sua versão didática ensinada em um determinado ano do ensino fundamental. No segundo sentido, temos o processo que requer um estudo científico pelos pesquisadores da didática da matemática, da passagem do objeto do saber para um objeto a ser ensinado e deste em objeto de ensino. Chevallard (1991, p.39, tradução nossa) apresenta um esquema sobre essa passagem:

→ Objeto do saber → objeto a ensinar → objeto de ensino → objeto de aprendizagem

Ao abordar a transposição didática, Chevallard (1986, 1991) trata da mudança de um savoir savant para um savoir enseigné. O termo savoir savant numa tradução literal seria saber sábio. Chevallard (2002b, p.1) fala da "evolução do conhecimento científico em matéria de didática". Ao tratar da transposição em matemática, devemos levar em conta não apenas o saber matemático, mas também entre outros saberes o saber em didática. Este saber científico também pode aparecer nos livros didáticos na forma como é organizado o estudo. Ele também pode aparecer na forma como o saber escolar é tratado. Podemos pensar desta forma no saber desenvolvido pelos pesquisadores sobre um determinado saber matemático. Estes saberes também produzem termos próprios que podem ser adaptados para os livros didáticos. Eles podem propor a utilização de elementos das outras ciências, como a experimentação, como o uso de balanças para introduzir a álgebra na escola. O que foge aos princípios da matemática que "joga a carta da dedução e não a da experimentação" (CHEVALLARD, 2002b, p. 14). Dessa forma, na transposição didática em matemática são transpostos não apenas elementos do saber matemático, mas também o saber na área da didática sobre o ensino de matemática.

No caso da estatística, podem ser utilizados outros elementos adaptados ao ensino dessa, como é o caso da balança, para introduzir o conceito de média como ponto de equilíbrio.

Quem participa direta ou indiretamente da passagem do saber científico para o saber a ser ensinado? Chevallard (1991) propõe o nome de noosfera para tratar desta esfera formada por todos aqueles que de certa forma atuam nesta passagem.

1.1. NOOSFERA

O saber a ser ensinado pode entrar em desacordo com o saber científico, uma vez que este muda com o tempo, necessitando de mudanças no saber a ser ensinado. Estas mudanças também podem ser decorrentes das demandas da sociedade, como destacamos ao tratar da introdução da estatística na educação básica. Existem outros fatores que também influenciam as mudanças no saber ensinar, como por exemplo, as mudanças trazidas pelas necessidades do mercado de trabalho, pelo desenvolvimento tecnológico que levam à demanda de desenvolvimento de novas competências e tornam obsoletos conhecimentos ligados à uma época em que certos processos eram feitos pelo homem. Como exemplos deste tipo, temos as réguas de cálculo que deixaram de ser usadas no ensino e nas atividades profissionais dos engenheiros. As tábuas de logaritmos que não fazem mais sentido, uma vez que os artefatos tecnológicos atuais como computadores, máquinas de calcular mais sofisticadas, tablets, entre outros, podem realizar tais cálculos. Algumas mudanças também podem ser impulsionadas por interesse político de apresentar aparentes resultados em uma dada administração. Como exemplo de justificativa de mudanças nos programas, temos a apresentada pelo ministro da educação nacional da França para a atual reforma por que passa o ensino médio neste país. Uma das principais justificativas das reformas é melhor orientar os alunos nas suas escolhas profissionais. Como argumentos temos que a cada ano 50.000 jovens abandonam o ensino médio sem realizar o exame que lhe dá o "atestado" de conclusão do ensino médio e possibilita a entrada na faculdade, o baccalauréat. Outro dado que faz parte das justificativas é que um em cada dois estudantes não obtêm êxito no primeiro ano da universidade. Esses problemas orientam os três objetivos principais da reforma: "uma orientação mais pessoal, progressiva e contínua; um acompanhamento personalizado ao longo de toda escolaridade; uma maior abertura do ensino médio à sua época" (FRANCE, 2010b, p.1, tradução nossa). Estas demandas de mudanças no sistema educativo cria a necessidade de reforma nos documentos oficiais. Neste momento fica mais visível o papel da noosfera.

Fazem parte da noosfera todos que de alguma forma influenciam essa passagem, tais como o ministro da Educação Nacional da França, o presidente da associação dos professores, um professor militante, os representantes da sociedade (os pais dos alunos, os especialistas no ensino de um dado conteúdo). Para Chevallard (1991), a noosfera funciona como os bastidores do sistema de ensino que está sobre a influência da sociedade. Um primeiro produto mais visível do trabalho da noosfera são os programas.

Quem participa da noosfera que influencia as mudanças por que passa a estatística? Essas mudanças são locais ou existem influências de grandes grupos internacionais sobre as mudanças locais? Pelo levantamento que apresentamos a seguir, existem diversas entidades que participam da noosfera. Existe influência de grandes grupos, mas também características próprias de cada país (a realidade social, os grupos políticos, os grupos de pesquisadores, etc.) e das entidades formadas neste país que influencia essas mudanças.

A estatística pelo seu papel dentro da sociedade atual, na qual os indivíduos precisam tomar decisões rápidas com base em diferentes informações, vem sendo colocada em destaque em programas de todo o mundo. O que gerou mudanças de programas em diversos países, como tratamos na introdução desta tese. O documento produzido pelos National Council of Teachers of Mathematics (NTCM) dos Estados Unidos nos anos 80 colocava a importância de se trabalhar com a estatística no ensino fundamental (BRASIL, 1998). No Brasil a estatística foi introduzida através dos PCN (BRASIL, 1998) no ensino fundamental nos anos 90. A introdução da estatística na França na serie científica (dois últimos anos do ensino médio) ocorreu na década passada.

Régnier (2005) coloca em evidência o papel da "praxeologia da estatística" no ensino dessa disciplina . Esta praxelogia da estatística (no sentido usado por Régnier) é formada por um meio sociocultural, no qual a estatística se aprimora e se manifesta "nas instituições universitárias, nas organizações associativas no seio do qual a ciência estatística se desenvolve, seus paradigmas se confrontam, a formação em estatística é organizada (p. 5, tradução nossa). Para exemplificar as sociedades que influenciam este meio, Régnier (2005) apresenta algumas destas entidades profissionais:

- SFdS – Sociedade Francesa de Estatística[2];
- ISI – International Statistical Institute[3];
- IASE – International Association for Statistical Education[4].

[2] http://www.sfds.asso.fr
[3] http://www.isi-web.org
[4] O IASE surge em 1991 (MERINO, 2003). Site do IASE: http://iase-web.org

Merino (2003) apresenta outras instituições de algumas países com seções dedicadas a educação estatística como:

- ASA (American Statistical Association);
- AERA (American Education Research Association);
- Royal Statistical Society - Inglaterra;
- Sociedade Estatística Japonesa;
- Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática;
- Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa;
- Sociedad Argentina de Estadística;
- Sociedad Chilena de Estadística;

Podemos observar no IASE as seguintes sociedades associadas:

- Australian Bureau of Statistics – Austrália
- National Bureau of Statistics – China
- Sociedade Portuguesa de Estatística - Portugal
- Higher School of Economics Russian Federation - Rússia
- Instituto d'Estadística de Catalunya (IDESCAT) Espanha
- Eastern Africa Statistical Training Centre (EASTC) – Tanzânia;
- Kharkiv National University of Economics – Ucrânia;
- VSN International Ltd – Reino Unido;
- Royal Statistical Society – Reino Unido;
- Department of Statistics, UCLA - Estados Unidos.

Régnier (2005) destaca também outros meios de manifestações, tais como colóquios nacionais, internacionais e revistas. Acrescentamos também o papel da França do Grupo de Ensino da Estatística (Groupe Enseignement de la Statistique[5]) organizado dentro da SFdS e ligado ao IASE, em que vamos designá-lo pela sigla GES. Esse grupo possui uma revista a "Revue Statistique et Enseignement", além de organizar jornadas e desde 2008, a cada dois anos, um colóquio internacional francófono sobre o ensino da estatística, chamado de CFIES (Colloque International Francophone sur l'Enseignement de la Statistique). O último CFIES ocorreu em 2012. Nele foram apresentados diversos trabalhos sobre estatística na educação

---

[5] http://www.sfds.asso.fr/70-Presentation_des_objectifs_du_groupe

básica (Ensino/aprendizagem/currículo etc). Assim temos diversos exemplos de entidades que podem influenciar as mudanças no ensino de estatística.

Destacamos no Brasil algumas entidades importantes ligadas à estatística:

- ABE – Associação Brasileira de Estatística[6];
- IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística;
- SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Cazorla (2009) destaca o papel do IBGE para o desenvolvimento da estatística no Brasil. Essa instituição tem como papel oferecer uma visão desse país através de diferentes indicadores, análises realizadas e documentos produzidos com dados estatísticos. No que se refere à produção científica de artigos, ela serve de modelo para publicação de tabelas, conforme orienta a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) nas normas referentes à produção acadêmica, como as normas atuais: NBR 15287 (ABNT, 2011b), que tratam de informação e documentação de projetos de Pesquisa; NBR 14724 (ABNT, 2011a), que trata da informação e documentação de trabalhos acadêmicos.

A ABE possui uma revista e boletins que segundo Cazorla (2009) são de cunho técnico, não publicando matérias de artigos relacionados ao Ensino de Estatística. A ABE possui um evento nacional chamado Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística (SINAPE). Em 2006, a ABE criou uma divisão relacionada à educação Estatística. Cazorla (2009) ao tratar do SINAPE destaca que: "são poucos os trabalhos que abordam os problemas de ensino-aprendizagem de conceitos estatísticos, à luz das teorias de aprendizagem, ou ainda que os relacionem aos aspectos afetivos, tais como atitudes, ansiedade dentre outros aspectos".

A SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) tem tido uma forte atuação no ensino de Matemática na educação básica. Tendo criado em 2001 um grupo de trabalho específico da educação estatística, o GT12 (Grupo de trabalho ensino de probabilidade e estatística). Através das suas revistas e eventos nacionais (ENEM), internacionais (SIPEM) e organizados pelas diretorias locais, observa-se a apresentação de trabalhos ligados à educação estatística.

De outro lado, muitos ligados a este primeiro grupo temos os grupos de pesquisa que estão ligados à academia. Nestes grupos, estão pesquisadores da área de estatística que

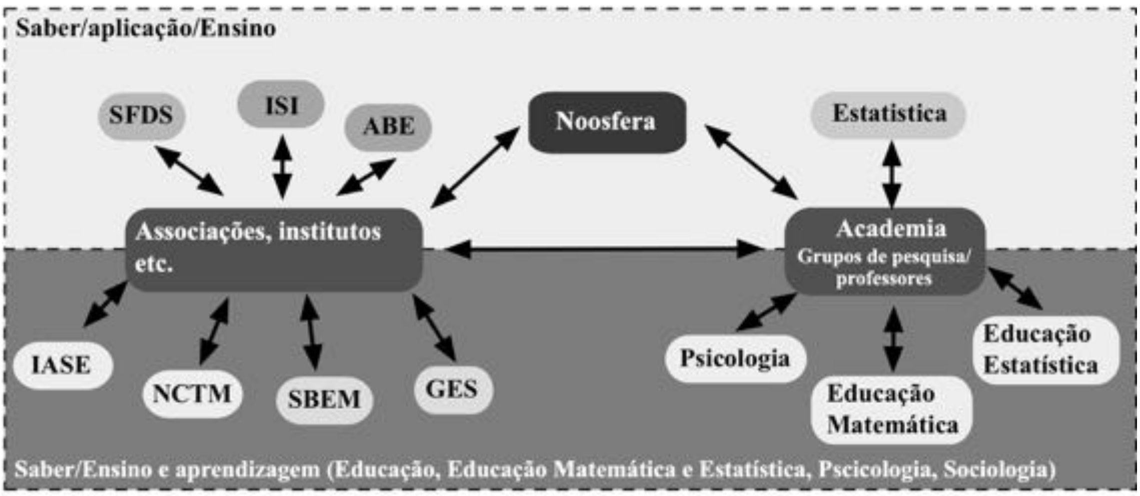
---
[6] http://www.redeabe.org.br

desenvolvem pesquisas ligadas a essa disciplina e sua aplicação (fazendo a ligação entre a estatística matemática e a estatística aplicada a diversas áreas do conhecimento) como também relacionadas ao ensino. Grupos da área da educação matemática e da educação estatística e da psicologia que desenvolvem pesquisas ligadas ao ensino e à aprendizagem de estatística.

Cazorla (2009) também destaca a atuação da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPED), em que esta organiza reuniões anuais. Em 1999 foi criado um grupo que trata da educação matemática (GT19). Segundo levantamento realizado por Cazorla (2009) o GT19 entre 2000 e 2004 aprovou 92 trabalhos para as reuniões anuais da ANPED, entre estes trabalhos, 11 eram ligados ao ensino de Estatística.

Na figura 2, procuramos representar estas ligações. Além do que já comentamos, acrescentamos mais uma divisão na figura 2. Na parte superior organizamos os grupos ligados aos matemáticos e estatísticos que produzem pesquisas na área da matemática e estatística (sobre o saber sábio), contudo estes grupos também estão ligados ao ensino destas disciplinas, sobretudo o ensino superior. Na parte de baixo, os grupos ligados aos processos de ensino-aprendizagem, a educação (em suas diversas áreas que podem estar relacionadas ao ensino de estatística), a educação matemática e estatística, a psicologia. Questões como a afetividade, compreensão de conceitos estatísticos, o meio social em que vive o aluno e o seu papel na aprendizagem de conceitos estatísticos, atitudes, entre outros ficariam mais ligados a este segundo grupo. Evidente que esta divisão não é rígida, pois existem pesquisadores que atuam nestes dois grupos. Na França o GES está vinculado à SFdS.

Figura 2 – Participação de diferentes grupos na Noosfera.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Podemos observar a participação destes grupos nos programas. Tomemos como exemplo as Organizações Curriculares Nacionais ou OCEM (BRASIL, 2006) cuja parte trata do conhecimento matemático que engloba também o ensino de estatística. O documento de matemática teve a participação de 4 consultores e 7 leitores críticos. Para exemplificar, selecionamos 2 consultores e 1 leitor crítico. Tomemos então como exemplo de consultor o professor Marcelo Câmara dos Santos que tem uma participação importante na SBEM, um pesquisador respeitado na área da educação matemática, que foi professor do Colégio de Aplicação da UFPE e atua no programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (Edumatec) entre outras atividades. Levantamos, indicadas na figura 3, algumas ligações atuais ou anteriores deste pesquisador.

Figura 3 – Relação de um membro da equipe da OCEM e a noosfera.

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Podemos observar nestes vínculos, ligações com o meio profissional ligado à educação matemática (SBEM), ligação forte com a academia, ligação como professor com a educação básica e com os professores que ensinam nessa modalidade de ensino. Como pesquisador podemos ver a sua atuação junto a órgãos que fomentam a pesquisa, junto a um programa de pós-graduação e como líder de um grupo de pesquisa, dentre outras ligações que não incluímos.

Como leitor crítico temos o professor Paulo Figueiredo que foi presidente da SBEM, teve e tem uma atuação marcante na área da educação matemática, além de fazer parte também do grupo formado pelos matemáticos. Temos também o professor Paulo Cezar Pinto Carvalho que faz parte do Instituto de Matemática Pura e Aplicado (IMPA) com linhas de pesquisa na área de análises de imagens médicas, modelagem e visualização, realidade virtual, modelagem geométrica e física. Este faz parte do grupo formado pelos matemáticos, atua como pesquisador e professor dentre outras atribuições. Dessa forma, os 3 exemplos citados estão ligados tanto à academia como a determinadas instituições ligadas a produção, ao ensino e a pesquisas relacionadas a matemática. Além destes 11 consultores que podem ter pontos de vistas diferentes, existem outras influências, demandas e pressões externas que devem ser consideradas na elaboração do programa.

Podemos observar o papel da noosfeera na França, por exemplo, nas mudanças que ocorreram no programa em 1999 na qual foi introduzida na classe première e terminale S (segundo e terceiro anos do ensino médio da via científica) a estatística e probabilidade[7], estas mudanças foram realizadas pelo Conselho Nacional dos Programas (FRANCE, 2000). No dia 23 de abril de 2005 foi criado na França o Alto Conselho da Educação Nacional ligado ao Ministério da Educação Nacional do Ensino Superior e da Pesquisa. Ele tem como objetivo formular proposições sobre o programa, sobre a pedagogia, a organização, os resultados do sistema educativo e a formação de professores. Desta forma, este conselho tem uma participação decisiva nas mudanças nos programas. Este é composto por três pessoas designadas pelo presidente da republica, duas pelo presidente do senado, duas pelo presidente da assembleia nacional, e duas pelo presidente do conselho econômico, social e ambiental. A cada ano ele deve remeter um relatório ao presidente da republica com os resultados do sistema educativo bem como as experiências colocadas em prática. Com este fim este conselho é assistido por um comitê de consulta formado por organizações sindicais, profissionais, de pais dos alunos, de associações e todas as pessoas que atue nos domínios dos quais se exige sua competência.

A atuação de pesquisadores da área de educação, na elaboração dos programas, também norteia o nosso olhar para as pesquisas em educação compartilhada por pesquisadores desta área. Apontam também para problemas ligados ao ensino e aprendizagem, ao currículo, aos livros didáticos e que de certa forma devem ser levadas em consideração na análise dos programas e dos livros didáticos. Em função das características do nosso estudo, centraremos na próxima etapa em estudos ligados às medidas de tendência central e de dispersão.

Uma segunda etapa da transposição ocorre nos livros didáticos, observamos nesta etapa a participação de outros agentes:

---

[7] No programa anterior de 1992 tínhamos apenas a probabilidade que era vista junto com a álgebra.

- O Ministério da Educação ou equivalente em cada país e as suas politicas ligadas ao livro didático;
- No Brasil, o Programa Nacional do Livro Didático é responsável por avaliar e selecionar livros que atendam a um padrão mínimo de qualidade. Os livros aprovados nessa avaliação poderão ser selecionados para serem adotados pelas escolas públicas;
- As editoras que incluem a equipe de marketing procuram produzir um material que irá atrair a escolha dos professores, como também realizar estudos sobre o que motiva a escolha do livro pelo professor;
- Os alunos que influenciaram o trabalho das editoras e dos professores e autores de livros escolares;
- Os professores que escolheram os livros que devem ser adotados;
- Outros agentes que terão participação no processo, tais como: diretores de escolas, proprietários de escolas particulares, equipes pedagógicas das escolas formadas por professores e outras pessoas como pedagogos, psicólogos etc;
- Os autores e a equipe multidisciplinar responsável pela concepção, elaboração do livro e das mudanças que serão implementadas nas novas edições.

1.2. O PROGRAMA

No programa, temos informações sobre que elementos do saber devem ser considerados no ensino. Esses constituem uma primeira etapa do processo de transposição didática. Eles podem orientam e/ou definir o que devem ser abordados nos livros, o que deve ou pode fazer parte do currículo escolar.

Os programas são elaborados fora da escola para sua aplicação nessa. No caso do Brasil, os programas podem sofrer adaptações em um detalhamento nos governos estaduais e prefeituras.

Chevallard (1985) tomando como referência o sistema de ensino francês, faz algumas reflexões sobre o papel do programa. O programa não se trata de um quadro vazio, ele já vem preenchido, e algumas vezes com excesso de informações, o que dificulta o cumprimento total do mesmo. Cabe ao professor desenvolver meios específicos para o seu cumprimento. No caso de outros profissionais como o encanador ou um mecânico, esses não têm que desenvolver meios específicos para realizar um conserto de uma peça defeituosa, eles precisam realizar esse conserto. No caso do professor, será que é diferente? O professor precisa realizar sua tarefa. Contudo ao contrário dos outros dois ele atua em um jogo com dois jogadores (enquanto os outros atuam sozinhos ou ainda contra a natureza) o que é comparado por Chevallard como o trabalho de um general de exército. O docente "joga" com o aluno. O general com o "inimigo". Para o sucesso no "jogo" faz-se necessário a participação dos dois jogadores (docente e discente). Chevallard (1985, p. 8, tradução nossa):

> Como o docente, o aluno tem suas tendências, intenções, estratégias. E o professor não pode se comprometer absolutamente com nenhum objetivo determinado. No máximo ele pode se comprometer a desenvolver, de maneira "correta", certos meios didáticos colocados a sua disposição, e fazer com mais ou menos talento. Paradoxalmente talvez, o docente não tem como missão obter dos alunos que eles aprendam, mas de fazer com que eles possam aprender. Eles têm por tarefa, não de cuidar da aprendizagem – que por natureza fica fora do seu poder – mas de cuidar da criação das condições de possibilidade da aprendizagem.

Dessa forma, como avaliar se os meios oferecidos pelo professor foram adequados ou se, por outro lado, foram as escolhas feitas pelos alunos que resultaram em uma possível ausência de êxito? Os alunos não são objetos do mundo físico que possam ser esculpidos por um artista. Eles são indivíduos que podem, por escolhas pessoais, recusar-se a aprender, recusar-se a envolver-se nas tarefas e nos processos desenvolvidos tendo em vista o seu aprendizado. Como avaliar os "jogadores" envolvidos no processo de ensino-aprendizagem? Caso uma parcela pequena dos alunos não tenha conseguido êxito, poderemos pensar em isentar o professor? Por outro lado, se a maioria dos alunos tiveram problemas e não se desenvolveram como esperado, podemos atribuir a responsabilidade ao professor? Contudo, Chevallard (1985) aponta uma exceção a isso. Caso isso se repita em outras salas com outros professores de forma generalizada, o professor deixa de ser o foco e passa-se a questionar os meios didáticos ou ainda os programas. Chevallard (1985, p.8-9) esclarece que "o programa é apenas um "atualizador" (ou, diz respeito às partes "novas" do programa, um operador) da transposição didática. Atrás do programa, que é apenas um sinal e um índice, existe a formidável pressão da transposição didática". Para esse autor, o programa representa apenas limitações de algo infinitamente mais amplo resultante da transposição didática.

Os sinais e os problemas identificados em diversas pesquisas realizadas em diversos países sobre as medidas de tendência central e de dispersão suscitaram a nossa pesquisa que procurou identificar nos elementos da transposição didática, tais como o programa, as limitações e possíveis causas desses problemas.

Contudo, em geral, não são os programas que entram na sala de aula, mas o livro didático. Estes manuais organizam os programas, ordenando os temas em uma dada sequência. Consideramos relevante estudar o livro que representa mais uma etapa do processo de transposição e que chega até à escola. Em vista disso, o livro didático se insere dentro do saber escolar. A seguir, procuraremos tratar deste saber escolar.

1.3. SABER ESCOLAR

O saber científico possui um meio próprio de produção que pode ser representado pelas universidades, pelos centros de pesquisa. Para sua divulgação temos como meios as teses, dissertações, artigos publicados em revistas, congressos, simpósios etc. O saber escolar se diferencia deste, mas possui um meio próprio de apresentação que são as escolas. O saber a ensinar precisa se adaptar a este meio que possui uma estrutura própria de ordená-lo. Possui um tempo próprio que começa no início do ano letivo (no Brasil em fevereiro, na França em setembro) e tem um período de duração. Ele deve se transformar a cada nível escolar atendendo a uma programação. Dessa forma, a programação e sequência de temas vistos no primeiro ano do ensino médio devem ser diferentes do segundo ano e etc.

Quando trata do saber escolar, Chevallard (1991, p.58) apresenta alguns elementos extraídos de Verret[8] (1975) que caracterizam este saber que são:

- Desincretização do saber;
- Despersonalização do saber;
- Programabilidade do saber;
- Publicidade do saber;
- Controle social das aprendizagens;

Segundo Ferreira (2008) o termo sincretismo corresponde à “tendência à unificação de ideias ou de doutrinas diversificadas e, por vezes, até mesmo inconciliáveis”. No sentido oposto temos o termo apresentado desincretização (tradução do termo original em francês désyncrétisation) que representa a divisão de teorias, de saberes em várias áreas, temas, assuntos bem delimitados. Dessa forma, temos a divisão do que se pretende ensinar na escola em disciplinas. Cada disciplina se divide em domínios (na matemática temos como exemplo

[8] VERRET, Michel. Le temps dês études. Paris: Champion, 1975. 837 p. Tese apresentada na Universidade de Paris V.

de domínios a geometria, a álgebra etc), estes por sua vez em setores, temas e assuntos. Essa divisão ocorre, embora de uma forma diferente no saber científico. São as especialidades e os campos de pesquisa que surgem com o desenvolvimento da ciência. Em algumas áreas faz-se necessário agrupar especialistas de áreas diferentes como nas pesquisas sobre nanotecnologia aplicada ao desenvolvimento de medicamentos, em que vão se trabalhar pesquisadores de vários campos diferentes.

A despersonalização do saber consiste em apresentar um saber sem os percursos que conduziram o cientista a esse, utilizando uma forma de apresentação e justificativa adequada a sua exibição na academia, de modo a poder fazer parte de determinadas instituições produtoras desse saber.

No caso da Matemática, este saber tal como apresentado na comunidade científica, deve apresentar uma estrutura lógica que pressupõe a dedução. Não se aceitam provas por indução. Um matemático não aceitaria como prova que todos os números entre 0 e 30 seriam divisíveis por 5, se apresentarmos um experimento em que são utilizados os números 5, 10, 15, 20, 25 e 30. A atividade matemática não é apenas a realizada pelos matemáticos, mas constitui uma atividade humana, "uma descoberta em matemática pode, na verdade, ocorrer por indução sendo o processo de prova posterior" (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2010, p.12). Quando tratamos da matemática escolar, a forma como os temas são desenvolvidos não são necessariamente de forma dedutiva, embora se procure depois na institucionalização determinar leis mais gerais, verificar a inconsistência de uma hipótese levantada por alguns alunos que desconsideraram outros elementos não identificados em uma atividade proposta pelo professor.

A programabilidade do saber consiste na apresentação segundo uma estrutura racional e progressiva de apresentação de uma disciplina. Essa programação pode obedecer a um critério que impõe um certa ordem na apresentação dos conteúdos e pode também trazer a ideia de pré-requisito (para se estudar a operação de multiplicação é necessário antes estudar a soma e a subtração). Esta programação muda de acordo com o ano escolar e pode também levar a sérios problemas.

Na década de 90, a geometria era apresentada no final de muitos livros didáticos, o que levava a aumentar “a probabilidade dela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo” (LORENZATO, 1995, p. 4). Essa forma de apresentação foi apontada como um dos problemas para a deficiência na formação dos alunos, alguns destes que vieram a se tornar professores. Pavanelo e Andrade (2002, p.80) neste sentido, identifica como uma das justificativas para a deficiência dos professores, nesta área, o fato deles “terem aprendido pouco de geometria enquanto alunos”.

A programabilidade está presente no planejamento anual no qual se deve prever o atendimento de uma carga horária definida, dividida em dias letivos, cada dia de aula é dividido em um tempo para cada aula, os assuntos devem ser organizados para serem vistos dentro desta sequência temporal. Uma coisa não prevista nesta programação é que o tempo de ensino é diferente do tempo de aprendizagem. Cada aluno tem um ritmo próprio, cada turma por sua vez também tem um ritmo e nem sempre a programação se adequa aos diferentes ritmos das diferentes turmas dos diferentes alunos. Pais (1999, p. 32) esclarece que na “prática tradicional é possível identificar uma certa ilusão pedagógica que consiste em desconsiderar a distância entre esses dois tempos”. Câmara dos Santos (1997) esclarece que a relação que o professor tem com o saber (maior proximidade ou distanciamento deste) faz com que o tempo de exposição do mesmo mude.

Publicidade do saber trata-se na definição explícita do saber, nela deve conter a extensão deste saber a ser ensinado. Podemos observar nos programas uma explicitação de que saberes devem fazer parte do saber ensinado na escola. No livro didático, isto aparece de forma mais detalhada.

Outro aspecto relevante é o controle social da aprendizagem. Esta regulação e avaliação podem ser utilizadas para apresentar um diagnóstico pontual que pode servir para fazer inferências sobre o atual estado do sistema de ensino. Ela pode servir também para identificar problemas e conduzir a tomada de decisões no sentido de melhoria do sistema didático. Isto pode ser feito por um controle interno realizado pelo professor que por sua vez deve traduzir este controle em uma avaliação explícita apresentada à escola que deve constar no currículo do aluno. A avaliação do professor é submetida a um controle externo da escola e dos órgãos de fiscalização da mesma, e também a um controle social dos pais dos discentes. Podemos também observar instrumentos externos de avaliação. Na França, a conclusão do ensino médio é atestada por um certificado que também possibilita o acesso à universidade. Para obtê-lo, o aluno precisa se submeter a uma prova que não se trata de uma avaliação realizada pelos professores com os quais estudou. No Brasil, temos também avaliações externas como, por exemplo, as realizadas para o ensino fundamental como a prova Brasil[9], a provinha Brasil[10], e para o ensino médio como o ENEM[11].

Chevallard (1991) esclarece que existe um trabalho externo visível da transposição didática em um trabalho interno realizado dentro do sistema de ensino que tem como principais elementos o professor, o aluno e o saber. Como produto desse trabalho externo, nós temos os programas e depois destes os livros didáticos. Os livros didáticos embora produzidos externamente estão presentes no interior da sala de aula, sendo usado pelo professor e pelos alunos dentro do processo de transposição didática interna.

Apesar do livro didático ser um produto da transposição didática externa, ele exerce um importante papel na transposição didática interna. O seu papel se torna mais visível na transposição didática interna, uma vez que ele organiza o programa em capítulos, apresenta uma concepção de ensino que norteia a forma como deve ser organizado cada capítulo, apresenta questões sobre o assunto, orientações para o professor de como tratar o ensino de um determinado tema.

Na produção do livro estão presentes além do autor, uma equipe técnica formada por diagramadores, por especialistas em comunicação etc. Essa estrutura de produção do livro tem um forte retorno comercial para as editoras que os produzem. Por isso, o contato com os professores e a sensibilização às necessidades dos professores, alunos, pais dos alunos, pesquisadores em educação que analisaram as produções dos livros didáticos torna-se relevante. Além disso, deve-se ater aos programas para que os manuais escolares sejam considerados adequados. Desta forma, tal como no programa, os livros didáticos sofrem uma influência da noosfera para sua produção. Ao contrário dos programas, os livros não são um único produto, eles mudam de acordo com os autores, editoras etc.

No Brasil, um elemento mais visível de controle dos livros didáticos, por parte do Ministério de Educação, trata-se do Programa Nacional do Livro Didático. As políticas voltadas para o livro didático tiveram início em 1937 com a criação do Instituto Nacional do Livro (INL) por Getúlio Vargas. Atualmente, o processo de compra e seleção dos livros didáticos é norteado pelas avaliações no ensino fundamental e para o ensino médio, realizadas respectivamente pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM).

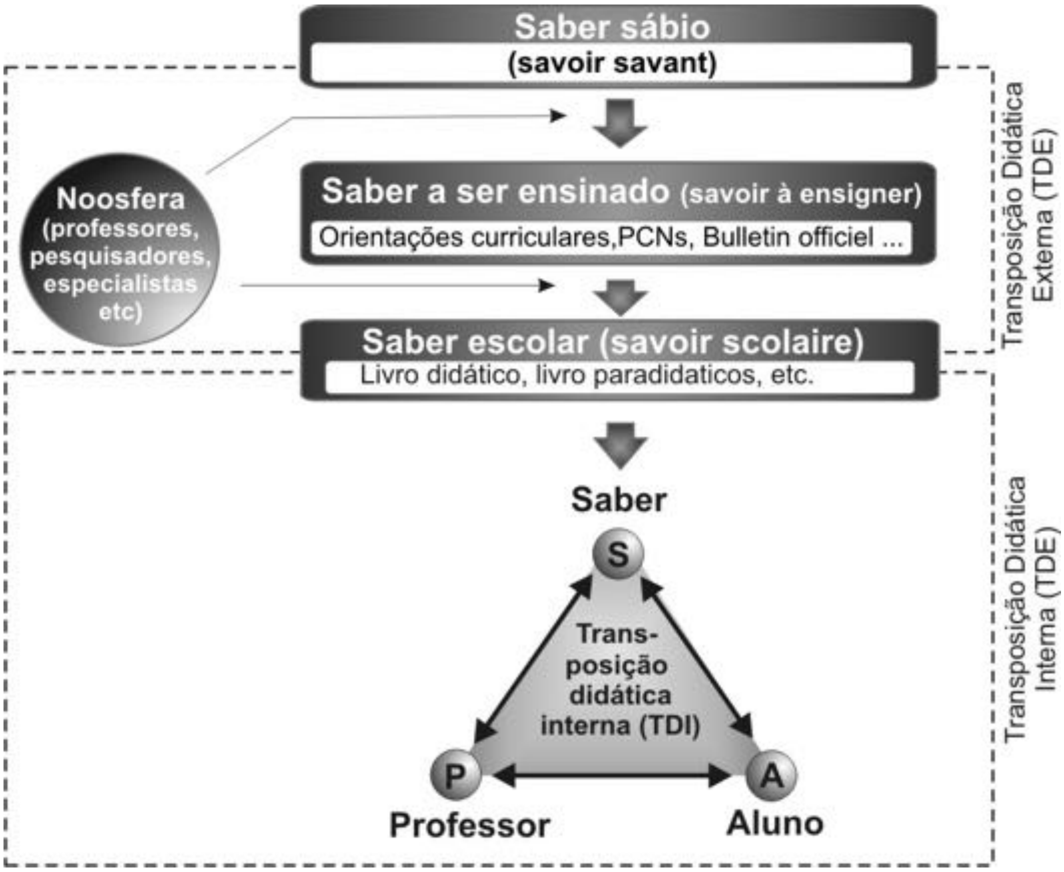
---

[9] Para avaliar a competência leitora e matemática aplicadas no quinto e no nono ano do ensino fundamental.
[10] Utilizado no diagnóstico em Língua Portuguesa e Matemática dos alunos no início do processo de aprendizagem.
[11] Exame Nacional do Ensino Médio.

Nestas avaliações são selecionados os livros que atendem aos requisitos do edital do MEC. Os livros considerados aprovados constarão em um documento no qual são tecidos uma avaliação dos mesmos, elencando os pontos positivos e negativos. A lista dos livros aprovados junto com as avaliações é apresentada em um documento. Este documento torna-se público sendo disponibilizado na web para consulta dos professores ou de qualquer outra pessoa. Os professores da rede pública devem se ater a essa lista para a seleção dos livros indicados pela escola. Os professores e demais profissionais da rede particular de ensino podem tomar esta indicação como referência na escolha dos livros adotados. Desta forma, os autores dos livros didáticos devem procurar atender às exigências deste programa e elaborar um produto que seja bem aceito pelos professores. Neste processo, podemos observar a força da noosfera na produção do livro.

Na figura 4, apresentamos uma representação simplificada do processo de transposição. Conforme apresentamos nesta figura, temos um duplo papel da noosfera que atua tanto na passagem do saber científico para o saber a ser ensinado, como também para alguns elementos do saber escolar, como é o caso do livro didático, que vai estar presente dentro da sala de aula, no sistema didático. O papel e a influência dos atores e instituições da noosfera mudam do programa para os livros didáticos.

Figura 4 – Transposição didática.



Fonte: desenho elaborado pelo autor da tese.

No próximo capítulo abordaremos o primeiro elemento da figura 4, o saber sábio que trata esta pesquisa: as medidas de tendência central e de dispersão.

2. EXPLORAÇÃO DO SABER CIENTÍFICO ESTATÍSTICO: O CASO DAS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO

Organizamos este capítulo em uma introdução na qual destacamos a forma como direcionamos a pesquisa bibliográfica realizada para organização deste capítulo e a apresentação de alguns tópicos que consideramos relevantes. Em seguida trataremos desse saber propriamente dito.

2.1. INTRODUÇÃO

Para tratar do saber científico nós recorremos a diversas publicações que tratam deste. Como critério de seleção, além de uma análise prévia da publicação, selecionamos entre estas, algumas produções de autores respeitados que validassem o trabalho. Dessa forma, recorremos a autores como o britânico Maurice Kendall (1907-1983). Este autor é considerado uma importante referência na área de estatística, cuja importante contribuição para a teoria estatística o levou a receber a mais alta honraria da Royal Statistical Society, a medalha Guy de ouro. Este pesquisador recebeu também das Nações Unidas pela sua contribuição à teoria estatística a medalha Peace. Outro autor bastante conhecido no meio é o britânico Udny Yule, agraciado com a medalha Guy de ouro pela Royal Statistical Society. Utilizamos obras mais recentes como referência, como os trabalhos de Jean-Claude Régnier, membro da Societé Française de Statistique (SFdS) este foi no período de 8 anos presidente do grupo de Ensino da Estatística da SFdS, com várias publicações na área da educação (mais de 160) e em especial na área de educação estatística. Ele é também professor da Universidade de Lyon 2 e membro do laboratório ICAR (nível 1, na França). Utilizamos também uma publicação de Catherine Dehon (Doutora em Estatística pela universidade de Bruxelas e professora dessa universidade) sobre elementos de estatística. Duas publicações sobre estatística de Yadolah Dodge (uma delas um dicionário de estatística), professor emérito da universidade de Neuchâtel na Suíça, professor de estatística dessa universidade e com diversas publicações na área, além de outros autores que serviram de base para escrever este capítulo. Também tomamos como referência um documento do IBGE pela sua importância dentro da estatística no Brasil. Ao tratarmos da transposição didática em estatística, nesta tese, destacamos a influência das sociedades estatísticas, assim como dos estatísticos na definição deste saber e também seu papel no processo de transposição didática.

Centramos este capítulo na estatística descritiva para tratar das medidas de tendência central e procuramos dar uma apresentação tendo em vista sua comparação com os programas e os livros didáticos do ensino médio. Assim, esta apresentação deste saber é delimitada pelos objetivos desta pesquisa. Outro aspecto que destacamos é que o saber compartilhado pelos estatísticos não está livre de divergências como qualquer área do conhecimento. Em função disso, antes de tratar das medidas de tendência central e de dispersão, apresentamos algumas notas introdutórias que serviram para delimitar a forma como tratamos alguns termos, representações e conceitos. Consideramos assim pertinente defini-los e justificar o emprego que damos ao mesmo. Dessa forma trataremos a seguir de:

- Frequência e efetivos;
- Variável e classe;
- Intervalo;
- Diagrama de coluna e histograma;
- Emprego das unidades;
- Emprego do símbolo somatório.

2.1.1. FREQUÊNCIA E EFETIVOS

Consideramos importante delimitar o uso do termo frequência e efetivo em nosso trabalho. Dodge (2007a, p. 216, tradução nossa) procura separar a frequência em frequência absoluta e frequência relativa. A primeira corresponde ao "número de aparições de uma observação ou de resultado de uma experiência". Régnier (2007) chama de efetivos a quantidade de indivíduos relativos a um resultado, este resultado pode ser um valor ou modalidade. Desta forma, podemos ter $n_1, n_2, \ldots, n_p$ os efetivos que estão relacionados às observações $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Assim efetivo para Régnier corresponde à frequência absoluta para Dodge.

A frequência relativa para Dodge seria a relação entre o número de aparições dividido pelo total de observações. Isto corresponde ao que Régnier (2007) chama de frequência. Se utilizarmos o termo apenas frequência, pode-se gerar dúvidas em relação ao que se está querendo dizer se adotarmos a denominação de Dodge (2007a), mas se fizermos a distinção como apresentada por Régnier (2007) evitaremos esta dúvida. Para calcular a frequência podemos utilizar a fórmula 1, onde k=1,...p e n_k representam o número de efetivos. O total de efetivos pode ser $\boldsymbol{N}$ para população ou $\boldsymbol{n}$ para amostra.

$$f_k = \frac{n_k}{efetivo\ total} \qquad (1)$$

Fórmula 1: Fórmula para calcular a frequência (RÉGNIER, 2007, p. 7).

Na tabela 1, usando os termos de Régnier (2007), temos a distinção entre efetivos e frequência, adaptado de uma tabela apresentada por Régnier (2011a, p.15, tradução nossa). Nesta tabela o N pode ser substituído por n se for amostra. Se estiver em percentuais, o 1 deve ser substituído por 100.

Tabela 1 – Efetivos e frequência em uma tabela.

Efetivos	n_1	n_2	...	n_k	...	n_p	N
Frequência	f_1	f_2	...	f_k	...	f_p	1

Observamos em Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) a utilização também dos termos efetivo e frequência como apresentados por Régnier. Estes autores acrescentam ainda efetivo acumulado à esquerda e à direita. Apresentamos a tabela 2, adaptada de Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) com estas designações em cima dos símbolos indicando o significado associado. Consideramos interessantes estes símbolos, uma vez que permitem distinguir, por exemplo, n_j de efetivo de n amostra, como também N_j de efetivo acumulado de N de população. Apresentamos na tabela 3, apenas o topo da tabela 2 substituindo alguns dos termos pela classificação adotada por Dodge (2007a), inclusive o símbolo para frequência acumulada f_a adotado por este autor.

Tabela 2 – Tabela associada à distribuição do número de veículos por família.

Variável (carros p/família)	Efetivos	Frequência		Efetivos acumulados	Frequência acumulada		Efetivos acumulados à direita	Frequência acumulada à direita	
x_j	n_j	f_j	%	N_j	F_j	%	N_j^*	F_j^*	%
0	2	0,2	20,0	2	0,2	20,0	10	1	100,0
1	5	0,5	50,0	7	0,7	70,0	8	0,8	80,0
2	2	0,2	20,0	9	0,9	90,0	3	0,3	30,0
3	1	0,1	10,0	10	1	100,0	1	0,1	10,0

Fonte: Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 46), acrescentamos os percentuais à tabela original.

Tabela 3 – Topo da tabela 2 substituindo alguns dos termos pelos apresentados por Dodge (2007a)

Variável (carros p/família)	Frequência absoluta	Frequência relativa		Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa acumulada		Frequência absoluta acumulada à direita	Frequência relativa acumulada à direita
		f	%		f_a	%		

Podemos observar em diversas publicações o emprego do termo frequência sem distinção, ou seja, se é absoluta ou relativa, o que leva à necessidade de uma interpretação do que se quer dizer em função das características dos dados na tabela. Tomemos como exemplo Dodge (2007a), em outro trecho do mesmo livro no qual ele distingue frequência absoluta de relativa. Este pesquisador usa também o termo frequência na definição de histograma, contudo ele não utiliza a distinção apresentada por ele mesmo deixando em princípio a dúvida sobre qual frequência ele está se referindo.

Apresentamos a seguir dois termos elementares em estatística que consideramos interessante explicitá-los: variável e classe.

2.1.2. VARIÁVEL E CLASSE

Kendall e Yule (1948, p.109) esclarecem que "uma medição numérica se aplica unicamente a uma quantidade que pode apresentar mais de um valor numérico. De outro modo, a operação perderia sua razão de ser. Uma tal quantidade é chamada de variável". Dessa forma não faz sentido explorar os dados estatísticos sobre a idade de uma turma cujos alunos têm a mesma idade. O próprio termo variável indica que é o que varia. Estas quantidades medidas podem ser contínuas ou discretas (ou descontínuas). Quando estas podem assumir qualquer valor são contínuas. Tomemos como exemplo de variável contínua o peso das maçãs de uma amostra dessa fruta. Neste caso, a limitação dos valores depende apenas dos instrumentos de medição e das necessidades do pesquisador. As variáveis que assumem apenas valores discretos são descontínuas ou discretas. Como exemplo desse tipo de variável, temos o número de quartos por casa. Não teremos como medição 1,53 quartos, mas 1 quarto, 2 quartos etc.

Outra noção fundamental que destacamos é a noção de classe. A classe é formada por todos os indivíduos que possuem um atributo[12]. Assim, uma classe como ter idade de 25 anos, é formada por todos os indivíduos que possuem este atributo. Algumas classes são dicotômicas como o sexo (M/F), já outras, não. Os dados de uma classe não dicotômica podem ser organizados em classes dicotômicas. Tomemos por exemplo a idade. Os indivíduos podem ser organizados em indivíduos que possuem até 18 anos e com mais de 18 anos. Algumas vezes a classificação dicotômica limita os dados. Dessa forma, podemos classificar em múltiplas classes. Assim, poderíamos agrupar os indivíduos de um estudo em um intervalo de classe[13]. No exemplo da idade, cada intervalo pode ter a amplitude de classe[14] de 10 anos, como também podemos ter intervalos de amplitudes diferentes. No exemplo das maçãs, as maçãs poderiam ser organizadas em intervalos de classes de mesma amplitude que poderiam corresponder a 0,020 Kg. As frequências de cada intervalo são chamadas de frequência de classe (KENDALL, YULE, 1948). Neste caso, estes autores estão utilizando o termo frequência no sentido de efetivos absoluto. Assim, poderíamos utilizar o termo efetivo como utilizado por Régnier (2007), designando assim efetivo de classe, não recaindo na dúvida se trata de frequência absoluta ou relativa. O efetivo de classe é composto por todos os indivíduos considerados na pesquisa, cujas medidas correspondessem às incluídas no intervalo de classe. As variáveis discretas determinam a sua amplitude de classe. Assim, se contarmos o número de quartos por casa, o intervalo de classe é um quarto (KENDALL; YULE, 1948).

Ao tratarmos de variável e classe, também descrevemos a importância de se trabalhar com intervalos. A seguir trataremos deste tema.

[12] Isso pode ser visto com mais detalhes na teoria dos atributos (KENDALL e YULE, 1948).
[13] Essa classificação observamos em Kendall e Yule (1948). O termo original em inglês usado por estes autores é "class-interval" para designar cada intervalo.
[14] O termo "amplitude de classe", segundo Régnier (2007), corresponde à largura de um intervalo. Assim, a amplitude do interval [0,020 kg; 0,040 kg[é 0,040 kg – 0,020 kg = 0,020 kg (no exemplo das maçãs). Kendall e Yule (1948, p. 110) utilizam o termo "largura do intervalo de classe" (width of class-interval).

2.1.3. INTERVALO

Uma forma utilizada pelos matemáticos para representar um intervalo é apresentada a seguir:

[10; 20] – fechado em 10 e 20 ou podemos dizer que: $x \in [10; 20] \rightarrow 10 \leq x \leq 20$.

]10; 20] – aberto em 10 e fechado em 20, logo: $x \in]10; 20] \rightarrow 10 < x \leq 20$.

[10; 20[- fechado em 10 e aberto em 20, logo: $x \in [10; 20[\rightarrow 10 \leq x < 20$.

]10; 20[- aberto em 10 e 20, então: $x \in]10; 20[\rightarrow 10 < x < 10$.

Podemos encontrar o uso em diversos livros de matemática. Esta forma permite determinar com precisão o que entra ou não em um dado intervalo. Régnier apresenta esta notação matemática e esclarece como determinar o centro do intervalo:

Tabela 4 – Valor da variável e centro do intervalo (RÉGNIER, 2010, p.48, tradução nossa).

Valor da variável	$[x_1, x_2[$	$[x_2, x_3[$	...	$[x_k, x_{k+1}[$	...	$[x_p, x_{p+1}[$
Centro do intervalo	$c_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$c_1 = \frac{x_2 + x_3}{2}$		$c_1 = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$		$c_1 = \frac{x_p + x_{p+1}}{2}$

Kendall e Yule (1948, p.105), utilizam outro símbolo, no qual desconsidera a necessidade de identificar se o intervalo é fechado ou aberto, uma vez que isto não é levado em conta no cálculo do centro do intervalo. Assim, estes autores apresentam a seguinte notação (extraímos de uma tabela apresentada pelos mesmos):

90 – 120

120 – 130

Essa mesma forma de notação é apresentada em outras obras e/ou autores como Kendall e Stuart (1977), Dehon, Droesbke e Vermandele (2008), Mann (2006), Spiegel (1993), Levin e Fox (2004), Batanero (2001), Carvalho (2006).

Observamos em Cazorla e Santana (2010, p. 25) uma combinação destas duas notações:

[2,0 – 3,0[

[3,0 – 4,0[

Em documento oficial da Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 1993, p. 22) temos outra notação na qual é indicada qual extremidade do intervalo é aberta ou fechada:

$w \vdash z$ que segundo o documento representa “w a menos de z”;

Ou ainda:

$w \dashv z$ que indica “mais de w a z”.

Podemos observar a adoção desta norma do IBGE em: Novaes e Coutinho (2009, p.74):

$0 \vdash 12$

$12 \vdash 24$

Outro tópico que consideramos relevante tratar é o gráfico de barras e o histograma.

2.1.4. GRÁFICO DE BARRAS E DO HISTOGRAMA

Existem diversas formas de representação gráfica de dados, dentre estas destacamos três apresentados por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008):

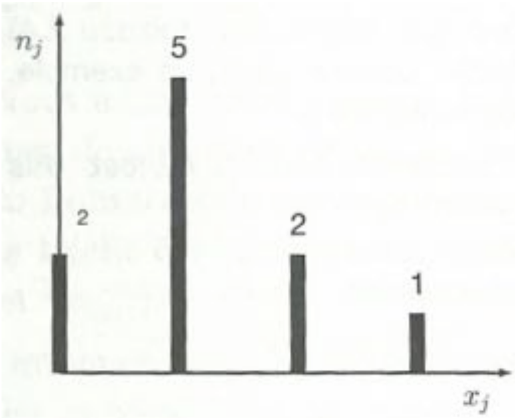
- Diagrama de bastões (no original em francês “diagramme en bâtons”)[15] ;
- Diagrama em barras ou colunas (no original em francês “diagramme en barres ou en tuyaux)[16];
- Histograma dos efetivos ou das frequências (em francês “histogramme des effectifs ou des fréquences”).

As duas primeiras são aplicadas em variáveis discretas. A terceira é utilizada em variáveis contínuas. Dentro dessa classificação, o gráfico de bastões é constituído por segmentos perpendiculares ao eixo da abscissa constituído pelos valores das variáveis (x_J) cuja espessura não tem nenhum sentido estatístico e cuja altura depende dos valores dos efetivos no eixo das ordenadas (n_j). No gráfico 1, temos um exemplo desse tipo de gráfico.

[15] Podemos observar em Cazorla e Santana (2010) o uso do termo “gráfico de bastões”.

[16] A tradução literal seria diagrama em barras ou tubos. Observamos o seu uso em textos no Brasil, como “gráfico de barras ou diagrama de barras” (MANN, 2006), “gráficos de barras” (LEVIN e FOX, 2004) e “gráfico de barras ou colunas” (CAZORLA e SANTANA, 2010).

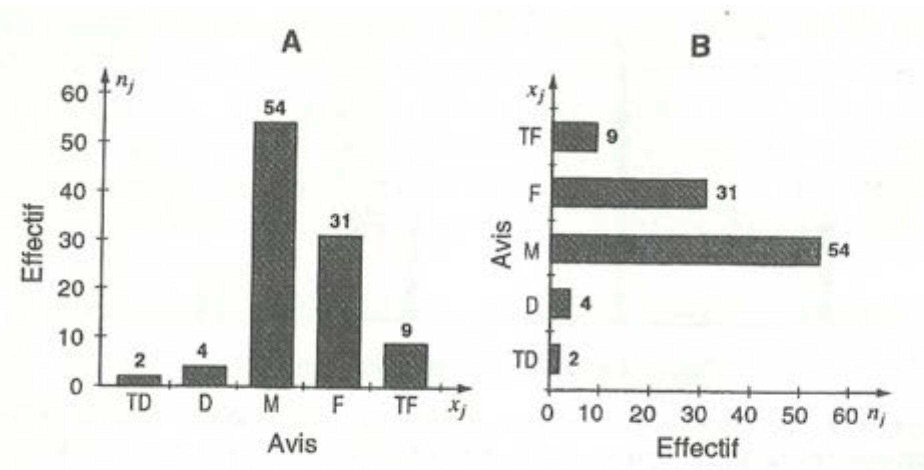
Gráfico 1 – Gráfico de bastões



Fonte: Imagem de Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p.40).

Os gráficos de bastões são recomendados por estes autores para variáveis quantitativas. Para variável qualitativa em que a diferença entre dois valores não tem significado, estes autores indicam que pode-se usar o gráfico de barras. No lugar de um segmento, o gráfico de barras é constituído por retângulos, que como o anterior a sua largura, não tem nenhuma significação estatística. No gráfico 2, temos o exemplo de dois gráficos de barras referentes a um aviso pedagógico: muito desfavorável (TD), desfavorável (D), médio (M), favorável (F) e muito favorável (TF). O primeiro com barras verticais (A) e o segundo com barras horizontais (B). Como se trata de uma variável qualitativa ordinal é necessário ordenar a apresentação dos dados.

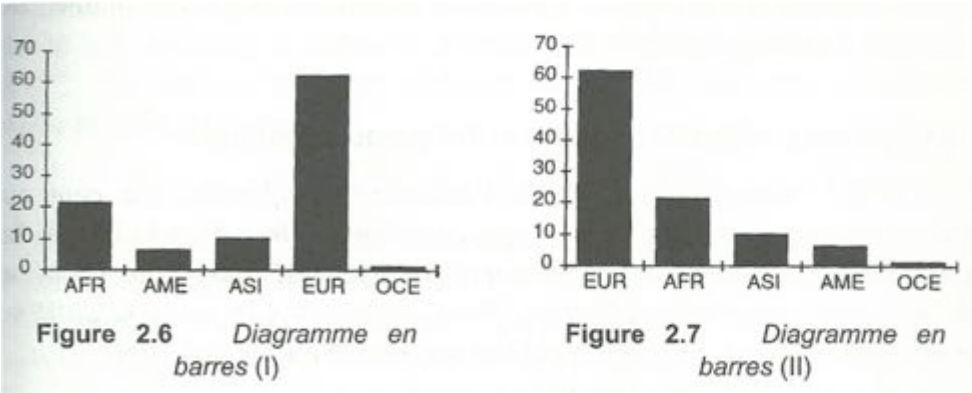
Gráfico 2 – Gráfico de barras vertical (A) e horizontal (B).



Fonte: Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p.42).

No gráfico 3, temos uma variável qualitativa nominal, na qual não existe uma ordem na apresentação das colunas, assim temos dois gráficos com ordens diferentes de apresentação. Trata-se da distribuição da origem geográfica (África, América, Ásia, Europa, Oceania).

Gráfico 3 – Gráfico de barras I e II da mesma variável qualitativa nominal.



Fonte: Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p.43).

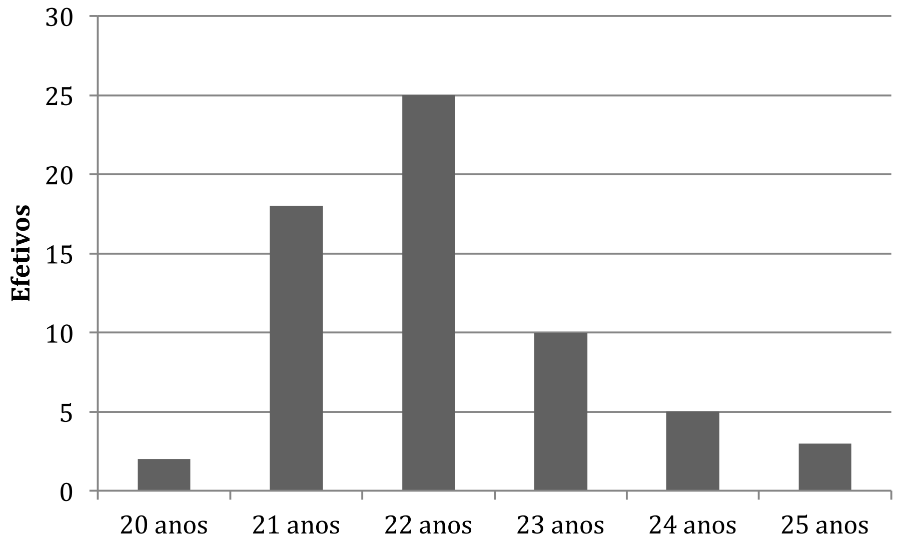
Podemos também ver essa forma de classificação em outros autores, como em Dodge (2007b) que acrescenta outras subcategorias como gráfico de barra simples, gráfico de barras múltiplas (para comparar diversas variáveis), gráfico de barras compostas. Contudo não existe um consenso. Régnier (2007) utiliza apenas o termo 'diagramme en bâtons' (diagrama de bastões) em que aplica tanto para variáveis quantitativas discretas como variáveis qualitativas, cuja representação equivale ao diagrama de barras para Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008). Régnier também considera que a largura dos retângulos não tem sentido estatístico. Contudo, ele esclarece que a altura é proporcional tanto ao efetivo (como usado por DEHON, DROESBEKE e VERMANDELE, 2008), como também a frequência. Tomando por base a definição de Régnier, apresentamos um gráfico de barras para variável quantitativa discreta (gráfico 4) construído com base nos dados da tabela 5. Uma outra proposição que vai em oposição às classificações apresentadas é a de Kendall e Yule (1948) que consideram o diagrama de coluna ou histograma como a mesma coisa.

Tabela 5 – Idade dos empregados de uma empresa A.

	Idade (em anos)					
	20	21	22	23	24	25
Efetivos	2	18	25	10	5	3

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Gráfico 4 – Idade dos empregados de uma empresa A.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Outra forma de representação é através do histograma. Segundo Dodge (2007a) um histograma é uma representação gráfica para uma distribuição de dados agrupados, sendo formada por um conjunto de retângulos. Esse autor acrescenta que a base do retângulo está associada ao intervalo de cada classe e a superfície do retângulo representa a frequência de cada classe. Desta definição vem um primeiro questionamento: Dodge classifica a frequência em absoluta e relativa. Então de que frequência ele trata ao definir a superfície do retângulo? Podemos tentar responder esta dúvida observando a representação de histograma feita por este autor. Na tabela 6[17], temos os dados apresentados por Dodge (2007a) para construção de um histograma. Ele não faz uma distinção na tabela entre frequência absoluta e relativa. Pelos dados percebe-se que se trata de frequência absoluta. No gráfico 5, temos a representação do histograma segundo este autor.

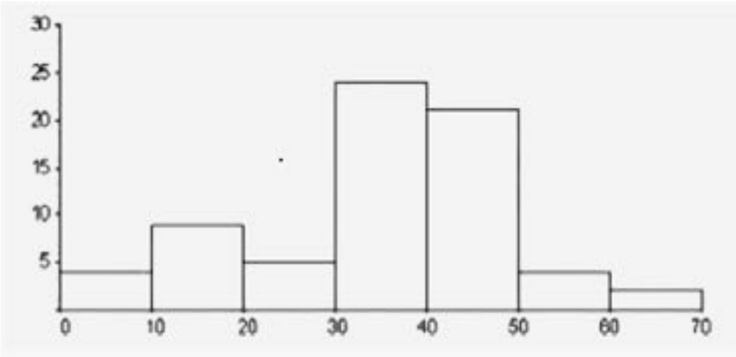
Tabela 6 – Tabela com dados do histograma do gráfico 5.

Classes	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	Total
Frequência	4	9	5	24	21	4	2	69

Fonte: elaborado pelo autor da tese com base nos dados apresentados por Dodge (2007a) para exemplificar o uso do histograma.

[17] Os termos usados nesta tabela, como também a organização dos intervalos, foram reproduzidos como apresentados pelo autor com a tradução para o português.

Gráfico 5 – Histograma segundo Dodge.



Fonte: Dodge (2007a, p.238).

No gráfico 5, Dodge utiliza no eixo vertical as frequências absolutas e no eixo horizontal os intervalos de classe. Se calcularmos a área de cada retângulo, não teremos nem a frequência absoluta (já indicada no eixo vertical) nem tampouco a frequência relativa, pois neste caso a área seria o produto da frequência absoluta (efetivos) pelo intervalo da classe. Esse tipo de problema se repete com outros autores. A resposta a este problema vamos encontrar em Régnier (1998b). Este autor faz um levantamento histórico e procura uma solução matemática para o que seria o histograma. Tomaremos então como referência a definição de Régnier (2007, p.7) que afirma que o histograma de uma variável contínua é uma "representação gráfica delimitada por uma curva de densidade de frequência, onde a superfície representa a frequência". Para explicitar o uso desta definição, tomamos uma tabela encontrada em Régnier (2012) que a reproduzimos com a tradução dos termos na tabela 7. Na figura 5, mostraremos como determinar cada retângulo do histograma. A área de cada retângulo corresponde à frequência que é obtida dividindo o número de efetivos em cada intervalo pelo total de efetivos. A base do retângulo é definida pelo intervalo e a altura (necessário à construção do mesmo) pela densidade de frequência, ou seja, pela divisão da frequência pelo intervalo. No gráfico 6, temos a representação do mesmo. Para construir no Excel, observamos que essa planilha eletrônica utiliza histograma e gráfico de barras como se fossem a mesma coisa. Assim ela representa o histograma como gráfico de barras, deixando de representar o que Régnier (1998b) chama de histograma como também o que outros pesquisadores a exemplo de Dodge (2007a) chamam de histograma. Usamos então um software de desenho vetorial chamado iDraw[18] para representar o histograma referente aos dados da tabela 7.

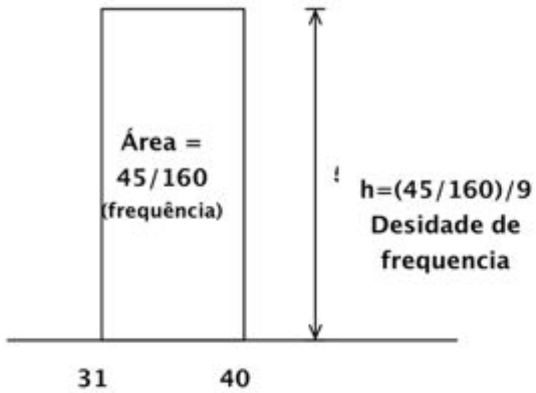
[18] Copyright © 2009-2013 Indeeo, Inc.

Tabela 7 – Idade dos visitantes de uma homepage

Intervalos (anos)	Amplitude	Efetivos (pessoas)	Frequência	Densidade de frequência
[20; 31[	11	11	0,06875	0,00625
[31; 40[	9	45	0,28125	0,03125
[40; 50[	10	54	0,33750	0,03375
[50; 60[	10	36	0,22500	0,0225
[60; 70[	10	14	0,08750	0,00875
Total		160	1,00000	

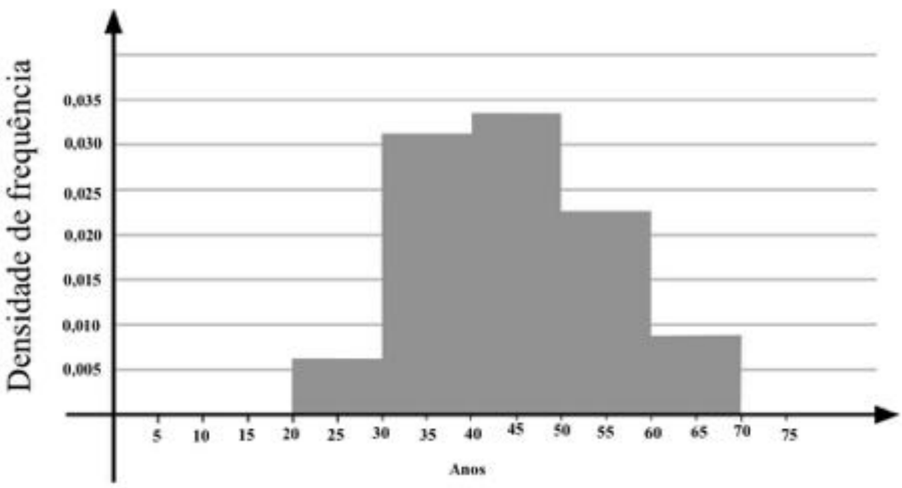
Fonte: Régnier (2012, tradução nossa).

Figura 5 – Determinação das medidas do retângulo do histograma referente ao intervalo [31; 40[.



Fonte: elaborado pelo autor desta tese.

Gráfico 6 – Histograma da idade dos visitantes de uma homepage.

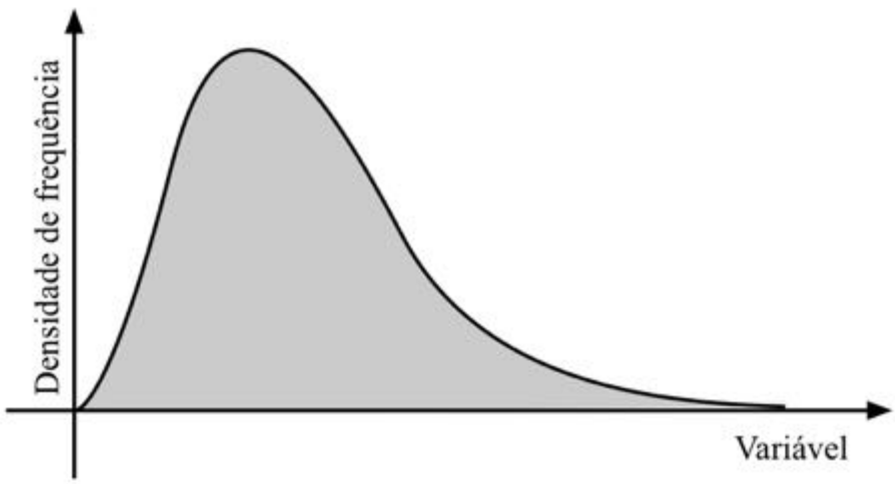


Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Destacamos que a representação do histograma não se deve limitar à forma de um retângulo (RÉGNIER, 2007). Quando tratamos de variável contínua, o histograma representa a frequência em área (figura 6). Na figura 6, temos um histograma de uma variável quantitativa contínua. Kendall e Yule (1948, p. 121-122) esclarecem que:

> Se tomarmos a amplitude de classes cada vez menor, e se ao mesmo tempo o número de observações for aumentando de modo que as frequências de classes possam permanecer finitas, o polígono e o histograma se aproximarão cada vez mais de uma curva regular. Este limite ideal do polígono ou do histograma é chamado de curva de frequência [...] Na curva de frequência a área compreendida entre duas ordenadas quaisquer é proporcional ao número de observações existentes entre os valores correspondentes da variável".

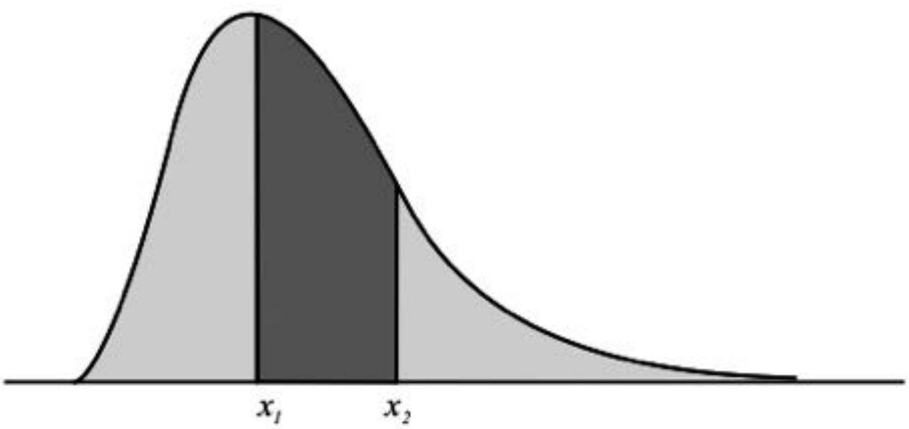
Figura 6 – Histograma de uma variável contínua.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Na figura 7, exemplificamos esta citação. O número de observações na área entre x_1 e x_2 é proporcional à área hachureada.

Figura 7 – Histograma: área proporcional ao número de observações existentes no intervalo.



Fonte: desenho nosso tendo por base um desenho de Kendall e Yule (1948, p. 121).

2.1.5. O EMPREGO DAS UNIDADES

Ao tratar das medidas de tendência central e de dispersão, destacamos que as mesmas empregam as unidades das variáveis empregadas. Assim se estamos falando do salário médio de um trabalhador em uma empresa brasileira, podemos ter como média de uma empresa fictícia que chamaremos de empresa D, um salário médio de 1.052,63 reais e como variância $231.966{,}76\, reais^2$. Qual o sentido de $reais^2$? Do ponto de vista dos cálculos, faz sentido uma vez que elevamos ao quadrado os valores no procedimento de cálculo. Contudo não existe uma grandeza em $reais^2$. Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008, p. 122) destacam que a variância eleva ao quadrado as variáveis utilizadas, como por exemplo, "o quilo ao quadrado", isto pode causar dificuldades de interpretar o que não acontece com o cálculo do desvio padrão, uma vez que extraída a raiz quadrada, as unidades voltam a ser as mesmas das variáveis.

Outra questão que consideramos relevante é o cálculo da média. Ao dividirmos a soma dos salários da empresa D pelo número de funcionários, podemos considerar como média 1.052,63 reais/funcionário. Consideramos que se dividirmos o total de salários de forma equitativa, cada funcionário receberia 1.052,63 reais. Contudo se esta forma de representar fosse levada em consideração, teríamos um problema do ponto de vista dos cálculos. Para exemplificar isso consideramos o cálculo da variância da empresa D (fórmula 53).

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{k=1}^{k=p} n_k (x_k - m)^2$$

Não se pode subtrair valores com unidades diferentes. Neste caso, como subtrair $x_k\, reais - m\ reais/funcionário$? Assim se considerarmos os efetivos totais com sua unidade, por exemplo N= 19 funcionários, teremos problemas para o emprego deste no cálculo da variâncias, do desvio padrão etc. Contudo se considerarmos como o número total de efetivos sem unidade, não teremos problemas nos cálculos. Esta implicação nos leva a afirmar que seria inadequado falar da média dos salários da empresa D como sendo 1.052,63 reais/funcionário e sim tratar como sendo 1.052,63 reais.

2.1.6. O EMPREGO DO SÍMBOLO DE SOMATÓRIO

Um símbolo bastante utilizado em muitas fórmulas que tratam das medidas de tendência central e de dispersão é o símbolo de somatório. Este símbolo não é apresentado da mesma forma por diferentes autores, assim achamos conveniente fazer uma breve apresentação dele. Utiliza-se a letra grega maiúscula sigma Σ para indicar somatório.

Observamos em Kendall e Yule (1948) na apresentação da fórmula da média aritmética[19] a seguinte fórmula:

$$M = \frac{1}{N}\sum(X)$$

Nesta temos a indicação de um símbolo para indicar o somatório de todas as observações, que correspondem a todos os valores da variável X. Observamos o emprego dessa forma de representar o somatório em vários autores a exemplo de Mann (2006), Spiegel (1993) etc. Uma outra fórmula de apresentar o somatório podemos observar em Régnier (2007):

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N} o_i = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k x_k = \sum_{k=1}^{k=p} f_k x_k$$

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} o_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=p} n_k x_k = \sum_{k=1}^{k=p} f_k x_k$$

Em primeiro lugar este autor faz uma distinção entre média de amostra (m) e população (μ) . Sendo assim N para o total de observações da população e n para amostra. No lugar de apenas indicar que é um somatório como nos outros autores citados, temos a indicação de que elementos são somados. Assim temos as observações que serão somadas, estas numeradas da primeira observação (i=1) até a última observação (i=N ou i=n) que corresponde ao total de observações. O termo i corresponde aos indivíduos que são observados em cada variável. Ela serve para indicar qualquer observação da série, da primeira observação (1) à última observação (N). Ele é chamado de índice (SPIEGEL, 1993). O índice pode ser qualquer símbolo, como i, j, k, p ou q. Nas duas fórmulas seguintes de Régnier observamos o uso de p para indicar em uma ordem crescente o valor da maior observação,

---

19 Não vamos numerar as fórmulas, uma vez que as apresentaremos outra vez quando tratarmos do uso destas junto aos temas apresentados

como vários indivíduos podem ter a mesma observação, p não corresponde na maioria dos casos ao total de observações. Ele usa k para todos os valores que a variável possa assumir do menor valor k=1 ao maior valor k=p. Tomemos como exemplo duas séries, que chamaremos de série A e B, com as seguintes observações: A={1; 2; 3; 4; 5} e B= {1; 2; 2; 4; 4}.

Na primeira série temos 5 observações: $\mathrm{o}_1 = 1;\ \mathrm{o}_2 = 2;\ \mathrm{o}_3 = 3;\ \mathrm{o}_4 = 4;\ \mathrm{o}_5 = 5$. Na segunda série temos também 5 observações: $\mathrm{o}_1 = 1;\ \mathrm{o}_2 = 2;\ \mathrm{o}_3 = 2;\ \mathrm{o}_4 = 4;\ \mathrm{o}_5 = 4$. Podemos então, usando a primeira fórmula, fazer o somatório dos termos:

$$Série\ A: m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} o_i = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = \frac{1}{5}\cdot 15 = 3$$

$$Série\ B:\ m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} o_i = \frac{1}{5}(1+2+2+4+4) = \frac{1}{5}\cdot 13 = 2{,}6$$

Com uma série bastante reduzida como está, pode-se utilizar esta fórmula, contudo quando temos um número maior de elementos é preferível utilizar a outra fórmula para o cálculo da média. Tomemos como exemplo a série B, considerando que em $\mathrm{x_k}$ k varia do menor valor k = 1 ao maior valor k = p = 3, temos: $\mathrm{x}_1 = 1;\ \mathrm{x}_2 = 2;\ \mathrm{x}_3 = 4$. Quanto ao número de efetivos, temos: $\mathrm{n}_1 = 1;\ \mathrm{n}_2 = 2;\ \mathrm{n}_3 = 2$. Aplicando a segunda fórmula temos:

$$Série\ B:\ m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} n_k x_k = \frac{1}{5}[(1\times 1) + (2\times 2) + (2\times 4) = \frac{1}{5}\cdot 13 = 2{,}6$$

Podemos calcular usando a frequência e usar a terceira fórmula:

$$Série\ B:\ m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} f_k x_k = \left[\left(\frac{1}{5}\cdot 1\right) + \left(\frac{2}{5}\cdot 2\right) + \left(\frac{2}{5}\cdot 4\right)\right] = 0{,}2 + 0{,}8 + 1{,}6 = 2{,}6$$

Quando as frequências já estão calculadas nas tabelas, o uso da terceira fórmula fica ainda mais prático. Consideramos relevante tratar do somatório, uma vez que o uso que se faz do mesmo na estatística, como exemplificado, pode gerar erros de procedimentos de cálculo como apresentados ao tratar dos intervalos.

A seguir trataremos do objeto do saber que será investigado, tomando como referência os termos descritos nesta seção.

2.2. AS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO

Uma forma de agrupar os dados de uma população é apresentá-los através de uma distribuição de efetivos. Algumas vezes, porém, queremos simplificar ainda mais essa forma de apresentação para comparar duas séries. Kendall e Stuart (1977) esclarecem que devemos ficar atentos ao comparar duas distribuições. Ao cotejá-las podemos observar duas características essenciais que levam à diferenciação acentuada entre elas, pela sua posição e dispersão (KENDALL; YULE, 1948). No primeiro caso, temos uma mudança no valor da variável em torno da qual se concentra os efetivos.

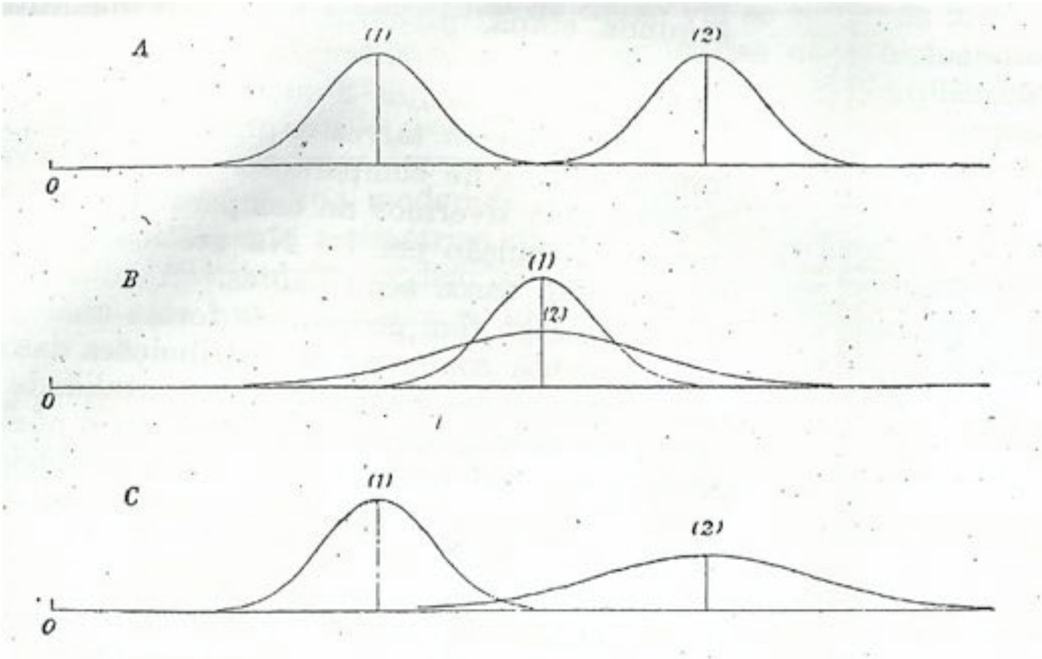
Ao comparar duas séries, por exemplo: {1; 2; 3; 4, 5} e {7, 8, 9, 10, 11} temos como valores centrais 3 (media aritmética e mediana) para a primeira série e 9 (media aritmética e mediana) para a segunda série. Neste exemplo, podemos usar a posição para comparar estes valores centrais. Contudo ao comparar as séries ordenadas {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 } e {3; 3; 3; 4; 5; 5; 5} observamos que ambas possuem a mesma média aritmética e mediana, contudo a primeira é mais dispersa que a segunda (DEHON, DROESBEKE, VERMANDELE, 2008). Dessa forma, faz-se necessário ao comparar duas séries observar não apenas a posição, como também a dispersão.

Kendall e Yule (1948) ao comparar duas séries exemplificam três situações:

- Exemplo 1: duas séries com mudanças nos valores em torno da medida de posição;
- Exemplo 2: duas séries com a mesma medida de posição, mas com dispersões diferentes;
- Exemplo 3: duas séries com mudanças nas medidas de posição e de dispersão.

Tomando como referência a figura 8, temos na letra A a primeira situação, na letra B a segunda e na letra C a terceira situação.

Figura 8 – Comparação de duas séries pela posição e pela dispersão: 3 exemplos.



Fonte: Kendall e Yule (1948, p. 142).

Kendall e Yule (1948) destacam que além das medidas de tendência central e de dispersão, existe um terceiro grupo de menor importância para estes pesquisadores (que não trataremos nesta pesquisa). Fazem parte deste terceiro grupo as diferenças de assimetria, de achatamento, entre outras.

2.3. MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

As medidas de posição mais usadas são a média aritmética, a mediana e a moda. Kendall e Yule (1948) destacam que além dessas medidas, existem outras menos usadas como a média geométrica e a média harmônica. Algumas dessas medidas de tendência central são conhecidas há muito tempo e antigos registros levam a supor que Pitágoras conheceu as médias aritmética, geométrica e harmônica com os babilônicos (BOYER, 1996). Segundo Stella (2003), os gregos no século II A.C. utilizavam a média aritmética para estimar a posição do centro das observações.

Quanto ao uso em inglês, temos em Kendall e Stuart (1977) o termo "mesurres of location" que poderíamos traduzir como medidas de locação ou ainda medidas de posição. Estes autores destacam que as medidas de posição mais comuns são as médias (means), que podem ser aritmética (arithmetic), geométrica (geometric) e harmônica (harmonic), a mediana (median) e a moda (mode). Observamos como nota de tradução do livro de Kendall e Yule

(1948) para o português que o termo em inglês "average" corresponde também à média (means), contudo tem um uso mais popular, menos preciso e mais geral e pode significar qualquer medida de locação e corresponde em espanhol a promedio. Freund (1967) coloca que as medidas de locação (measure of location) podem ser também chamadas de medidas de tendência central (measures of central tendencies), medidas de valores centrais (measures of central values) e medidas de posição (measures of position). Este esclarece que de forma grosseira estas medidas podem ser chamadas também de "averages" no sentido "que proporciona um número que indica o 'centro, o meio, ou o mais típico' de um conjunto de dados" (tradução nossa, p. 30).

Batanero (2001) utiliza em espanhol o termo "medidas de posición central" (medidas de posição central) para designar em espanhol: "moda" (moda), "media" (média), "mediana" (mediana), "percentiles" (percentis) e "rangos de percentiles" (classe de percentis). Esta pesquisadora usa o termo "promedio" (meio, media) para designar a média, a moda e a mediana. Consideramos inadequada a posição desta autora de classificar os percentis como medidas de posição central, uma vez que não se caracterizam como uma posição central.

Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) empregam o termo em francês "valeur central" (valor central) esclarecendo que se trata de um valor característico chamado de valor típico, indicador ou parâmetro. Esses autores usam em francês "valeurs centrales" ou "position" ao tratar das medidas de tendência central.

Dodge (2007a) utiliza o termo em francês "mesure de position" ou de "location" apresentando como equivalente em inglês ao termo "measure of location" (que traduzimos por medida de posição ou de locação) para designar uma medida que procura sintetizar um conjunto de dados por um valor fixo. Este autor procura distinguir duas medidas de posição mais frequentes:

1. "Mesure de tendance centrale" (medidas de tendência central) representada pela media aritmética, mediana e moda e utilizadas para determinar o centro de um conjunto de dados;
2. Os "quantiles" (quantis[20] ou separatrizes), segundo Dodge (2007a) não representa necessariamente o centro (como a mediana/segundo quartil) de uma distribuição de observações ordenadas, mas uma posição particular. Podemos determinar, dessa forma, diferentes divisões de um conjunto de dados, os mais comuns são os quartis (em francês quantiles), os decis (em francês décile) e os percentis (em francês

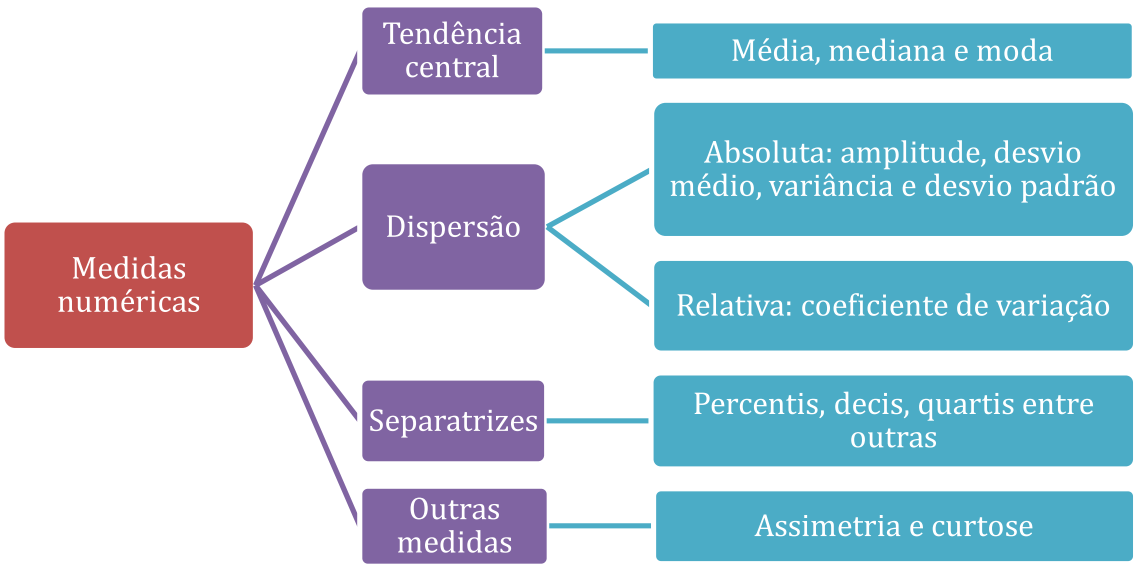
[20] Tradução do francês "quantiles". Segundo Ferreira (2008) o quartil pode representar qualquer separatriz.

centiles). Estas dividem os dados respectivamente em quatro partes, em dez partes ou em cem partes.

Consideramos esta forma de organizar proposta por Dodge mais adequada do que a proposta por Freund (1967), uma vez que as medidas separatrizes indicam a posição e não podem ser consideradas necessariamente como uma medida de tendência central. Assim não achamos adequado considerar os termos “medida de tendência central” e “medidas de posição” (ou locação) como equivalentes.

Cazorla e Santana (2010) agrupam a média, moda e mediana em tendência central e os percentis e quartis em medidas de posição. Achamos mais adequado usar o termo medida separatriz (NOVAES; COUTINHO, 2009) ou para os percentis e quartis do que de posição, uma vez que as medidas de tendência central poderiam ser vistas como medida de posição (posição central). Embora a mediana também possa ser considerada como uma medida separatriz (corresponde ao segundo quartil – Q2), ela se difere das outras por dividir a distribuição em duas partes iguais e se posicionar em alguns casos ocupando a mesma posição da média e da moda. Na figura 9, procuramos distinguir as medidas de tendência central e de dispersão de outras medidas numéricas e posicionamos a mediana enquanto medida de tendência central.

Figura 9 – Medidas numéricas.



Fonte: elaboramos o esquema acima fazendo algumas pequenas modificações no apresentado por Cazorla e Santana (2010, p. 17).

Kendall e Yule (1948) propõem seis condições que devem ser satisfeitas pelas medidas de tendência central:

1. Deve ser rigorosamente definida. Ela não deve ser estimada pelo observador, pois neste caso dependeria do observador e dos dados;
2. Deve ser baseada em todas as observações realizadas. Caso contrário não corresponderia a uma propriedade de toda distribuição;
3. Ela não deve ter uma natureza matemática excessivamente abstrata. Deve possuir propriedades simples e óbvias facilitando a sua compreensão;
4. Deve-se procurar uma maneira mais fácil de elaborar um cálculo, sem contudo comprometer a qualidade do mesmo;
5. Deve sempre que possível não ser influenciada pelas flutuações da amostra. Ao calcular uma medida de tendência central de diferentes amostragens, deve-se observar as diferenças entre os diferentes valores para cada amostra. O valor que possui menores diferenças, entre os demais, deve ser considerado como mais estável e desejado;
6. Deve-se permitir um tratamento algébrico mais fácil. Por exemplo, quando temos que calcular a média combinada de material semelhante, esta deve ser facilmente calculada em função das suas parcelas. Quando isso não ocorre ela tem uma aplicação limitada.

A média, a mediana e a moda atendem a estas condições. Das medidas de tendência central, a mais usada é a média aritmética que trataremos a seguir.

2.3.1. MÉDIA ARITMÉTICA

A média aritmética ou simplesmente média[21] é uma das medidas de tendência central mais antigas e possui um emprego bastante comum em artigos de publicações científicas, em jornais, em noticiários da televisão, na publicidade etc.

A média aritmética atende às seis condições das medidas de tendência central explicitadas por Kendall e Yule (1948) descritas na seção anterior. A média é rigorosamente definida em função de todas as observações feitas, dessa forma, ela atende à primeira

[21] Em inglês mean ou ainda arithmetic para diferenciar de média geométrica ou harmônica. Em francês se utiliza o termo moyenne e em espanhol media.

condição. Ela também atende à segunda condição, uma vez que para o seu cálculo deve-se somar todas as observações e dividi-las pelo total de observações. Esta característica faz também que a mesma não seja de natureza demasiadamente abstrata, atendendo à terceira condição e que atenda também à quarta condição pela sua simplicidade de cálculo. Ela atende à quinta condição, embora esteja sujeita à influência de valores extremos. E por fim atende à sexta condição, pois permite um tratamento algébrico fácil.

Segundo Dodge (2007a, p. 358, tradução nossa) "é uma medida de tendência central que permite caracterizar o centro da distribuição de frequência de uma variável quantitativa considerando todas as observações e lhes atribuindo o mesmo peso (em oposição à média aritmética ponderada)". Alguns dos elementos dessa definição serão explorados a seguir.

A média aritmética, em geral, pode ser obtida pela soma de todas as observações, sendo dividida pelo total destas. Essa definição pode ser vista em diversos autores como Kendall e Yule (1948). Estes autores apresentam a fórmula da média aritmética:

$$M = \overline{X} = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n) = \frac{1}{N}\Sigma(X) \quad (2)$$ [22]

Fórmula 2: Média aritmética conforme Kendall e Yule (1948, p. 143).

Estes autores não fazem uma distinção nesta fórmula da média da amostra para a média da população. Temos uma representação muito próxima em Spiegel (1993):

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_N}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_j}{N} = \frac{\Sigma X}{N} \quad (3)$$

Fórmula 3: Média aritmética conforme Spiegel (1993, p. 67)

Em Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) temos outra fórmula para média aritmética. Eles apresentam duas fórmulas da média aritmética de uma série estatística para uma série não ordenada (4) e para uma série ordenada (5). O fato de ser ordenada ou não, não importa neste caso, sendo o resultado o mesmo. Se você soma todos os números da série que estão ordenados ou não obtêm o mesmo resultado.

[22] Onde $\sum(X)$ representa o somatório de todos os valores em que a variável X assume na série.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (4)$$

Fórmula 4: Média aritmética para série estatística não ordenada segundo Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 76).

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} \qquad (5)$$

Fórmula 5: Média aritmética para série estatística ordenada segundo Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 76).

Podemos observar em Mann (2006) uma distinção entre a média da população para a média da amostra. Este autor utiliza o símbolo μ para média aritmética de dados de população e $\bar{x}$ para média aritmética de dados de amostra, N para população (o número total de elementos estudados) e n para amostra (uma parcela da população). Dessa forma, temos:

$$\mu = \frac{\sum x}{N} \qquad (6)$$

Fórmula 6: Média aritmética para dados de população, segundo Mann (2006).

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \qquad (7)$$

Fórmula 7: Média aritmética para dados de amostra, segundo Mann (2006)

Podemos observar em Régnier (2010) outra forma de apresentar a fórmula da média da população (fórmula 8) e média da amostra (fórmula 9). Nos dois casos, a média se dá pela soma de todas as observações dividida pela população (N) ou pela amostra (n). Tal como Mann, Régnier faz uma distinção da média da população para média da amostra.

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N} o_i \qquad (8)$$

Fórmula 8: Média aritmética para dados de população segundo Régnier (2007, p. 9).

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} o_i \qquad (9)$$

Fórmula 9: Média aritmética para dados de amostra segundo Régnier (2007, p. 9).

Apresentamos a seguir algumas propriedades para a média aritmética:

PROPRIEDADE (m) 1. A média aritmética é influenciada por valores extremos.

Das três medidas de tendência central mais utilizadas (média, mediana e moda), a média é a que é influenciada por valores extremos. Dependendo da quantidade de valores extremos e do valor destes valores em relação aos demais, a média aritmética pode não ser a medida de tendência central mais adequada para determinar o centro dos dados.

PROPRIEDADE (m) 2. A soma dos desvios em relação à média, considerando os seus respectivos sinais é nula (propriedade apresentada por KENDALL; YULE, 1948).

Esta propriedade também é apresentada por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p.78, tradução nossa) que utiliza a expressão "soma dos valores centrais é nula" considerando como valores centrais a diferença de cada valor da série e a média ($x_i - \bar{x}$). Levin e Fox (2004) chamam de desvio a diferença de cada valor em relação à média e representam por $Desvio = X - \bar{X}$. Isto pode ser assim expresso:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0 \qquad (10)$$

Fórmula 10: Soma dos desvios em relação à média (DEHON;DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.78).

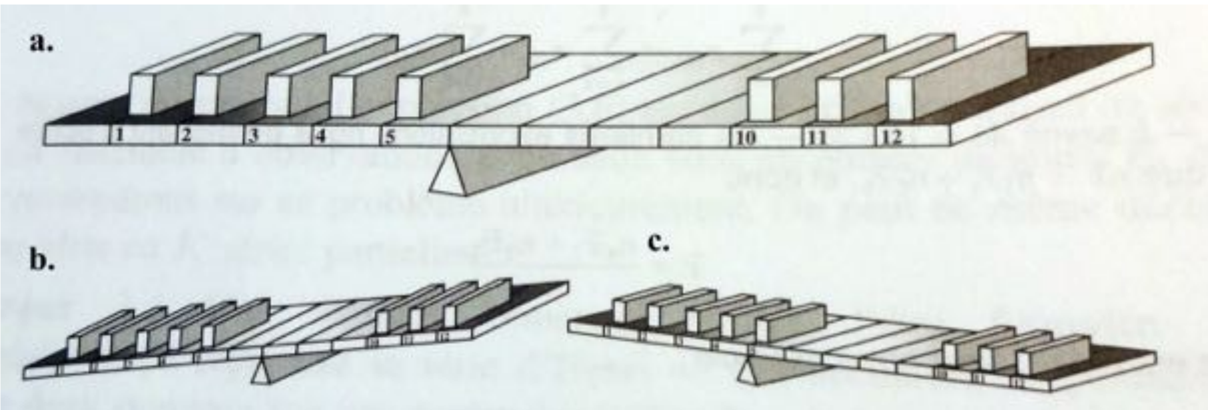
Podemos exemplificar isto com a série {1; 2; 3; 4; 5, 10; 11; 12} de média aritmética 6. Se subtrairmos a média de cada valor, teremos: {1-6; 2-6, 3-6, 4-6, 5-6, 10-6, 11-6, 12-6} = {-5, -4, -3, -2, -1, 4, 5, 6} se somarmos teremos como valor 0.

PROPRIEDADE (m) 3. A média aritmética como ponto de equilíbrio.

Outra forma de interpretar esta propriedade consiste em dizer que a soma dos valores centrais positivos é compensado pela soma dos valores centrais negativos.

Podemos pensar a média como ponto de equilíbrio. Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008), para exemplificar esta propriedade, apresentam uma interpretação física utilizando para isso um conjunto de oito objetos com pesos idênticos colocados sobre uma balança de tal forma que a distância entre dois objetos seja igual à diferença entre os valores que eles representam. O ponto de equilíbrio da balança estará sobre a média aritmética, assim para que a balança esteja em equilíbrio, o fulcro da balança deverá se posicionar no local definido pela medida da média aritmética. Caso contrário, a balança tombará para a esquerda ou para direita. Na figura 10, no primeiro desenho (que indicamos pela letra a.) temos o fulcro da balança embaixo da marca correspondente à média aritmética (traço à direita do 5 que corresponde a 6). Na figura 10b o fulcro está sob a marca 7 e a balança aparece tombada para a esquerda. Na figura 10c o fulcro está sob a marca 5 e a balança é representada pendente para a direita.

Figura 10 – média como ponto de equilíbrio.



Fonte: Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008, p. 79).

Levin e Fox (2004) destacam que a média é o ponto de equilíbrio em uma série, uma vez que a soma dos desvios em valor absoluto abaixo da média é igual à soma dos valores acima da média. Tomando como exemplo a série apresentada {1; 2; 3; 4; 5, 10; 11; 12}. Temos como valores abaixo da média 1, 2, 3, 4 e 5 e como valores acima da média, temos 10, 11, 12. A tabela 8 apresenta uma síntese. A soma dos desvios em relação à média em valores absolutos (ou em módulo) é igual a soma dos desvios abaixo da média que corresponde a 15 para este exemplo.

Tabela 8 – A média como ponto de equilíbrio.

Valores abaixo da média			Valores acima da média		
x_i	$x_i - \bar{x}$	$\|x_i - \bar{x}\|$	x_i	$x_i - \bar{x}$	$\|x_i - \bar{x}\|$
1	-5	5	10	4	4
2	-4	4	11	5	5
3	-3	3	12	6	6
4	-2	2			
5	-1	1			
Soma		15	Soma		15

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

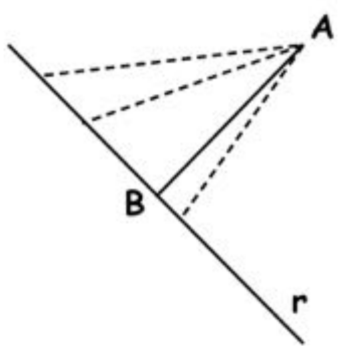
Esta ideia da média como ponto de equilíbrio é destacada por Régnier (2005). Este autor destaca a lei das compensações que se pode ver aplicada na média aritmética e é tratada por. A. Cournout em 1836. Trata-se de um ponto fundamental para a compreensão do conceito de média que vai muito além da simples aplicação do algorítmico cujo uso tem a ver em minimizar as variações.

PROPRIEDADE (m) 4. A média é o valor que está mais próximo de todos os valores.

Esta propriedade é ressaltada por Régnier (2013) ao tratar da distância. Assim este autor descreve a média de uma série como o valor que está a menor distância entre os demais valores de uma série. Um exemplo que utilizamos junto aos alunos para exemplificar o conceito de distância é o de distância entre um ponto e uma reta, como ilustra na figura 11. Podemos marcar a medida do ponto A em relação à reta, tomando inúmeros pontos da reta r, mas o menor comprimento corresponde à distância, representado pelo segmento $\overline{AB}$, este segmento forma um ângulo reto[23] com a reta r.

[23] Esta propriedade pode ser facilmente demonstrada. Ao traçarmos um círculo pelo ponto A, se o raio for menor que a distância de A a r, o círculo não passa por r. Se o raio for maior que a distância do que A a r, o círculo terá dois pontos em comum com r (secante). Se a medida do raio do círculo for igual à distância de A a r, o círculo será tangente a r e, neste caso, o raio formará um ângulo reto no ponto de tangência.

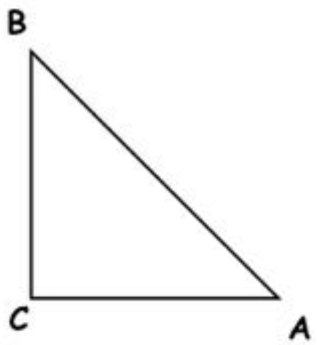
Figura 11 – Distância entre um ponto a uma reta.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Régnier (2013) apresenta dois exemplos de distância. A distância euclidiana entre dois pontos e a distância de deslocamento entre uma cidade. No primeiro caso (figura 12), tomemos dois pontos A e B. Tendo as medidas dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ podemos calcular a distância entre os pontos A e B pelo teorema de Pitágoras: $d_{AB} = \sqrt[2]{(d_{AC})^2 + (d_{CB})^2}$. Considerando as coordenadas dos pontos A $(x_A; y_A)$ e B $(x_b; y_B)$ poderíamos ainda obter a distância entre os pontos A e B por: $d_{AB} = \sqrt[2]{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

Figura 12 – Distância entre dois pontos.

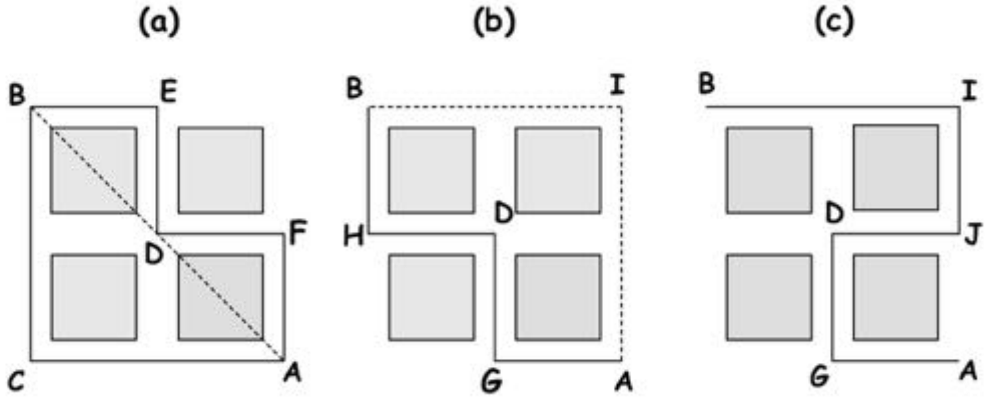


Fonte: elaborado pelo autor da tese.

No caso da distância de um percurso em uma cidade, Régnier (2013) esclarece que esta distância é a menor distância possível de percorrer. Exemplificamos isto na figura 13. Na figura 13, apresentamos em tracejado a distância entre A e B como a distância entre dois pontos na geometria euclidiana. Esta distância não seria a menor distância percorrida em uma cidade, uma vez que ninguém poderia atravessar os edifícios construídos. Em uma cidade plana com os traçados dos quarteirões ortogonais a menor distância seria dada pelos catetos do triângulo retângulo. No exemplo da figura 13 (a) esta seria dada por: $d = \overline{AC} + \overline{CB}$. Podemos pensar em outros percursos com medidas equivalentes:

$$d = \overline{AC} + \overline{CB} = (\overline{AF} + \overline{DE}) + (\overline{FD} + \overline{EB}) = (\overline{AG} + \overline{DH}) + (\overline{GD} + \overline{HB}) = \overline{IB} + \overline{AI}$$

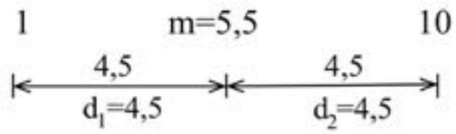
Figura 13 – Distância entre dois pontos no contexto de uma cidade.



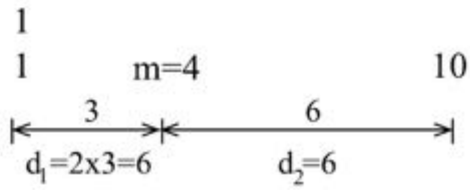
Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Existem também percursos que não correspondem ao menor percurso e que neste caso não se tratam da distância entre A e B, como o percurso: $\overline{AG} + \overline{GD} + \overline{DJ} + \overline{JI} + \overline{IB}$ (figura 13.c).

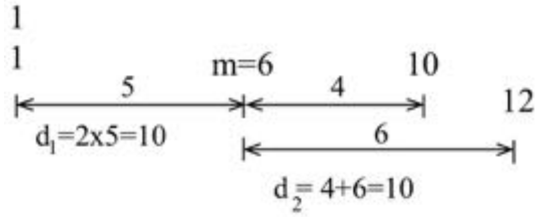
No caso da média temos também a menor distância entre dois pontos. Tomemos uma série formada de duas observações: {1; 10}. A média é 5,5. A distância entre as observações e a média é a mesma, ou seja, 4,5:



Considerando uma série formada por três observações: {1; 1; 10}. A média é 4, a distância entre a média e a observação com valores acima da média é igual a 6. A distância entre as duas observações com valores abaixo da média e a média são também de 6 (uma vez que cada observação está a uma distância de 6 em relação à média):



Tomemos uma série formada por quatro observações: { 1; 1; 10; 12} em que a média é 6. A distância das duas observações abaixo da média é igual a 10 (duas vezes a medida de cada observação que é igual a cinco). A medida das distâncias das observações acima da média em que a média também é igual a 10 (a distância em relação à terceira observação (4) mais a distância da quarta observação (6) é igual a 10).



Considerando uma série com um valor extremo em relação aos demais, como na série: {1; 1; 6; 24}. Neste exemplo, a média 8 ficou entre o valor extremo e os demais valores. A distância entre a média e o valor acima da média são 16 e a soma das distâncias entre os valores abaixo da média e a média também são 16:

A média é associada a uma grandeza. Para simplificar a apresentação desta propriedade, não indicamos a grandeza utilizada para as observações e consequentemente na média.

PROPRIEDADE (m) 5. A média dos desvios em relação à média aritmética, considerando os seus respectivos sinais é nula (RÉGNIER, 2011).

Tomando como base a propriedade na qual a soma dos desvios em relação à média é nula, se dividirmos a equação n.7 na qual apresentamos esta propriedade pelo número de observações (n), o resultado não se altera.

Dessa forma, pode-se afirmar a média aritmética dos desvios em relação à média será nula ou "os valores centrais possuem sempre uma média aritmética nula" (DEHON, DROESBEKE e VERMANDELE, 2008, p.80, tradução nossa). Apresentamos a seguir está fórmula.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x}) = 0 \qquad (11)$$

Fórmula 11: Soma dos desvios em relação à média (DEHON, DROESBEKE E VERMANDELE, 2008, p.80).

Régnier (2012) apresenta esta propriedade como uma das propriedades fundamentais em relação à média, pois não se trata apenas de dizer que ela é nula, mas de evidenciar que podemos ter os desvios médios em relação a um valor c qualquer, contudo o valor mínimo da média dos desvios é dada pelos desvios médios em relação à média aritmética como apresentado por Régnier na fórmula:

$$\boldsymbol{\bar{E}_c = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(x_k - c) = 0 \; se \; e \; somente \; se \; c = m} \qquad (12)$$

Fórmula 12: Soma dos desvios em relação à média (RÉGNIER, 2011a, p.20).

Considerando a série {2; 7; 7; 7; 8} temos:

$$\bar{E}_c = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(x_k - c) = \frac{1}{5}[1(2-c) + 3(7-c) + 1(8-c)$$

Quando c = m (média) temos:

$$\bar{E}_m = \frac{1}{5}[1(2-6{,}2) + 3(7-6{,}2) + 1(8-6{,}2)] = 0$$

Tomando por base esta propriedade acrescentamos outra que chamamos de propriedade 6.

PROPRIEDADE (m) 6. A média aritmética é o número real que minimiza o quadrado dos desvios de uma série (DODGE, 2007a).

Tomemos o quadrado da soma dos desvios de uma série em relação a um número real “a” qualquer. A soma dos desvios é mínima se “a” corresponde à média aritmética “$\bar{x}$”:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 \geq \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad (13)$$

Fórmula 13: Soma dos desvios em relação à média (DODGE, 2007a, p. 359).

Apresentamos a seguir a demonstração. Se somarmos e subtrairmos o valor da média o resultado não se altera, assim temos:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x} + \bar{x} - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - a)]^2 \qquad (12.1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - a)(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - a)^2] \qquad (12.2)$$

O terceiro termo é nulo uma vez que a soma dos desvios em relação à média é nulo: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$, propriedade 1. Temos então que:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2] \qquad (12.3)$$

O primeiro termo $[(x_i - \bar{x})^2]$ não depende de $\boldsymbol{a}$ enquanto o segundo termo sim. Quando $\boldsymbol{a}$ é igual à média o segundo termo é igual à zero, assim podemos afirmar que o valor que minimiza os desvios de uma série é a média aritmética[24]. Podemos assim afirmar que ela representa o mínimo da função formada pelos desvios em relação a uma série, conforme a expressão:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 \qquad (14)$$

Fórmula 14: Função definida pela soma dos quadrados dos desvios em relação a uma série dada.

Tomemos como exemplo a série {3; 6; 9}. A função dos desvios em relação a esta serie é:

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n}[(3 - a)^2 + (6 - a)^2 + (9 - a)^2]$$

No tabela 9, apresentamos alguns dos valores para y em função de a. O menor valor para f(a) nesta tabela é 6 (que corresponde à média aritmética).

[24] Esta demonstração pode ser vista em Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 114) e Dodge (2007b)

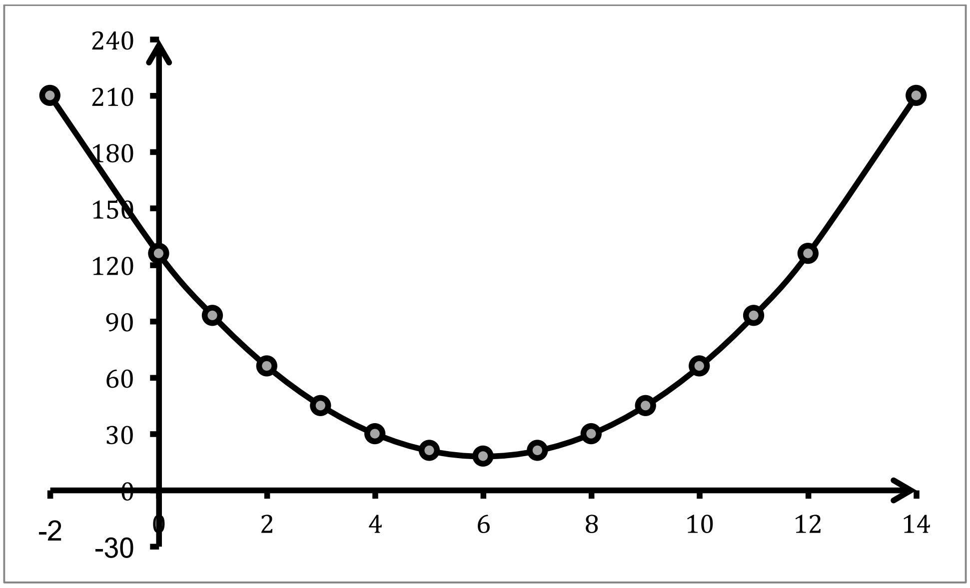
Tabela 9 – Minimização dos desvios da média: variação de y em função de a.

a	-2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14
$f(a)$	210	126	93	66	45	30	21	18	21	30	45	66	93	126	210

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Ao traçar o gráfico (usamos o Excel) desta função do segundo grau, podemos observar que temos como mínimo 6 que é a média aritmética de 3, 6 e 9.

Gráfico 7 – gráfico da função $f(a) = \sum_{i=1}^{n}[(3 - a)^2 + (6 - a)^2 + (9 - a)^2]$.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Esta propriedade também é tratada por Régnier (2012). Este autor destaca que todas as possibilidades que se podem medir uma flutuação é a variância, o valor mínimo desta flutuação.

Apresentamos a seguir a propriedade 7.

PROPRIEDADE (m) 7. A média aritmética de uma série formada por duas componentes pode ser obtida em função das médias das componentes (KENDALL;YULE, 1948).

Dada uma série S de N observações de uma variável X composta por duas séries de observações definidas pelas variáveis X1 e X2, a soma das variáveis desta série pode ser obtida pela soma das variáveis das componentes:

$$\sum(X) = \sum X1 + \sum X2$$

Considerando que o número de observações da primeira série componente é dada por N1 e da segunda série é dada por N2, onde N=N1+N2, e considerando M1 a média da primeira série componente e M2 a média da segunda, podemos obter a média da série formada por estas duas séries componentes usando a fórmula:

$$NM = N_1M_1 + N_2M_2 \quad (15)$$

Fórmula 15: Média aritmética de uma série calculada tendo em vista duas componentes e o número de observações das séries componentes (KENDALL; YULE, 1948, p. 149).

Tomemos como exemplo de aplicação uma questão adaptada de Kendall e Yule (1948). Considerando uma série formada pelas duas séries abaixo:

- Estatura média de 738 homens nascidos em Recife = 1,75 m
- Estatura média de 425 homens nascidos em Olinda = 1,69 m

Podemos com estes dados calcular a estatura média dos homens nascidos em Recife e em Olinda. Considerando que $\mathrm{N} = \mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2$=738+425=1163 homens nascidos em Recife e Olinda que fazem parte da amostra. A estatura média da amostra formada por homens nascidos nestas duas cidades pode ser dada por:

$$\mathrm{NM} = \mathrm{N_1M_1} + \mathrm{N_2M_2} \Rightarrow 1163\mathrm{M} = (738\times1{,}75\mathrm{m}) + (425\times1{,}69\mathrm{m}) \Rightarrow \mathrm{M} = 1{,}73\mathrm{m}$$

Podemos ainda representar, neste caso por:

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n} \quad (16)$$

Fórmula 16: Média aritmética de uma série calculada com base no número de observações e média das suas componentes (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.81).

Como n=n1+n2 podemos ainda apresentar como indicado por Mann (2006) para a fórmula da **média aritmética combinada** de dois conjuntos de dados:

$$\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2}}{n_1 + n_2} \qquad (17)$$

Fórmula 17: Média aritmética combinada de dois conjuntos de dados (MANN, 2006, p.81).

Se o novo conjunto tiver apenas uma observação, n_2 = 1 e $x_2 = a$, a média desse novo conjunto corresponde a sua única observação. E a expressão pode ser simplicificada, de modo a facilitar o cálculo da média toda vez que se acrescenta a uma série uma nova observação (x_p), neste caso $n = n_1 + 1$:

$$\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1} + x_p}{n} \qquad (18)$$

Fórmula 18: Média aritmética a partir de uma nova observação (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.81).

Outra forma de apresentar esta expressão seria:

$$\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1}}{n} + \frac{x_p}{n} \qquad (19)$$

Fórmula 19: Média aritmética a partir de uma nova observação.

ou

$$\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1}}{n} + \frac{a}{n} \qquad (20)$$

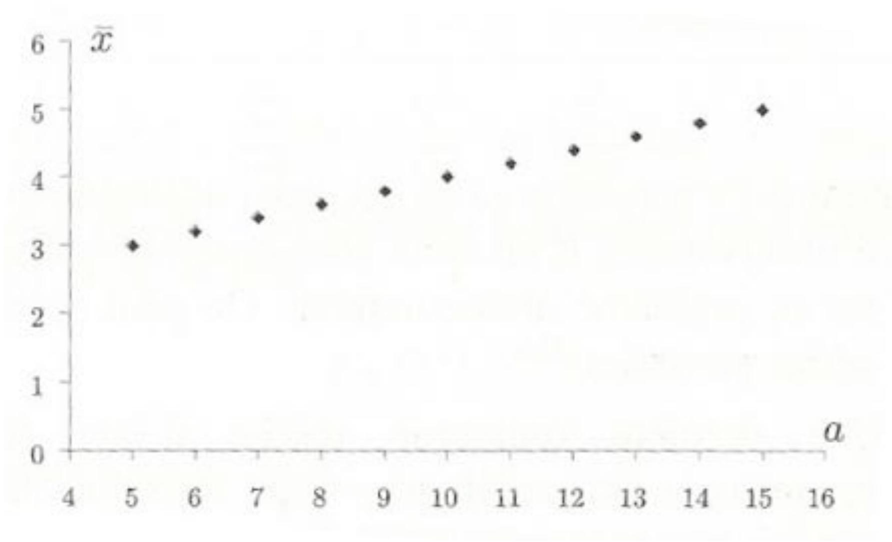
Fórmula 20: Média aritmética a partir de uma nova observação.

Se tivermos a série {1, 2, 3, 4, 5} com cinco elementos (n_1), cuja média aritmética é $3(x_1)$ e acrescentarmos um sexto elemento (a), podemos calcular assim a média da nova série formada por 6 elementos $(n = n_1 + 1 = 5 + 1 = 6)$:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 3}{6} + \frac{6}{6} = \frac{15}{6} + \frac{6}{6} = 2{,}5 + 1 = 3{,}5$$

Considerando que o novo valor a ser acrescentado a esta série é inteiro e igual ou maior do que 5 (a ≥ 5), pode-se afirmar que a média aritmética depende linearmente de a e pode ser representada pela figura 14 (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008):

Figura 14 – Dependência linear da média de um novo valor



Fonte: Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 82)

PROPRIEDADE (m) 8. "A média da soma total das (ou da diferença total entre as) observações correspondentes de duas séries de igual número de observações é igual à soma (ou à diferença) das médias de suas séries" (KENDALL; YULE, 1948, p.149).

Considerando que:

$\sum(X) = \sum(X1) \pm \sum(X2)$ (KENDALL; YULE, 1948)

E que:

$M = M_1 \pm M_2$ (KENDALL; YULE, 1948) para $n_1 = n_2$.

Podemos representar esta propriedade pelas fórmulas 21 e 22:

$$\frac{\sum x_1 + \sum x_2}{n_1 + n_2} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} \qquad (21)$$

Fórmula 21: Média aritmética da soma das observações de duas séries de igual número de observações é igual à soma das médias destas séries.

$$\frac{\sum x_1 - \sum x_2}{n_1 + n_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{2} \qquad (22)$$

Fórmula 22: Média aritmética da diferença das observações de duas séries de igual número de observações é igual à diferença das médias destas séries.

Tomemos com exemplo duas séries: {1, 2, 3, 4, 5} e {8, 9, 10, 11, 12}. Estas duas séries possuem o mesmo número de observações (cinco observações).

Calculando a média da soma:

$$\mu = \frac{1+2+3+4+5+8+9+10+11+12}{10} = \frac{65}{10} = 6{,}5$$

A média da primeira série é 3 e da segunda série é 10. Logo a média da soma seria:

$$\mu = \frac{3+10}{2} = 6{,}5$$

Calculando a diferença das duas séries:

$$\mu = \frac{(1+2+3+4+5)-(8+9+10+11+12)}{10} = \frac{15-50}{10} = -3{,}5$$

Calculando a diferença das medidas das séries teríamos:

$$\mu = \frac{3-10}{2} = -3{,}5$$

PROPRIEDADE (m) 9. A soma dos valores de uma série pode ser obtida em função da média aritmética e do número de observações desta série

Como a média é obtida pela soma dos valores observados divididos pelo número dos valores, podemos relacionar a soma dos valores ao número de valores multiplicados pela média, independente de os valores estarem ordenados ($x_{(i)}$) ou não (x_i) (DEHON, DROESBEKE e VERMANDELE, 2008):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x} \; ou \; \sum_{i=1}^{n} x_{(i)} = n\bar{x} \qquad (23)$$

Fórmula 23: Obtenção da soma das observações de uma série tendo por base a média e o número de observações. (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.78).

PROPRIEDADE (m) 10. Linearidade da média aritmética

Hubler (2007) esclarece que se somarmos a todos os valores de uma variável uma constante $\boldsymbol{b}$, o valor da média será somado $\boldsymbol{b}$. Também se multiplicarmos um valor $\boldsymbol{a}$ qualquer a todas as observações de uma série, a nova média aritmética da série será obtida ao multiplicarmos este valor à antiga média. Acrescentamos que isso também se aplica para subtração e para divisão. Para a soma, podemos assim representar:

$$\bar{x} + b = \frac{(x_1 + b) + (x_2 + b) \ldots (x_n + b)}{n} \quad (24)$$

Fórmula 24: Linearidade da média ao somarmos um valor às observações.

Podemos facilmente demonstrar:

$$\bar{x} + b = \frac{(x_1 + b) + (x_2 + b) + \cdots + (x_n + b)}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n + n \times b}{n} =$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{n \times b}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + b$$

Logo temos que:

$$\bar{x} + b = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + b$$

Ao subtrairmos de todos os valores um valor constante, também teremos a nova média igual à antiga subtraída deste valor :

$$\bar{x} - d = \frac{(x_1 - d) + (x_2 - d) \ldots (x_n - d)}{n} \quad (25)$$

Fórmula 25: Linearidade da média ao subtrairmos um valor às observações.

A demonstração é similar à da soma (podemos ainda pensar que o $\boldsymbol{b}$ pode ser um número negativo o que recairia na demonstração anterior):

$$\bar{x} - d = \frac{(x_1 - d) + (x_2 - d) + \cdots + (x_n - d)}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n \times d}{n} =$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - \frac{n \times d}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - d$$

Logo temos que:

$$\bar{x} - b = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - d$$

Ao multiplicarmos um valor qualquer a às observações de uma série, a média resultante é igual à média da série multiplicada por a. Assim temos a fórmula 26.

$$a\bar{x} = \frac{ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_n}{n} \tag{26}$$

Fórmula 26: Linearidade da média ao multiplicarmos um valor às observações.

Apresentamos abaixo a demonstração:

$$a\bar{x} = \frac{ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_n}{n} = \frac{a}{1} \times \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n} = a \times \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n}$$

Da mesma forma, podemos multiplicar um valor $\boldsymbol{a}$ e somar um valor $\boldsymbol{b}$ a cada observação que a média resultante será igual à média anterior multiplicada por $\boldsymbol{a}$ e somada o valor $\boldsymbol{b}$, como na fórmula abaixo:

$$a\bar{x} + b = \frac{(ax_1 + b) + (ax_2 + b) + \cdots + (ax_n + b)}{n} \tag{27}$$

Fórmula 27: Linearidade da média ao multiplicarmos um valor $\boldsymbol{a}$ e somarmos um valor $\boldsymbol{b}$ às observações.

O mesmo vale para a divisão de um número $\boldsymbol{c}$ pela média (podemos considerar que $\boldsymbol{a}$ usado para multiplicar pode ser um valor entre -1 e 1, o que indicaria que esta propriedade se aplicaria para a divisão por um número racional):

$$\frac{1}{c}\bar{x} = \frac{\frac{1}{c}x_1 + \frac{1}{c}x_2 + \cdots + \frac{1}{c}x_n}{n} \tag{28}$$

Fórmula 28: Linearidade da média ao dividirmos todas as observações por um valor constante.

Similar à demonstração da multiplicação, podemos demonstrar a divisão de um número $\boldsymbol{c}$ pela média :

$$\frac{1}{c}\bar{x} = \frac{\frac{1}{c}x_1 + \frac{1}{c}x_2 + \cdots + \frac{1}{c}x_n}{n} = \frac{\frac{1}{c}}{1} \times \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n} = \frac{1}{c} \times \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n}$$

Dessa forma, esta propriedade da linearidade se aplica à soma, subtração, multiplicação e divisão de um número pela média:

$$a\bar{x}\frac{1}{c} + b - d = \frac{(ax_1\frac{1}{c} + b - d) + (ax_2\frac{1}{c} + b - d) + \cdots + (ax_n\frac{1}{c} + b - d)}{n} \quad (29)$$

Fórmula 29: Linearidade da média ao multiplicarmos um valor a e/ou dividirmos por um valor c e/ou somarmos a um valor b e/ou subtrairmos um valor d às observações.

Apresentamos na tabela 10, um exemplo:

Tabela 10 – Linearidade da média aritmética

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	n	$\bar{x}$
x_i	-2	0	1	2	3	4	5	6	8	27	3
$2x_i + 5$	1	5	7	9	11	13	15	17	21	99	11

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Temos assim que $2 \times 3 + 5 = 11$ $(2\bar{x}_1 + 5 = \bar{x}_2)$.

PROPRIEDADE (m) 11. A média pode ser empregada na estimação de uma quantidade desconhecida considerando a presença de erros nos instrumentos de medição.

Considerando que um aparelho de medição possui imprecisão nas suas medições e considerando que estas imprecisões podem oscilar entre um valor acima ou abaixo da medida real,. Considerando que existe a mesma probabilidade de se tirar um valor abaixo ou acima do valor real, quanto maior for o número de medições registradas por este aparelho, maior será a probabilidade do valor médio destas medições se aproximarem do valor real. Dodge (2007b, tradução nossa) ao tratar da história da estatística, destaca esta propriedade da média aritmética como sendo empregada em “um dos mais antigos métodos para combinar as observações a fim de obter um valor aproximado único”. Este autor destaca que o seu emprego remonta ao século III A.C.,sendo utilizado pelos babilônicos para determinar a posição do sol, da lua e dos planetas. Ele foi uma das formas mais antigas de se utilizar a média aritmética. Considerando cada registro no aparelho como uma observação, se calcula a média aritmética destas observações para estimar o valor da medição real.

Apresentamos a seguir algumas observações sobre a média aritmética:

OBSERVAÇÃO (m) 1. Em uma média aritmética os valores observados devem ser numéricos. Assim uma escala qualitativa (escala nominal ou ordinal) não possui média aritmética (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008). Desta observação propomos uma propriedade:

PROPRIEDADE (m) 12. A média aritmética se limita a operações com variáveis estatísticas quantitativas (discretas e contínuas).

OBSERVAÇÃO (m) 2. A média aritmética é valor típico único para uma série: uma série não pode ter várias médias aritméticas distintas, embora duas séries podem possuir a mesma média aritmética (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008).

OBSERVAÇÃO (m) 3. Uma média aritmética não corresponde necessariamente a um valor observado. Em um grupo pode não existir um indivíduo cuja medida seja igual à média do grupo (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008).

Tomemos como exemplo dessa terceira observação a série de veículos por domicílio em uma cidade cuja média aritmética é de 1,5 veículo. Não vai existir uma residência que tenha 1,5 veículos. O mesmo pode-se pensar para a medida das idades dos alunos de uma série que é igual a 12,5 anos. Como destaca estes autores "o indivíduo médio é um ser geralmente fictício".

OBSERVAÇÃO (m) 4. A média corresponde à mesma unidade utilizada na série.

Dessa forma, se uma série contém o número de veículos por domicílio, para obter a média, somamos o total de veículos e dividimos pelo número de domicílios pesquisados e teremos a média de veículo por domicílio. Assim, o resultado poderia ser 1,5 veículos. Em um levantamento da altura média dos alunos em uma sala, a média deve expressar as unidades utilizadas no cálculo. Logo, ao dividir a soma das alturas dos alunos pelo número destes obtemos como unidade cm. Por exemplo, poderíamos ter como média da altura 1,57 m/aluno. Não faz sentido dizer que a média da altura dos alunos é 1,57. Por questões práticas deve-se utilizar como média das alturas dos alunos 1,57 m e não 1,57 m/aluno. Já tratamos isso em duas situações no capítulo introdutório. Quanto às MTCD, quando falamos do emprego das unidades e quando tratamos das variâncias indicando que esta última apresentação inviabilizaria alguns cálculos.

OBSERVAÇÃO (m) 5. Ao comparar duas médias elas devem estar expressas na mesma unidade.

Podemos comparar a altura média dos alunos de uma sala de aula de uma escola com os de outra sala, podemos também com a altura média dos habitantes daquela cidade com a mesma faixa etária. Contudo, deve-se considerar que elas devem estar expressas na mesma unidade. Caso contrário, deve-se fazer a conversão para a mesma unidade.

Apresentamos a seguir outras situações de emprego da média aritmética, bem como, outras fórmulas usadas para o cálculo da média aritmética.

2.3.1.1. MÉDIA ARITMÉTICA DE UMA DISTRIBUIÇÃO OBSERVADA

Em uma distribuição observada, associamos cada valor observado x_j a um efetivo n_j que indica o número de vezes que ele aparece (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008). Para a série correspondente ao número de veículos por residência de uma quadra, temos como observações {0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4}. Então podemos calcular a média usando o algoritmo da média aritmética:

$$\bar{x} = \frac{0+0+0+0+0+0+0+1+1+1+1+1+1+2+2+2+2+3+3+3+4+4}{22} = 1{,}41\ veículos/residência$$

Outra forma de calcular a média aritmética seria:

$$\bar{x} = \frac{(7\times 0)+(6\times 1)+(4\times 2)+(3\times 3)+(2\times 4)}{22} = 1{,}41\ veículos/residência$$

Neste último caso, poderíamos representar o algoritmo de uma distribuição observada:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J} n_j x_j \qquad (30)$$

Fórmula 30: fórmula da distribuição observada segundo Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p.83)

Régnier (2007) apresenta este algoritmo para população (μ) e amostra (m). No lugar de j ele usa k, como símbolo:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{K=p} n_K x_k \tag{31}$$

Fórmula 31: Média da população de acordo com Régnier (2007, p.9)

$$m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K=p} n_K x_k \tag{32}$$

Fórmula 32: Média da amostra conforme Régnier (2007, p.9)

Outra forma de representar este algoritmo, tomando como referência a definição de frequência como sendo $f_j = {}^{n_j}/_{n}$, ou $f_K = {}^{n_K}/_{n}$ (usando k no lugar de j), é:

$$\mu = \sum_{k=1}^{K=p} f_K x_k \tag{33}$$

Fórmula 33: Média da população de acordo com Régnier (2007, p.9)

$$m = \sum_{k=1}^{K=p} f_K x_k \tag{34}$$

Fórmula 34: Média da amostra conforme Régnier (2007, p.9)

2.3.1.2. MÉDIA ARITMÉTICA PARA VARIÁVEIS ESTATÍSTICAS CONTÍNUAS[25]

Algumas vezes, os dados da população ou da amostra estão agrupados. Neste caso, para o cálculo da média não temos mais como somar todos os valores da amostra ou da população. A solução é determinar a aproximação destes valores, determinando o ponto médio de cada classe e multiplicando pela frequências de cada classe . Temos em Kendall e Yule (1948, p. 144) a representação do algoritmo como sendo o somatório do produto dos centros de cada classe (representado por X) pelos efetivos de cada classe (o símbolo f de

[25] Utilizamos como referência para o título deste capítulo a apresentação de Régnier (2011).

frequência na fórmula se refere à frequência absoluta ou efetivos[26]) dividido pelo total de efetivos:

$$M = \frac{1}{N}\sum(fX) \tag{35}$$

Fórmula 35: média aritmética para dados agrupados de população (KENDALL; YULE, 1948, p.144)

Mann (2006, p. 90) usa m para representar o ponto médio e f a frequência absoluta (efetivos). Assim, temos:

$$\mu = \frac{\sum mf}{N} \tag{36}$$

Fórmula 36: média aritmética para dados agrupados de população (MANN, 2006, p.90)

$$\bar{x} = \frac{\sum mf}{n} \tag{37}$$

Fórmula 37: média aritmética para dados agrupados de amostra (MANN, 2006, p.90)

Podemos também ver em Régnier (2007) um representação semiótica do algoritmo (38 e 39) no qual utiliza-se para representar o centro do intervalo: c_k .

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k\, c_k = \sum_{k=1}^{k=p} f_k\, c_k \tag{38}$$

Fórmula 38: Média aritmética para dados agrupados de população (RÉGNIER, 2007, p.9)

$$m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=p} n_k\, c_k = \sum_{k=1}^{k=p} f_k\, c_k \tag{39}$$

Fórmula 39: Média aritmética para dados agrupados da amostra (RÉGNIER, 2007, p.9)

Consideramos mais adequado esta representação de Régnier (2007) do que as apresentadas por Mann (2006) e por Kendall e Yule (1948). Em Kendall e Yule, se utiliza um símbolo de frequência que pode levantar dúvidas se é frequência relativa ou absoluta. E o X como centro da classe pode levar a confusões, uma vez que este símbolo é bastante usado na

[26] Ver no início deste capítulo problemas com o emprego do termo efetivo e frequência.

Matemática. Kendall e Yule (1948) usam acrescido do índice como significante de cada observação $(X_1; X_2; X_3 \ldots)$. Estes autores usam este símbolo acrescido de um traço para indicar a média aritmética $(\bar{X})$. Na fórmula de Mann (2006) temos o mesmo problema para a frequência e o m pode ser confundido com o símbolo utilizado por alguns autores como Régnier para designar a média de amostra. Assim, considerando os significantes atribuídos aos significados na fórmula de Régnier mais adequados.

No cálculo da média aritmética para dados agrupados, Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 84) esclarecem que “se supõem uma certa repartição uniforme de observações nas classes ou, ao menos, uma distribuição tal que o centro da classe possa ser considerada como a média dos valores observados nesta classe”. Estes autores consideram que mesmo que essa hipótese não possa ser totalmente satisfeita, uma certa compensação dos erros pode ser feita na soma dos termos. Kendall e Yule (1948) destacam que quando temos um volume muito grande de observações, uma solução prática é dividi-lo em classes.

Quando os dados estão agrupados, esta forma de organização dos dados faz com que tenhamos uma variável contínua, mesmo se no levantamento dos destes, a variável fosse uma variável discreta.

As variáveis discretas como esclarecem Kendall e Yule (1948) determinam o intervalo de classe. Assim se temos um levantamento da idade dos alunos de uma classe, temos como intervalo 1 ano. Podemos ter um aluno com 25 anos, mas não teremos nenhuma observação com 25,5 anos. Desta forma, é como se agrupássemos os dados em intervalos de 1 ano. Assim, quando agrupamos os dados desta variável em intervalos maiores de 1 ano, esta variável discreta passa a ser tratada como contínua. Poderíamos ter então, por exemplo, como um dos intervalos de classe [20; 29[,ou seja, teoricamente para este intervalo a idade do funcionário poderia assumir qualquer valor entre 20 anos e até menos de 29 anos. Para o intervalo exemplificado teríamos como centro 25,5 anos.

2.3.1.3. MÉDIA COMBINADA (TRATADA COM MAIS DETALHES NA PROPRIEDADE 7)

Quando temos dois conjuntos de dados e sua média, podemos calcular a média aritmética combinada deste conjunto de dados. Tomando-se n1 e n2 como tamanhos das amostras de x1 e x2, pode-se utilizar para calcular a média aritmética combinada a fórmula (MANN, 2006, p. 81):

$$\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2}}{n_1 + n_2} \qquad (40)$$

Fórmula 40: Média aritmética combinada (MANN, 2006, p.81)

Considerando a soma de n1+n2 = n, temos em Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) outra forma de apresentar a fórmula da média aritmética combinada, chamada por estes autores como a média aritmética de duas ou mais séries que são agregadas. Temos então:

$$\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2}}{n} \qquad (41)$$

Fórmula 41: Média aritmética combinada (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.81)

2.3.1.4. MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA

A média ponderada[27] foi introduzida em 1712 por Roger Cotes, sendo atualmente utilizada de forma corrente no domínio da economia para o cálculo de preços, itens de consumo, de preços de produção etc (DODGE, 2007a). Segundo Ferreira (2008), a ponderação é a atribuição de pesos. Logo, a média ponderada poderia ser entendida como a média na qual são atribuídos pesos. Para Mann (2006), muitas vezes, determinados valores em um conjunto de dados pode ter um valor maior do que outro. Assim, para diferencia-los, pode-se atribuir pesos diferentes. Por exemplo, em uma avaliação o professor pode considerar que a atividade de um seminário possui maior valor do que um teste escrito. Então pode-se atribuir aos seus alunos um peso maior na nota do primeiro em relação ao outro. Este significado apontado por Mann é muito comum dentro do ambiente escolar, sendo muitas vezes partilhado por professores e alunos. Este autor expressa o cálculo da média aritmética ponderada pela fórmula:

$$\mu = \frac{\sum xp}{\sum p} \qquad (42)$$

Fórmula 42: Média aritmética ponderada (MANN, 2006, p. 82)

Através desta fórmula, temos a indicação que se deve multiplicar cada valor dado pelo seu peso e depois somar os produtos dividindo-se pela soma do total dos pesos. Assim, se

[27] Em francês “moyenne arithmétique ponderée”ou em inglês “weighted aritmetic mean” (DODGE, 2007a).

temos as notas: 8; 4; 6, teríamos como média 6. Contudo, se tivermos a primeira nota com peso 4 e as duas outras notas com peso 1, teremos como média 7, com base na fórmula 40, esta média poderia ser assim calculada:

$$\mu = \frac{(4\times 8) + (1\times 4) + (1\times 6)}{4 + 1 + 1} = 7$$

Esta forma de apresentação de Mann (2006) pode ser observada também em Dodge (2007b, s/n, tradução nossa) na qual este autor coloca que esta é "igual à soma das observações multiplicadas por seus pesos, dividida pela soma de seus pesos".

Outra forma de apresentar a média pode ser visto em Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) na qual a média ponderada tem o objetivo de "atribuir as diferentes observações uma importância que não é a mesma para todas". Estes autores atribuem no cálculo da média ponderada para cada observação um coeficiente de ponderação ou peso $w_1, w_2, w_3, \cdots, w_n$, consideramos mais adequado. Para não confundir com o sentido de peso dado por Mann (2006) e Dodge (2007a), utilizar apenas o termo coeficiente de ponderação, diferenciando do termo peso. Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) apresentam para o seu cálculo a fórmula:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \qquad (43)$$

Fórmula 43: Somatório dos pesos de uma média aritmética ponderada (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.94)

Levando em conta a fórmula 43, podemos então concluir que:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = w_1 + \cdots + w_j = \frac{p_1}{\sum_{i=1}^{n} p_i} + \cdots + \frac{p_j}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

Para determinar o coeficiente de ponderação, teríamos como procedimento dividir cada peso pela soma dos pesos (utilizando o termo peso no sentido de MANN, 2006). Assim propomos a fórmula abaixo:

$$w_1 = \frac{p_1}{\sum_{i=1}^{n} p_i};\ \cdots; w_j = \frac{p_j}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \qquad (44)$$

Fórmula 44 - Fórmula para determinar o coeficiente de ponderação para o cálculo da média aritmética ponderada

Assim em função dessa apresentação, teríamos como representação da técnica para o cálculo da média aritmética ponderada:

$$\bar{x}_w = \sum_{i=1}^{n} w_i \ x_i \tag{45}$$

Fórmula 45: fórmula da média aritmética ponderada (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.94)

Onde cada observação $x_1, \cdots, x_n$ temos um peso $w_1, \cdots, w_n$. Assim para o cálculo da média ponderada das notas 8; 4; 6 com pesos 4; 1;1 teríamos o seguinte procedimento:

$$\bar{x}_w = \left(\frac{4}{6}\times 8\right) + \left(\frac{1}{6}\times 4\right) + \left(\frac{1}{6}\times 6\right) = 7$$

Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) apresentam alguns casos nos quais se utilizam a técnica da ponderação:

1. Soma ponderada dos valores de distintas observações nos quais os pesos são as frequências

Temos assim outra forma de representar a média de uma distribuição observada, tomando por base o conceito de média ponderada segundo Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008):

$$\bar{x}_w = \sum_{i=1}^{i} f_i \ x_i \tag{46}$$

Fórmula 46: fórmula da média aritmética ponderada considerando as frequências como ponderações. Adaptamos da fórmula da média de uma distribuição observada.

Trata-se do mesmo procedimento utilizado para o calculo de uma média de uma distribuição observada em função da frequência

Dehon 2. Como média aritmética combinada. Considerando que uma média ponderada de dois conjuntos x_1 e x_2, seus pesos valem respectivamente ${n_1}/{n}$ e ${n_2}/{n}$ que são pesos proporcionais a cada um dos grupos. Tomando por base a fórmula 41, temos:

$$\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2}}{n} = \frac{n_1\overline{x_1}}{n} + \frac{n_2\overline{x_2}}{n} = \frac{n_1}{n}\overline{x_1} + \frac{n_2}{n}\overline{x_2}$$

2.3.1.5. MÉDIA ARITMÉTICA AMPARADA[28]

Quando temos em um conjunto de dados alguns poucos valores extremos, pode-se utilizar o cálculo da média aritmética amparada. Neste caso se despreza um percentual dos dados acima e abaixo. Tomemos como exemplo o cálculo da média da idade dos funcionários de uma empresa (adaptado de MANN, 2006). A empresa é formada por 10 funcionários com as seguintes idades: 30 anos, 38 anos, 25 anos, 27 anos, 39 anos, 19 anos, 67 anos, 44 anos, 31 anos e 24 anos. Se tirarmos 10 % acima e abaixo, neste exemplo, teríamos que remover o funcionário mais novo (19 anos) e o mais velho (67 anos). Neste caso, teríamos como média aritmética:

$$\mu = \frac{30+38+25+27+39+44+31+24}{8} = 32{,}25$$

Outra medida de tendência central bastante utilizada é a mediana que trataremos a seguir.

2.3.2. MEDIANA

A mediana não é tão antiga como a média. Segundo Dodge (2007a, p. 330) em 1748 “Leonhard Euler e Johann Tobias Mayer propuseram, de uma maneira independente, um método que consistia em dividir as observações de um conjunto de dados em duas partes iguais”[29].

Segundo Dancey e Reidy (2006, p.59) a mediana é “o valor que está no meio de uma amostra”. O que é estar no meio de uma amostra? Parece um pouco vaga. Por outro lado esta definição exclui a mediana de uma população. MANN (2006, p. 73) apresenta uma definição mais detalhada: “a mediana representa o valor relativo ao termo posicionado no meio de um conjunto de dados que tenha sido classificado em ordem crescente”. Observamos apenas nesta definição que o conjunto de dados poderia ser classificado também de forma decrescente (depende da posição do observador).

Para Régnier (2007), a mediana divide a população (ou amostra, se for o caso) em duas partes de mesmo número de observações. Outra forma de descrever a mediana é a apresentada por Kendall e Yule (1948, p. 150) que afirmam que ela é “o valor central da

---

[28] Em francês moyenne élaguée.

[29] Observamos, contudo, que isso não é um consenso, segundo Droesbeke e Tassi (1990) pois a mediana surge em 1757 sendo proposta por Roger Joseph Boscovich.

variável quando os valores são arrumados por ordem de grandeza, ou como o valor tal que os valores maiores e menores ocorrem com igual frequência".

Para tratar destas duas definições, tomemos como exemplo uma série {1; 4; 5; 3; 2}, se organizarmos em ordem de grandeza crescente teremos {1; 2; 3; 4; 5}. A mediana é 3 e ela divide o número de observações em duas partes de mesmo número, como definido por Régnier. Ela é o valor central da distribuição quando temos uma ordenação das observações, uma vez que temos as duas primeiras observações antes da mediana e a quarta e quinta observação depois da mediana. Ela também pode ser considerada como o valor que divide os valores maiores e menores em um mesmo número de observações. Na série {1; 2; 7; 7; 7; 7; 7; 9; 10; 11; 20}, temos como mediana 7. Podemos considerar na distribuição ordenada, a mediana como o sexto termo (7). Contudo temos apenas 2 valores abaixo de 7 e 4 valores acima de 7. Apesar disso, podemos considerar que a mediana corresponde ao valor central de uma distribuição ordenada uma vez que ela é o sexto termo tendo cinco termos abaixo e cinco termos acima.

Outra forma de definir a mediana é expresso por Dodge (2007a, p.329) como uma medida de tendência central em que o seu valor "se encontra no centro de um conjunto de observações quando organizadas em ordem crescente ou decrescente". Esta definição centra-se na questão da posição. Dessa forma, o problema da distribuição em um número de valores maiores e menores equitativos não se apresentam neste caso.

Um erro que se pode cometer é considerar que a mediana divide o conjunto de dados ao meio possuindo abaixo ou acima da mesma 50% das observações. Isto pode ser válido quando o conjunto de dados é par, como por exemplo, quando vamos calcular a mediana da série {2; 4; 5; 9}, temos como mediana 4,5 (que não faz parte do conjunto de dados) e neste exemplo 50% dos valores estão acima e 50% dos valores estão abaixo. Tomemos outro exemplo com um número ímpar de observações apresentado na série {1; 2; 3; 4; 5}. A mediana é 3 e temos 40% das observações acima e abaixo da mediana.

Quando temos um número de valores ímpares, podemos calcular a posição da mediana como sendo igual ao número de observações + 1 dividido por 2. Assim se temos cinco observações, a mediana corresponde à terceira observação: $(5+1)/_2 = 3$ ($(n+1)/_2$ sendo n o número de observações). Como calcular a mediana quando temos um número de observações pares? Se tivermos uma série com quatro elementos, como: {1; 3; 4; 9}, a princípio, a mediana poderia ser qualquer valor entre o terceiro e o quarto termo, uma vez, que este ocuparia uma posição central da série ordenada ou de forma geral poderíamos expressar qualquer valor entre o termo n e n+1 (sendo n o número total de observações). Kendall e Yule (1948) esclarecem que apesar da mediana poder ser qualquer valor entre n e n+1, considera-se por convenção tomar o valor como sendo a média de n+1 e n. No exemplo dado, de acordo com esta convenção, teríamos a mediana da série {1; 3; 4 9} como 3,5.

Podemos observar em Kendall e Yule (1948) a representação M_ι para mediana, em Dodge (2007a) a representação M_d, em Régnier (2010) é representada por Q_2 (uma vez que o valor da mediana corresponde ao segundo quartil), em Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) a representação $x_{1/2}$.

Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) apresentam um algoritmo para determinar a posição da mediana:

$$x_{1/2} = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \qquad (47)$$

Fórmula 47: mediana para o número total de observações (n) ímpar (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.88).

$$x_{1/2} = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} \qquad (48)$$

Fórmula 48: Mediana para o número total de observações (n) par (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.89).

A mediana pode representar o valor central de um conjunto de dados classificados em ordem crescente ou decrescente. Dessa forma, ela divide os dados em duas partes com o mesmo número de elementos.

2.3.2.1. DETERMINAÇÃO DA MEDIANA DE UMA DISTRIBUIÇÃO DE EFETIVOS REPRESENTADA ATRAVÉS DE UMA TABELA.

É comum organizar uma série observada em uma tabela de distribuição de efetivos, o que é uma forma a facilitar a observação dos dados, como também de explorar os dados. Neste caso como determinar a mediana? Como já tratado anteriormente, deve-se considerar que os dados devem ser agrupados em ordem de grandeza do menor para o maior ou o inverso. Deve-se verificar se o número de observações total é par ou ímpar. Quando o número é impar, a mediana corresponde a um dos valores do conjunto de observações, quando o número de observações é par a mediana pode ser ou não um valor observado.

Mediana de uma série com o efetivo total ímpar.

O número de observações da série representada pode ser ímpar ou par. Tomemos como exemplo um levantamento da idade dos funcionários de uma empresa A representado na tabela 11. O número total de observações é 207 que é ímpar. Temos então a mediana como sendo o valor que ocuparia a posição correspondente a : $\mathrm{M_d} = \mathrm{x}_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \mathrm{x}_{\left(\frac{207+1}{2}\right)} = \mathrm{x}_{104}$ (fórmula 47). Dessa forma, a mediana vai ocupar a 104 ª posição. Na tabela 11, observamos que a medida mediana é 27, uma vez que o valor da mesma é igual ou menor ao efetivo acumulado. Dito de outra forma, ordenando os dados, teremos 45 funcionários com 27 anos ocupando da posição 90ª a 134ª. Como 104ª está entre 90ª e 132ª , a 104ª posição está nesse intervalo.

Tabela 11 – Idade dos funcionários na empresa A.

Idade (xi)	Efetivos (n)	Efetivos acumulados (n_a)
18	19	19
20	30	49
22	25	74
23	15	89
27	45	134
30	38	172
32	35	207
Total	207	207

Fonte: dados da tabela baseada em dados fictícios criados pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

Tomemos uma empresa B, representada na tabela 12, na qual temos um número par de funcionários (212). Para determinar a posição usamos a fórmula 47: $M_d = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)}+x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_{\left(\frac{212}{2}\right)}+x_{\left(\frac{212}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_{(106)}+x_{(107)}}{2} = \frac{23+23}{2} = 23$ anos.

Tabela 12 – Idade dos funcionários na empresa B.

Idade (anos) (xi)	Efetivos (n_j)	Efetivos acumulados (N_j)
18	25	25
20	30	55
22	35	90
23	15	105
27	40	145
30	35	180
32	32	212
Total	212	212

Fonte: dados da tabela baseada em dados fictícios criados pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

Consideraremos mais um exemplo de uma empresa C, representado na tabela 13, na qual temos um número par de funcionários (210). Para determinar a posição usamos a fórmula 38: $M_d = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_{\left(\frac{210}{2}\right)} + x_{\left(\frac{210}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_{(105)} + x_{(106)}}{2} = \frac{23+27}{2} = 25$ anos. Neste exemplo, temos um número que não representa a idade de nenhum funcionário, ele apenas divide em dois grupos com mesmo número de funcionário a série apresentada. Destacamos, como já comentado antes, que poderíamos ter qualquer valor entre 23 e 27 anos como mediana. Contudo utilizamos por convenção o valor médio entre 23 e 27 anos.

Tabela 13 – Idade dos funcionários na empresa C.

Idade (anos) (xi)	Efetivos (f)	Efetivos acumulados
18	25	25
20	30	55
22	35	90
23	15	105
27	40	145
30	33	178
32	32	210
Total	210	210

Fonte: dados da tabela 13 baseada em dados fictícios criados pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

2.3.2.2. DETERMINAÇÃO DA MEDIANA PARA DADOS AGRUPADOS.

Quando os dados estão agrupados, não temos como ordenar os dados, mas podemos identificar em qual classe se encontra a mediana e em seguida determinar o valor aproximado.

Tomemos como exemplo, um conjunto de observações agrupadas sobre a idade dos participantes de um estudo sobre o uso da internet (tabela 14). Para determinar a mediana da série representada o primeiro passo é determinar a classe mediana. Para isso dividimos por dois o número total de efetivos: $\frac{n}{2} = \frac{135}{2} = 67{,}5$. Observando os efetivos acumulados verificamos que este valor encontra-se na terceira classe: [40; 50[, uma vez que é maior do que 51 (efetivos acumulados da classe anterior) e igual ou menor do que 100 (efetivos acumulados da classe que contém a mediana): $51 < 67{,}5 \leq 100$.

Tabela 14 – Participantes de um estudo sobre o uso da internet conforme a idade.

Idade (anos)	Efetivos (n)	Efetivos acumulados (n_a)
[20; 30[	12	12
[30; 40[	39	51
[40; 50[	49	100
[50; 60[	27	127
[60; 70[	8	135
Total (n)	135	135

Fonte: dados da tabela 14 baseada em dados fictícios criados pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

Para calcular este valor utilizamos a fórmula 49:

$$Md = l_{inf} + \left[\frac{\left(\frac{n}{2}\right) - fac_{ant}}{f_i} \right] \cdot h \qquad (49)$$

Fórmula 49: Fórmula para calcular a mediana para dados agrupados (CARVALHO, 2006).

Onde:

l_{inf} – Limite inferior da classe mediana. No exemplo dado temos: $l_{inf} = 40$;

n – Efetivos totais da série. Corresponde no exemplo dado a: $n = 135$;

fac_{ant} – Frequência absoluta acumulada (ou efetivos acumulados) crescente da classe anterior à classe mediana. Corresponde no exemplo dado a: fac_{ant}= 51;

$f_i - F$requência absoluta interna (efetivo interno) da classe mediana. Neste exemplo temos: $f_i = 49$;

h −Amplitude da classe mediana. Para este caso o valor é de: $h = 10$

Substituindo os valores teremos:

$M_d = 40 + \left[\frac{67{,}5-51}{49}\right]$ ·10 = 40+3,37 = 43,37 anos.

Podemos justificar, de forma intuitiva, o uso desta fórmula. Para determinar a classe que contém a mediana, dividimos o número de observações ao meio obtendo o valor n/2. A classe que contém a mediana deverá ser a primeira classe na qual n/2 será igual ou menor do que a frequência absoluta acumulada desta classe. Consequentemente n/2 deverá ser maior que a frequência absoluta acumulada da classe anterior:

$$fac_{ant} < \frac{n}{2} \leq fac$$

Parte-se da hipótese de que existe uma divisão das observações em cada classe de maneira uniforme[30] (DODGE, 2007a; DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008) e que “as bordas inferiores e superiores da classe mediana são definidas e conhecidas” (DODGE, 2007a, p.330, tradução nossa). Os efetivos correspondentes à mediana dentro da classe seria a medida ${}^{n}/_{2} - fac_{ant}$ (figura 15). Para estimar[31] a medida da mediana dentro da classe mediana (chamaremos de M_{MdC}[32]), relacionamos ela aos efetivos (ou frequência absoluta) correspondentes à mediana dentro da classe da mesma forma, em que fazemos uma relação entre a amplitude da classe mediana e a frequência absoluta interna da classe mediana, assim podemos estabelecer uma relação:

$$M_{MdC} \to \left[\frac{n}{2} - fac_{ant}\right]$$

$$h \to f_i$$

Podemos assim determinar M_{MdC}:

$$M_{Mdc} = \frac{\left[\frac{n}{2} - fac_{ant}\right] \cdot h}{f_i} = \left[\frac{\frac{n}{2} - fac_{ant}}{f_i}\right] \cdot h$$

---

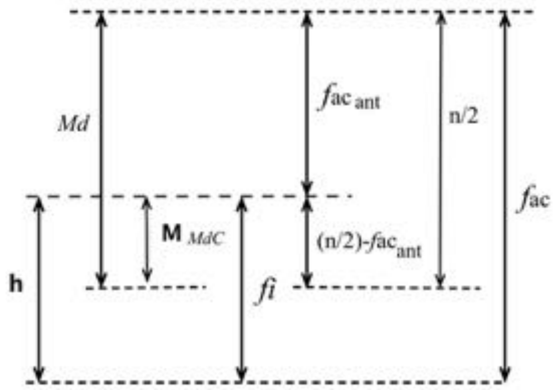
[30] Kendall e Yule (1948, p.151) destacam que “Para a distribuição de frequência de uma variável contínua, pode-se obter um valor suficientemente aproximado da mediana por interpolação. Se a frequência total é grande, é suficiente considerar que os valores em cada classe se distribuem uniformemente no respectivo intervalo”.

[31] Assim a medida da mediana é aproximada, podendo ou não corresponder à mediana das observações feitas.

[32] Criamos este símbolo para usar apenas nesta demonstração.

Para determinar a mediana agora, basta somar M_{MdC} com l_{inf} (fórmula 49).

Figura 15 – Mediana para dados agrupados.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) apresentam a mesma fórmula para determinar a posição da mediana utilizando outros símbolos:

$$x_{1/2} = l_m^- + h_m \frac{\frac{n}{2} - N_{m-1}}{n_m} \qquad (50)$$

Fórmula 50: Fórmula para calcular a mediana para dados agrupados (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p. 92).

Dodge (2007a) apresenta a mesma fórmula mudando alguns símbolos:

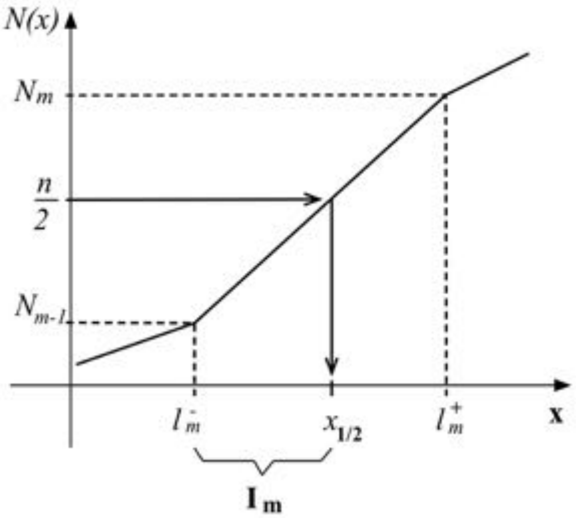
$$Md = L + \left[\frac{\left(\frac{n}{2}\right) - \sum f_{inf}}{f_{Md}}\right] \cdot e \qquad (51)$$

Fórmula 51: Fórmula para calcular a mediana para dados agrupados (CARVALHO, 2006).

Observamos em Kendall e Yule (1948) através de um exemplo em que os autores mostram como calcular a mediana para dados agrupados. Pelos procedimentos usados por estes autores, observamos que se trata do mesmo algoritmo, contudo eles não apresentam uma fórmula. Eles destacam também que quando o número de efetivos é "grande, é suficiente considerar que os valores em cada classe se distribuam uniformemente no respectivo intervalo" (p.151), como apresentamos através das formulas 49 e 50.

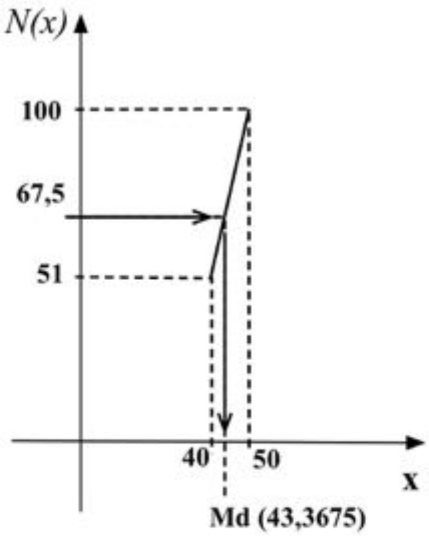
Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 92) apresentam outra forma de determinar o valor da mediana usando uma solução gráfica. Apresentamos a solução proposta por estes autores na figura 16 (redesenhamos a figura procurando manter a mesma proporção da figura original). Com base nos dados da tabela 14, resolvemos o mesmo problema usando a solução gráfica (figura 17). Para isso usamos o software régua e compasso[33]. Depois redesenhamos a solução obtida com o uso do software iDraw. Representamos a solução do software régua e compasso com a precisão de quatro casas decimais. Um procedimento gráfico similar também é apresentado por Kendall e Yule (1948).

Figura 16 – Solução gráfica para determinação da mediana (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p.92)



Fonte: desenho elaborado pelo autor da tese com base em imagem apresentada por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p.92).

Figura 17 – Solução gráfica com determinação da mediana para os dados da tabela



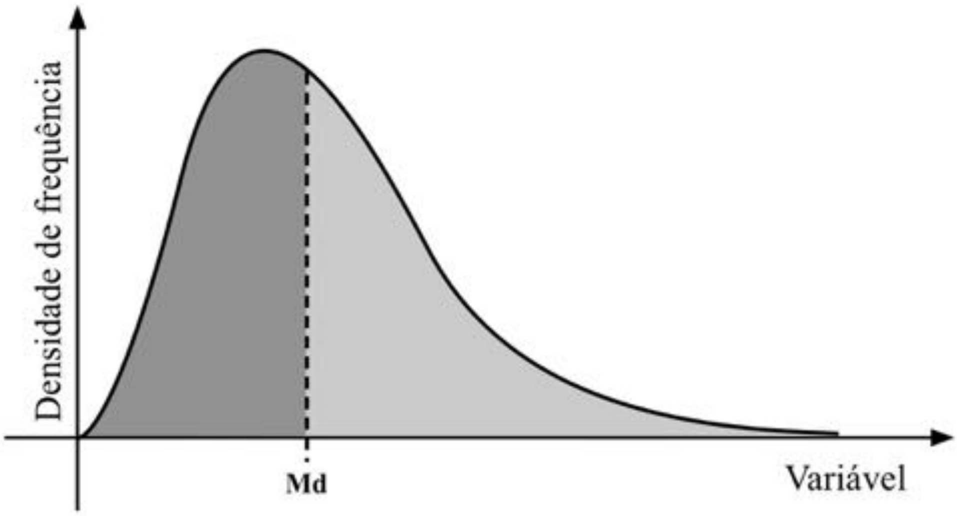
Fonte: elaborado pelo autor da tese.

---

[33] A solução gráfica é tão precisa quanto a solução algébrica. Contudo deve ser feita com o uso de um software adequado (usamos para isso um software de geometria dinâmica). Quando feito com instrumentos de desenho à mão, como régua e compasso, ou softwares que não possuem precisão, as medidas são aproximadas.

Kendall e Yule (1948, p. 150) esclarecem que em uma curva de frequência a mediana "pode ser definida como o valor da variável cuja ordenada divide a área da curva em duas partes iguais". No gráfico 8 observamos esta propriedade. Nela temos um histograma no qual são representadas uma variável contínua e onde representamos esta propriedade da mediana.

Gráfico 8 – A mediana divide uma curva em duas partes iguais.



Fonte: desenho criado pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

Apresentamos algumas propriedades e observações em relação à mediana:

PROPRIEDADE (md) 1. A mediana distribui a população em duas partes de mesmo efetivo (RÉGNIER, 2007).

Considerando a mediana da série A={3; 5; 7; 10; 12}, temos como mediana 7. A população fica assim dividida em duas partes iguais. Cada parte com duas observações (40% das observações). Destacamos quando temos variáveis agrupadas, uma aproximação.

PROPRIEDADE (md) 2. A mediana não é influenciada por valores extremos (ao contrário da média). (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008).

Tomemos como exemplo a série {1, 4, 5, 6, 9} e a série {1, 4, 5, 6; 90}. Nos dois casos a mediana é 5. Tendo assim dois valores acima da mediana e dois valores abaixo da mediana. Já no caso da média aritmética, temos para a primeira série a média aritmética 5 (igual à mediana e tal como a mediana divide a série em dois valores acima e dois valores abaixo). Na segunda série, a média aritmética é 21,2. Este valor posiciona a média afastada de todos os valores e dividindo a série em quatro valores abaixo da média e apenas um valor acima da média.

PROPRIEDADE (md) 3. A mediana frequentemente corresponde ao valor de um dos dados, ao contrário da média.

Quando temos variáveis quantitativas discretas ou variáveis ordinais e o número de observações é ímpar, a mediana corresponde a um valor observado. Quando o número de observações é par e, os valores centrais usados para o cálculo da mediana são iguais. A mediana também corresponde a um dos valores da série. Assim, em função dos dados, é muito mais provável que a mediana corresponda a um valor observado do que a média. Como destaca Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p 89, tradução nossa) "Em numerosos casos, constatamos que a mediana é um valor observado, contrariamente à média aritmética $\bar{x}$ - isto que lhe dá um sentido concreto evidente".

PROPRIEDADE (md) 4. A mediana corresponde ao menos a 50% dos valores observados abaixo desta ou acima desta.

Tomemos como exemplo as seguintes observações {3; 4; 7; 12; 20}. Neste caso temos 40% dos valores abaixo da mediana e 40 % dos valores acima desta. Podemos dizer que 60% dos valores são iguais ou inferiores à mediana e 60% dos valores estão acima ou iguais à mediana. Tomando como referência as observações {3; 4; 7; 12} em um total par. Neste caso a mediana é 5,5 e temos 50% dos valores iguais ou abaixo da mediana e 50% dos valores iguais ou acima da mediana. Deve-se considerar, contudo, alguns limites desta propriedade. Quando temos variáveis quantitativas agrupadas em classes (contínuas), o valor da mediana é uma estimação. Considerando que quando temos uma grande quantidade de observação, pressupõe-se uma distribuição uniforme (KENDALL; YULE, 1948). Esta propriedade leva a Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) proporem a seguinte relação. Considerando que N(x) é uma função cumulativa que representa os números de observações inferiores ou iguais a x e que N*(x) é uma função cumulativa, à direita, correspondendo aos números de observações superiores ou iguais a x. Considerando o símbolo para mediana usada por estes autores (x ½) temos a seguinte equação:

$$N\left(x_{1/2}\right) = N^{*}\left(x_{1/2}\right)$$

Fonte : Equação proposta por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 90)

Considerando como o número de observações iguais a n, podemos ainda expressar:

$$N\left(x_{1/2}\right) \geq \frac{n}{2} \; e \; N^{*}\left(x_{1/2}\right) \geq \frac{n}{2}$$

Fonte : Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008, p. 91)

OBSERVAÇÃO (md) 1. As seis condições de uma medida de tendência central: caso da mediana (KENDALL; YULE, 1948)

Com relação às seis condições de uma medida de tendência central (KENDALL; YULE)[34], observamos que a mediana atende as três primeiras: é rigorosamente definida (não é estimada por um observador), é baseada em todas as observações realizadas e é facilmente compreensível.

Quanto à quarta condição que trata do seu cálculo, ela possui maior facilidade deste do que a média aritmética. Quando temos os dados ordenados bastando-se tomar a medida do valor que ocupa a posição central. Destacamos quanto a este aspecto que quando temos uma certa quantidade de valores organizados, as observações e os seus efetivos, ou quando os dados estão agrupados é mais simples o cálculo da média. Quando não temos disponível os valores individuais, fica inviável o cálculo da mediana, isto é, exemplificado por Kendall e Yule (1948). Para o caso do cálculo do salário médio de uma empresa que pode ser feito apenas tendo o número de funcionários e o valor da folha de pagamentos, contudo não se pode determinar a mediana. Por outro lado se temos alguns valores finais indefinidos de um conjunto de observações, fica inviável calcular a média, podendo neste caso ser feito o cálculo da mediana (KENDALL; YULE, 1948).

Em relação à quinta propriedade, que trata da estabilidade em relação à flutuação, a amostra Kendall e Yule (1948) destacam que em geral a média é mais estável que a mediana. Contudo, quando temos valores extremos, a mediana é mais adequada, pois não é influenciada por estes valores.

[34] Apresentadas no início do item: 2.3 Medidas de tendência central.

Em relação à última propriedade, a média possui um tratamento algébrico mais fácil do que a mediana. Esta superioridade da média pode ser observada em diversas situações. Quando precisamos combinar a média de várias séries em uma única série à média, o mesmo não pode ser feito com a mediana. Também não se pode, como se pode na média, obter a mediana da soma ou da diferença da mediana de duas séries. Em função desta e de outras situações, a mediana possui limitações bastante significativas quando comparada à medida no que diz respeito ao tratamento algébrico (KENDALL; YULE, 1948). Em função destes aspectos, apresentamos a observação que se segue.

OBSERVAÇÃO (md) 2. Para o cálculo da mediana é necessário conhecer a distribuição dos dados.

Tendo a distribuição dos dados pode-se ordenar as observações determinando a posição da mediana. Mesmo quando temos dados agrupados, temos uma estimativa de uma distribuição uniforme em cada intervalo, podendo assim estimar a mediana.

No caso da média esta informação não é necessária. Dessa forma, é possível calcular a média combinada tendo para isso as médias de duas séries e o número de observações destas. Contudo, não se pode calcular a mediana de duas séries tendo apenas a mediana de cada série e o número total de efetivos de cada série.

PROPRIEDADE (md) 5. A mediana é o número real que minimiza o módulo dos desvios de uma série.

Dodge (2007a, p. 1326, tradução nossa) esclarece que "a soma dos desvios em valor absoluto entre cada observação x_i de um conjunto de dados e um valor α é mínimo quando α é igual à mediana". Podemos expressar assim:

$$\text{mín} \propto \sum_{i=1}^{n} |x_i - \alpha| \Rightarrow \alpha \ = M_d \tag{52}$$

Fórmula 52: Soma dos desvios em valor absoluto é mínimo com a mediana (DODGE, 2007a, p. 1326).

Assim, o valor que minimiza o módulo dos desvios de uma série é a mediana. Podemos assim afirmar que ela representa o mínimo da função formada pelos módulos dos desvios. Na fórmula 52 (substituímos α por x) temos uma função definida pelos desvios de um conjunto de observações representada por x_i em relação a x:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x| \qquad (53)$$

Fórmula 53: Função formada pelo módulo dos desvios médios, considerando xi cada observação.

Tomemos como exemplo um levantamento com três observações {3, 6, 12). A mediana neste caso é 6 e a média é igual a 10,5. A soma dos desvios deste conjunto de observações em relação aos possíveis valores de x, considerando x um número real, nos dá uma equação:

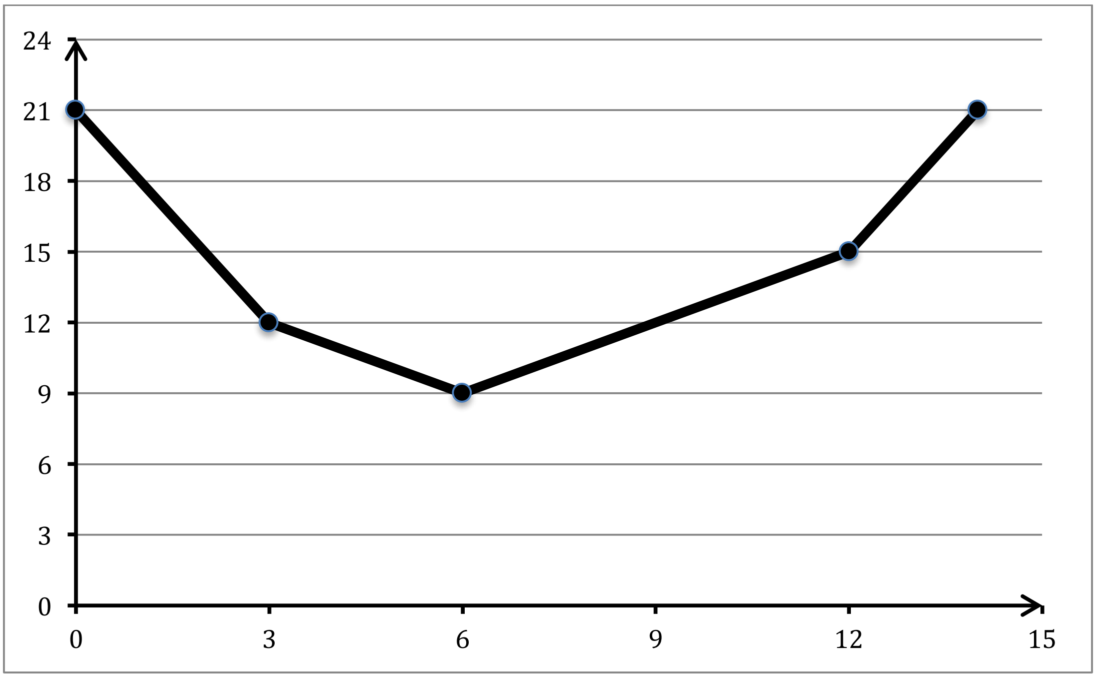
$$f(x) = |3 - x| + |6 - x| + |9 - x|$$

Considerando que f(x) é positivo temos:

Se	**Temos:**	
$\boldsymbol{x} < 3$	$f(x) = (3 - x) + (6 - x) + (12 - x)$	$\Rightarrow f(x) = 21 - 3x$
$\boldsymbol{x} = \mathbf{3}$	$f(x) = (3 - 3) + (6 - 3) + (12 - 3)$	$\Rightarrow f(x) = 12$
$\mathbf{3} < x < 6$	$f(x) = -(3 - x) + (6 - x) + (12 - x)$	$\Rightarrow f(x) = 15 - x$
$\boldsymbol{x} = \mathbf{6}$	$f(x) = -(3 - 6) + (6 - 6) + (12 - 6)$	$\Rightarrow f(x) = 9$
$\mathbf{6} < x < 12$	$f(x) = -(3 - x) - (6 - x) + (12 - x)$	$\Rightarrow f(x) = 3 + x$
$\boldsymbol{x} = \mathbf{12}$	$f(x) = -(3 - 12) - (6 - 12) + (12 - 12)$	$\Rightarrow f(x) = 15$
$\mathbf{12} < x$	$f(x) = -(3 - x) - (6 - x) - (12 - x)$	$\Rightarrow f(x) = -21 + 3x$

Podemos observar que o mínimo da função é igual a 9, quando f(x)=9, o valor de x=6 (mediana). No gráfico 9 traçamos esta função:

Gráfico 9 – Gráfico da função $f(x) = |3 - x| + |6 - x| + |9 - x|$ traçado com auxílio do Excel.



Fonte: gráfico desenhado pelo autor da tese com auxilio do Excel.

2.3.3. MODA

Régnier (2007, p.9, tradução nossa) apresenta claramente duas definições para moda em função do tipo de variável. Quando se trata de uma variável discreta ou qualitativa, a moda corresponde ao "efetivo máximo ou à frequência máxima". Quando se trata de uma variável contínua, a moda "é um valor da variável correspondente à densidade de frequência máxima". Pela definição observamos algumas das características da moda. A primeira é que ela pode ser usada tanto com variáveis discretas como qualitativa (trataremos com mais detalhes este aspecto a seguir, quando comparamos o uso da média, mediana e moda em função do tipo de variável).

Em função das observações podemos ter uma série que possui apenas uma moda (unimodal), que possui duas modas (bimodal), com três modas (trimodal), com mais modas (plurimodal), (DODGE, 2007a). Apresentamos a seguir as séries A, B e C que são unimodal, bimodal e trimodal.

Na série A (tabela 15) temos 18 alunos com 12 anos. É a idade com maior número de alunos inscritos na aula de reforço. Neste caso a moda é 12. Temos uma série unimodal.

Tabela 15 – Série A: Idade dos alunos matriculados nas aulas de reforço de matemática

	Idade dos alunos (em anos)					
	11	12	13	14	15	16
Efetivos	12	18	11	10	5	3

Fonte: dados fictícios criados pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

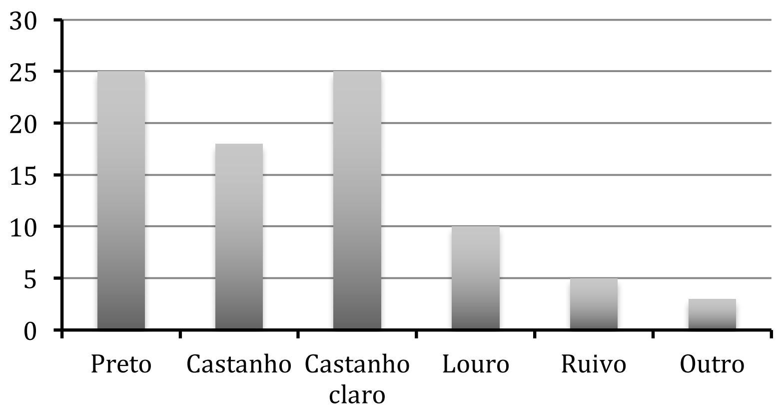
Na série B (tabela 16), temos duas cores de cabelos com mesmo número de efetivos e com o maior número de efetivos, o preto e o castanho claro. Assim podemos dizer que esta série é bimodal, pois tem duas modas: preto e castanho claro. Outro aspecto desta série é que o nível de mensuração é nominal. Não temos como calcular a média se somarmos e dividirmos os valores pelo número de cores de cabelos, assim teríamos 14,33, o que representa 14,33 seria a média de quê? Não faz sentido usar a média neste caso. Também não podemos ordenar os dados para calcular a mediana. Neste caso, podemos apenas usar a moda como medida de tendência central. No gráfico 10, construída com base nos dados da tabela 16, podemos visualizar rapidamente as duas modas (barras mais altas).

Tabela 16 – Série B: Preferência dos clientes de um salão de beleza pela cor dos cabelos.

	Cor dos cabelos					
	Preto	Castanho	Castanho claro	Loiro	Ruivo	Outro
Efetivos	25	18	25	10	5	3

Fonte: dados fictícios criados para exemplificar as ideias tratadas.

Gráfico 10 – Série B: Preferência dos clientes de um salão de beleza pela cor dos cabelos.



Fonte: dados da tabela 18 baseada em dados fictícios criados pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

Na série C (tabela 17), temos três níveis de escolaridades com o maior número de frequentadores, assim temos uma série trimodal. Nesta série o nível de mensuração é ordinal. Nela podemos falar em mediana, uma vez que os dados podem ser ordenados em função do nível de escolaridade. A mediana na série C é ensino médio, uma vez que se ordenássemos, ela ocuparia a posição número 62 que está no ensino médio. Ela não corresponde neste caso à moda. Não se pode calcular a média desta série, pois não faz sentido.

Tabela 17 – Nível de escolaridade dos frequentadores de uma biblioteca pública.

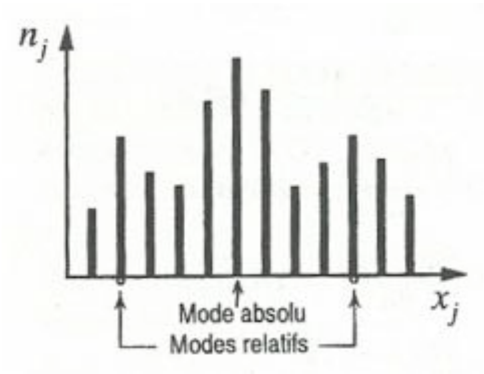
	Nível de escolaridade				
	Ensino fundamental incompleto	Ensino fundamental	Ensino médio	Ensino superior	Pós-graduação
Efetivos	8	30	25	30	30

Fonte: dados da tabela 18 baseada em dados fictícios criados pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

Podemos também ter séries em que não existem moda (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008). Se na série C o número de frequentadores fosse em mesmo número em todos os níveis de escolaridade, podemos dizer que não existe moda. Observamos publicações que a classificam em unimodal e multimodal (KENDALL; STUART, 1977; DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008), em unimodal, bimodal e trimodal (DODGE, 2007a), como também autores que falam da moda e da possibilidade de se ter mais de uma moda, sem contudo, utilizar um termo para designar estas variações (NOVAES; COUTINHO, 2009).

Observamos em Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008) além da classificação em unimodal e multimodal, uma outra: moda absoluta e moda relativa. Estes autores esclarecem que podemos ter um valor correspondente ao efetivo máximo e além de máximos relativos. Apresentamos no gráfico 11, um gráfico produzido por estes autores para ilustrar este caso. Consideramos esta classificação pouco usual e de utilização bastante restrita.

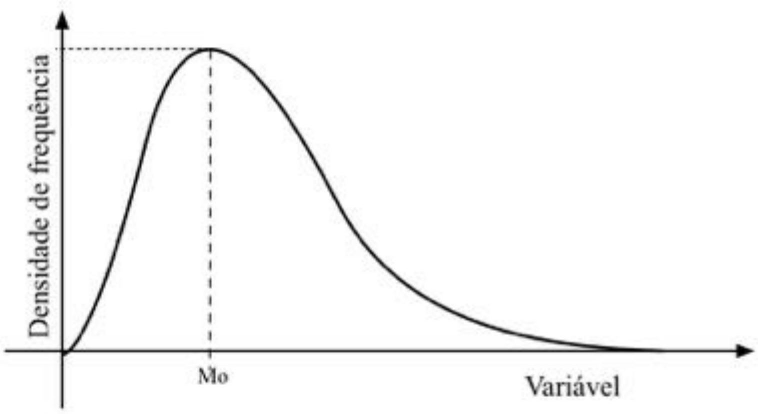
Gráfico 11 – Moda absoluta e relativa segundo Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008)



Fonte: Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008, p. 102)

Para dados contínuos a moda é dada pela densidade de frequência máxima (gráfico 12). Estes dados podem estar agrupados. Neste caso, a moda está situada no intervalo de maior densidade de frequência. Régnier (2012) esclarece que se pode fornecer como estimação pontual para a moda o centro do intervalo de densidade de maior frequência. Como não temos todos os valores, não podemos calcular com precisão a moda, logo o valor da moda que obtemos é uma estimação.

Gráfico 12 – Moda para dados contínuos.



Fonte: gráfico desenhado pelo autor da tese para exemplificar as ideias tratadas.

Na tabela 18 temos os dados agrupados de uma série. A frequência é obtida ao dividirmos o número de efetivos de cada intervalo pelo total de efetivos. A densidade de frequência é obtida ao dividir a frequência pela amplitude de cada intervalo. A densidade de frequência máxima neste caso é 0,0342. Neste caso, a moda pode ser estimada como sendo o centro do intervalo [40; 50[, ou seja, 45.

Tabela 18 – Idade dos funcionários de uma empresa D.

Intervalos (anos)	Amplitude h	Efetivos (pessoas)	Frequência f	Densidade de frequência
[18; 30[	12	11	0,0753	0,0063
[30; 40[	10	44	0,3014	0,0301
[40; 50[	10	50	0,3425	0,0342
[50; 60[	10	32	0,2192	0,0219
[60; 70[	10	9	0,0616	0,0062
Total		146	1,00000	

Fonte: dados fictícios criados para exemplificar as ideias tratadas.

Apresentamos a formula 54, para determinar a densidade de frequência, baseados em Régnier (2012).

$$Densidade\ de\ frequência = \left(\frac{n_i}{N}\right) \Big/ h \qquad (54)$$

Fórmula 54: Densidade de frequência de um intervalo. Onde n_i corresponde ao efetivo de cada intervalo, N representa o total dos efetivos, h representa a amplitude de cada intervalo.

Com base no que foi exposto, apresentamos algumas propriedades sobre a moda.

PROPRIEDADE (mo) 1. A moda pode ser usada tanto com variáveis quantitativas como com variáveis qualitativas. Ao contrário da média (quantitativas) e mediana (variáveis quantitativa e qualitativa ordinal).

PROPRIEDADE (mo) 2. Nas variáveis quantitativas discretas e nas variáveis qualitativas, a moda corresponde ao efetivo máximo ou frequência máxima de uma observação;

PROPRIEDADE (mo) 3. Em uma variável quantitativa contínua, a moda corresponde à densidade de frequência máxima.

PROPRIEDADE (mo) 4. Quando temos a moda agrupada em classes de mesmo comprimento, a moda corresponde à classe com maior valor.

PROPRIEDADE (mo) 5. Em variáveis quantitativas discretas e variáveis qualitativas, a moda vai corresponder sempre a um valor observado.

Esta propriedade faz com que a moda tenha um sentido concreto.

Destacamos a seguir algumas observações sobre a moda.

OBSERVAÇÃO (mo) 1. Uma série pode não ter moda (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008).

OBSERVAÇÃO (mo) 2. Ao contrário da média e mediana, podemos ter mais de uma moda em uma série.

OBSERVAÇÃO (mo) 3. Podemos ter uma moda com valor zero.

Tomemos como exemplo a moda das temperaturas em um determinado mês do ano, em uma cidade na França, em que esta pode ser 0^0C. Podemos também ter a média igual à zero, por exemplo, a média de -2, -1, 1, 2 é zero, ou também a mediana. Contudo, acreditamos que isto se deve levar em conta no ensino, ao criar situações com valores iguais à zero para que se possa discutir a validade deste resultado. Podemos também ter 0 no sentido de ausência. A moda dos carros por residência pode ser igual a 0.

OBSERVAÇÃO (mo) 4. Um conjunto de dados pode ter mais de uma moda. Quando ele possui duas modas é chamado de bimodal. Quando este possui três modas é chamado de trimodal. Quando temos um número maior pode ser chamado de plurimodal (DODGE, 2007a).

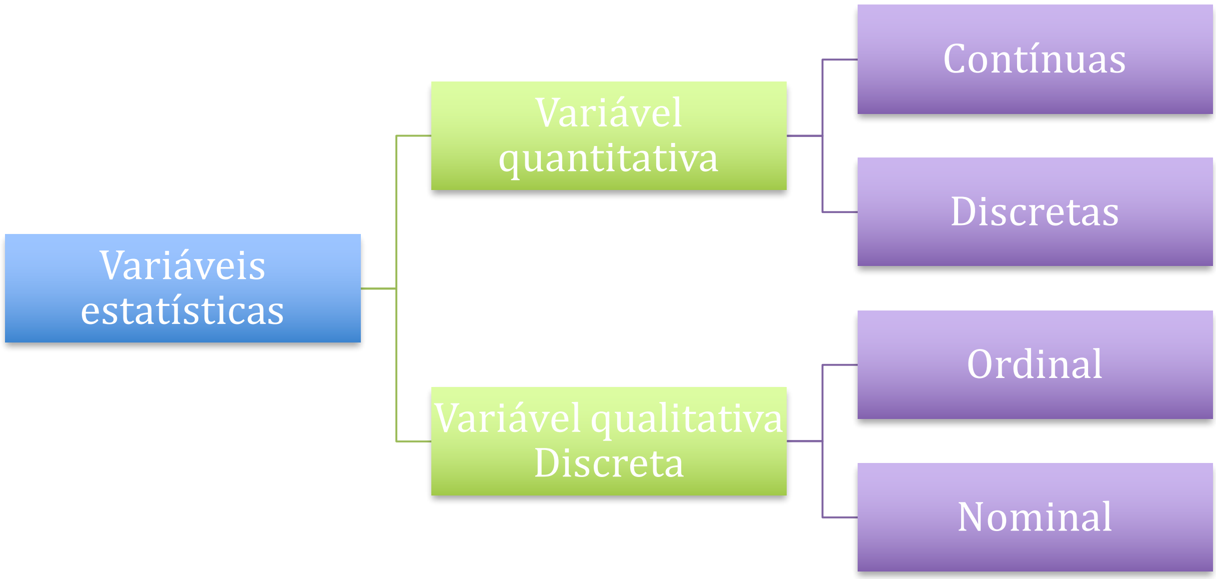
2.3.4. USO DA MÉDIA, DA MODA E DA MEDIANA

Levin e Fox (2004) apresentam três situações que podem orientar quais das medidas de tendência central (média, moda ou mediana) deve-se utilizar: nível de mensuração; forma da distribuição dos dados; objetivos da pesquisa. Consideramos mais adequado do que o nível de mensuração, a classificação segundo o tipo de variável proposta por Régnier (2011a).

2.3.4.1. TIPO DE VARIÁVEL

Régnier (2011a) organiza as medidas de tendência central segundo as variáveis, procuramos sintetizá-las na figura 18. Nas escalas ordinal e de razão, as variáveis são quantitativas e podemos utilizar a média, a moda e a mediana com este tipo de variável. Dessa forma, torna-se desnecessário classificar as escalas como proposto por Levin e Fox (2004) e depois reagrupá-las para estes dois casos as mesmas medidas de tendência central.

Figura 18 – Classificação das variáveis estatísticas segundo Régnier (2011a).



Fonte: elaborado pelo autor da tese baseado em Régnier (2011a)

Quando temos uma variável qualitativa, cuja escala de medida é ordinal, temos dados que obedecem a uma determinada ordem. Por exemplo, nível de escolaridade: 0 – Nenhum; 1 – Ensino fundamental; 2 – Ensino médio; 3 – Ensino superior; 4 – Pós-graduação. Neste caso, podemos pensar na moda como também mediana. Tomemos como exemplo a tabela 19.

Tabela 19 – Nível de escolaridade dos torcedores do time de futebol A.

	Nível de escolaridade				
	Nenhum	Ensino fundamental	Ensino médio	Ensino superior	Pós-graduação
Efetivos	150	320	110	200	110
Efetivos acumulados	150	470	580	780	890

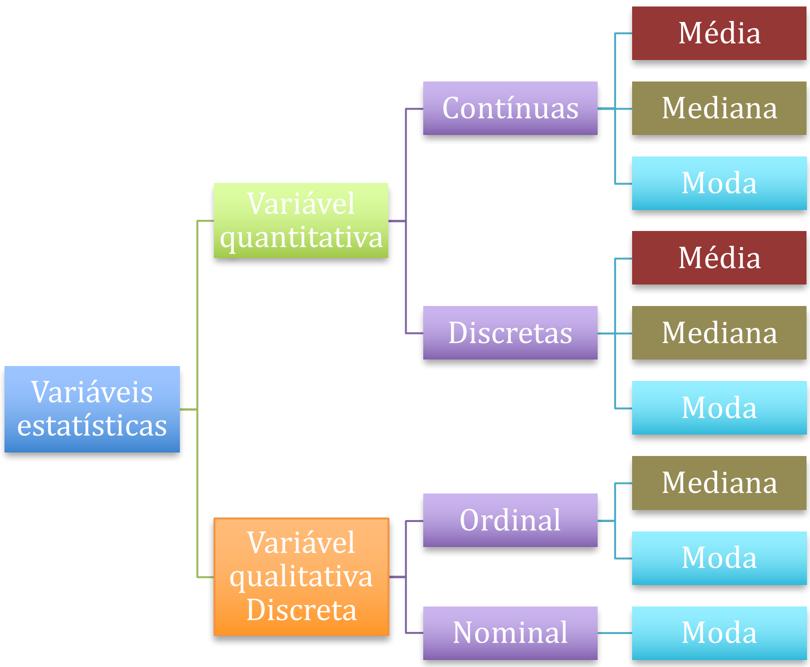
Fonte: dados fictícios criados para exemplificar as ideias tratadas.

Os dados estão organizados em ordem crescente de escolaridade. A moda está no ensino fundamental, pois é o valor mais frequente. Como os dados podem ser ordenados, podemos observar que os efetivos acumulados no ensino fundamental contemplam mais da metade do total de efetivos. Dessa forma, a mediana está no ensino fundamental. Não podemos calcular a média.

No caso das variáveis qualitativas, quando elas são do tipo nominal, não podemos calcular a média, uma vez que elas não podem assumir valores numéricos (podemos até relacionar as variáveis a números, mas não podemos efetuar operações, neste caso, nos números) como também elas não podem ser ordenadas. Logo não podemos calcular a mediana. Tomemos como exemplo deste tipo de variável a cor do cabelo. Neste caso, não podemos calcular a média das cores dos cabelos (não podemos somar castanho + preto + loiro + ruivo + preto e dividir pelo número de valores obtendo a média). Também não podemos calcular a mediana, pois elas não podem ser ordenadas. Neste caso, podemos apenas calcular a moda. Ao tratarmos da moda, apresentamos um exemplo utilizando para isso a tabela 16 (Preferência dos clientes de um salão de beleza pela cor dos cabelos) e o gráfico 10 que exemplifica este caso.

Na figura 19, fazemos uma síntese do uso da moda, mediana e média segundo organização proposta por Régnier (2011a). Acrescentar a dispersão, acreditamos que para a média teríamos os valores de dispersão associados, tais como: o desvio padrão, a variância etc.

Figura 19 – Emprego da média, mediana e moda em função do tipo de variável.

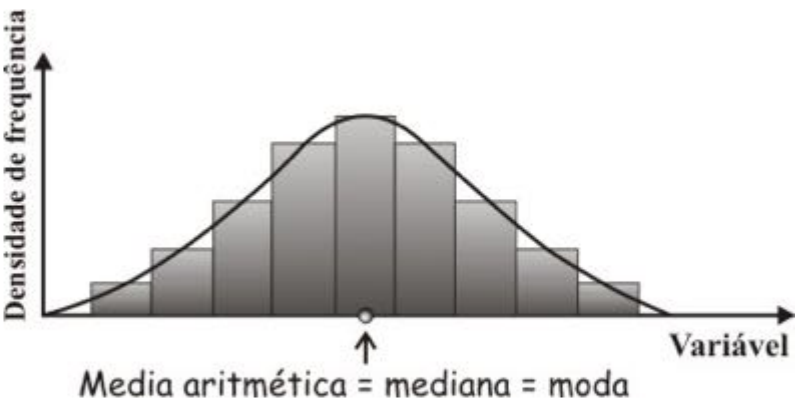


Fonte: elaborado pelo autor da tese baseado em Régnier (2011a)

2.3.4.2. FORMA DA DISTRIBUIÇÃO DOS DADOS

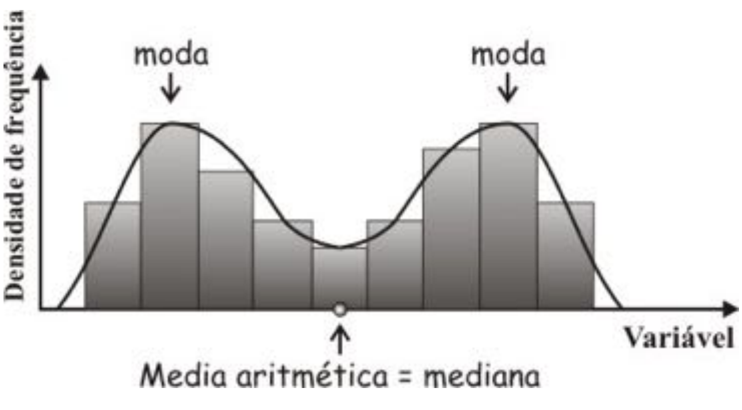
Em uma distribuição simétrica a média, a moda e a mediana coincidem (KENDALL; YULE, 1948). O gráfico 13 ilustra este caso. Neste caso, poderíamos adotar qualquer uma destas medidas, sendo assim poderia se escolher a mais simples de calcular. Contudo, podemos ter uma distribuição bimodal simétrica em que a mediana e a média coincidam, mas a moda não. O gráfico 14 ilustra este caso. No caso de uma distribuição assimétrica à direita ou à esquerda, temos a moda como a medida com maior densidade de frequência (gráficos 15 e 16), a mediana como intermediário e a média como menor densidade de frequência (a medida da média possui o maior valor para o gráfico 15 e menor para o gráfico 16).

Gráfico 13 – A moda, mediana e média em uma distribuição simétrica dos dados.



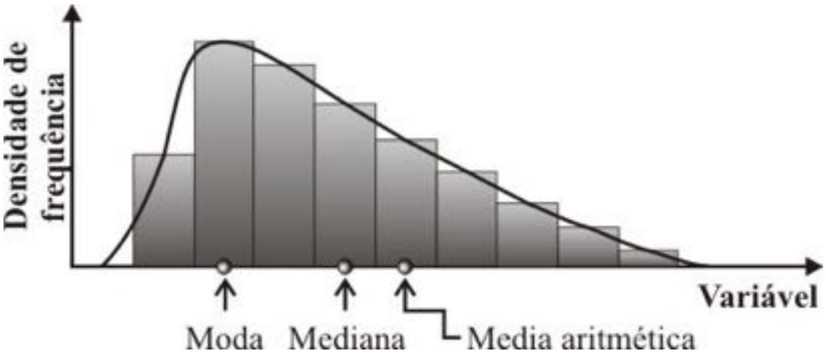
Fonte: desenho elaborado pelo autor da tese baseado em Mann (2006), substituindo frequência por densidade de frequência, conforme Régnier (1988b).

Gráfico 14 – A moda, mediana e média em uma distribuição simétrica bimodal.



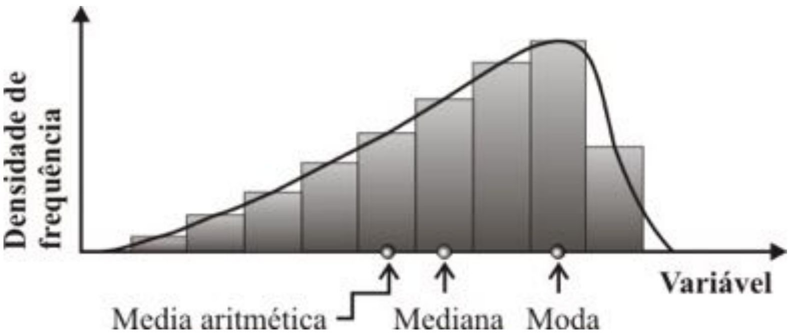
Fonte: desenho elaborado pelo autor da tese

Gráfico 15 – Distribuição assimétrica à direita.



Fonte: desenho elaborado pelo autor da tese baseado em Mann (2006), substituindo frequência por densidade de frequência, conforme Régnier (1988b).

Gráfico 16 – Distribuição assimétrica à esquerda.

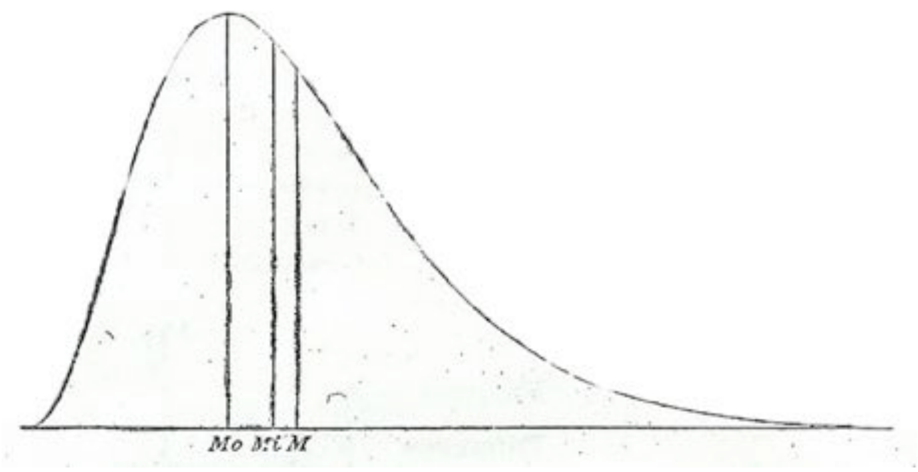


Fonte: desenho elaborado pelo autor da tese baseado em Mann (2006), substituindo frequência por densidade de frequência, conforme Régnier (1988b).

Kendall e Yule (1948) esclarecem que quando temos uma distribuição ideal moderadamente assimétrica, como no gráfico 17, existe uma relação empírica aproximada que pode ser descrita pela fórmula 55. Esta fórmula indica que a mediana fica a um terço da distância entre a média e a moda a contar da média[35], considerando como sendo $\boldsymbol{a}$ a distância entre a mediana e a média. Então procuramos representar esta relação na figura 20.

[35] Como o valor da média é menor do que o da mediana, ao subtrairmos da média a mediana, teremos como resultado um número negativo que multiplicado por -3 dará um número positivo. Assim teremos na fórmula 55 a moda igual à média mais 3 vezes a distância entre a média e a mediana.

Gráfico 17– Distribuição ideal moderadamente assimétrica.

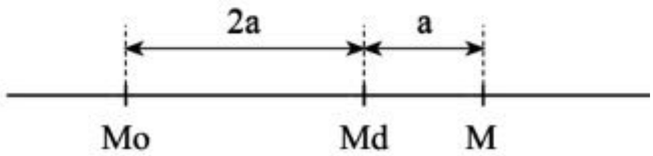


Fonte: Kendall e Yule (1948, p. 148).

$$moda = média - 3(média - mediana) \tag{55}$$

Fórmula 55: Relação empírica entre a moda, a mediana e a média (KENDALL; YULE, 1948, p. 155).

Figura 20 – Relação entre a moda, mediana e média.



Fonte: desenho elaborado pelo autor da tese baseado na relação empírica apresentada por Kendall e Yule (1948)

Na tabela 20, temos um exemplo de uma aplicação desta relação empírica. Nela temos uma distribuição moderadamente assimétrica. A diferença entre a moda aproximada calculada através desta relação empírica e da moda real é pequena chegando a no máximo a 2,1 centésimos.

Tabela 20 – Comparação entre distribuição de alturas barométricas em quatro estações resultantes de observações diárias.

Estação	Média M	Mediana Md	Moda aproximada Moa	Moda verdadeira Mov	Diferença Mov-Moa
Southampton	29,981	30,000	30,038	30,039	-0,001
Londonderry	29,891	29,915	29,963	29,960	0,003
Carmartehn	29,952	29,974	30,018	30,013	-0,005
Glasgow	29,886	29,906	29,946	29,967	0,021
Dundee	29,870	29,890	29,930	29,951	0,021

Fonte: Kendall e Yule (1948, p. 156).

A média é influenciada por todos os valores, assim quando temos valores extremos, esta relação tende a se modificar. Ela é assim influenciada por valores menos frequentes e tende a se deslocar para a extremidade da cauda. Já a moda em uma distribuição unimodal é o pico da curva no qual temos as medidas mais frequentes. Enquanto a média é influenciada por valores extremos, o mesmo não ocorre com a mediana que tende a ficar mais próxima do centro. Esta característica faz com que Levin e Fox (2004) a recomendem para distribuições assimétricas o uso da mediana. Para exemplificar isto, estes autores citaram o salário dos funcionários de uma pequena empresa e destacam que se fosse um profissional de relações humanas contratado para divulgar uma imagem positiva da empresa ele utilizaria a média dos salários da empresa. Se fosse um representante de um sindicato utilizaria a moda para reivindicar melhorias salariais. E um pesquisador social deveria utilizar a mediana, pois está mais próxima do centro e das outras medidas de tendência central. Contudo o ideal seria divulgar as três medidas. Na tabela 21, adaptamos para valores atuais este quadro, como também modificamos a frequência da tabela original de Levi e Fox (2004). Nesta tabela, a moda corresponderia a R$ 700,00, a mediana a R$ 1000,00 e a média R$ 1.778,95.

Tabela 21 – Distribuição dos salários na empresa E.

	Salário em reais (moeda Brasil)				
	R$ 700,00	R$ 1000,00	R$ 2.500,00	R$ 4.500,00	R$ 7.000,00
Efetivos	9	4	3	2	1

M= R$ 1778,95; Md= R$ 1.000,00; Mo= R$ 700,00

Fonte: dados fictícios criados pelo autor da tese (adaptado de LEVI; FOX, 2004) para exemplificar as ideias tratadas.

Outro exemplo citado por estes autores é de uma distribuição bimodal. Um pesquisador faz um levantamento em famílias de baixa renda para identificar qual é o tamanho ideal de família obtendo os dados na tabela 22.

Tabela 22 – Tamanho ideal de família: levantamento em famílias de baixa renda

	Número de membros na família								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Efetivos	1	3	4	2	1	2	4	2	1

Fonte: dados encontrados em Levin e Fox (2004, p. 89) criados para exemplificar as ideias tratadas.

A média deste levantamento seria 4,9, a mediana 4,5, contudo seria mais adequado usar a moda indicando que o tamanho mais frequente nas famílias pesquisadas é com 3 e 7 membros. Dessa forma, a forma como os dados se distribuem podem indicar qual a medida de tendência central mais adequada, mas isto também vai depender dos objetivos da pesquisa.

2.3.4.3. OBJETIVOS DA PESQUISA

Levin e Fox (2004) apresentam algumas situações e recomendações de uso:

- Se o pesquisador pretende uma medida rápida e simples ou trabalha com uma distribuição bimodal é preferível o uso da moda;
- Caso se procure uma medida mais precisa, se recomenda a média e a mediana;
- Para distribuições assimétricas é preferível a mediana[36];
- A mediana leva vantagem em relação à média quando se trabalha com medidas extremas, uma vez que ela não é influenciada pela mesma;
- A mediana também permite dividir os dados em função de preferências de pesquisa. No exemplo da tabela 22, poderíamos pensar que a mediana 4,5 separa os dados em dois grupos de mesmo numero de efetivos, metade do entrevistados consideram ideal uma família abaixo de 4,5 membros por família e metade acima deste valor;
- Para distribuições próximas a uma distribuição simétrica, a média é o ideal por permitir tratamentos estatísticos mais sofisticados;
- A média é mais estável uma vez que varia menos quando se extraem diferentes amostras de qualquer população.

[36] Veja o exemplo dos salários dos funcionários de uma empresa.

Kendall e Yule (1948) destacam a média aritmética como a mais indicada por diversas razões: possui um tratamento mais simples; na maioria dos casos pode-se determinar o seu valor; ela é menos sujeita à flutuação da amostra; permite um tratamento matemático mais avançado.

2.3.5. OUTRAS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Alem da média aritmética, mediana e moda, existem outras medidas de tendência central como a:

- Média geométrica
- Média harmônica
- Média quadrática
- Média truncada/média amparada

Estas medidas não são abordadas nos livros que analisaremos, desta forma não serão exploradas neste capítulo.

2.4. MEDIDAS DE DISPERSÃO

As medidas de tendência central apresentadas não dão uma ideia de como os dados estão dispersos. Consideremos duas empresas com média das idades dos funcionários de 27 anos. Podemos apenas com esta informação ter uma ideia clara de como está organizada a empresa? Considere um levantamento dos funcionários das duas empresas e a idade dos mesmos representada na tabela 23.

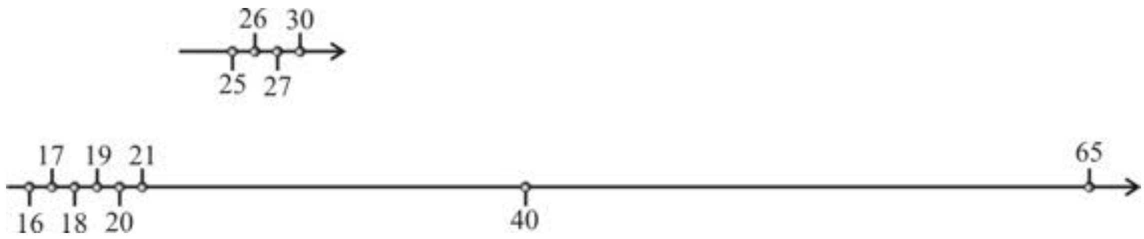
Tabela 23 – Idade dos funcionários em duas empresas.

	Idade dos funcionários								Total de funcionários
Empresa 1	25	26	27	30					4
Empresa 2	16	19	40	17	65	18	20	21	8

Fonte: Dados criados pelo autor da tese para o exemplo dado.

No diagrama da figura 21, podemos observar que na empresa 2 a dispersão é muito maior do que na empresa 1.

Figura 21 – Diagrama comparativo da empresa 1 com a 2.



Fonte: figura criada pelo autor da tese.

Dessa forma, além das medidas de tendência central, é necessário calcular a dispersão. As medidas de dispersão entram no programa do ensino médio tanto no Brasil como na França e fazem parte da nossa pesquisa. Trataremos nesta seção:

- Amplitude
- Desvio
- Soma dos desvios em módulo
- Desvio médio e/ou desvio médio absoluto ou primeiro momento
- Segundo momento ou momento de segunda ordem
- Variância
- Desvio quadrático médio
- Desvio padrão
- Intervalo interquartil
- Coeficiente de variação

2.4.1. AMPLITUDE

Segundo Kendall e Yule (1948) a amplitude é a mais simples medida de dispersão e corresponde à diferença entre o maior e menor valor de um conjunto de dados. Neste mesmo sentido podemos observar em Mann (2006). Já em Spiegel (1993) temos o termo amplitude total com o mesmo sentido de amplitude. Talvez como forma de diferenciar outros tipos de amplitude como amplitude do intervalo de classe (SPIEGEL, 1993). Em francês temos "étendue" ou "empan" (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p. 104; DODGE, 2007a, p.170) para designar amplitude. Já o termo em francês "amplitude d'une classe" (amplitude de uma classe) ou “intervalle d’une variable continu” (intervalo de uma variável contínua) (RÉGNIER, 2007, tradução nossa) é usado no sentido de amplitude de um intervalo de classe. Na tabela 23 (apresentada na seção anterior), para a empresa 1 a amplitude é 5 (30-25) e para a empresa 2 ela é 49 (65-16). Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) apresentam uma fórmula para o cálculo:

$$\boldsymbol{E = x_{(n)} - x_{(1)}} \tag{56}$$

Fórmula 56. Amplitude onde E = Étendue (francês) = amplitude, $x_{(n)}$ corresponde ao maior valor observado ou ainda valor n considerando os valores ordenados de 1 a n, $x_{(1)}$ menor valor observado (primeiro valor ordenado do menor para o maior).

Estes autores definem a amplitude (étendue ou empan) como “sendo igual a diferença entre o maior valor e o menor valor observado” (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE 2008, p.104, tradução nossa).

Dodge (2007a) apresenta duas fórmulas para a amplitude. A primeira para uma variável quantitativa X:

$$\boldsymbol{empan = X_{max} - x_{\min.}} \tag{57}$$

Fórmula 57. Amplitude segundo Dodge (2007a, p.170)

Fórmula da amplitude para observações agrupadas, considerando a amplitude como a diferença do centro de duas classes extremas: δ_1 (centro da primeira classe) e δ_k (centro da última classe):

$$\boldsymbol{empan = \delta_k - \delta_1.} \tag{58}$$

Fórmula 58. Amplitude para distribuições agrupadas segundo Dodge (2007a, p.170)

Em Régnier (2007, p. 7, tradução nossa) temos outra forma de apresentar a amplitude (Étendue) como sendo “o intervalo entre a borda inferior de posição 1 tomada por X e a borda superior da posição p assumida por X isto é $[x_1;\ x_p]$. Dessa forma, temos como amplitude da empresa 1 (tabela 23) o intervalo $[x_1;\ x_4]$, ou seja, o intervalo que vai da posição 1 (25) à posição 4 (30). Com base na definição de Régnier, apresentamos a fórmula 59 que indica a medida da amplitude (ou do intervalo entre o menor valor e o maior valor de uma série).

$$[x_1;\ x_p] = x_p - x_1 \qquad (59)$$

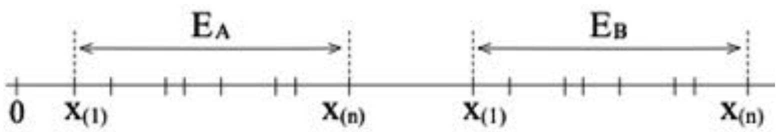
Fórmula 59. Medida da amplitude

Ao usar os termos em francês empan ou E na fórmula da amplitude, temos um limitante da língua. Assim a fórmula 59, não apresenta este inconveniente em relação às formulas 57 e 58, pois se limita a uma representação matemática.

Um conceito fundamental da estatística é a variabilidade. Na tabela 23 pode-se observar que na empresa 2 temos uma maior variabilidade do que na empresa 1. Na empresa 2 temos uma amplitude de 49 tendo uma grande variação na idade dos funcionários. Na empresa 1, pelo contrário, temos uma pequena variabilidade na idade dos funcionários com uma amplitude de 5. Destacamos, contudo, para esta grande diferença que tivemos a influência de dois funcionários com idades de 40 e 65 anos.

Apesar da medida da amplitude oferecer uma ideia da diferença entre os valores máximos e mínimos, ela não indica os valores máximos e mínimos e nem a forma como os dados estão distribuídos entre estes valores. No primeiro caso, tomemos duas empresas com a diferença de idade entre os funcionários de 15 anos. Na empresa A temos como idade mínima dos funcionários 18 anos e a máxima 33 anos. Na empresa B, temos como idade mínima 35 anos e a máxima 50 anos. Assim temos duas empresas que apesar de a idade dos funcionários terem a mesma amplitude, temos características diferentes em relação à idade dos funcionários. Na figura 22, apresentamos outra forma de ilustrar esta característica. Marcamos em uma reta como origem no 0 as medidas de duas sérias (A e B) de mesma amplitude, mesma distribuição dos dados e valores máximos e mínimos das variáveis diferentes.

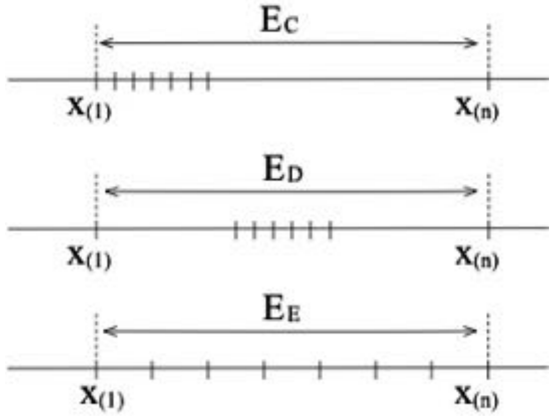
Figura 22 – Duas séries de mesma amplitude: A e B



Fonte: figura criada pelo autor da tese.

A segunda característica, a forma como os dados estão distribuídos entre estes valores é colocada por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008). A figura 23 (baseada em uma figura apresentada por estes autores) exemplifica esta propriedade. Temos três conjuntos de observações diferentes com mesmo número de efetivos, mesma amplitude e com dispersões diferentes. No conjunto de observações que chamamos de C, os dados estão concentrados à direita, no D no centro e no E estão distribuídos de maneira uniforme. Contudo, a amplitude pode nos dá informações importantes junto com outras medidas de dispersão. Ela também pode indicar que duas séries analisadas possuem características bem diferentes como é o exemplo das empresas 1 e 2, já apresentados na tabela 23.

Figura 23 – Três conjuntos de observações de mesma amplitude e mesmo número de efetivos, mas com dispersões diferentes.



Fonte: figura criada pelo autor da tese baseada em figura apresentada por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008).

Estas características levam a duas propriedades da amplitude (que numeramos como 1 e 2). Além destas, apresentamos três outras propriedades (que chamamos de propriedades 3, 4 e 5):

PROPRIEDADE (a) 1. A amplitude não é influenciada por mudanças na distribuição interna dos dados. Alterando os valores internos, sem alterar o mínimo e máximo valor da série, a amplitude não sofre alteração.

PROPRIEDADE (a) 2. A amplitude não indica os valores máximos e mínimos dos intervalos, apenas a diferença entre eles.

PROPRIEDADE (a) 3. A amplitude não é influenciada por mudança na unidade de origem. Esta propriedade será discutida com maior detalhe ao tratarmos da variância.

PROPRIEDADE (a) 4. Ela é influenciada por valores extremos. Como no cálculo da amplitude considera-se o maior valor e o menor valor, ela inclui desta forma os valores extremos.

PROPRIEDADE (a) 5. A amplitude nos dá uma ideia da variabilidade dos dados e serve para comparar a variabilidade de uma variável em duas amostras diferentes.

Para tratar dos desvios, consideramos adequado explicitar o que é desvio.

2.4.2. DESVIO

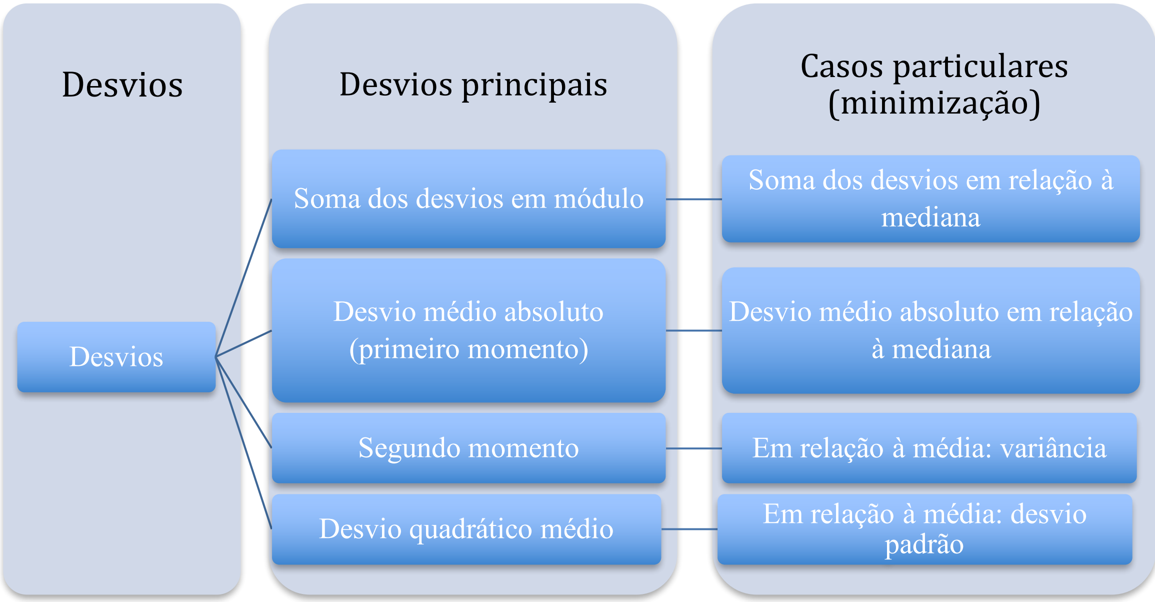
O desvio corresponde à "diferença entre um valor observado e um valor fixo de um conjunto de valores possíveis de uma variável quantitativa. Este valor fixo é frequentemente a média aritmética ou a mediana" (DODGE, 2007b).

Tomemos como exemplo a empresa 1 (tabela 23) Podemos ter:

- Desvio = $(x_1 - 50)$= 25-50 = -25 (desvio da primeira observação em relação a um valor possível da variável quantitativa. Neste exemplo usamos como valor fixo o número 50, o desvio poderia ser em relação a qualquer número).
- Desvio= $(x_2 - \bar{x})$= 26-27= -1 (desvio da segunda observação em relação à média).
- Desvio= $(x_2 - M_d) = 26 - 26{,}5 = -0{,}5$ (desvio da segunda observação em relação à mediana).

Na apresentação dos desvios que seguem, procuramos agrupar os desvios em desvios principais e alguns casos particulares destes desvios em função da sua importância matemática que são apresentados em muitos livros didáticos e têm uso frequente pelos que usam a estatística como medida de dispersão, conforme ilustrado na figura 24.

Figura 24 – Desvios principais e casos especiais.



Fonte: figura criada pelo autor da tese.

2.4.3. SOMA DOS DESVIOS EM MÓDULO

Podemos somar todos os desvios em relação à média. Contudo quando isto acontece, o resultado da soma é nulo, por isso é conveniente calcular a soma dos desvios em módulo ou valores absolutos resolvendo este problema (KENDALL; YULE, 1948). A soma dos desvios em módulo é calculado não apenas para evitar que seu valor seja nulo, no caso da média aritmética, mas sobretudo, por que ele tem uma importante propriedade matemática. Podemos calcular o módulo dos desvios em relação a qualquer número, como explicitamos ao tratar dos desvios, contudo ele é mínimo quando os desvios são tomados em relação a mediana. Esta propriedade foi tratada de forma detalhada ao abordarmos a mediana.

2.4.4. DESVIO MÉDIO E/OU DESVIO MÉDIO ABSOLUTO OU PRIMEIRO MOMENTO[37]

Podemos determinar a média aritmética da soma dos desvios em valor absoluto que é chamada de desvio médio ou ainda de primeiro momento (KENDALL; YULE, 1948, p. 176). Régnier (2011a) utiliza para designar a mesma coisa o termo desvio médio absoluto (écart absolu moyen) o termo absoluto tem uma justificativa, uma vez que temos a soma dos valores absolutos dos desvios. Régnier (2011a, p.20) apresenta a fórmula para o cálculo do desvio médio absoluto:

$$\bar{E}_c = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{p} n_k|x_k - c| \qquad (60)$$

Fórmula 60: Desvio médio absoluto (RÉGNIER, 2012, p.20).

Considerando $\bar{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{c}}$ como sendo o desvio médio absoluto (fórmula 60) de um conjunto de observações com N elementos numerados de 1 a **p**, considerando k formado pelos valores das variáveis entre 1 e **p** e c um valor qualquer. Régnier (2011a) esclarece que o valor de $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{c}}$ é mínimo quando **c** é igual à mediana ou pertencente ao intervalo mediano. Podemos também ver esta propriedade definida por Kendall e Yule (1948). Ao tratarmos da mediana, apresentamos como uma das propriedades desta a minimização dos desvios de uma série. Se c é mínimo para a mediana quando temos a soma dos desvios em valor absoluto, c também vai ser mínimo para a mediana quando tivermos a média da soma dos desvios absolutos, uma vez que se dividirmos por N a fórmula da soma dos desvios em valor absoluto (fórmula 60) esta propriedade não se altera:

$$Se \sum_{k=1}^{p} n_k|x_k - c| \text{ é } mínimo\ para\ c = M_d \Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{p} n_k|x_k - c| \text{ é } mínimo\ para\ c = M_d$$

[37] Kendall e Stuart (1977, p. 44, tradução nossa) esclarecem que o termo momento vem da estática e é muito antigo, ele aparece nos trabalhos de "A. Quetelet (1796-1874) e tem sido frequentemente utilizado desde a adoção por K. Pearson".

2.4.5. SEGUNDO MOMENTO OU MOMENTO DE SEGUNDA ORDEM

Kendall e Yule (1948) esclarecem que quando elevamos ao quadrado a média dos desvios, temos o segundo momento ou momento de segunda ordem (s^2), cuja fórmula é:

$s^2 = \frac{1}{N}\sum(\xi^2)$ onde $\xi = X - A$ (os desvios em relação a um valor A qualquer). (61)

Fórmula 61: Segundo momento ou momento de segunda ordem 2 (KENDALL; YULE, 1948).

Outra forma de calcular o momento centrado de ordem 2 é apresentado por Régnier (2011a) na fórmula abaixo:

O momento centrado de ordem 2 : $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(x_k - c)^2$ (62)

Fórmula 62: Momento centrado de ordem 2 (RÉGNIER, 2012, p.20, tradução nossa).

Esta fórmula também pode ser apresentada como indicada por Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008):

$$\boldsymbol{s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2} \qquad (63)$$

Fórmula 63: Cálculo do momento de segunda ordem (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008, p. 114).

De todos os valores possíveis para c, o valor mínimo para a fórmula do momento centrado de ordem 2 é definido quando c é igual à média aritmética. Neste caso temos a variância. Esta propriedade da variância é destacada por Régnier (2012) como uma propriedade fundamental. Esta propriedade pode ser facilmente demonstrada:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x} + \bar{x} - c)^2 =$$

Nota: ao somarmos e subtrairmos a média na expressão acima, o valor não se altera.

Em seguida:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - c)]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - c)(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - c)^2] =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - c)^2 + 2(\bar{x} - c)(x_i - \bar{x})] =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\bar{x})^2+(\bar{x}-c)^2]+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2(\bar{x}-c)\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=$$

Como a soma dos desvios em relação à média é nula, a última expressão é igual a 0. Logo temos que:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\bar{x})^2+(\bar{x}-c)^2]$$

O segundo membro da expressão possui dois termos, sendo o primeiro a variância e é independente do valor c. O segundo termo está elevado ao quadrado. Logo ele só pode ser igual a zero ou ser um número positivo. Dessa forma, o menor valor dele é zero. Quando c é igual à média, o segundo termo é igual a zero. Assim, podemos afirmar que o menor valor para o momento de segunda ordem é quando os desvios são tomados em relação à média e neste caso temos a variância[38].

2.4.6. VARIÂNCIA[39]

Quando os desvios do momento de segunda ordem são tomados em relação à média, temos como resultado a variância que minimiza as flutuações (RÉGNIER, 2000a). Com base nessas características, apresentamos duas fórmulas para variância. A primeira é quando se trata da variância para a população de efetivos N. A segunda para a variância de uma amostra de efetivos n para indicar que se trata da amostra de Régnier (2007) em que o mesmo utiliza a abreviação de amostra em francês (enc = échantillon).

$$\boldsymbol{\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p}n_k(x_k-\mu)^2=\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p}n_k x_k^2\right)-\mu^2} \tag{64}$$

Fórmula 64: Variância sobre a população (RÉGNIER, 2007, p. 12)

---

[38] Demonstração adaptada da encontrada em Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008, p. 114).

[39] Segundo Kendall e Stuart (1977, p. 44) o termo variância não foi usado antes de 1918, quando R. A. Fischer define a mesma em um artigo sobre genética. Esta afirmação é encontrada também em Dodge (2007a) em que o mesmo afirma que a variância como nós entendemos hoje em dia foi desenvolvida por Ronald Aylmer Fischer.

$$\sigma_{ech}^{2} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{k=p}} \boldsymbol{n_k(x_k - m)^2} = \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{k=p}} \boldsymbol{n_k x_k^2}\right) - \boldsymbol{m^2} \qquad (65)$$

Fórmula 65: Variância sobre a amostra (RÉGNIER, 2007, p. 12)

Podemos no lugar do efetivo de cada observação ter a frequência. Considerando a fórmula 1 para o cálculo da frequência que reproduzimos abaixo:

$$f_k = \frac{n_k}{efetivo\ total}$$

Podemos assim calcular a variância considerando as observações e as respectivas frequências. Isto pode ser feito tanto para amostra como para a população. Dessa forma, adaptando as duas fórmulas precedentes à fórmula da frequência, propomos a fórmula 66 e 67 para o cálculo da variância para população e amostra.

$$\boldsymbol{\sigma^2} = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{k=p}} \boldsymbol{f_k(x_k - \mu)^2} = \left(\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{k=p}} \boldsymbol{f_k x_k^2}\right) - \boldsymbol{\mu}^2 \qquad (66)$$

Fórmula 66: Variância sobre a população (adaptado de RÉGNIER, 2007, p. 12)

$$\sigma_{ech}^{2} = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{k=p}} \boldsymbol{f_k(x_k - m)^2} = \left(\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{k=p}} \boldsymbol{f_k x_k^2}\right) - \boldsymbol{m^2} \qquad (67)$$

Fórmula 67: Variância sobre a amostra (adaptado de RÉGNIER, 2007, p. 12)

Outra forma de calcular a variância, quando não se tem um número de efetivos por observação, é pela fórmula apresentada por Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008). Eles utilizam o mesmo símbolo (s^2) utilizado por Kendall e Yule (1948) e por outros autores para o momento de segunda ordem na fórmula da variância, ou seja, significados diferentes para o mesmo significante, o que não deveria acontecer:

$$\boldsymbol{s^2} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{(x_i - \overline{x})^2} \qquad (68)$$

Fórmula 68: Cálculo da variância (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008).

Podemos também, tomando como referência a fórmula 68, calcular a média em separado. Logo, obtemos a fórmula 69.

$$\boldsymbol{s^2} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} x_i^2\right) - \bar{x}^2 \tag{69}$$

Fórmula 69- Cálculo da variância.

Para o cálculo da variância de uma variável contínua, temos a fórmula abaixo para população (Régnier, 2007, p. 13).

$$\boldsymbol{\sigma^2} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{k=p}} \boldsymbol{n_k(c_k - \mu)^2} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{k=p}} \boldsymbol{n_k c_k^2}\right) - \boldsymbol{\mu^2} \tag{70}$$

Fórmula 70: Variância para população (RÉGNIER, 2007, p. 13), substituímos na fórmula V(x) por $\boldsymbol{\sigma^2}$.

Para o cálculo da variância de uma variável contínua, temos a fórmula abaixo para amostra (Régnier, 2007, p. 13).

$$\sigma_{ech}^2 = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{k=p}} \boldsymbol{n_k(c_k - m)^2} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{k=p}} \boldsymbol{n_k c_k^2}\right) - \boldsymbol{m^2} \tag{71}$$

Fórmula 71: Variância para amostra (RÉGNIER, 2007, p. 13), substituímos na fórmula V(x) por $\boldsymbol{\sigma^2}$.

Apresentamos a seguir algumas propriedades da variância.

PROPRIEDADE (var) 1. Tomando a fórmula do momento de segunda ordem, o desvio é mínimo, quando ele é tido em relação à média. Nesse caso temos a variância.

Esta propriedade é destacada por Régnier (2011a) como fundamental e foi demonstrada ao tratarmos do momento de segunda ordem.

PROPRIEDADE (var) 2. A variância não é influenciada pela mudança na unidade de origem (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008).

Nas tabelas 24 e 25 temos os salários das empresas D e E. O número de funcionários das duas empresas é o mesmo e os salários dos funcionários da empresa E foram obtidos acrescentando R$ 2.000,00 a cada salário da D. Ao comparar as duas tabelas, pode-se observar que a amplitude, a variância e o desvio padrão não se alteraram. A média e o coeficiente de variação mudaram. Pela propriedade da linearidade da média, já apresentada ao tratarmos da média, a diferença entre a primeira média e a segunda é igual ao que foi acrescentado, ou seja: $m_D + R\$\ 2.000{,}00 = m_E$.

Tabela 24 – Salários dos funcionários de uma empresa D.

Salário (em reais)[40] x_k	Efetivos n_k	Salário por classe $x_k n_k$	(reais) $(x_k - m)$	(reais^2) $n_k(x_k - m)^2$
700,00	9	6.300	-352,63	1.119.141,27
1000,00	4	4.000	-52,63	11.080,33[41]
1200,00	3	3.600	147,37	65.152, 35
1800,00	2	3.600	747,37	1.117.119,11
2.500,00	1	2.500	1447,37	2.094.875,35
Total	19	20.000		4.407.368,42

Amplitude = R$ 1.800,00; Média (m)= R$ 20.000/19 = R$1.052,63;

Variância ($\sigma^2 = \frac{4.407.368{,}42\ reais^2}{19} = 231.966{,}76\ reais^2$;

Desvio padrão (σ) = R$ 481,63; Amplitude = R$ 1800,00; Coeficiente de variação = 0,46

Fonte: tabela criada pelo autor da tese.

[40] Moeda atualmente em vigor no Brasil.

[41] No cálculo destes valores não foi feito um arredondamento, assim o valor usado no cálculo não foi -52,63 e sim 1000 – (20000/19) = - 52,63157895…

Tabela 25 – Salários dos funcionários de uma empresa E.

Salário (em reais)[42] x_k	Efetivos n_k	Salário por classe $x_j n_k$	(reais) $(x_k - m)$	$(reais^2)$ $n_k(x_k - m)^2$
2.700,00	9	24.300,00	-352,63	1.119.141,27
3.000,00	4	12.000,00	-52,63	11.080,33
3.200,00	3	9.600,00	147,37	65.152,35
3.800,00	2	7.600,00	747,37	1.117.119,11
4.500,00	1	4.500,00	1447,37	2.094.875,35
Total	19	58.000,00		4.407.368,42

Amplitude = R$ 1.800,00; Média (m) = R$ 58.000/19 = R$3.052,63;

Variância $(\sigma^2) = \frac{4.407.368,42\ reais^2}{19} = 231.966,76\ reais^2$;

Desvio padrão (σ) = R$ 481,63; Coeficiente de variação = 0,16

Fonte: tabela criada pelo autor da tese.

Esta propriedade pode ser útil para simplificar os cálculos da variância conforme apresentados por Dehon, Droesbeke, Vermandele (2008). Tomemos um exemplo apresentado por estes autores. Para o cálculo da série $\{x_i\}$={13.291; 13.296; 13.303; 13.292; 13.314; 13.307}, se subtrairmos 13.300 de todos os valores, teremos como resultado a nova série $\{u_i\} = \{-9;\ -4; 3;\ -8; 14; 7\}$. Na tabela 26, exemplificamos este procedimento.

[42] Moeda atualmente em vigor no Brasil.

Tabela 26 – Simplificando o cálculo da variância.

Medidas iniciais				$x_k - 13.300 = u_k$			
x_k	n_k	$(x_k - m)$	$(x_k - m)^2$	u_k	n_k	$(u_k - m)$	$(u_k - m)^2$
13291,00	1	-9,50	90,25	-9,00	1	-9,50	90,25
13292,00	1	-8,50	72,25	-8,00	1	-8,50	72,25
13296,00	1	-4,50	20,25	-4,00	1	-4,50	20,25
13303,00	1	2,50	6,25	3,00	1	2,50	6,25
13307,00	1	6,50	42,25	7,00	1	6,50	42,25
13314,00	1	13,50	182,25	14,00	1	13,50	182,25
79803,00	6		413,50	3,00	1		413,50
Amplitude = 23; média (m) = 13.300,50				Amplitude = 23; média (m) = 0,50			
Variância $(\sigma^2) = \frac{413,50}{6} = 59,07$				Variância $(\sigma^2) = \frac{413,50}{6} = 59,07$			
Desvio padrão $(\sigma) = 7,69$				Desvio padrão $(\sigma) = 7,69$			
CV = $\frac{\sigma}{m}$ = 0,00058				CV = $\frac{\sigma}{m}$ = 15,37159[43]			

Fonte: tabela criada pelo autor da tese.

PROPRIEDADE (var) 3**.** A variância não é influenciada pela soma e subtração

A variância não sofre alteração, tanto para a soma como para a subtração, desde que seja somado ou subtraído o mesmo valor a cada observação. Como a operação é a mesma para todos os elementos do conjunto, o que temos é um deslocamento da posição do conjunto (CARVALHO, 2006).

PROPRIEDADE (var) 4**.** A variância é influenciada pela multiplicação e divisão

Na variância como os valores são elevados ao quadrado, se multiplicarmos ou dividirmos por um valor constante todas as observações, a variância será multiplicada ou dividida por este valor constante ao quadrado (CARVALHO, 2006). Ao tratarmos da média aritmética, apresentamos e demonstramos a propriedade 10 que trata da linearidade da média, ou seja, se somarmos, subtrairmos, multiplicarmos ou dividirmos as observações por um valor, o mesmo ocorrerá com a média. Tomemos a fórmula 64 da variância para população:

[43] Para poder comparar os coeficientes de variação utilizamos cinco casas decimais.

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(x_k - \mu)^2$$

Ao multiplicarmos todas as observações por um valor $\boldsymbol{a}$, teremos o valor da média também multiplicado por $\boldsymbol{a}$, o que leva ao valor da variância ser mulplicado por a^2:

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(ax_k - \mathrm{a}\mu)^2 = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{k=p} n_k[\mathrm{a}^2(x_k - \mu)^2] = a^2\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(x_k - \mu)^2\right]$$

PROPRIEDADE (var) 5. A variância é influenciada por valores extremos.

Tal como a média, a variância é influenciada por valores extremos. Na tabela 26, temos uma comparação da idade dos funcionários de duas empresas. Na empresa 2 temos uma grande dispersão e pode-se observar isto na mudança do valor da variância que passa de 3,5 anos^2 para 258 anos^2.

PROPRIEDADE (var) 6**.** A variância jamais poderá ter valores negativos (MANN, 2006).

Trata-se de uma propriedade matemática simples e óbvia, uma vez que elevada ao quadrado, ela não poderá ter valores negativos.

OBSERVAÇÃO (var) 1. O seu valor pode ser igual à zero (MANN, 2006)

Quando não existe variação, a variância e o desvio padrão são iguais à zero. Isso pode ocorrer em uma das variáveis da pesquisa. Por exemplo, em uma pesquisa que se procura analisar o desempenho dos alunos de uma determinada classe em matemática, poderíamos ter todos os alunos com a mesma idade, neste caso não teríamos variação na idade, embora pudéssemos observar variação em outros elementos como na nota dos alunos.

OBSERVAÇÃO (var) 2**.** As unidades de medida da variância são sempre elevadas ao quadrado, embora em alguns casos não faça muito sentido. Por exemplo: a folha de pagamento de uma amostra de cinco empresas é de 230 milhões de reais ao quadrado (reais ao quadrado). O que é real ao quadrado? Ou euro ao quadrado? É preciso esclarecer este contexto aos alunos.

2.4.7. DESVIO QUADRÁTICO MÉDIO

O desvio quadrático médio corresponde à raiz quadrada do momento de segunda ordem, ou seja, corresponde a **s** na fórmula 54, ou seja,:

$s^2 = \frac{1}{N}\sum(\xi^2)$ onde $\xi = X - A$ (os desvios em relação a um valor A qualquer). (72)

Logo: $s = \sqrt[2]{\frac{1}{N}\sum(\xi^2)}$

Fórmula 72: Desvio quadrático médio adaptado de Kendall e Yule (1948).

Quando os desvios são medidos a partir da média, o desvio quadrático médio é mínimo. Nesse caso ele recebe o nome de desvio padrão. Assim podemos dizer que “o desvio padrão é o desvio quadrático médio de valor mínimo” (KENDALL; YULE, 1948, p. 167).

2.4.8. DESVIO PADRÃO[44]

Segundo Mann (2006) “o desvio padrão é a medida de dispersão mais utilizada”. Este autor, contudo, não descreve a razão dela ser mais usada. Como tratamos anteriormente, o desvio é mínimo quando os desvios são tomados em relação à média e nesse caso temos o desvio padrão. O desvio padrão é a medida de dispersão que faz relação junto com a variância e com a média aritmética, utilizando-se desta ou destas nos cálculos e possuindo algumas propriedades comuns. Tal como a média, Kendall e Yule (1948) destacam que o desvio padrão é a medida de dispersão que é mais fácil tratar por métodos algébricos, sendo por isso “analogia com a média aritmética entre as medidas de locação” (p. 173).

Quanto maior o valor do desvio padrão maior a sua dispersão. Para calcular o desvio padrão é necessário calcular a raiz quadrada positiva da variância (KENDALL; STUART, 1977). Existem outros termos menos usados no lugar de desvio padrão (standard deviation em inglês ou écart-type em francês) que têm o mesmo significado, assim temos: “erro médio” (Gauss), “erro quadrático médio” (mean square error) e “erro da média quadrática” (error of mean square) (KENDALL; YULE,1948). Estes autores acrescentam que não se deve confundir o desvio padrão com o “erro padrão” que seria o “desvio padrão das distribuições

[44] Segundo Kendall e Stuart (1977, p.44, tradução nossa) foi K. Pearson “que usou pela primeira vez o termo ‘desvio padrão’ nos anos de 1890”.

decorrentes de amostragens simples" (p.176). Observamos em Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) a fórmula para o cálculo do desvio padrão:

$$\mathbf{s} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}})^2} \tag{73}$$

Fórmula 73: Cálculo do desvio padrão (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008).

Podemos também, tomando como referência a fórmula 73, calcular a média em separado. Logo obtemos assim a fórmula 74.

$$\mathbf{s} = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i^2\right) - \overline{\boldsymbol{x}}^2} \tag{74}$$

Fórmula 74 - Cálculo do desvio padrão (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008).

Contudo, esta fórmula não leva em conta os efetivos de cada observação e diferença de representação do cálculo para população e amostra, como podemos observar em Régnier (2007):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{k=1}^{k=p}\boldsymbol{n}_k(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{\mu})^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{k=1}^{k=p}\boldsymbol{n}_k\boldsymbol{x}_k^2\right) - \boldsymbol{\mu}^2} \tag{75}$$

Fórmula 75: Desvio padrão sobre a população[45] (RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12)

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{k=1}^{k=p}\boldsymbol{n}_k(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{m})^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{k=1}^{k=p}\boldsymbol{n}_k\boldsymbol{x}_k^2\right) - \boldsymbol{m}^2} \tag{76}$$

Fórmula 76: Desvio padrão sobre a amostra (RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12)

Considerando a definição de frequência de Régnier (2007), apresentamos a fórmula do desvio padrão considerando as observações e a frequência.

[45] A segunda fórmula à direita foi adaptada da fórmula de variância em Régnier (2007, p.12)

$$\sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{f_k(x_k - \mu)^2}} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{f_k x_k^2}\right) - \boldsymbol{\mu^2}} \quad (77)$$

Fórmula 77: Desvio padrão sobre a população[46] (adaptado de RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12)

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{f_k(x_k - m)^2}} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{f_k x_k^2}\right) - \boldsymbol{m^2}} \quad (78)$$

Fórmula 78: Desvio padrão sobre a amostra (adaptado de RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12)

Tomando por base Régnier (2007), apresentamos a fórmula do desvio da variável quantitativa contínua:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k(c_k - \mu)^2}} = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k c_k^2}\right) - \boldsymbol{\mu^2}} \quad (79)$$

Fórmula 79: Desvio padrão sobre a população[47] (RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12)

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k(c_k - m)^2}} = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k c_k^2}\right) - \boldsymbol{m^2}} \quad (80)$$

Fórmula 80: Desvio padrão sobre a amostra (RÉGNIER, 2007, p. 5; p.12)

2.4.8.1. O DESVIO PADRÃO E A DISPERSÃO

Para efeito de comparação em uma distribuição simétrica ou moderadamente simétrica, uma amplitude igual a seis vezes o desvio padrão, em geral, envolve 99% de todas as observações. Esta relação não é, contudo, adequada para um pequeno número de observações (KENDALL; YULE, 1948). Na tabela 27, apresentamos dois exemplos com um

---

[46] A segunda fórmula à direita foi adaptada da fórmula de variância em Régnier (2007, p.12)

[47] A segunda fórmula à direita foi adaptada da fórmula de variância em Régnier (2007, p.12)

pequeno número de observações. Nesta tabela comparamos duas empresas, empresa 1 e empresa 2. Na empresa 1, com apenas 4 observações e com pequena dispersão, com dois desvios padrões, temos 75% dos dados e com 4 desvios padrões, temos 100,0 % das observações. Na empresa 2, com apenas 8 observações e com valores extremos, com dois desvios padrões (1 acima e 1 abaixo da média) temos 87,5 % das observações. Na empresa 2, com 6 desvios padrões (3 acima e 3 abaixo da média) temos 100% das observações. A figura 25 ilustra as diferenças entre as empresas 1 e 2.

Tabela 27 – Média e medidas de dispersão.

Empresa 1						**Empresa 2**					
n_k	x (idade)	$\bar{x}$ (Média)	$x-\bar{x}$ (Desvio)	σ^2 (Variância)[48]		**N**	x (idade)	$\bar{x}$ (Média)	$x-\bar{x}$ (Desvio)	σ^2 (Variância)	
1	25	27	-2	$(-2)^2$	4	1	16	27	-11	$(-11)^2$	121
1	26	27	-1	$(-1)^2$	1	1	19	27	-8	$(-8)^2$	64
1	27	27	0	$(0)^2$	0	1	40	27	13	$(13)^2$	169
1	30	27	3	$(3)^2$	9	1	17	27	-10	$(-10)^2$	100
						1	65	27	38	$(38)^2$	1444
						1	18	27	-9	$(-9)^2$	81
						1	20	27	-7	$(-7)^2$	49
						1	21	27	-6	$(-6)^2$	36
4	108		0	14/4=3,5		8	216		0	2064/8=258	

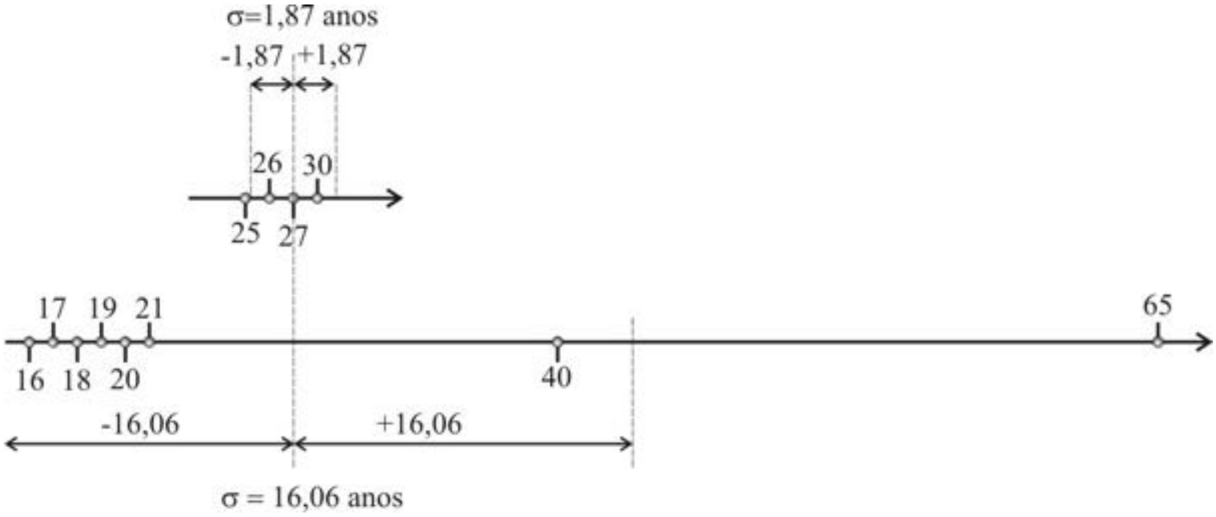
Empresa 1	Empresa 2
Média aritmética: $\bar{x}$ = 108/4=27 anos	**Média aritmética:** $\bar{x}$ = 216/8=27 anos
Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3,5} = 1,87$ anos	**Desvio padrão:** $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{258} = 16,06$ anos[49]
Coeficiente de variação: CV	**Coeficiente de variação: CV**
$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\% = \frac{1,87}{27} = 6,93\%$	$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\% = \frac{16,06}{27} = 59,48\%$

Fonte: tabela criada pelo autor da tese.

[48] Desvio padrão para população. Quando se trata de amostra temos s^2.

[49] Para amostra, temos uma mudança no valor da variância e consequentemente do desvio padrão. Em muitas planilhas considera-se para o cálculo o desvio padrão para amostra.

Figura 25 – Diagrama comparativo das empresas 1 e 2 utilizando o desvio padrão como elemento de análise.



Fonte: diagrama criado pelo autor da tese.

2.4.8.2. PROPRIEDADES DO DESVIO PADRÃO

Kendall e Yule (1948) apresentam algumas propriedades do desvio padrão que estão presentes na média:

PROPRIEDADE (dp) 1. É rigorosamente definido.

PROPRIEDADE (dp) 2**.** Baseia-se em todas as observações feitas.

PROPRIEDADE (dp) 3. É facilmente calculado.

PROPRIEDADE (dp) 4. Permite um tratamento algébrico e é menos afetada por flutuações da amostra.

Acrescentamos outras propriedades:

PROPRIEDADE (dp) 5. Não é influenciado pela mudança na unidade de origem. Esta propriedade foi apresentada ao tratarmos da variância.

PROPRIEDADE (dp) 6. É influenciado por valores extremos. Tal como a média aritmética, o desvio padrão é afetado por valores extremos.

PROPRIEDADE (dp) 7. O valor do desvio padrão não sofre alteração ao somarmos ou subtrairmos um valor constante a todas as observações.

PROPRIEDADE (dp) 8. Ao multiplicarmos ou dividirmos um valor constante às observações, o valor do desvio padrão também será multiplicado ou dividido por esta constante.

Ao multiplicarmos ou dividirmos um valor constante a todas as observações, o novo valor do desvio padrão será também multiplicado ou dividido por esta constante.

Tomemos a fórmula do desvio padrão para população:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{k=p} n_k (x_k - \mu)^2}$$

Ao multiplicarmos todas as observações por um valor $\boldsymbol{a}$ teremos o valor da média também multiplicado por $\boldsymbol{a}$, o que leva ao valor do desvio padrão ser mulplicado por $\boldsymbol{a}$:

$$\sqrt{\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{k=p} n_k (a x_k - \mathrm{a}\mu)^2} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{k=p} n_k [\mathrm{a}^2 (x_k - \mu)^2]} = \sqrt{a^2 \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k (x_k - \mu)^2\right]}$$

$$= a\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k (x_k - \mu)^2}$$

PROPRIEDADE (dp) 9. Jamais poderá ter valores negativos (MANN, 2006).

Trata-se de uma propriedade matemática simples e de fácil observação.

PROPRIEDADE (dp) 10. Quanto maior o desvio padrão, maior a dispersão em torno da média. O inverso é válido. Quanto menor o desvio padrão, menor a dispersão em torno da média.

PROPRIEDADE (dp) 11.Quanto maior o desvio padrão, a média torna-se menos representativa de uma série.

OBSERVAÇÃO (dp) 1. O seu valor pode ser igual à zero (MANN, 2006)

Quando não existe variação, a variância e o desvio padrão são iguais à zero (já exemplificamos isto ao tratar desta propriedade na variância), embora não faça sentido trabalhar com dados que não possuem variação. Explicamos com mais detalhes esta propriedade quando tratamos da variância.

OBSERVAÇÃO (dp) 2. Caso o valor do desvio padrão seja nulo, não temos variação e todas as observações tem o mesmo valor.

Destacamos assim, que o desvio padrão pode ser nulo. Neste caso, não tem variação, o que não faz muito sentido na estatística.

OBSERVAÇÃO (dp) 3. Caso tenhamos duas séries com exatamente os mesmos valores, teremos a mesma média e o mesmo desvio padrão. Contudo, a recíproca não é válida. Duas séries com a mesma média e o mesmo desvio padrão não possuem obrigatoriamente as mesmas observações (PONCY; GUICHARD;RUSSIER, 2011).

OBSERVAÇÃO (dp) 4. O número de observações maiores em uma série do que em outra não indicam que temos um desvio padrão maior (PONCY; GUICHARD; RUSSIER, 2011).

OBSERVAÇÃO (dp) 5. Ao acrescentarmos um novo valor à série, o desvio padrão se altera. Se este valor for igual à média, teremos um valor do desvio padrão menor do que antes da inserção deste valor e, neste caso, o valor da média não sofre alteração.

OBSERVAÇÃO (dp) 6. Quanto mais próximo as observações de uma série estão da média, menor o desvio padrão. Dessa forma, se quisermos diminuir o valor do desvio padrão, é necessário modificar os valores da série de modo que fiquem mais próximos da média. Alterando um valor mais afastado da média por um mais próximo da média, a medida do desvio padrão diminui.

2.4.9. MEDIDAS ABSOLUTAS DE DISPERSÃO

Kendall e Yule (1948) esclarecem que as medidas de dispersão mais usadas são expressas em unidades da variável, o que torna impossível calcular medidas com unidades diferentes. Uma solução para isso é o emprego de medidas absolutas, ou seja, números abstratos e independentes das unidades originais de medidas. Para fazer a comparação, basta dividir por um componente com as mesmas dimensões. Estes autores apresentam três possibilidades:

$$\frac{Desvio\ médio}{Média\ aritmética} \qquad \frac{Desvio\ médio}{Moda} \qquad \frac{Desvio\ padrão}{Média\ aritmética}$$

Destas três possibilidades, o único que foi generalizado foi o coeficiente de variação que se obtém ao dividir o desvio padrão pela média aritmética.

2.4.10. COEFICIENTE DE VARIAÇÃO

O desvio padrão utiliza a mesma unidade dos dados. Quando se pretende comparar dados com unidades diferentes pode-se utilizar o coeficiente de variação. Novais e Coutinho (2009) destacam que quando o coeficiente de variação está acima de 50% temos uma dispersão muito grande e uma baixa representatividade da média. Quanto menor o coeficiente de variação, mais representativa será a média.

Destacamos que o coeficiente de variação, o desvio padrão e a variância se apoiam no valor da média e são influenciados por valores extremos. Apresentamos abaixo uma fórmula que propomos para coeficiente de variação.

Para população temos:

$$C.V. = \frac{\sigma}{\mu} \tag{81}$$

Fórmula 81: Fórmula para coeficiente de variação (C.V.) proposta com base nos símbolos utilizados por Régnier (2007) para desvio padrão e média.

Para amostra apresentamos:

$$C.V. = \frac{\sigma_{ech}}{m} \tag{82}$$

Fórmula 82: Fórmula para coeficiente de variação (C.V.) proposta com base nos símbolos utilizados por Régnier (2007) para desvio padrão e média.

Na tabela 27 que usamos ao tratar do desvio padrão, tomando como base as empresas 1 e 2, fazemos uma comparação entre as medidas de dispersão das duas empresas. Apesar de elas terem a mesma média aritmética, o desvio padrão e o coeficiente de variação são diferentes, indicando uma maior dispersão para os dados na empresa 2. Segundo Novaes e

Coutinho (2009, p.101) "um coeficiente de variação acima de 50% tem alto grau de dispersão e, portanto baixa representatividade da média na distribuição considerada". Neste exemplo, a empresa com uma grande dispersão (empresa 2) apresenta um coeficiente de variação de 59,48%. Dessa forma, quanto menor o coeficiente de variação, mais a média será representativa dos dados e maior será sua concentração (idem). O diagrama da figura 25 ilustra bem esta propriedade para as duas empresas. Considerando que se queira comparar os salários da mesma empresa em épocas diferentes e em moedas diferentes para ver a dispersão dos dados. Nas tabelas 28 e 29, temos as empresas F atualmente e nos anos 80. Os salários estão com à moeda da época. Considerando que o número de funcionários não mudou, mas que os salários sofreram mudanças ao longo do tempo, será que a diferença entre as faixas salariais mudaram ou não? Existe uma maior dispersão entre as diferenças salariais ou ao contrário?

Tabela 28 – Salários dos funcionários de uma empresa F em 2012

Salário (em reais)[50] x_k	Efetivos n_k	Salário por classe $x_k n_k$	(reais) $(x_k - m)$	$(reais^2)$ $n_k(x_k - m)^2$
700,00	9	6.300,00	-868,42	6.787.396,12
1000,00	4	4.000,00	-568,42	1.292.409,97
2.000,00	3	6.000,00	431,58	558.781,16
4.000,00	2	8.000,00	2.431,58	11.825.152,35
5.500,00	1	5.500,00	3.931,58	15.457.313,02
Total	19	29.800,00		35.921.052,63

Amplitude = R$ 4.800,00; média (m)= R$ 29.800,00/19 = R$ 1.568,42;

Variância $(\sigma^2) = \frac{35.921.052,63\ reais^2}{19} = 1.890.581,72\ reais^2$;

Desvio padrão (σ) = R$ 1.374,98; Amplitude = R$ 4.800,00; C.V. = 0,88

Fonte: tabela criada pelo autor da tese.

[50] Moeda atualmente em vigor no Brasil.

Tabela 29 – Salários dos funcionários de uma empresa F em 1988[51]

Salário (em cruzeiros)[52] x_k	Efetivos n_k	Salário por classe $x_k n_k$	(reais) $(x_k - m)$	$(reais^2)$ $n_k(x_k - m)^2$
60.000,00	9	540.000,00	-34.736,84	10.859.833.795,01
100.000,00	4	360.000,00	-4.736,84	89.750.692,52
120.000,00	3	360.000,00	25.263,16	1.914.681.440,44
180.000,00	2	320.000,00	65.263,16	8.518.559.556,79
250.000,00	1	220.000,00	125.263,16	15.690.858.725,76
Total	19	1.800.000,00		37.073.684.210,53

Amplitude = R$ 1.800,00; média (m)= R$ 1.800.000/19 = Cz$ 94.736,84;

Variância $(\sigma^2) = \frac{37.073.684.210,53\ cz^2}{19} = 1.951.246.537,40\ cruzeiros^2$;

Desvio padrão (σ) = R$ 44.172,92; Amplitude = Cz$ 160.000,00; C.V. = 0,47

Fonte: tabela criada pelo autor da tese.

Ao comparar as duas tabelas, poderíamos a princípio comparar os desvios padrões observando que o desvio padrão da segunda tabela é bem maior do que na primeira. Contudo, estão em unidades diferentes e em anos diferentes. Não podemos assim utilizar o desvio padrão para comparar. Pelo coeficiente de variação, observamos que atualmente existe uma maior dispersão nos salários do que em 1988. Dessa forma, podemos utilizar o coeficiente de variação para estes casos. Tomando como referência Novaes e Coutinho (2009), podemos afirmar que em 2012 na empresa F temos uma dispersão uma grande dispersão, sendo esta dispersão bem maior do que da empresa em 1988.

2.4.11. INTERVALO INTERQUARTIL (INTERVALLE INTERQUARTILE EM FRANCÊS)

Quando utilizamos a média como medida de tendência central, ao tratar da dispersão, temos a variância e o desvio padrão como medidas de dispersão que utilizam a média para o cálculo. Estas medidas apresentam inúmeras vantagens que apresentamos. Quando temos

[51] Simulamos tendo por base o salário mínimo da época que valia Cz$ 40.225,00. Fonte: http://www.gazetadeitauna.com.br/valores_do_salario_minimo_desde_.htm.

[52] Moeda em vigor no Brasil em 1988. Em 1984 foram abolidos os centavos, assim não existiam centavos nesta moeda.

valores extremos e adotamos como medida de tendência central a mediana, temos como medida de dispersão correspondente o intervalo interquartil.

A mediana, em muitos casos, divide os dados em duas partes com o mesmo número de observações. Podemos dividir os dados em quatro partes (quartil). Assim teremos três medidas o primeiro quartil (Q1), o segundo quartil (Q2) ou mediana e o terceiro quartil (Q3). A mediana pode ser vista como o segundo quartil, pois ela divide os dados em duas partes iguais. No quadro 1, temos uma apresentação de Régnier (2000a) da mediana como segundo quartil. Com base neste quadro, podemos observar de forma simples a posição de Q1, Q2 (mediana) e Q3. Tomemos como exemplo o valor 20 que pode ser representado como sendo 4q (onde q=5). Neste caso, conforme o quadro 1, Q1 é o valor entre a posição q e q+1. Assim o que Q1 ocupa é a posição entre a quinta e a sexta posição. Se a observação na quinta posição for 18 e na sexta posição for o valor de 19, Q1 = 18,5. No caso da mediana, temos o valor entre 2q e 2q+1. Se tivermos o conjunto de observações {2; 5; 7; 8; 9; 11; 15; 20} que pode ser representado com N=4q, onde q=2, a mediana vai ocupar a posição entre a quarta (2q) e quinta posição (2q+1), ou seja, entre 8 e 9. Logo, a mediana é igual a 8,5. Podemos pensar em outros valores que podem se enquadrar em N=4q+1 e N=4q+2. Dessa forma, esta proposição de Régnier se revela bastante prática.

Quadro 1 – Determinação da posição dos quartis segundo Régnier (2000a).

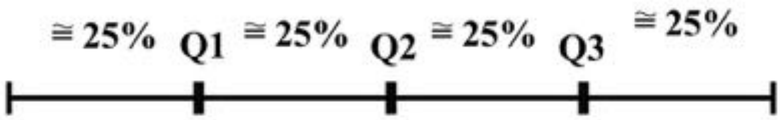
N=	Q1	Q2	Q3
N = 4q	Entre o valor de posição q e o de posição q+1	Entre o valor de posição 2q e o de posição 2q+1	Entre o valor de posição 3q e o de posição 3q+1
N = 4q+1	Entre o valor de posição q e o de posição q+1	O valor de posição 2q+1	Entre o valor de posição 3q+1 e o de posição 3q+2
N = 4q+2	O valor de posição q+1	Entre o valor de posição 2q+1 e o de posição 2q+2	O valor de posição 3q+2
N = 4q+3	O valor de posição q+1	O valor de posição 2q+2	O valor de posição 3q+3

Fonte: Régnier (2000, p. 13, tradução nossa).

Para representar os quartis, Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) utilizam para os símbolos: $x_{1/4}$ (correspondente a Q1, esta forma de representar usa ¼, pois é como tivesse aproximadamente ¼ dos valores ou 25% das observações), $x_{1/2}$ (corresponde a Q2 ou Md –

mediana, ½, pois divide os dados em duas partes iguais) e $x_{3/4}$ (o mesmo que Q3, pois os valores abaixo do mesmo correspondem a aproximadamente ¾ dos dados). Apesar de usar o símbolo ¼, ½ e 3/4, estes não correspondem sempre a uma divisão exata, o que pode induzir a uma concepção errônea dos quartis. Tomemos como exemplo determinar Q1, Q2 e Q3 de uma amostra com 7 observações: 1, 4, 5, 7, 8, 10, 7. Q1 é igual a 4 (posição q+1) e temos abaixo de Q1 uma observação (14,29 % dos dados) e acima 71,42%. Contudo, se tivermos 8 observações, como exemplo: 1, 4, 5, 7, 8, 10, 7, Q1 ocuparia a posição entre q e q1, ou seja, a posição neste exemplo de 2,5. Abaixo de Q1 teríamos duas observações e acima de Q1 6 observações. Neste caso, teríamos abaixo de Q1 ¼ dos valores e acima ¾. Na figura 26, trazemos uma imagem para representar a forma como os dados se distribuem em tornos dos quartis.

Figura 26 – Divisão dos dados em quatro partes.



Fonte: desenho realizado pelo autor da tese.

Destacamos que como já explicitamos ao tratar da mediana, não significa que os dados vão estar divididos exatamente nesta proporção, depende se o número de observação é par ou impar e se os dados estão agrupados ou não. Régnier (2007, p. 8) esclarece que o intervalo interquartil[53] $[Q_1;\ Q_3]$ "representa aproximadamente os 50% das respostas que enquadram a mediana Q_2". Sua amplitude, calculada pela diferença Q3-Q1, medida de dispersão em torno da mediana. Esta diferença é chamada por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) como sendo o desvio interquartil. Podemos dizer assim que a medida do intervalo interquartil, chamada de desvio interquartil é uma medida de dispersão. Com base nesta informação apresentamos uma propriedade sobre o intervalo interquartil.

PROPRIEDADE [Q1;Q3]1. No intervalo interquartil temos aproximadamente 50% das observações de uma série (RÉGNIER, 2007).

PROPRIEDADE [Q1;Q3] 2. A medida do intervalo interquartil ou desvio interquartil não é influenciado por valores extremos.

[53] No texto original em francês "Intervalle interquartile".

OBSERVAÇÃO [Q1;Q3] 1. A medida do desvio interquartil depende dos valores dos quartis. Desta forma, o valor do desvio interquartil nem sempre é um número inteiro.

OBSERVAÇÃO [Q1;Q3] 2. Ao multiplicarmos os valores de todos os efetivos de uma série por um número natural, diferente de zero, o valor do desvio interquartil não se alterará, uma vez que a posição dos quartis não se alteram. O mesmo não podemos afimar para os valores das observações (PONCY; GUICHARD; RUSSIER, 2011).

Apresentamos baseando-se, nos símbolos utilizados por Régnier (2007), a fórmula para determinar o desvio interquartil:

$$[Q_1;\ Q_3] = Q_3 - Q_1 \tag{83}$$

Fórmula 83: Medida do intervalo interquartil.

2.4.12. AMPLITUDE SEMI-INTERQUARTIL OU DESVIO INTERQUARTIL

Kendall e Yule (1948) apresentam como medida de dispersão a "amplitude semi-interquartil" ou "desvio quartil". Para calcular a amplitude semi-interquartil subtrai-se o terceiro quartil do primeiro e divide-se por dois (fórmula 84).

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \tag{84}$$

Fórmula 84: amplitude semi-interquartil ou desvio quartil (KENDALL; YULE, 1948).

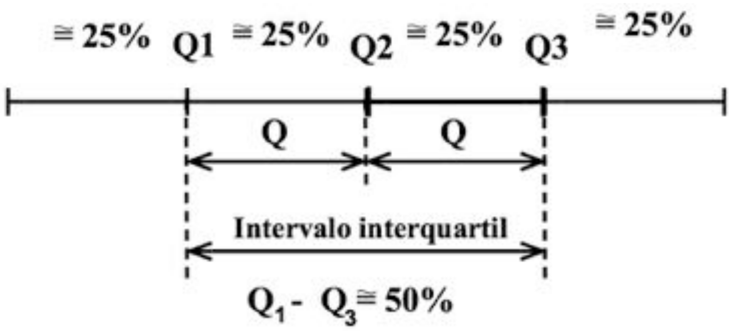
Tomando como referência o símbolo usado por Régnier (2007) para intervalo interquartil, sugerimos outra fórmula que deixa mais claro o significado:

$$\frac{[Q_1; Q_3]}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \tag{85}$$

Fórmula 85: amplitude semi-interquartil ou desvio interquartil.

Considerando um desvio interquartil acima e abaixo da mediana, temos a mesma medida do intervalo interquartil que corresponde a aproximadamente 50% das observações (figura 27).

Figura 27 – Intervalo interquartil e desvio interquartil.



Fonte: desenho realizado pelo autor da tese.

Kendall e Yule (1948) esclarecem que esta medida de dispersão apresenta duas vantagens em relação ao desvio padrão: cálculo simples e significação clara e simples. Acrescentamos uma terceira: não é influenciada por valores extremos. Contudo, ela apresenta inúmeras desvantagens em relação ao desvio padrão. Ela não possui propriedades algébricas simples e possui um comportamento difícil de prever diante de flutuações da amostra. Essas grandes desvantagens, segundo estes autores, fazem com que essas medidas sejam pouco usadas e recomendadas apenas para situações simples.

2.4.13. RELAÇÃO EMPÍRICA ENTRE O INTERVALO INTERQUARTIL E O DESVIO PADRÃO

Kendall e Yule (1948) apresentam uma relação empírica entre a amplitude semi-interquartil e o desvio padrão. Nas distribuições simétricas ou moderadamente assimétricas, a amplitude semi-interquartil é geralmente cerca de dois terços do desvio padrão, que podemos representar por:

$$\frac{Q}{\sigma} \cong 2/3$$

Desta relação, estes autores estabelecem que um intervalo de 6 vezes o desvio padrão, corresponde a 9 vezes o intervalo interquartil e 7,5 vezes o desvio médio e que neste caso se espera encontrar para distribuições simétricas ou moderadamente simétricas, 99% das observações.

2.4.14. CONSIDERAÇÕES SOBRE O SABER CIENTÍFICO

Observamos das diversas bibliografias pesquisadas, diferenças nos símbolos usados. Essas diferenças podem ou não se tornarem um problema nos livros didáticos. Caso cada autor utilize símbolos diferentes, ao consultar livros diferentes, os estudantes podem sentir dificuldades, pois os significados atribuídos aos símbolos mudam. Logo, apresentamos neste capítulo, fórmulas que representam o mesmo algoritmo, mas como símbolos diferentes. O estudante poderia estudar em um livro de uma forma e depois não compreender uma atividade proposta pelo professor que utiliza outros símbolos. Acreditamos que deveria se padronizar os símbolos utilizados. Tomemos como exemplo a fórmula para calcular a mediana no centro do intervalo de uma variável contínua. Apresentamos usando o mesmo algoritmo três fórmulas usando símbolos diferentes (fórmulas 49, 50 e 51).

Na introdução deste capítulo, tratamos do intervalo e mostramos mudanças na representação dos símbolos dos intervalos. Na variação do símbolo de intervalo apresentada, podemos observar a influência da matemática, dos estatísticos e de uma importante instituição estatística brasileira (IBGE) na forma como a determinação do centro do intervalo pode ser transposto para os livros didáticos. Saber operar com intervalo pode ser também um elemento causador de obstáculo, como observa Régnier[54] em um levantamento feito durante vários anos em provas realizadas com alunos do Master 1 na Universidade de Lyon 2 na França. Este pesquisador observou um erro sistemático no cálculo do intervalo [1; 10[.

Em Kendall e Yule (1948) observamos algumas notas sobre mudanças no uso dos símbolos, em função dos instrumentos tecnológicos usados para sua grafia. Assim, estes destacam que alguns autores utilizam para representar o fatorial o símbolo $\lfloor\underline{n}$, contudo este uso vem sendo suplantado pelo símbolo n! Provavelmente pela facilidade de ser datilografado.

Outra convenção é quanto ao uso dos símbolos gregos e latinos. Em nota do tradutor do livro de Kendall e Yule (1948, p. 176), observamos que na tradução se utilizou o símbolo para somatório com letra grega maiúscula Σ no lugar de S (de sum) no original em inglês. Atualmente o uso da letra grega sigma é generalizado. Observamos também outra nota nesse livro sobre o emprego das letras gregas para símbolos de parâmetros dos universos, enquanto para estatística das amostras ou distribuições observadas o uso das letras gregas minúsculas. Assim eles destacam que muitos autores "usam ***s*** como símbolo do desvio padrão de uma

[54] Estudo ainda não publicado.

distribuição observada, embora seja talvez ainda o $\boldsymbol{\sigma}$ a notação mais frequente". Tomando como este exemplo, observamos que Régnier (2007) utiliza para média de amostra m e $\bar{x}$, para distribuição da população μ. Kendall e Yule (1948) utilizam M ou $\bar{X}$ para média sem distiguir se é população ou amostra. Spiegel (1993) utiliza também o símbolo $\bar{X}$ para média. Mann (2006), Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) utilizam para média da população μ como Régnier (2007) e para média da amostra $\bar{x}$.

Estas divergências vão além do próprio símbolo, indo também no significado. Assim podemos observar, ao tratarmos do histograma, que o significado de histograma não é o mesmo para os estatísticos.

Trataremos a seguir das pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem das medidas de tendência central e de dispersão.

3. REVISÃO DE LITERATURA DAS PESQUISAS SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DAS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO

Tomando por base o saber científico, apresentamos neste capítulo algumas pesquisas que tratam sobre o ensino e a aprendizagem das medidas de tendência central e de dispersão.

3.1. PESQUISAS SOBRE AS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Apesar de não ser um assunto novo no currículo escolar, o que se observa em diversas pesquisas são problemas no entendimento desse conceito e no seu emprego.

Iniciamos esta apresentação com a pesquisa realizada na tese de doutorado de Cazorla (2002). Esta pesquisadora elabora um pré-teste e um pós-teste e aplica a alunos no início e no final do semestre de disciplinas de estatística oferecidas em diversos cursos superiores de uma universidade estadual do interior da Bahia no segundo semestre de 1999. Foram no total 814 alunos, assim distribuídos nos cursos: 15,8% de biologia, 6,4% de enfermagem, 7,9% de agronomia, 7,0 % de geografia, 6,4 % de veterinária, 23,1% de administração, 25,3% de economia e 6,1% de matemática. Destes, 69,7% no pré-teste, estavam vendo a disciplina estatística pela primeira vez na Universidade. São alunos que finalizaram o ensino médio, ou seja, que já tiveram uma formação na educação básica e estavam estudando na universidade. Alguns destes eram alunos de cursos como Matemática, Administração e Economia que exigem uma carga maior de conhecimento em matemática. Foram aplicados no início do curso de estatística. Uma das questões propostas foi: “o que é a média aritmética?”. Reproduzimos na tabela 30 os resultados desta questão apresentados por Cazorla (2002). O número de participantes no pré-teste e no pós-teste foi diferente. Sendo nos dois casos menor do que o total dos alunos selecionados para a pesquisa. Se somarmos os que não responderam com respostas consideradas como nada a ver, temos 45,1%, ou seja, quase 50% do total. Nas respostas consideradas, temos respostas tais como: meio termo, uma base, é o valor mais frequente (moda e não média aritmética) que consideramos inadequadas. Esses resultados indicam um problema grave com a formação na educação básica destes alunos. Temos também respostas que indicam pouco aprofundamento no conceito de média, como a resposta limitada ao algoritmo, com 41,7% das respostas, o que também indica um problema na formação.

Tabela 30 – Resultado da pesquisa realizada por Cazorla (2002) à questão: "o que é a média aritmética?".

O que é a média aritmética?	Pré-teste		Pós-teste	
	Sujeitos	%	Sujeitos	%
Conceitos ligados à definição de média aritmética				
Algoritmo: a soma dos valores dividido pelo número de observações	316	41,7	201,0	54,9
Ponto médio, mediana, valor central, ponto de concordância, meio termo, é uma medida de tendência central, uma base	66	8,7	34	9,3
É um valor que resume a forma de se chegar a um único resultado a partir de outros	13	1,7	6	1,6
Uma estimativa	6	0,8	3	0,8
É o valor mais frequente (moda)	5	0,7	1	0,3
Ponto de equilíbrio	4	0,5	4	1,1
Valores como parâmetros	3	0,4	0	0,0
É uma medida	3	0,4	0	0,0
Tendência	0	0,0	2	0,6
Total parcial	416	54,9	251	68,6
Nada a ver: porcentagem, média geométrica, apenas a soma de valores ...	111	14,7	58	15,8
Não respondeu	230	30,4	57	15,6
Total	757	100	366	100,00

Fonte : Cazorla (2002, p. 181).

Depois a esta questão, a pesquisadora propôs que os alunos dessem exemplos de média aritmética. Observou-se no pré-teste uma grande quantidade de questões sem respostas: 38,4%. Das questões com respostas, 58,8% foram de respostas numéricas ligadas ao algoritmo. Observou-se 2,6% de exemplos inadequados como porcentagem de aprovados, regra de três etc.

Foram aplicadas nesta pesquisa um teste com seis questões de resolução sobre média. A primeira questão destinava-se ao cálculo da média simples: "Paulo tirou as seguintes notas na disciplina Estatística: 7 na primeira prova, 6 na segunda e 8 na terceira. Se cada uma destas notas tivessem o mesmo peso, qual foi a nota média da disciplina? Mostre os cálculos" (Cazorla, 2002, p.272). Trata-se de uma questão de resolução simples e teve um acerto de 95,2% no pré-teste e 97,7% no pós-teste.

A segunda questão adaptada desta, atribuía pesos diferentes às notas: "Se a primeira prova tinha peso dois, a segunda tinha peso três e a terceira peso um, qual foi a nota média final que Paulo obteve?____mostre os cálculos" (Cazorla, 2002, p.272). Na tabela 31, reproduzimos os resultados.

Tabela 31 – Resultado a problemas sobre média ponderada aplicado por Cazorla (2002)

Nota	Descrição do procedimento	Pré-teste		Pós-teste	
		Sujeitos	%	Sujeitos	%
0	Totalmente errado	193	25,5	91	24,9
1	Colocou apenas os números em questão	43	5,7	17	4,6
2	Apenas somou os números ponderando-os	50	6,6	18	4,9
3	Aplicou a fórmula, mas não efetuou os cálculos	17	2,2	7	1,9
4	Errou apenas em cálculos	9	1,2	7	1,9
5	Totalmente correto	233	30,8	135	36,9
0	Não respondeu	212	28,0	91	24,9
	Total	757	100,0	366	100,0

Fonte : Cazorla (2002, p. 309).

Pelos resultados apresentados, observamos que somando totalmente errado mais os que não responderam, temos 53,5% no pré-teste e 49,8% no pós-teste, o que representa um número bastante elevando. Cazorla destaca que para a análise das respostas erradas, os sujeitos não conheciam o conceito de média ponderada. Cazorla (2002) apresenta como erros mais frequentes:

a. Obter a média simples desprezando os pesos. Consideramos neste caso que o aluno não percebe a importância dos pesos ou o que é média ponderada.
b. Multiplicar cada número pelo seu peso e dividir por três e depois somar. Neste caso, acredito que os alunos que o assim fizeram, perceberam o sentido do peso. Contudo cometeram um erro que pode ser resultante do não conhecimento do algoritmo. Outra possibilidade deste tipo de resposta poderia ser resultante de um erro do campo conceitual das estruturas multiplicativas e aditivas. Considerando como cada observação ordenada de 1 a n, temos as seguintes observações $o_{1,}\ o_2\,, \cdots, o_n$, ordenado cada peso respectivo à cada observação como sendo igual a $P_1, P_2, \cdots, P_n$, para este

caso temos: $\frac{(o_1 \times P_1)+(o_2 \times P_2)+(o_3 \times P_3)}{(P_1+P_2+P_3)} = \frac{(a \times P_1)}{(P_1+P_2+P_3)} + \frac{(b \times P_2)}{(P_1+P_2+P_3)} + \frac{(c \times P_3)}{(P_1+P_2+P_3)} \neq \frac{(a \times P_1)}{3} + \frac{(b \times P_2)}{3} + \frac{(c \times P_3)}{3}$. O não perceber que a terceira igualdade não é possível, poderia ter sido uma causa do erro. O resultado para este caso foi 13,3;

c. Dividir cada observação pelo seu peso, depois somar os valores obtidos e dividir por 3. Obtiveram como resultado 4,5. Neste caso, parece que eles não tinham noção clara do que era a ponderação, mas por efeito do contrato didático, usaram em seus cálculos os valores apresentados no enunciado;
d. Calcular a média simples dos pesos desprezando as observações. Eles obtiveram como resultado 2.

Outro problema observado por Cazorla, nesta questão, foi determinar um valor que não se encontra entre o máximo e mínimo das observações. Considerando que os valores observados são 6, 7 e 8, a média deveria estar entre 6 e 8. A resposta 13,3 (b), 4,5 (c) e 2 (d) não está entre o máximo e o mínimo, uma propriedade simples. Este tipo de resposta nos leva a considerar como importante destacar esta propriedade da média, embora como parece aparentemente óbvia, que não tínhamos observado nos livros pesquisados que usamos para tratar do savoir savant. Consideramos que a necessidade de enfatizá-la surge dos estudos na área da didática. Observamos outros autores (STRAUSS; BICHLER, 1988; BATANERO, 2000; GITIRANA et al, 2010; STELLA, 2003) que realizam pesquisas na área do ensino que tratam desta propriedade. Assim destacamos esta propriedade dando continuidade à numeração iniciada no capítulo que tratamos do savoir savant.

PROPRIEDADE (m) 13. A média é um valor que deve estar compreendido entre o valor máximo e o mínimo das observações

A terceira questão envolve o cálculo da média simples como a primeira: "A nota zero (0) foi adicionada ao conjunto de 5 notas (6, 7, 8, 9, 10) cuja média é 8. Qual a média do novo conjunto? _____ mostre os cálculos" (CAZORLA, 2002, p.272). O número de acertos desta questão foi alto: 79,5% no pré-teste e 78,7% no pós-teste. Cazorla (2002) destaca que o erro mais observado foi desconsiderar o novo valor (0) e calcular outra vez a média dos números envolvidos. Este mesmo erro observado com universitários por Cazorla foi identificado em uma pesquisa feita com crianças entre 8 e 14 anos realizada por Strauss e Bichler (1998, apud BATANERO, 2000). Acreditamos que este tipo de erro levou a Batanero (2000, p. 4, tradução nossa) propor uma propriedade para a média: “deve-se levar em conta os valores nulos para o cálculo da média”. Não consideramos como sendo uma propriedade a ser destacada da média, se o fosse poderíamos colocar outras propriedades, tais como: deve-se considerar os valores negativos no cálculo da média e etc. Contudo, como se trata de um tipo de erro observado em pesquisa, consideramos que deva ser uma observação importante a destacar nos livros didáticos. Portanto acrescentamos esta observação à numeração das observações feitas no capítulo do savoir savant:

OBSERVAÇÃO (m) 6. Deve-se no cálculo da média considerar todos os valores observados, inclusive o zero.

A quarta questão do teste realizado por Cazorla (2002) foi adaptada de um problema proposto inicialmente por Pollatsek, Lima e Well (1981). Observamos na questão original presente no artigo destes autores que o peso era dado em libras e a capacidade máxima do elevador não era mencionada, sendo solicitado apenas o peso médio das pessoas no elevador. Cazorla justifica a escolha dessa questão para verificar se os alunos faziam uma relação entre a média e o todo. Assim como tinha um conhecimento de média ponderada: “Um elevador com capacidade máxima de 700 quilos tem que transportar 10 pessoas, das quais quatro (4) são mulheres, com peso médio de 60 quilos e seis são homens com peso médio de 80 quilos. As pessoas poderão ser transportadas em uma única viagem? ( ) sim ( ) não. Por quê? _____ Calcule o peso médio das pessoas no elevador” (Cazorla, 2002, p.272). Considerando a resposta totalmente correta como a resposta que constava o cálculo do peso total e do peso médio, 37% dos alunos participantes do pré-teste e 36,9% do pós-teste responderam totalmente correto. Observou-se que 44,5 % no pré-teste e 42,1% no pós-teste limitaram-se a calcular o peso total. O erro mais frequente encontrado por Cazorla foi somar 60 com 80 e dividir por dois.

A quinta questão exigia a interpretação da média de uma variável discreta. “Interprete a seguinte afirmação: ‘O número médio de filhos de casais jovens é de 2,3’” (CAZORLA, 2002, p.272). Os resultados indicam um problema sério com a interpretação. A maior parte das respostas indicava uma interpretação errônea: 51,2% no pré-teste e 48,3% no pós-teste. Observamos também um número elevado de questões sem respostas: 21,0% no pré-teste e 24,3% no pós-teste. Apenas 2,5% no pré-teste e 3,0% no pós-teste fizeram uma interpretação adequada. Entre as questões erradas Cazorla (2002, p. 189) destaca algumas do tipo: “do total de todos os jovens, apenas 23 têm filhos", "os dados são insuficientes para tal afirmação", "a média é de dois, com probabilidade de 30% de ter o terceiro filho", "a cada três casais, os filhos são 2", "dentre as crianças (filhos) consultadas, 2,3% são filhos de casais jovens".

Esta questão pode levar a duas observações. A primeira trata-se da observação 3 que já apresentamos no capítulo que trata do savoir savant e que afirma que a média não corresponde necessariamente a um valor observado. Ela é apresentada por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) como uma observação. Contudo, Batanero (2000) mostra como sendo uma propriedade da média. A segunda observação, decorrente dos resultados desta questão, indica que o valor da média pode não ser inteiro, embora o contexto dos dados seja. Chamaremos de observação 7.

OBSERVAÇÃO (m) 7. A média de uma variável quantitativa discreta pode ser um número não inteiro que não faz sentido no contexto dos dados.

Podemos encontrar em Batanero (2000, p. 4, tradução nossa) esta observação como uma propriedade da média "O valor obtido da média de números inteiros pode ser uma fração, que não tem sentido no contexto dos dados".

Os resultados desta pesquisa indicam a importância das pesquisas em educação para observar dificuldades nos alunos na compreensão de certos conceitos e de se pensar em como criar condições para os alunos superar estas dificuldades. Estes resultados devem ser considerados pelos autores dos livros didáticos, no sentido de aperfeiçoamento dos mesmos, para que estes possam propor atividades para serem realizadas pelos alunos que possibilitem aos aprendizes superar estas dificuldades.

Strauss e Bichler (1988) apresentam sete propriedades da média:

1) "A média está localizada entre os valores extremos" (p. 66, tradução nossa). Estes autores exemplificam informando que a idade de uma criança em uma sala de aula deve estar entre a idade da criança mais velha e a mais jovem. Apresentamos anteriormente como propriedade 11;
2) "A soma dos desvios em relação à média é igual à zero" (p. 66, tradução nossa). Propriedade apresentada por Kendall e Yule (1948) e nós a apresentamos como sendo a propriedade 2 da média;
3) "A média é influenciada pelos valores adicionados" (p. 66, tradução nossa). Ele exemplifica que a média de 0, 5 e 10 é 5, e se adicionamos 10 ao valor da média muda

para 6,25. Batanero (2000, p.4, tradução nossa) descreve esta propriedade como "o valor médio é influenciado pelo valor de cada um dos dados". Dessa forma, ao acrescentar, retirar ou mudar qualquer valor, o valor da média deve ser recalculado. Apresentamos a seguir como propriedade 13;

4) "A média não é necessariamente igual a um dos valores que foram somados" (p. 66, tradução nossa). Poderíamos dizer de uma outra maneira: a média não é necessariamente igual a um dos valores observados. Como exemplo, mostra-se que a média de 1 e 3 é 2. Esta propriedade é tratada por Dehon, Droesbke e Vermandele (2008) como uma observação. Apresentamos nesta tese como a observação 3.
5) "A média pode ser uma fração ainda que não corresponda à realidade física" (tradução nossa, página 66). Como exemplo, estes autores citam que a média de filhos por família nos Estados Unidos em 1980 foi 1,6. Tratamos nesta tese como observação 7.
6) "Quando calculamos a média, o valor zero se faz parte dos dados, deve ser levado em consideração" (tradução nossa, página 66). Esta propriedade é exemplificada: para o cálculo da média do número de horas que uma criança faz o trabalho escolar em casa durante a semana, deve ser considerado os dias que ela não o faz. Apresentamos como observação 6.
7) "O valor da média é representativo dos valores que são usados no cálculo da média" (tradução nossa, página 66). Estes autores acrescentam que se pode pensar esta propriedade em termos espaciais. Dessa forma, a média é o valor que está mais próximo de todos os valores utilizados no seu cálculo. Apresentamos a seguir na propriedade 14.

Essas propriedades são tratadas por outros pesquisadores como Batanero (2000). Consideramos algumas destas propriedades mais como uma observação do que uma propriedade e por isso apresentamos como observação. Por exemplo, deve-se levar em conta os valores nulos. Pode-se para o cálculo da média somar todas as observações e dividir pelo número de observações, se uma das observações é um valor nulo, esta também deve ser considerada como valor a ser somado e como número de observações para se dividir a soma das observações. Contudo, como se trata de uma dificuldade apresentada por alunos observadas em pesquisa, consideramos mais como uma observação que se deve estar atento o aluno e devem ser criadas situações pelo professor para que o aluno perceba esta observação. Considerando as observações e propriedades já indicadas, temos então duas propriedades apresentadas por Strauss e Bichler (1988) que não havíamos incluídas. Assim, dentro da ordem das propriedades apresentadas, consideraremos estas como sendo as propriedades 14 e 15:

PROPRIEDADE (m) 14. O valor da média é influenciado pelos valores de cada uma das observações.

PROPRIEDADE (m) 15. A média é representativa dos valores usados no cálculo da média.

Em relação a esta última propriedade, Pollatsek, Lima e Well (1981, p. 196, tradução nossa) realizam uma pesquisa na qual propõem entre outras a seguinte questão:

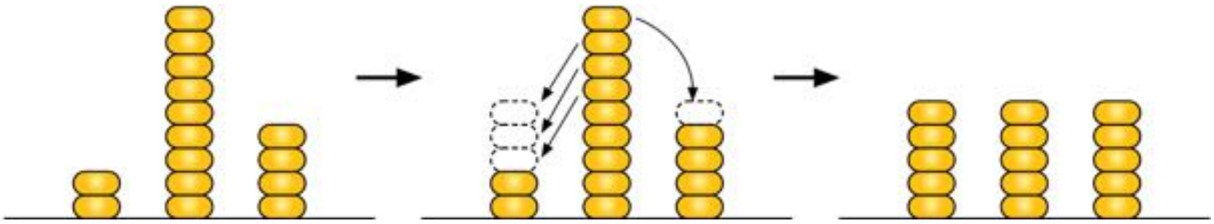
> Você sabe que a pontuação média verbal SAT da população de alunos do final do ensino médio de uma grande região escolar é 400. Você pega uma amostra com 5 estudantes do final do ensino médio. Os quatro primeiros estudantes, neste exemplo, têm as seguintes pontuações SAT: 380, 420, 600, 400. O que você espera da pontuação do quinto estudante?

Para estes autores, a resposta correta deveria ser 400 que corresponde à média da população. Nove alunos procuraram determinar o quinto valor considerando o valor cuja média dos cinco estudantes fosse igual a 400. Poderíamos assim representar esta tentativa: $\frac{380+420+600+400+x}{5} = 400 \Rightarrow x = 200$.

Um primeiro ponto que consideramos pertinente discutir é o resultado esperado por estes autores (400). Como a média é 400, se tivermos uma distribuição moderadamente simétrica e com pequena dispersão se espera que esta pontuação esteja próxima (e não igual) da média (400). Esta informação não é fornecida na questão. Contudo, do ponto de vista probabilístico, a pontuação do quinto estudante pode ser qualquer valor entre o valor mínimo e máximo das notas (não fornecido no problema). Assim, apesar da média ser representativa dos valores usados no cálculo da média, isto não significa que se selecionarmos ao acaso um valor de uma população, este tenda a ser a média. Dependendo da forma de distribuição dos dados, podemos ter uma maior probabilidade do quinto elemento ser a moda. Por exemplo, se pegarmos os salários de uma grande empresa, podemos ter a grande maioria dos trabalhadores de base com o mesmo salário (moda), contudo não podemos dizer que se tirarmos o salário de um trabalhador, este será o valor da moda. Podemos sim afirmar que existe uma maior probabilidade de ser o da moda. Outro problema neste resultado é que a média não corresponde necessariamente a um valor do conjunto das observações. Assim, embora a média seja 400, podemos não ter nenhum indivíduo com esta pontuação. Observamos ainda que apesar desta inconsistência, esta questão é aplicada em outras pesquisas, por outros pesquisadores.

Uma forma de explorar o conceito da média tendo em vista o ensino é apresentado por Walle (2009). Ele destaca duas formas de tratar a média. A primeira como ponto de equilíbrio (como já tratamos anteriormente e ordenamos esta propriedade, entre outras listadas, como propriedade 2) e a segunda considerando a média como **conceito nivelador**: a média corresponderia ao valor obtido se nivelássemos todas as observações. Tomemos como exemplo a média de 2, 4, 9 é igual a 5. Uma forma de representar é construir estes valores com base em um material concreto formado por barras de mesma medida, como ilustramos na figura 28, e depois tentarmos nivelar as barras. Considerando que a média está a uma mesma distância de todos os elementos, podemos imaginar esta ideia de nivelar as observações. Este exemplo da figura 28 foi inspirado em uma situação parecida que observamos em Walle (2009).

Figura 28 – Média como resultante do nivelamento de todas as observações.



Fonte: desenho elaborado pelo autor da tese.

Com base nesta propriedade, apresentamos mais uma propriedade da média.

PROPRIEDADE (m) 16. A média como conceito nivelador: representa o valor representativo de todas as observações levadas em consideração para o cálculo da média se elas fossem niveladas. Assim se considerarmos que um aluno obteve ao longo de quatro unidades a nota 7, considerando todas de mesmo peso, seria como se distribuíssemos o total de pontos nas quatro unidades de forma uniforme.

Existem inúmeros outros estudos sobre a média e em menor número sobre as outras medidas de tendência central. Sobre a dispersão, consideramos que esta é uma área ainda pouco investigada. Tendo em vista as limitações temporais e também a grande diversidade de propriedades e características já apresentadas ao tratar do savoir savant, o nosso estudo se concentrará mais na transposição do savoir savant do que na transposição das pesquisas em educação para o livro didático. Ainda assim, apresentaremos um pequeno resumo de outros estudos realizados em diferentes lugares sobre as MTCD.

Leon e Zawojewski (1990) realizaram uma pesquisa sobre quatro propriedades da média aritmética com 145 estudantes, dos quais 42 do quarto ano do ensino fundamental (fourth grade), 61 do oitavo ano do ensino fundamental (eighth grade) e 42 estudantes universitários dos Estados Unidos. Estas propriedades foram selecionadas de outras sete de uma pesquisa realizada em Israel. As propriedades levantadas foram: “Propriedade A: a média está localizada entre valores extremos”. “Propriedade B: a soma dos desvios é zero”; “Propriedade F: quando a média é calculada, o valor zero, se presente, deve ser levado em conta”; “Propriedade G: a média é representativa de todos os valores usados no cálculo” (p. 303, tradução nossa). Os resultados indicaram que as propriedades F e G apresentaram duas vezes mais dificuldades na sua compreensão do que as propriedades A e B.

Gitirana et al. (2010) aplicam um teste envolvendo 7 questões a 210 sujeitos de 6 escolas públicas no município de Moreno, Pernambuco (Brasil). Faziam parte 104 alunos do quinto ano do ensino fundamental, 75 alunos do último ano do ensino médio e 31 professores. Na tabela 32, reproduzimos os dados apresentados por estes autores que sintetizam os resultados.

Tabela 32 – Propriedades presentes nas questões propostas por Gitirana et al. (2010).

Propriedades presentes nas questões[55]	Questões	Alunos do 3^0 ano (%)	Alunos do 5^0 ano (%)	Professores (%)
A média é influenciada por cada um e por todos os valores.	1 5	4,0 9,3	7,7 11,5	64,5 48,4
A média considera todos os valores, inclusive os nulos.	2	1,3	4,8	54,8
A média não necessariamente coincide com um dos valores que a compõe.	3	5,3	3,8	61,3
A média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada.	4	0,0	0,0	45,2
A média pode ser um número que não tem um correspondente na realidade física.	6	0,0	0,0	19,4
A média está localizada entre os valores extremos (valor mínimo ≤ média ≤ valor máximo.	7	8,0	6,7	16,1

Fonte: Gitirana et al (2010, p. 113).

[55] Na tabela original usou-se o termo invariantes. Preferimos substituir por propriedades presentes nas questões.

Os resultados indicam que os alunos tiveram dificuldades em todas as questões. Os professores tiveram um desempenho bem superior aos alunos. Quanto às dificuldades dos professores, elas foram mais acentuadas nas questões 6 e 7.

Estes autores também apresentaram uma pesquisa sobre a média aritmética nos livros didáticos nos quatro anos finais do ensino fundamental. Para esta pesquisa foram selecionadas as 16 coleções dos livros didáticos aprovadas no PNLD de 2008. Ao todo foram levantadas 273 atividades ou explicações sobre a média aritmética. Eles observaram que 50% das coleções apresentaram a média aritmética apenas em um livro correspondente a um ano letivo, 31,25% abordaram em dois anos, 6,25% em três anos, 6,25% nos quatro anos e 6,25% não abordaram em nenhum dos anos. Também não observaram uma tendência em relação a um ano especifico, embora o 9º ano teve um percentual um pouco acima dos outros anos. Em relação à distribuição geral das atividades, observou-se que 35% das atividades concentravam-se no 9º ano, 19% no 8º ano, 26 % no 7º ano e 20% no 6º.

Nessa pesquisa procurou-se ver também se as atividades eram contextualizadas. Do total das questões analisadas, 92,3% eram contextualizadas.

Procurou-se também avaliar se estas questões apresentavam as 7 listadas:

1) “A média está localizada entre os valores extremos” (p.107);

2) “A soma dos desvios a partir da média é igual a zero” (p. 107);

3) “A média é influenciada por cada um e por todos os valores” (p.107);

4) “A média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores” (p.107);

5) “A média pode ser um valor sem sentido no contexto real” (p.108);

6) “No cálculo da média, devem ser incluídos os valores nulos e os valores negativos” (p.108);

7) “A média é um valor representativo dos dados, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos (aspecto espacial)” (p.108).

Nas análises feitas, Gitirana et al. (2010) observaram que das 16 coleções apenas 3 coleções fizeram em algum momento referência à propriedade 1 (1,1% do total das atividades analisadas). A propriedade 2 também foi observada em apenas uma coleção (0,7 % do total das atividades); A propriedade 3 foi identificada em 98,5% das atividades quando tomada de uma forma geral. Contudo quando se procurou ver o tratamento de forma mais enfático, este valor caía para 32,2% das questões. A propriedade 4 foi observada em 75% das atividades. Em 15% das atividades a média aparece como um valor que não tem sentido no contexto real (propriedade 5). Observou-se que 12,5% das atividades apresentadas incluíam valores nulos ou negativos (propriedade 6). Apenas 6% das atividades enfatizaram o aspecto representativo da média (propriedade 7).

Li e Shen (1992 apud CAZORLA, 2002) observaram que quando se trata de calcular a média de dados agrupados em intervalos de classe, os sujeitos ignoram as frequências dos intervalos, calculando como se fosse uma média simples.

Do ponto de vista da representação, Mokros e Russell (1995 apud BATANERO, 2000) classificaram de significados incorretos atribuídos à palavra média:

- Valor mais frequente – fazendo confusão com a palavra moda;
- Valor razoável – significado coloquial;
- Ponto médio – confusão com a mediana;
- Algoritmo – percepção da média apenas como algoritmo de cálculo.

Na pesquisa de doutorado de Merino (2003) realizada na Espanha, temos um estudo das medidas de posição central em estudantes secundários. Nessa pesquisa, foi feito estudo um piloto com estudantes do México e um comparativo com pesquisas similares feitas com estudantes na Espanha. Para seleção das questões a serem investigadas, a pesquisa fez uma revisão de 12 pesquisas realizadas entre 1992 e 2000, totalizando 59 itens. Destas, foram selecionados 16 itens para investigação nesta pesquisa.

Merino (2003) apresenta três campos de problemas associados à mediana:

1) Quando a média não é suficientemente representativa;
2) Encontrar um resumo estatístico de posição central para variáveis ordinais;
3) Para efetuar comparações de dois ou mais conjuntos de dados utilizando um gráfico de caixa.

No primeiro caso, indica se isto ocorre quando os dados são assimétricos, quando possuem valores atípicos ou apresenta várias modas.

No segundo caso, temos as variáveis qualitativas ordinais. Destacamos ainda que para este tipo de variável pode-se utilizar a moda. Contudo, esta autora considera que como a mediana leva em conta a ordenação, esta é mais completa. Apesar deste aspecto destacado pela tese de Merino, consideramos que dependem dos objetivos da pesquisa e o que se quer destacar com estas medidas.

No terceiro caso, trata-se da representação usando diagrama de caixa. Neste tipo de representação se utiliza a mediana, mas também o máximo, o mínimo, Q1 e Q3 e os valores atípicos.

Em relação à moda, Merino (2003) apresenta dois campos de problemas:

1) "Obter o valor representativo de um conjunto de dados, o mais frequente deles, em situações nas quais o que interessa fundamentalmente é o valor dominante do conjunto" (p. 47, tradução nossa);
2) "Encontrar o valor representativo de dados qualitativos" (p. 47, tradução nossa).

No primeiro caso, temos os objetivos da pesquisa em que se interessa em analisar o valor dominante. No segundo caso, temos a limitação quando tratamos de variáveis qualitativas nominais.

A pesquisa de doutorado de Merino (2003) foi realizado um estudo piloto com alunos do ensino secundário obrigatório (ESO) na cidade de Granada na Espanha. Na metodologia consta que o estudo foi aplicado com 24 alunos do 1º ESO e 29 do 4º ESO, contudo as tabelas indicam o contrário, ou seja 29 alunos do 1º ESO e 24 do 4º ESO. A estrutura da educação básica na Espanha é diferente do Brasil, assim não se pode comparar diretamente. A duração do ESO é de quatro anos e corresponde aproximadamente à idade dos alunos dos três anos finais do ensino fundamental e o primeiro ano do ensino médio no Brasil. Temos assim o 1º, 2º, 3º e 4º, no qual o 4º ano é o último ano que corresponderia ao primeiro ano do ensino médio no Brasil. No quadro 2, apresentamos uma questão que envolve a média, a moda e a mediana. Na metodologia, se indica que ele foi aplicado a 29 alunos do quarto ano da ESO.

Quadro 2. Questão aplicada por Merino (2003).

El siguiente conjunto de datos muestra las edades en que contrajeron matrimonio las mujeres en una muestra de 100 mujeres,

edad	*frecuencia*
15-19	*4*
20-24	*38*
25-29	*28*
30-34	*20*
35-39	*8*
40-44	*1*
45-49	*1*

¿Cuál es la media, mediana y moda de la edad de estas mujeres? Haz los cálculos que necesites en este mismo cuestionario.

Fonte: Merino (2003, p. 161).

Apresentamos a tabela 33 extraída de Merino (2003). Reproduzimos exatamente como está na tese. Destacamos que não foi indicado o número de “não respostas” à questão, contudo o percentual de “não respostas” foi elevado. Pela descrição na metodologia o número para o 4º ESO é de 29, e não 24 como indicando entre parêntese. O percentual em parênteses foi calculado considerando n=29. Refizemos a tabela incluindo as não respostas e refazendo o calculo do percentual para n=24.

Tabela 33. Tabela com as respostas tal como apresentadas em Merino (2003)

	4º ESO (n=24)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto
Cálculo de media con datos agrupados (AM3)	3 (10.3)	5 (17.2)
Cálculo de moda con datos agrupados (AMO3)	5 (17.2)	4 (13.8)
Cálculo de mediana datos agrupados (AME5)	1 (3.4)	2 (6.8)

Fonte: Merino (2003, p. 161).

Tabela 34. Ajustes nos dados da tabela 33.

	4º ESO (n=24)					
Elementos usados	Correto		Incorreto		Não respostas	
	N	%	N	%	N	%
Cálculo da média com dados agrupados	3	12,5	5	20,8	16	66,7
Cálculo da moda com dados agrupados	5	20,8	4	16,7	15	62,5
Cálculo da mediana com dados agrupados	1	4,2	2	8,3	21	87,5

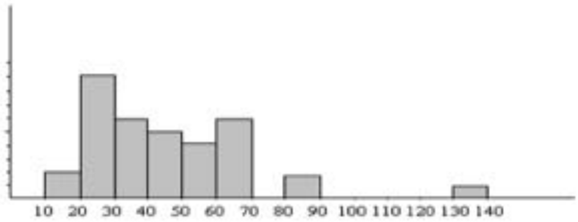
Fonte: adaptado de Merino (2003, p.161, tradução e adaptação nossa).

Na tabela 34, pode-se observar que o número de “não respostas” foi muito maior para o cálculo da mediana com dados agrupados, indicando possivelmente uma maior dificuldade com esse tipo de cálculo. Observamos também que para a mediana, o número de respostas incorretas foi o dobro do número de respostas corretas. A moda e a média apresentaram um número maior de respostas, também um número maior de respostas corretas e incorretas. Comparando a moda com a média, aparentemente o que apresentou menor dificuldade foi a moda, com maior número de respostas corretas e menor número de erros em relação à média. Isto pode-se justificar pela maior simplicidade do cálculo desta.

Como exemplos de erros, tivemos para a média a indicação da resposta o intervalo, por exemplo: a média é entre 30-40. Foi observado também este tipo de erro no cálculo da média e moda. Outra questão investigada por Merino está indicada no quadro 3.

Quadro 3. Questão proposta por Merino (2003).

Pedro piensa que en el siguiente gráfico, la mediana te dice que una mayoría de estudiantes gasta alrededor de 47 euros cada semana en comida.



Gasto semanal en comida de un grupo de estudiantes
media = 45.3 euros

Si____ No ____
Razona la Respuesta

Fonte: Merino (2003, p. 162).

Na tabela 35, apresentamos os resultados para esta questão. O número de respostas corretas foi muito baixo para os três itens. Destes o melhor resultado foi para a definição da mediana como o valor que divide a população em partes iguais. Foram observados também erros como confusão entre a mediana e a moda, com o uso da definição da moda. Como também considerar que a distribuição é simétrica no cálculo.

Tabela 35. Respostas à questão do quadro 4.

Elementos usados	4º ESO (n=24)					
	Correto		Incorreto		Não indicado[56]	
	N	%	N	%	N	%
Cálculo gráfico da mediana	2	8,3	14	58,3	8	33,3
Definição da mediana, ideia de centro	3	12,5	5	20,8	21	62,5
Definição da mediana como valor que divide a população em partes iguais	5	20,8	2	8,3	17	70,8
Confusão entre mediana e moda, uso da definição da moda			9	37,5		
Coincidência de parâmetros em distribuições simétricas			3	12,5		

Fonte: adaptado de Merino (2003, p.163, tradução e adaptação nossa). Obs.: os percentuais foram corrigidos.

Nesta pesquisa, procurou-se observar se os alunos percebiam que a média é influenciada por valores extremos, enquanto que a moda e mediana não são. Assim, com base na questão do quadro 3, foi apresentado uma outra questão indicada no quadro 4.

[56] Neste caso podemos ter não resposta ou não utilizado.

Quadro 4. Questão proposta por Merino (2003).

Joana pensa que, no gráfico anterior, o alto valor de 133 euros deveria ser tirado do conjunto de dados antes de calcular a média, a mediana e a moda. Sim____ Não_____ Razão da resposta.

Fonte: Merino (2003, p.163, tradução nossa).

Na tabela 36, apresentamos as respostas indicadas pela autora. Esta apresenta um grande número de erros e os acertos se limitam a justificar a média. A pesquisadora considerou que o índice alto de erros deve ter sido resultante da dificuldade de tratar com valores extremos em um conjunto de dados e também de reconhecer isto no cálculo da média, moda e mediana. Em nossa pesquisa vamos avaliar se os livros aborda estas propriedades destas medidas de tendência central.

Tabela 36. Tabela apresentada por Merino (2003, p. 164)

	4º ESO (n=24)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto
Media menos resistente a valores atípicos (E4)	3 (12)	14 (56)
La media tiene en cuenta todos los datos (N3)	3 (12)	18 (72)

Fonte: Merino (2003, p.164).

Em estudo realizado por Mayén et al (2007) com 125 estudantes do magistério (com idade entre 17 e 18 anos) no México, procurou-se avaliar o desempenho em questões que envolviam a média, a mediana e a moda. No total foram aplicados um teste com nove itens. Tal como em Batanero (2000), os alunos conseguiram resolver questões simples envolvendo o cálculo da média aritmética, mas apresentaram dificuldades no cálculo da média ponderada. Além das questões com média ponderada, as questões com mediana eram as que os alunos tiveram maior dificuldades.

Alguns dos resultados dessas pesquisas apresentadas, indicam erros, dificuldades e limitações em relação à média, mediana e moda. Esses problemas justificam a nossa pesquisa que procura investigar as limitações nos livros didáticos e programas. Essas limitações podem ser de diferentes naturezas. Podem ser, por exemplo, atividades pouco exploradas ou não exploradas que pouco contribuem para a construção do conceito das medidas de tendência central e de dispersão. Também exploramos as praxeologias apresentadas nos livros e programas selecionados e suas limitações. As pesquisas apresentadas neste capítulo, junto com o que foi levantado nos capítulos anteriores, servirão de base para a metodologia proposta no volume dois desta tese.

Com relação às medidas de dispersão, não encontramos trabalhos publicados envolvendo dificuldades dos estudantes com estas medidas. Existe uma pesquisa em andamento, do professor Jean-Claude Régnier, sobre um tipo de erro recorrente no cálculo do desvio padrão com alunos do ensino superior na França. Como ainda não foi publicada, não vamos fazer a divulgação. Também não observamos pesquisas publicadas que envolvem o ensino e/ou a aprendizagem das medidas de tendência central junto com as medidas de dispersão como o presente estudo.

No próximo capítulo trataremos de uma das teorias que utilizamos em nossa tese e que deu suporte para parte da nossa metodologia, análises e conclusões. Trata-se da teoria antropológica do didático.

4. A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO E AS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO

Para analisar as medidas de tendência central e de dispersão nos livros didáticos vamos utilizar como um dos suportes teóricos a teoria antropológica do didático (TAD). Almouloud (2007, p.111) destaca que a TAD proporcionou "uma evolução no conceito de transposição didática, inserindo a didática no campo da antropologia". O termo "antropológico" é justificado por Chevallard (1999) uma vez que a TAD se preocupa com o estudo das atividades matemáticas, sendo essas atividades humanas desenvolvidas em instituições humanas. Destacamos que nessa teoria, o saber é uma forma específica de organização do conhecimento. A TAD procura investigar os diferentes problemas que se criam entre os diferentes objetos do saber a ensinar. No caso das medidas de tendência central e de dispersão, no capítulo que tratamos da exploração desse saber científico, observamos que não existem um consenso entre os estatísticos sobre muitos elementos. Por exemplo, o conceito de histograma apresentado por Dodge (2007a) não é o mesmo que o apresentado por Régnier (1998b). Régnier (1998b) indica falhas na forma como é apresentado o conceito de histograma por muitos estatísticos. Assim, podemos observar dentro do saber científico a existência de divergências. Temos também formas diferentes de representação dos objetos da estatística e da matemática, como por exemplo a representação de intervalo. Como tratado no capítulo 2, observamos em Régnier (2011a) uma forma que é diferente da apresentada por Kendall e Yule (1948) e também pelo IBGE. Temos diferentes significantes para o mesmo objeto matemático que é utilizado ao tratarmos das medidas de tendência central e de dispersão de variáveis estatística quantitativas contínuas. Um conceito trazido da TAD que vamos utilizar para discutir estas diferenças é o de Instituição (representado na TAD por I). Chevallard (2009, p.2, tradução nossa) define instituição como sendo:

> [...] um dispositivo social "total", que pode certamente não ter uma extensão muito reduzida em um espaço social (existem as micro-instituições), mas que permite – e impõe – aos seus sujeitos, queremos dizer todas as pessoas x que vêm a ocupar as diferentes posições p oferecidas em I, e coloca em jogo as maneiras de fazer e de pensar próprios – isto quer dizer praxeologias.

Assim como exemplo de instituições citadas temos o IBGE, que apresenta normas e padrões para as pessoas que a utilizam. Como instituições podemos também ter pessoas cuja importância do seu trabalho norteia um grupo de indivíduos que seguem suas orientações. No caso da estatística, temos estatísticos que pela importância de suas obras, servem como referência e são seguidos. Utilizamos alguns destes como referência ao tratarmos das MTCD. Dessa forma, estas instituições vão nortear os autores dos livros didáticos que utilizam os seus textos como referência. Logo, dentro desta perspectiva, ao tratar da transposição didática, devemos ter em conta que existem diferentes instituições intervindo neste processo. Assim torna-se importante distinguir o papel das instituições no Brasil e na França. Ao comparar os livros didáticos do Brasil com a França podemos observar diferenças que de certa forma podem ser internas no mesmo país, como também de país para país.

Dentro da TAD um elemento importante é o de Praxeologia que iremos nos deter a seguir.

4.1. PRAXEOLOGIA

Para Chevallard e Bosch (1999, p.83, tradução nossa) “o saber matemático, como uma forma particular de conhecimento é, portanto, fruto de uma ação humana institucional”. Para analisar o processo de produção, transposição, ensino e utilização do saber, de uma forma geral e das práticas matemáticas, em particular, ele desenvolve as noções de tarefa (representado por t), tipo de tarefa (representado por T), técnica (representado pela letra grega minúscula tau, τ), tecnologia (representado pela letra grega minúscula teta, θ) e teoria (representado pela letra grega teta maiúsculo, Θ). Ele baseia-se em três postulados:

- Toda prática institucional pode ser analisada sob diferentes pontos de vistas e de diferentes formas, em um sistema de tarefas relativamente bem delimitadas, destacando-se o fluxo da prática;
- O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica;
- [...] para poder existir em uma instituição, uma técnica deve ser compreensível, legível e justificada [...] essa necessidade ecológica implica a existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas que chamaremos de tecnologia da técnica. O postulado anunciado implica também que toda tecnologia tem necessidade de uma justificativa que chamamos de teoria da técnica e que constitui o fundamento último (CHEVALLARD; BOSCH, 1999, p.84-86).

A praxeologia é um conceito central na TAD (CHEVALLARD, 2011). E estes quatro elementos básicos da TAD devem ser considerados no seu sentido dentro da TAD. Apresentaremos a seguir um detalhamento destes elementos.

4.1.1. GÊNERO DE TAREFA, TIPO DE TAREFA, SUBTIPO DE TAREFA E TAREFA.

O termo tipo de tarefa (representado por t) é normalmente associado a um verbo. Na pesquisa em TAD podem-se estudar objetos que em uma dada sociedade não existe um verbo e cabe ao pesquisador explicitar este tipo de tarefa que é objeto de sua pesquisa (CHEVALLARD, 2011). Quando utilizamos apenas um verbo, como subir, não temos uma tarefa (ou um tipo de tarefa), temos um gênero de tarefas (CHEVALLARD, 2009). Uma tarefa pode revelar um tipo de tarefa, neste caso, podemos representar, algumas vezes, como $t \in T$. Para exemplificar estas diferenças, considere o gênero de tarefa "determinar", um tipo de tarefa "determinar a média aritmética" e uma tarefa "determinar a média aritmética de 2, 5 e 7". Encontramos em Chevallard (1998 e 1999) a menção a outra categoria chamada subtipo de tarefa (sous-type de taches). Nos dois artigos a descrição é bastante sucinta. Vamos encontrar na tese de Araújo (2009) o desenvolvimento desta ideia com uma classificação aplicada ao estudo das funções de segundo grau, utilizando inclusive uma simbologia que não tínhamos observado em Chevallard. E incorporamos a descrição dos subtipos de tarefas em nossa pesquisa. No quadro 5, exemplificamos esses elementos tomando como referência Chevallard (2009) e um exemplo que propomos sobre as medidas de tendência central e dispersão .

Quadro 5 – Gênero de tarefa, tipo de tarefa, subtipo de tarefa e tarefa.

	Rep.	Exemplo extraído de Chevallard (2009)	Exemplo baseado em nossa pesquisa
Gênero	---	Dividir	Determinar
Tipo de tarefa	T	Dividir um inteiro por outro	Determinar a média aritmética de dados não ordenados ou ordenados da população ou amostra, apresentados ou não em uma tabela.
Subtipo de tarefa	t_1	----	Determinar a média usando uma fórmula do tipo: $M = \overline{X} = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n) = \frac{1}{N}\sum(X)$
Tarefa	t	Dividir 509 por 15	t1:Determinar a média aritmética das alturas de três alunos: 1,60 m, 1,55 m e 1,56 m. t2: determinar a média das alturas de três indivíduos: 1,48 m, 1,50 m, 1,55 m.

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Partindo da ideia que para realizar uma tarefa é necessário uma maneira de fazê-la, Chevallard (1998) acrescenta um segundo elemento na praxeologia: a técnica.

4.1.2. TÉCNICA

Chevallard (2009, p.225) esclarece que em uma praxeologia relativa a T, existe “uma maneira de cumprir, de realizar as tarefas $t \in T$: uma tal maneira de fazer, τ, dar-se o nome de técnica (du grego tekhnê, saber-fazer”). Uma técnica poderia responder a questões do tipo: como escovar os dentes? Como resolver uma equação do segundo grau? Como determinar a média aritmética? Como determinar a moda? Existindo mais de uma maneira de fazer poderíamos pensar em qual seria a melhor forma de fazer? Qual a melhor forma de determinar a mediana? Neste caso, se procuraria entre as técnicas a mais eficiente. Chevallard (1998) destaca que em alguns casos uma técnica não consegue dar conta de todas as tarefas relativas a um tipo de tarefa. Existindo desta forma uma técnica que é superior a outra, ou seja, que pode ser utilizada para resolver um número maior de tarefas relativas a um tipo de tarefa. O surgimento de técnicas superiores conduzem a uma evolução das praxeologias. Podemos ainda utilizar na realização de uma tarefa, no lugar de uma técnica, um conjunto de pequenas técnicas que são reconhecidas em uma dada instituição com a exclusão de técnicas alternativas (CHEVALLARD, 1999). Algumas técnicas utilizadas em uma instituição podem não ser usadas em outras. Em uma aula de matemática, por exemplo, o professor pode utilizar uma ou um conjunto de técnicas para resolver um tipo de problema e considerar as técnicas alternativas desenvolvidas pelos alunos como alternativas possíveis, ou como artificiais, contestáveis, inaceitáveis dentro da organização praxeológica da instituição de ensino da qual faz parte. Ao analisar uma técnica deve-se analisar algumas questões como: ela pode ser aplicada a outras tarefas ou é limitada? Ela é mais econômica (mais simples e eficiente)? Ela possui limitações?

Chevallard (1999, p.225) esclarece que uma técnica "não é necessariamente de natureza algorítmica ou quase algorítmica", sendo algorítmica em apenas alguns casos. Este pesquisador esclarece que em matemática, algumas técnicas não são algorítmicas, mas existe uma tendência à algoritmização. Bessa de Menezes (2010) reflete, em seu estudo, que um dado problema pode ter mais de uma técnica ou pode usar uma técnica principal e uma subtécnica. Para calcular a área de um retângulo de lados (x-3cm) e (x-5cm) pode-se utilizar como técnica a fórmula da área do retângulo e como subtécnica a fórmula de Bháskara (BESSA DE MENEZES, 2010). O termo subtécnica não é empregado por Chevallard (1996, 1998, 1999, 2003, 2009, 2011).

Um conjunto formado por um tipo de tarefa T e uma técnica τ formam um bloco chamado prático-técnico representado por $[T/\tau]$ relacionado ao saber-fazer.

4.1.3. TECNOLOGIA

Uma técnica precisa de uma justificativa. Na TAD esta justificativa é chamada de tecnologia e é representada por θ. Chevallard (1999, p.226, tradução nossa) esclarece que a tecnologia corresponde a "um discurso racional – o logos – sobre uma técnica – a tekhnê - τ, discurso que tem como objetivo primeiro justificar "racionalmente" a técnica τ, em assegurar que ela permita cumprir bem as tarefas do tipo T [..]". A tecnologia de uma instituição, ou seja, a justificativa das técnicas utilizadas para resolver determinadas tarefas T desta, pode ser diferente de outra instituição. Pode ainda uma tecnologia em uma instituição ser considerada por outra pouco racional. Essas diferenças são importantes, sobretudo quando vamos comparar livros didáticos diferentes que podem trazer técnicas diferentes. Para cada autor, a técnica apresentada é a mais adequada, havendo assim divergências. Por outro lado, podemos ter um conjunto de livros que usam a mesma técnica.

Chevallard (1999) destaca três observações sobre a tecnologia:

- Nas instituições uma técnica é acompanhada de vestígios de tecnologia e em alguns casos a tecnologia é integrada à técnica. Este pesquisador exemplifica através da aritmética elementar na qual um pequeno discurso tem uma dupla função. Ao mesmo tempo em que possibilita encontrar o resultado (função técnica) justifica o resultado pretendido (função tecnológica): se alguém diz que "se 8 pirulitos custam 10 F[57], 24 pirulitos são três vezes 8 pirulitos, custam 3 vezes mais, são 3 vezes 10 francos" (p.227). Em uma dada instituição pode existir uma técnica consagrada, apenas reconhecida e empregada pela instituição. Este fato pode fazer que a mesma seja empregada sem uma justificação, como sendo a melhor forma de fazer tal tipo de tarefa.
- A segunda função da tecnologia é de justificar a técnica. É tornar clara as razões que conduzem a utilizar tal técnica. Explicar porque esta técnica é composta de tais procedimentos. Na matemática a função de justificação é tradicionalmente ocupada pela exigência da demonstração.
- A terceira função da tecnologia é a produção de técnicas. Esta função é, atualmente, mais associada ao termo tecnologia. Existem tecnologias que são potenciais, pois não estão associadas a alguma técnica. Existem também as tecnologias que são associadas a poucas técnicas e neste caso são subexploradas. A tecnologia pode modificar uma técnica para que esta possa ser aplicada a um número maior de tarefas ou criar uma nova técnica mais aprimorada.

---

[57] Francos, moeda corrente na França, antes da unificação das moedas na Europa com o euro.

4.1.4. TEORIA

Toda tecnologia possui afirmações mais ou menos explícitas que podem exigir sua justificação. Esta justificação é chamada de teoria. Para Chevallard (1999, p.227) a teoria "trata-se de um nível mais elevado de justificação-explicitação-produção". Ela é representada na TAD por Θ. Da mesma forma que a tecnologia justifica a técnica, a teoria vem a justificar a tecnologia. Contudo, poderíamos pensar numa teoria que justifica outra teoria prolongando-se nesta regressão ao infinito. Contudo, Chevallard (1999) justifica que estes três níveis já explicitados (técnica, tecnologia e teoria) são suficientes, em geral, para dar conta das atividades de uma organização praxeológica.

4.1.5. OS BLOCOS PRÁTICO-TÉCNICO E TECNOLÓGICO-TEÓRICO

O termo praxeologia vem de dois termos gregos: práxis (prática) e logos (razão). Esse termo vem da ideia de que toda prática humana em uma instituição é acompanhada de um discurso que o justifica. A praxeologia é dividida em dois blocos. O primeiro, chamado de bloco prático-técnico e formado pelos tipos de tarefas e técnicas que correspondem à prática (práxis), ao saber-fazer (savoir-faire), sendo representado por $\Pi=[T/\tau]$. O segundo bloco, chamado de bloco tecnológico-teórico é formado pelas tecnologias (θ) e as teorias (Θ) e representado por $\Lambda=[\theta/\Theta]$ e está associado ao saber (logos). Em vista disso, podemos dizer que uma praxeologia P é um conjunto formado por quatro elementos $P = [T/\tau/\theta/\Theta]$ (CHEVALLARD, 2009). No quadro 6, procuramos exemplificar o bloco prático-técnico e o bloco tecnológico.

Quadro 6 – Praxeologia: Bloco prático-técnico e bloco tecnológico.

Bloco	Elemento	Rep.	Descrição	Exemplo
Bloco prático-técnico $[T/\tau]$ Saber-fazer (práxis)	Gênero	---	Pode ser representado por um verbo de ação.	Determinar
	Tipo de tarefa	T	Agrupa um conjunto de tarefas do mesmo tipo, como atravessar uma rua, resolver uma equação do segundo grau.	Determinar a média aritmética de dados não ordenados ou de dados ordenados da população ou da amostra.
	Subtipo de tarefa	t_1	Um tipo de tarefa pode abrigar diferentes subtipos de tarefas.	Determinar a média usando uma fórmula do tipo. $M = \overline{X} = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n) = \frac{1}{N}\Sigma(X)$
	Tarefa	t	Resolver uma atividade específica, como atravessar a Avenida Paulista.	t1 - Calcular a média aritmética de um conjunto de observações (dados não ordenados): 5; 4; 7; 6. t2 – calcular a média aritmética de um conjunto de observações de dados ordenados: 4; 5; 6; 7.
	Técnica	τ	Utilizada para resolver uma tarefa.	Somar todas as observações (independente de estarem ou não ordenadas, de ser população ou amostra, soma-se). Dividir a soma das observações pelo total de observações e obtêm-se a média
Bloco tecnológico [T/τ] Saber (logos)	Tecnologia	θ	Empregada para justificar uma técnica. Em matemática se utiliza tradicionalmente a demonstração.	Para obter uma distribuição uniforme, soma-se todos os valores e se divide ao meio. Isto também faz com que a média esteja espacialmente no centro de equilíbrio dos conjuntos dos dados.
	Teoria	Θ	Toda tecnologia precisa de uma justificativa que seria a teoria.	Esta tarefa se apoia na teoria estatística, mas precisamente em um dos seus ramos que indicam que podemos condensar ao extremo através de um número os dados. Kendall e Yule (1948, p. 27) abordam este ramo que trata da estatística como resumo e descrição.

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Outro aspecto que consideramos importante destacar é a transposição das praxeologias.

4.1.6. TRANSPOSIÇÃO DAS PRAXEOLOGIAS

Será que as atividades humanas poderiam ser regidas por praxeologias ideais? De forma a resolver todas as tarefas de uma dada instituição de forma eficiente, segura e de fácil compreensão? Chevallard (1999) responde que não e coloca a questão natural do surgimento de novos problemas e de mudanças constantes nas instituições. Ele destaca ainda para o envelhecimento das praxeologias junto com a perda de crédito dos seus componentes teóricos, ao mesmo tempo que novas tecnologias emergem colocando em suspeita as antigas práticas. Como exemplo, Chevallard destaca as mudanças na aritmética escolar que até meados do século XX mantêm sobre o nome de teoria das razões e proporções, uma praxeologia matemática para tratar de forma eficiente problemas de proporcionalidade direta e inversa. Como exemplo (CHEVALLARD, 1999, p.230, tradução nossa) temos o problema "se 8 pirulitos custam 10 francos, e se quero conhecer o preço, x francos, de 3 pirulitos, dizemos que 'x está para 3 como 10 está para 8´, isto se traduz pela proporção representada classicamente x:3::10:8[58]". Nesta proporção, podemos afirmar que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos representado por $x = \frac{10 \times 3}{8} = ...$. Chevallard (1999) destaca que com a reforma da matemática moderna nos anos 70 muitos elementos teóricos e tecnológicos da matemática "clássica" passaram a ser considerados obsoletos. Chevallard esclarece que:

> a teoria das razões e proporções, não são eliminadas ao mesmo tempo das técnicas elementares que, de fato, não serão substituídas, ou não serão imediatamente substituídas, por das praxeologias mais complexas, pouco viáveis nos níveis iniciais do ensino fundamental. Assim, logo que disponível a noção de função, e mais particularmente a noção de função linear, assim como as noções usais a este respeito, podemos retomar o problema dos 3 pirulitos nestes termos: f estando linear, se f(8)=10, então $f(3) = f\left(\frac{3}{8} \times 8\right) = \frac{3}{8} \times f(8) = \frac{3}{8} \times 10 = ...$ (1999, p.230, tradução nossa)

[58] Atualmente, a moeda francesa é o euro, adotada pelos países membros da comunidade europeia. O texto original foi criado antes da conversão para o euro quando a moeda francesa era o franco.

Diante da necessidade de resolver tarefas rotineiras, muitas tarefas problemáticas aparecem sendo necessário o surgimento de novas praxeologias. Algumas vezes, existem alguns membros de uma instituição I1 que conhecem uma praxeologia de uma instituição I2 e a consideram como necessárias a um melhor funcionamento de I1. Pode-se sugerir a introdução destas praxeologias em I1. Cada instituição possui uma organização própria, desta forma uma praxeologia $\mathcal{P}_i$ de I_2 (Instituição 2) passa por um processo de transposição para se tornar uma praxeologia $\mathcal{P}_j$ de I_1. Neste processo, faz-se necessário adaptar-se, modificar-se para se adequar às condições impostas pela ecologia de I, de modo a levar a construção da praxeologia $\mathcal{P}_j \in I_1$ ($\mathcal{P}_j \neq \mathcal{P}_I$). Chevallard (1999) destaca que esta transposição não significa uma degradação, no sentido, por exemplo, de tornar inferior o bloco tecnológico teórico das organizações praxeológicas transpostas. Em uma instituição de ensino, por exemplo, essa transposição pode ser uma ocasião de melhorar, de retrabalhar, simplificar e de precisar certos elementos, por exemplo. Logo, o processo de transposição enriquece o mundo praxeológico socialmente disponível na medida em que se “cria uma nova praxeologia adaptada a estas condições institucionais inéditas” (CHEVALLARD, 1999, p. 231, tradução nossa).

Chevallard (1999, p.232, tradução nossa) destaca que uma “penúria praxeológica pode se traduzir por uma falta de técnicas. Como melhor cumprir as tarefas do tipo T?” Para resolver esta questão faz-se necessário desenvolver uma técnica τ adequada a resolver as tarefas do tipo T, considerando T$\in \tau$. Para tal, faz-se necessário desenvolver uma praxeologia pontual [T/τ/θ/Θ]. Essa praxeologia pontual pode ser resultante de um processo de transposição de uma praxeologia existente. Destacamos que este processo pode ocorrer em uma instituição de ensino de matemática, de física ou outra disciplina. Pode ocorrer em uma instituição responsável pela produção dos saberes como, por exemplo, no desenvolvimento de novos processos industriais, alguns destes transpostos de outros países e adaptados às instituições produtoras nacionais.

No caso dos livros didáticos, a pesquisa no processo de transposição didática pode indicar algumas praxeologias mais eficientes do que outras. Isto pode levar a um autor de um livro didático adotar uma determinada praxeologia pontual usada por outro autor de livro didático. Esta transposição pode se dar em um mesmo país ou ainda entre países diferentes. Tomemos como exemplo o cálculo da média aritmética. Em Kendall e Yule (1948) podemos observar uma técnica de calcular a média (fórmula 2):

$$M = \overline{X} = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n) = \frac{1}{N}\Sigma(X)$$

Para pequenas quantidades, a técnica indicada nesta fórmula é bastante eficiente. Contudo, se temos um número elevado de observações, estas devem estar representadas em uma tabela com os efetivos e o número dos efetivos. Neste caso, esta técnica é pouco econômica. Para este caso podemos utilizar a fórmula (RÉGNIER, 2000):

$$\bar{x} = m = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k x_k$$

Do ponto de vista da transposição das praxeologias, podemos formular a seguinte questão: Será que esta técnica, mais econômica é apresentada nos livros didáticos? Foi aceita pelas instituições nas quais o autor do livro didático está vinculado?

Outro aspecto apresentado por Chevallard (2002b) é a codeterminação didática, que consideramos pertinente tratar.

4.1.7. CODETERMINAÇÃO DIDÁTICA

Na figura 29, apresentamos a estrutura da codeterminação didática que traduzimos de Chevallard (2002b, p.10). Cada nível "concorre para determinar a ecologia das organizações matemáticas e das organizações didáticas através do apoio que cada nível oferece e as limitações que eles impõem" (CHEVALLARD, 2002b, p.10, tradução nossa). Para tanto, faz-se necessário analisar as características de cada nível tentando observar a relação que o mesmo tem com os demais, sua importância e a forma como o mesmo é influenciado e influencia os outros níveis.

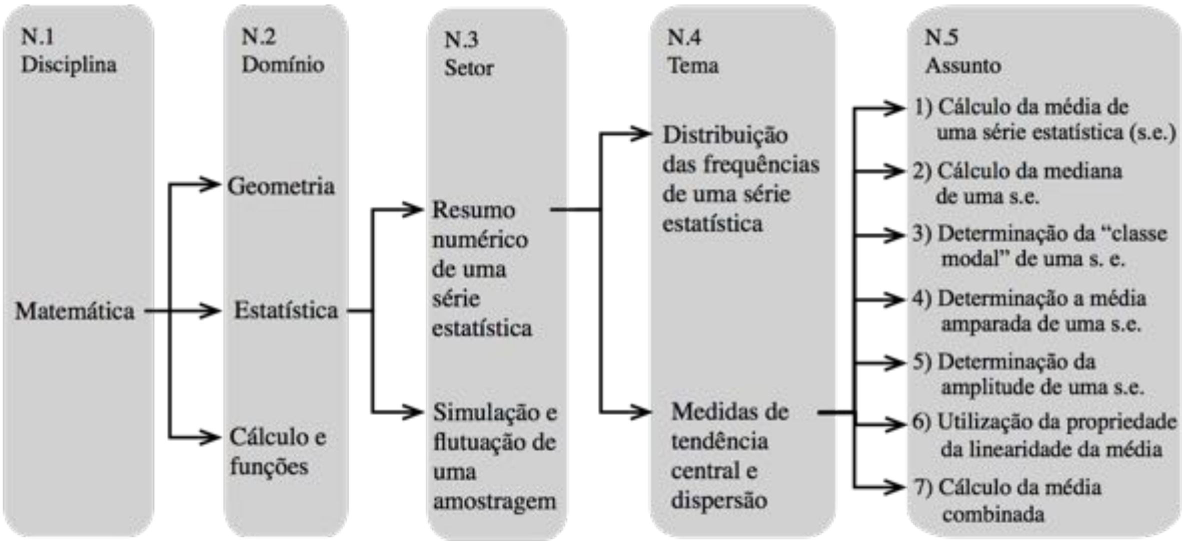
Figura 29 – Níveis de codeterminação didática

Fonte: Chevallard (2002b, p.10, tradução nossa).

Na figura 30, apresentamos um exemplo dos cinco primeiros níveis de codeterminação. Os exemplos que usamos para desenhar essa figura foram apresentados por Chevallard (2002b). Ele se apoia no programa em vigor, na época, para o seconde (primeiro ano do ensino médio geral na França) implantado no ano escolar 1999-2000. Quando estivermos tratando do programa atual na França, apresentaremos os níveis do programa atualmente em vigor.

Ao tratar de um tema de estudo, dificilmente ele se limita a uma organização pontual $[T/\tau/\theta/\Theta]$ apoiada em apenas um tipo de tarefa T. Em geral, um tema de estudo se divide em assuntos com tarefas específicas. Assim, um tema de estudo apresenta uma organização local, compostas de i tipos de tarefas T_i, cada uma pode ter uma maneira de fazer. Desta forma temos i maneiras de fazer as técnicas τ_i. Esta organização local possui características próprias das instituições de ensino a ela vinculadas. Portanto, podemos representar esta organização local por $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{i\in I}$ que representa a organização a que o professor pretende implantar em sala de aula. Chevallard (2002, p. 2, tradução nossa) esclarece que cabe ao aluno reconstruir estas organizações locais “com seus colegas de estudo sobre a direção do professor (ou na falta deste, por conta própria), as organizações pontuais sobre as quais o seu domínio será avaliado”. O aluno é avaliado sobre que assuntos ele consegue responder às atividades apresentadas pelo professor, ou seja, que tipo de tarefas que estão associadas a uma organização local ele vai dar conta. No exemplo apresentado na figura 30, um aluno pode resolver tipos de tarefas relativos ao assunto 1 (Cálculo da média de uma série estatística), e apresentar dificuldades na resolução de tarefas relativas ao assunto 2 (cálculo da mediana de uma série estatística).

Figura 30 – Exemplo dos níveis de codeterminação para a classe seconde (França)[59]



Fonte: desenho do autor da tese baseado no texto de Chevallard (2002b), tradução e adaptação do autor da tese.

O professor pode sentir necessidade de explorar em um nível superior, o nível do setor. Este está ligado a uma teoria, que comporta j tecnologias, cada qual que dá conta a i técnicas associadas a i tarefas. Este conjunto forma uma organização praxeológica regional $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta]$. Por sua vez, podemos pensar em um nível superior, o domínio do estudo (estatística, geometria etc) que se apoia em k teorias Θ_k, que forma uma organização praxeológica global $[T_{jik}/\tau_{jik}/\theta_{jk}/\Theta_k]$[60]. O conjunto destes domínios está organizado em torno de uma disciplina, que no nosso estudo é a matemática.

[59] Alguns termos da figura 30 foram simplificados para adequar a figura que desenhamos. Assim, por exemplo, o item 7 no texto de Chevallard era: "calcular a media de uma série a partir da media de subgrupos" (calcul de la moyenne d'une série à partir des moyennes de sous-groupes), que correspoderia a calcular a media aritmética combinada.

.

[60] Como temos i tarefas, para cada tarefa eu tenho uma técnica, ou seja, o mesmo i. Uma tecnologia pode abrigar várias técnicas. Desta forma, eu tenho j tecnologias e $j \times i$ técnicas e tarefas. Uma teoria abriga várias tecnologias. Desta forma, para um número k de teorias, temos $k \times j$ tecnologias e $k \times j \times i$ técnicas e tarefas.

Chevallard (2002b) afirma que normalmente o professor se detém nos níveis de maior especificidade: os assuntos[61] e os temas. Quando ele planeja suas aulas, ele o faz em cima destes. Salvo certas situações em que o professor pode informar que a avaliação da atividade sobre a propriedade da linearidade da média está junto das notas dadas à estatística. Esta estrutura geral poderia aparecer em uma aula inaugural na qual fossem apresentados os domínios e setores e os temas e assuntos subordinados. Contudo, este autor esclarece que não faz sentido e na prática isto não acontece. Isto faz com que a estatística seja apresentada no decorrer dos estudos como um conjunto de temas e assuntos enfileirados. Isto ocorre também nos outros domínios como a geometria, o cálculo e funções. Chevallard (2002b, p.3) acrescenta que desta maneira, ao contrário do movimento de desconstrução-reconstrução das obras "[...] só se reconstrói os fragmentos de um quebra-cabeça que nunca será reconstruído no seu conjunto". Observamos, contudo que propostas atuais na área da didática da estatística (ANDRADE; RÉGNIER, 2009b) orientam para uma mudança nesta prática sugerindo para o ensino em torno de projetos.

O nível 1 é o da disciplina, ele possui certas particularidades. No caso da matemática, por exemplo, Chevallard esclarece que houve pouca evolução durante o século XX conduzindo a matemática a ser uma "um monumento que se visite, não uma obra que se reconstrói" (2002b, p. 10). A ideia de uma obra que se visite pode ser observada em uma aula em que as principais noções são apresentadas aos alunos: apresentam-se as técnicas e as tecnologias que permitem resolver certos tipos de problemas. Depois cabe ao aluno visitar esta obra e reproduzi-la na resolução de questões similares. Em uma posição contrária, temos Brousseau (1986, 1997) que propõe nas situações adidáticas, nas quais são propostas desafios no jogo didático, nas quais as obras possam ser desenvolvidas pelos alunos acompanhadas pelo trabalho do professor que tem um papel importante de regulador e na institucionalização destas. Outro aspecto da disciplina apresentado por Chevallard (2002b) são regras próprias da matemática muito fortes, como só se pode manipular na sala de aula apenas símbolos e não coisas como uma balança para comparar o volume de um cone e de um cilindro.

O nível da pedagogia possui características que devem ser observadas não apenas no ensino de matemática, mas de todas as disciplinas. Contudo, ainda dentro deste nível, podem existir restrições a algumas disciplinas que não são impostas a outras. Chevallard (2002b, p.12) esclarece que "as limitações pedagógicas tomam forma no conjunto de meios de estudo imposto e alocado a todo estudo escolar, com algumas exceções escolares que convêm

---

[61] No original Sujet. Este termo pode ser traduzido como sujeito, assunto, tema, objeto. Consideramos mais adequado a palavra assunto.

negociar com a autoridade "pedagógica". Para exemplificar estas limitações, tomemos um exemplo apresentado por este mesmo autor. Em uma conferência intitulada "os exercícios práticos da matemática no ensino secundário", realizada em 1904 em um museu pedagógico na França, Émile Borel (1871-1956) propôs a criação de um laboratório de matemática. Neste laboratório, deveria ter uma balança de feira, alguns recipientes e outros elementos que possibilitassem a realização durante a aula de matemática de experimentos concretos. Esta proposta foi relançada quase um século depois pela Comissão Kahanne. Trata-se nesta proposta da criação de um meio didático (o laboratório) proposto para outras disciplinas (como química, física) e pouco utilizado no nível da matemática[62] o que necessitaria de uma negociação no nível pedagógico. Para Chevallard (2002b), as coisas acontecem em cada nível de determinação como se fossem legítimos cada nível e como se atuasse quase que isolado em cada nível. Na prática isto não ocorre, ao contrário, muitas mudanças em um nível só se justificam pelos efeitos, ainda que não explícitos, em outros níveis da hierarquia didática. A proposta do laboratório de matemática tem um forte efeito sobre a matemática e nos demais níveis abaixo dessa disciplina, conduzindo a mudanças na forma como os temas e assuntos sejam apresentados pelos professores. Consideramos que propostas como estas podem não se concretizar se não houver uma aceitação dos professores que atuam nos níveis de maior especificidade (temas e assuntos).

Chevallard esclarece que o nível pedagógico funciona como um nível de fronteira entre os níveis superiores e inferiores. O nível de baixo faz pouca intervenção no nível pedagógico, cabendo por outro lado seguir as regras impostas pelos "[...] especialistas de pedagogia que propõem a lei sem se preocupar muito com os decretos de sua aplicação [...]" cabendo aos professores cuja "[...] legítima liberdade pedagógica só adquirida sobre a condição de respeitar o conjunto das obrigações pedagógicas [...]" (CHEVALLARD, 2002b, p. 13, tradução nossa). Essas limitações restringem à "liberdade" pedagógica do professor. Consideramos que se deve levar em conta também que as propostas pedagógicas que refletem, muitas vezes, estudos realizados por especialistas, educadores, professores que atuam na noosfera e têm como proposta o aperfeiçoamento do ensino. Outras vezes, contudo, existe um forte componente político motivado pela necessidade de apresentar "avanços" nos outros níveis aos eleitores.

[62] Queremos destacar, contudo, que esta ideia não é tão nova. Existem inúmeras propostas de laboratórios de matemática que não são antigas como a proposta de Émile Borel, mas também não tão novas como as propostas pela Comissão Kahane.

O nível -1 é o da escola que propõe obrigações e oferece pontos de apoios e é representado pela instituição escolar. Por lei, tem-se na França a obrigatoriedade de frequentar a escola nos períodos de aula, salvo exceções que precisam ser comprovadas sobre o risco de prisão para os pais. O período de férias escolares e dos horários a cumprir são também definidos. Este nível comporta um corpo de especialistas. Também são definidos que disciplinas devem existir. A escola tem um papel fundamental na difusão do conhecimento na sociedade, oferecendo uma economia e uma ecologia. Esse processo não tem comparação em uma sociedade sem escola. A forma de "se instruir na própria escola privilegia de maneira tão radical a fragmentação disciplinar do estudo. Esta escolha cria um mercado das disciplinas escolares onde as lutas de conquistas e reconquistas, as rivalidades [...] esmagam toda codisciplinaridade" (CHEVALLARD, 2002b, p. 13). Dessa forma, cada disciplina deve valorizar suas especificidades, aquilo que a valoriza neste mercado das disciplinas escolares. Chevallard (2002b) exemplifica esta segregação levando à matemática caminhar em um campo próprio, o da dedução, se afastando do das ciências experimentais (química, biologia, física), reinando sobre objetos "seguros".

O nível da sociedade, tal como nos outros, possui suas características próprias, suas limitações e impõe obrigações. O que deve ser tratado na escola, como deve ser tratado nas escolas, que limitações podem ser impostas (como em sociedades não democráticas que pode criar uma censura a certas posturas). Este nível pode valorizar uma formação escolar baseada na leitura das obras ou ainda na formação de competências.

4.1.8. ANÁLISE DE UM DETERMINADO TEMA EM MATEMÁTICA

Dado um tema como as medidas de tendência central e de dispersão que chamaremos de ξ, para estudar a forma como este tema é abordado na sala de aula, Chevallard (1999) esclarece que se deve estudar tanto a realidade matemática ou organização matemática (OM) como a organização didática (OD). A organização matemática diz respeito à forma como pode-se realizar o estudo do tema ξ devendo-se considerar a realidade matemática referente a este tema. Trata-se da praxeologia matemática ou organização matemática deste tema que chamaremos de $OM\xi$. A organização didática diz respeito ao caminho que segue no estudo deste tema. Chamaremos a organização didática de $OD\xi$. Consideramos que este estudo não trata da sala de aula, mas é direcionado aos livros didáticos e aos documentos oficiais (programas) e nos limitaremos ao estudo da organização matemática. Como a pesquisa não se encerra com a tese, mas faz parte de um percurso definido pelo pesquisador, pretenderemos estudar a organização didática.

4.1.9. ANÁLISE DE UMA ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA

Na análise da organização matemática, Chevallard (1999) propõe uma análise praxeológica apoiada nas tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Chevallard (1999) apresenta quatro níveis de organização matemática (OM):

- Organização matemática pontual
    - Uma praxeologia é dita pontual quando "ela é relativa a um único tipo de tarefa, T" (p.228, tradução nossa). Ela é representada por [T/τ/θ/Θ].
- Organização matemática local
    - Quando uma praxeologia é "centrada sobre uma tecnologia θ" (p.229, tradução nossa), ela é chamada de organização praxeológica local. Ela é representada por $[T_i / \tau_{ij} / \theta / \Theta]$, ou seja, uma teoria θ que justifica j tecnologias que por sua vez possibilita a resolução de i tarefas.
- Organização matemática regional
    - Quando temos uma organização praxeológica que se "forma em torno de uma teoria Θ" (p.229, tradução nossa) ela é chamada de organização praxeológica regional. Ela é representada por [Tij/τij/θj/Θ], em que temos j tecnologias.
    - Uma organização praxeológica formada "pela agregação de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias Θ_k" (p.229, tradução nossa) é chamada de organização global. Ela é representada por $[T_i / \tau_{ij} / \theta_j / \Theta_k]$, onde k corresponde ao número de organizações regionais.

Na passagem de uma organização pontual (centrada em um tipo de tarefa) para uma organização local (centrada em uma tecnologia) coloca-se em evidência a tecnologia que vai justificar as técnicas utilizadas para resolver os diferentes tipos de tarefas desta organização local.

Na mudança de uma organização local (centrada em uma tecnologia) para uma organização regional (centrada em uma teoria), põe-se em destaque a teoria que vai justificar as diferentes tecnologias utilizadas.

Chevallard (1999) esclarece que um tema de estudo em matemática pode corresponder a diferentes organizações praxeológicas. Um tema de estudo como o Teorema de Tales é geralmente associado a uma tecnologia θ. Neste caso, este tema permite produzir e justificar técnicas relativas a diversos tipos de tarefas. Por outro lado, um tema de estudo como resolução de equações se exprime mais frequentemente relacionado a um tipo de tarefa. Esta pesquisa centra-se sobre o tema de estudo medidas de tendência central e de dispersão. E a nossa análise nos livros didáticos é voltada para análise das organizações pontuais centradas em torno desta, como, por exemplo, na determinação do desvio padrão.

Na parte dois desta tese, apresentada no volume 2, apresentaremos na metodologia um levantamento das organizações praxeológicas pontuais sobre as medidas de tendência central e de dispersão que utilizamos na análise dos livros didáticos e programas. Também utilizaremos o conceito de instituição, os níveis de codeterminação e outros elementos apresentados neste capítulo na análise dos livros didáticos e programas.

No próximo capítulo, trataremos de outra teoria que utilizamos para embasar a metodologia de investigação proposta, as nossas análises e conclusões. Trata-se da teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1996).

5. A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E OS CONCEITOS DAS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS

Ao tratar da forma como se aborda nos livros didáticos as medidas de tendência central e de dispersão (MTCD), consideramos a importância de uma apresentação que não se limite à memorização de fórmulas, definições e teoremas, mas que possibilite o desenvolvimento do conceito das MTDC. Para tratar do ensino de um conceito, tomamos como referência a teoria dos campos conceituais.

A noção de campo conceitual foi desenvolvida por Gérard Vergnaud (1996) e é referendada por muitos estudiosos da Educação Matemática. Essa teoria se desenvolve no ensino da matemática, no estudo das estruturas das operações que envolvem adição, subtração (chamadas de estruturas aditivas) e operações de multiplicação e divisão (estruturas multiplicativas). Ela embora pensada no âmbito da matemática, pode ser aplicada em outras áreas do conhecimento. Falar em campo conceitual implica dizer que um conceito não pode ser compreendido isoladamente. Todo conceito existe fazendo parte de uma trama, de uma rede, de uma tessitura, de um conjunto de conceitos que dão suporte à compreensão do conceito que se deseja estudar. As medidas de tendência central e de dispersão são compostas por vários conceitos, tais como: o conceito de média aritmética, de moda, de desvio, de desvio padrão etc. Ao tratar do ensino das medidas de tendência central e de dispersão (MTCD) que conceitos são necessários para a compreensão dos conceitos que envolvem as MTCD? Além dos conceitos que fazem parte destas medidas, temos também outros conceitos da estatística ou ainda da matemática que são necessários para a compreensão destes conceitos, como é o conceito de adição e multiplicação. Para exemplificar a relação e a importância das estruturas aditivas e multiplicativas na compreensão dos conceitos de MTCD, apresentamos uma breve introdução através de duas propriedades.

Estruturas aditivas e multiplicativas

Ao resolver uma questão qualquer que envolva medidas de tendência central ou dispersão, utilizaremos operações como somar, dividir, em alguns casos multiplicar e subtrair. Também poderemos empregar propriedades das estruturas aditivas e multiplicativas.

Tomemos como exemplo, uma maneira de calcular a média aritmética representada pela fórmula:

$$m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K=p} n_K x_k$$

Outro modo de representar esta fórmula é:

$$m = \frac{1}{n}[(n_1x_1) + (n_2x_2) + \cdots (n_px_p)]$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição teremos:

$$m = \frac{1}{n}(n_1x_1) + \frac{1}{n}(n_2x_2) + \cdots + \frac{1}{n}(n_px_p)$$

Podemos assim representar pela fórmula:

$$m = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{n}(n_kx_k)$$

Aplicando a propriedade associativa em relação à multiplicação, podemos também apresentar de outra maneira a fórmula:

$$m = \frac{1}{n}(n_1x_1) + \frac{1}{n}(n_2x_2) + \cdots + \frac{1}{n}(n_kx_k) = \left(\frac{n_1}{n}\right)x_1 + \left(\frac{n_2}{n}\right)x_2 + \cdots + \left(\frac{n_p}{n}\right)x_p$$

Assim podemos indicar em outra ordem os procedimentos de cálculo, o que não altera os resultados:

$$m = \sum_{k=1}^{k=p} \left(\frac{n_k}{n}\right)x_k$$

Observamos nestes dois exemplos o emprego correto das propriedades associativas e distributivas. Contudo Batanero[63] (2000, p.7, tradução nossa) destaca uma pesquisa na qual "Mevarech (1983) observa que inclusive os estudantes universitários pensam que a média tem a propriedade associativa e quando eles têm que achar a média de um conjunto grande de números, o dividem em partes achando primeiro a média de cada parte e depois repartindo o resultado obtido". Batanero esclarece que para se comprovar que esta propriedade não é correta, pode-se pegar três números diferentes. Calcula-se a média dos dois primeiros e depois calcula-se a média do resultado com o terceiro número.

Para tratar do que foi exposto, primeiro consideramos pertinente exemplificar a propriedade associativa da adição:

[63] Não tivemos acesso à publicação original, contudo as informações indicadas atendem ao nosso objetivo que se limita a discutir o aspecto destacado pela autora que tem a ver com a importância das operações ligadas ao cálculo da média.

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\frac{d}{b}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{b}+\frac{d}{b}\right)$$

Ou da multiplicação:

$$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$$

Para exemplificar o que foi apresentado por Batanero, consideramos o procedimento para obter a média de 4, 6 e 11:

$$m=\frac{4+6+11}{3}=7$$

Ao dividirmos em partes temos um resultado inadequado:

$m=\frac{4+6}{2}=5$ e em seguida $m=\frac{5+11}{2}=8$

Dessa forma, não podemos jamais considerar esta igualdade, mas sim como segue:

$$\frac{a+b+c}{3}\neq\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)+c}{2}$$

O que podemos fazer usando de forma adequada as operações de divisão e soma é

$$\frac{a+b+c}{3}=\frac{a+b}{3}+\frac{c}{3}$$

Pois se temos o mesmo denominador, podemos somar os numeradores. Podemos ainda aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

$$\frac{1}{3}\,(a+b+c)=\frac{1}{3}(a+b)+\frac{1}{3}c=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c$$

É muito comum, no cálculo mental, o uso da propriedade associativa da multiplicação, assim no lugar de calcular 4 x 80, se calcula (4 x 8) x 10. Temos a ideia de dividir em partes para simplificar o cálculo, mas o procedimento citado por Batanero não é falho porque os alunos utilizam a propriedade associativa para calcular a média. Ele é falho porque os alunos utilizaram inadequadamente esta propriedade, realizando operações que não têm base matemática. O procedimento citado, utilizado pelos aprendizes, não se apoia nas propriedades relacionadas às estruturas multiplicativas ou aditivas. Assim, este procedimento usado pelos alunos, citados na pesquisa, é inadequado e resultante de uma deficiência em um conhecimento (ligados ao campo conceitual das estruturas aditivas e multiplicativas) que por sua vez faz parte dos campos conceituais das medidas de tendência central e de dispersão.

Além das estruturas aditivas e multiplicativas, existem outros conceitos também importantes como os que tratamos na introdução do capítulo das MTDC, que listamos abaixo:

- Frequência e efetivos;
- Variável e classe;

- Intervalo;
- Diagrama de coluna e do histograma;
- Unidades de medidas
- Somatório;

Além destes conceitos, existem outros ligados às MTCD. Na nossa pesquisa investigaremos que conceitos os programas e os livros didáticos colocam em estreita conexão com as MTCD.

Na educação escolar, temos de um lado a necessidade de ensinar conceitos de natureza científica a um aluno que vem para escola com uma experiência do seu cotidiano, no sentido de Vygotski (1985). Por outro lado, se faz necessário interligar estes conhecimentos com outros conhecimentos ligados ao mundo do trabalho, a outras disciplinas ensinadas na escola e a responder questões que podem estar relacionadas a suas próprias necessidades diárias, como por exemplo: Qual a probabilidade de pegar uma doença sexualmente transmissível através do sexo sem camisinha? Qual a média salarial dos moradores do meu bairro? Qual a moda da altura dos alunos do primeiro ano do ensino médio? Assim a estatística abre um leque de possibilidades na educação escolar como:

- Responder a problemas do cotidiano através de questões de pesquisas que devem ser adequadamente orientadas pelo professor, de modo a proporcionar desenvolvimento do espírito científico;
- Utilização no mundo profissional;
- Natureza interdisciplinar que pode ser usada para responder a questões de outras disciplinas, como por exemplo: biologia, história, geografia[64].

Ao tratar das MTDC, o livro didático limita-se a uma apresentação dos procedimentos de cálculo destes? Caso contrário, ele faz uma abordagem que procura relacionar a sua aplicação em determinados contextos? Caso afirmativo, em que contextos? Esta questão será investigada nos livros didáticos. Na medida em que o livro explora as MTDC em diferentes contextos, ele torna mais rico o seu aprendizado e o desenvolvimento deste conceito pelo aluno. Este aspecto é destacado por Pais (2001) ao tratar da teoria dos campos conceituais. Ele destaca o papel para aprendizagem escolar das situações vividas na escola e o papel dos conhecimentos anteriores dos alunos nas novas adaptações que são feitas a cada nova situação proposta na escola.

[64] Em sua tese de doutorado, Coutanson (2010) faz uma investigação das características da estatística nos livros didáticos da escola primária na França. Neste estudo, ele faz um levantamento das questões presentes nos livros que envolvem outras disciplinas.

Acioly-Régnier e Monin (2009) destacam a noção de Campo Conceitual "como um espaço de problemas ou de situações-problema cujo tratamento implica conceitos e procedimentos de vários tipos em estreita conexão". Muitas das situações propostas na escola para o ensino de um conceito são trazidas pelos livros didáticos, através de questões de natureza teórica e prática que são elaboradas para serem utilizadas pelos professores e alunos em situações na sala de aula e fora dela.

Ao tratar da teoria dos campos conceituais, Vergnaud (1990, p.135, tradução nossa) esclarece que: "Um conceito não pode ser reduzido à sua definição, ao menos quando nosso interesse é à sua aprendizagem e o seu ensino. É através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire seu senso para a criança". Ao tratar das MTCD, que tipo de problemas ou questões são propostas pelos livros didáticos? Quais os contextos em que estas questões aparecem?

Para Vergnaud (1990, p.145, tradução nossa) um conceito é formado por três elementos que estão interligados:

- S: "um conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência)";
- I: "um conjunto de invariantes sobre os quais repousa a operacionalidade dos esquemas (o significado)";
- S: "um conjunto de formas verbais e não verbais que permite representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante)".

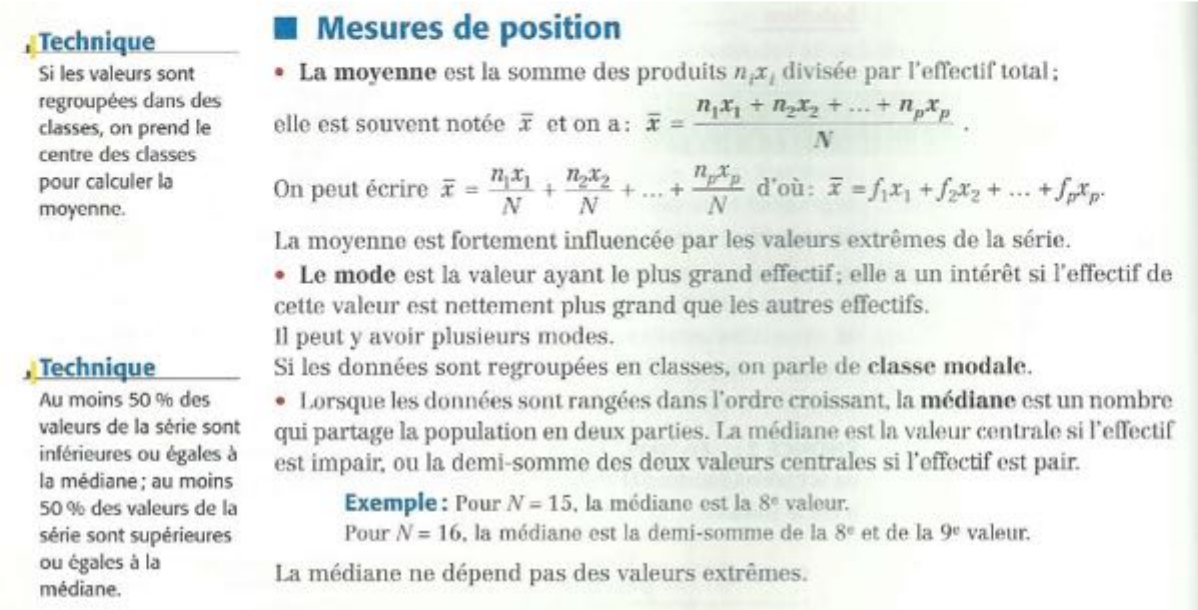
Estes três elementos não podem ser tomados isolados, mas em conjunto. Eles dependem do sujeito. Assim, o significado dado às situações, bem como as representações associadas a estas, depende do sujeito. A escola, contudo, pode criar situações diversificadas de modo a ampliar o nível de conceptualização dos alunos.

Vergnaud (1990, p. 150, tradução nossa) esclarece que o significado dado às situações é o que é o habitual dos psicólogos, "os processos cognitivos e as respostas do sujeito são funções das situações aos quais ele se confronta". Nesse sentido, este autor destaca dois pontos centrais: a variedade e a história. Um campo conceitual é formado por uma grande variedade de situações que geram de forma sistemática as classes possíveis. Os conhecimentos dos alunos se desenvolvem através das situações em que ele se depara, sobretudo, às primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e aos procedimentos que vão ser ensinados.

Ao analisar o livro didático, estamos considerando que a nossa análise possui limitantes de não prever o livro didático nas situações de uso, que podem ser na sala de aula, na forma como o professor se apropria deste. Contudo, podemos pensar em uma estrutura de uso do livro que durante esse processo, se apresenta como elemento de construção do conceito em diversas situações: situações de leitura pelo aluno de uma descrição das propriedades do conceito no livro, situações de leitura pelo aluno de um problema resolvido no livro, situações nas quais o aluno resolve questões propostas pelo livro, situações nas quais o professor resolve no quadro problemas apresentados no livro, etc. Como o livro apresenta o conceito estudado? Na figura 31, temos um trecho extraído de um livro do primeiro ano do ensino médio na França em que ele apresenta a média aritmética. Podemos observar que neste livro, temos a apresentação de uma propriedade "a média é influenciada por valores extremos", sem, contudo aprofundar. Temos também uma descrição da média como algoritmo "a média é a soma dos produtos $n_1 x_1$ dividido pelo efetivo total" e apresentação de três fórmulas para a média. Esta apresentação é bastante limitada e vem a reforçar o que afirma Marques, Guimarães e Gitirana (2011, p. 727) "O conceito de média, como diversos outros conceitos da Matemática e da Estatística, são abordados com foco em seu procedimento, em vez de valorizar o entendimento de seus significados e propriedades importantes para o conceito".

Podemos observar que este tipo de apresentação (na figura 31) privilegia a relação bipolar significante-significado dos três polos propostos por Vergnaud para a conceptualização do real. Essa maneira de conceber a conceptualização deixa de lado as relações importantes entre o conjunto de situações que dão sentido ao conceito e ao significado (ACIOLY-RÉGNIER, 2011; FRADE, ACIOLY-RÉGNIER, JUN, 2013).

Figura 31 – Apresentação da média em um livro do primeiro ano do ensino médio na França (seconde) – Fr_C1 (p. 134).



Technique

Si les valeurs sont regroupées dans des classes, on prend le centre des classes pour calculer la moyenne.

Technique

Au moins 50 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à la médiane ; au moins 50 % des valeurs de la série sont supérieures ou égales à la médiane.

Mesures de position

- **La moyenne** est la somme des produits $n_i x_i$ divisée par l'effectif total ; elle est souvent notée $\bar{x}$ et on a : $\bar{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_px_p}{N}$.

On peut écrire $\bar{x} = \dfrac{n_1x_1}{N} + \dfrac{n_2x_2}{N} + \ldots + \dfrac{n_px_p}{N}$ d'où : $\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_px_p$.

La moyenne est fortement influencée par les valeurs extrêmes de la série.

- **Le mode** est la valeur ayant le plus grand effectif ; elle a un intérêt si l'effectif de cette valeur est nettement plus grand que les autres effectifs.

Il peut y avoir plusieurs modes.

Si les données sont regroupées en classes, on parle de **classe modale**.

- Lorsque les données sont rangées dans l'ordre croissant, la **médiane** est un nombre qui partage la population en deux parties. La médiane est la valeur centrale si l'effectif est impair, ou la demi-somme des deux valeurs centrales si l'effectif est pair.

Exemple : Pour $N = 15$, la médiane est la 8^e valeur.
Pour $N = 16$, la médiane est la demi-somme de la 8^e et de la 9^e valeur.

La médiane ne dépend pas des valeurs extrêmes.

Fonte: Gauthier, Poncy (2009a, p. 134)

Podemos observar também no exemplo da figura 31 o uso prioritário de conhecimentos predicativos em detrimento de conhecimentos operatórios no sentido de Vergnaud (SAMURÇAY; VERGNAUD, 2012). Estes pesquisadores destacam que a forma predicativa é a melhor conhecida e identificada pelos professores. Esta pode ser observada em diversos elementos como (p.56, tradução nossa) “nos textos dos livros didáticos, os teoremas matemáticos, as leis da física ou da química, os capítulos do livro de história e as descrições e explicações do livro de geografia”, na fala do professor. Neste tipo de conhecimento são dados aos objetos do pensamento, propriedades e relações com outros objetos do pensamento. Às vezes, o conhecimento predicativo pode ser visto através de símbolos afastando-se da linguagem natural, como em um quadro com os horários de uma estação de trem, uma fórmula de cálculo usada em Física (SAMURÇAY; VERGNAUD, 2012). Apesar disso, eles tratam de conteúdos do conhecimento e procuram comunicá-los, ainda que os mesmos não sejam facilmente compreendidos pelos estudantes. Assim, como destaca Samurçay e Vergnaud (2012, p. 56, tradução nossa) eles são assim “instrumentos culturais, que cristalizam os conhecimentos e práticas sociais e que demandam serem apropriados pelos aprendizes”.

Por outro lado, a forma operatória de conhecimento é a que possibilita agir e ter sucesso nesta ação. Ele não é necessariamente explícito, nem facilmente formulável. Muitas vezes ele é implícito e às vezes inconsciente, uma vez que “sua função é possibilitar fazer e concluir, não de comunicar e de explicar” (SAMURÇAY; VERGNAUD, 2012, tradução nossa). Esta forma como estes autores apresentam estes dois tipos de conhecimentos deixam bem clara a diferença entre eles. No livro didático podemos observar o conhecimento predicativo como em uma aula do professor. Este conhecimento aparece nos textos que tratam sobre o assunto. Também podemos observá-lo em uma questão proposta para o aluno resolver. Na medida em que o aluno tenta resolver esta questão, temos o uso do conhecimento operatório. Esta forma, no nosso entendimento, se diferencia da solução do problema apresentado no livro. Uma vez que na solução, o autor tem como objetivo comunicar o conhecimento através da solução do problema. Tomemos como exemplo a questão e a solução proposta na figura 32. Nesta questão temos no enunciado 2, os dados referentes aos salários mensais dos empregados de uma pequena empresa. Solicita-se, entre outras coisas, o cálculo da moda, da média e da mediana. Para obter a moda, o autor não apresenta o procedimento, contudo na solução do item a, temos uma tabela onde pode-se observar o valor do efetivo por salário. Ao mesmo tempo, na página anterior, temos a informação de que a moda é o valor com maior efetivo. Assim bastaria o aluno olhar na tabela o salário com maior efetivo. Dessa forma, o resultado serve para o aluno confirmar se entendeu o que é moda. Para o cálculo da média, temos a indicação de como calculá-la. Temos na solução o emprego da fórmula já apresentada com a indicação de como deve ser feito o cálculo. No cálculo da mediana temos também a indicação do método que deve ser usado para obter a mediana. Dessa forma, consideramos o enunciado, assim como, a sua solução como um conhecimento predicativo.

Figura 32 – Apresentação de um enunciado com a sua solução em um livro do primeiro ano do ensino médio na França (seconde) – Fr_C1.1[A].

ÉNONCÉ 2 : Voici la répartition des salaires mensuels en euros des employés d'une petite entreprise : 1 650 ; 1 650 ; 1 200 ; 2 100 ; 3 500 ; 1 650 ; 1 200 ; 2 100 ; 2 400 ; 2 100 ; 1 650 ; 2 100 ; 1 650 ; 2 400 ; 2 100 ; 1 650 ; 2 400 ; 2 400 ; 3 500 ; 1 650 ; 1 200.

a. Construire un tableau donnant les salaires, les effectifs et les effectifs cumulés.

b. Déterminer le mode de cette série et le salaire moyen d'un employé.

c. Déterminer la médiane de cette série. Quelle est la signification de ce nombre ?

d. Déterminer le premier quartile de cette série, puis l'interpréter.

Solution

a. Avec ces données on construit le tableau :

Salaires	1 200	1 650	2 100	2 400	3 500
Effectifs	3	7	5	4	2
Effectifs cumulés	3	10	15	19	21

b. Le mode est 1 650.
L'effectif total est 21, et :

$$\frac{1200 \times 3 + 1650 \times 7 + 2100 \times 5 + 2\,400 \times 4 + 3\,500 \times 2}{21} \approx 2011{,}9.$$

Le salaire moyen est donc environ égal à 2 011,90 euros.

c. N est impair donc la médiane est la valeur centrale, c'est-à-dire ici la 11^e^ valeur ; la médiane est donc 2 100. Il y a au moins 50 % des employés pour lesquels le salaire mensuel est inférieur ou égal à 2 100 euros.

d. $\frac{N}{4} = 5{,}25$, donc le premier quartile est la 6^e^ valeur ; le tableau des effectifs cumulés croissants montre que la 6^e^ valeur est égale à 1 650 euros : $Q_1 = 1\,650$. Il y a au moins 25 % des employés pour lesquels le salaire mensuel est inférieur ou égal à 1 650 euros.

MÉTHODE

Pour déterminer la médiane, ranger les données dans l'ordre croissant puis utiliser les effectifs cumulés croissants.

Fonte: Gauthier, Poncy (2009a, p. 135)

No livro didático, temos trechos que tratam de descrever o tema estudado, como por exemplo "o que é média?", usos, aplicações, etc. Temos também questões resolvidas, exercícios propostos. Todos estes elementos podem ser utilizados pelo professor e pelo aluno (na sala de aula e fora dela, mas sempre em situações escolares) para o estudo das MTCD.

Um elemento destacado por Vergnaud (1990) é o esquema. Ele distingue duas classes de situações nas quais podemos nos deparar. Na primeira, o sujeito dispõe no momento do desenvolvimento dessa situação, das competências necessárias ao desenvolvimento desta. No segundo caso, ele não dispõe de imediato de todas as competências necessárias ao desenvolvimento dela. Neste caso, é necessário um tempo no qual ocorrem hesitações, reflexões e exploração, tentativas abortadas. Isto pode conduzir no final ao sucesso ou eventualmente ao fracasso. A forma de utilizar o esquema não é a mesma para os dois casos. No primeiro caso temos para uma mesma classe de situações uma conduta automatizada, que se utiliza um esquema único. No segundo caso, temos diversos esquemas que são desenvolvidos e entram em competência. Os esquemas devem ser acomodados, descombinados e recombinados com o objetivo de se chegar à solução. Neste processo, temos as descobertas. Assim em função das situações temos maneiras diferentes de se explorar os esquemas. Vergnaud (1996, p. 158) esclarece que "os esquemas são objetos do mesmo tipo lógico dos algoritmos: falta-lhes eventualmente a efetividade, isto é, a propriedade de chegar-se ao fim com segurança num número finito de passos". Vergnaud (1990). Assim situações diferentes podem ampliar os esquemas dos alunos. Ao mesmo tempo um número de situações repetitivas e reduzidas podem não contribuir para ampliação dos esquemas dos alunos. Assim, ao analisar os livros didáticos, procuraremos observar a variedade de técnicas, de propriedades, de ferramentas apresentadas nas situações propostas pelo livro. Situações que vão desde a leitura de um texto a apresentação de atividades a serem resolvidas. A ordem de apresentação das atividades também é importante. O livro procura apresentar um texto, depois exemplos resolvidos e propostos. Ou ele procura apresentar atividades iniciais nos quais os alunos tentaram mobilizar os seus antigos esquemas procurando a solução do mesmo. Refletindo sobre que esquemas podem ser mobilizados para solução das atividades.

Consideramos que a forma como as MTCD são apresentadas nos livros didáticos, os problemas propostos nestes para os alunos, podem estimular a reflexão do aprendiz sobre o conceito. Os LD podem apresentar problemas que envolvem maneiras diferentes de aplicação deste conceito, assim como, pode também ser limitada há alguns usos. Logo, consideramos que a forma como os problemas são apresentados nos livros didáticos podem contribuir para ampliar estes conceitos ou ainda apresentá-los de uma forma mais limitada. Tomando como exemplo a média aritmética, podemos ter uma apresentação limitada deste conceito no livro ao algoritmo mais comum: somar todos os termos e dividir pelo total de elementos. Quando restrita a isto, temos uma abordagem limitante do conceito. Por outro lado, podemos ter situações propostas no livro que podem levar ao aluno a perceber a média como ponto de equilíbrio (propriedade 3, nesta tese), como o valor que minimiza o quadrado dos desvios (propriedade 6). Assim é através das tarefas propostas nos livros que podemos criar situações, tendo em vista a ampliação do conceito de média.

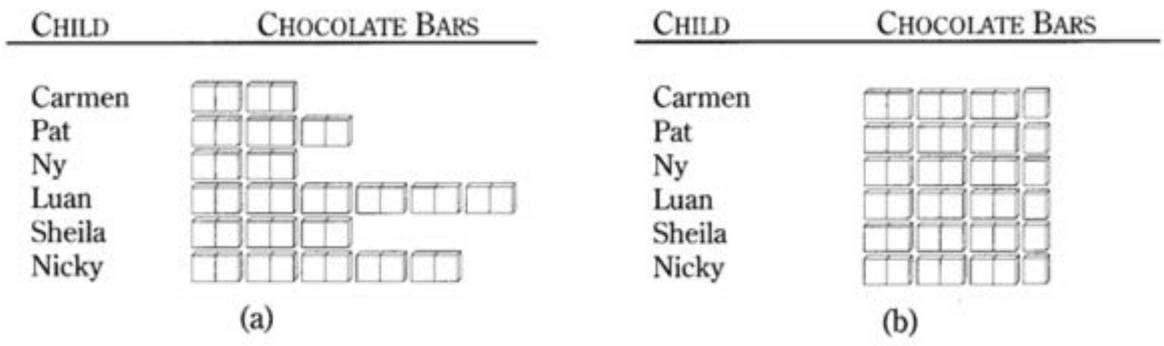
Apresentamos nesta tese duas propriedades da média:

- Propriedade 3: a média como ponto de equilíbrio;
- Propriedade 6: A média como conceito nivelador: representa o valor representativo de todas as observações levadas em consideração para o cálculo da média, se elas forem niveladas.

Para discutir estas duas formas de explorar o conceito de média, Uccellini (1996) apresenta uma descrição interessante. Inicialmente ele coloca que se perguntarmos a um aluno dos Estados Unidos no middle school (equivalente aos três últimos anos do ensino fundamental) o que representa a média de 2, 8, 4, 6 , 3 e 5, eles provavelmente dirão 5. Contudo, se questionarmos a estes mesmos estudantes o que representa 5 em relação a estes 6 números dados, eles normalmente se reportarão ao algoritmo do que a uma destas duas formas de abordar o conceito de média.

Um questionamento inicial que se pode fazer sobre a média como conceito nivelador, é como explorar este conceito se tivermos como resultado um número não inteiro. Uccellini (1996, p. 114, tradução nossa) apresenta um exemplo com barras de chocolate: “seis crianças contaram o número de barras de chocolates que ganharam na feira da escola. Elas ganharam 2, 3, 3, 6, 3 e 5 barras, respectivamente. Qual é a média de barras de chocolate que elas ganharam?”. A solução seria 3 ½. Usando para representar cada barra 2 cubos com uma união, os estudantes determinariam um meio para obter uma distribuição uniforme quebrando as três barras que sobraram ao meio e redistribuindo-as. Na letra a da figura 33, temos a situação inicial e na letra b a situação final com a distribuição uniforme.

Figura 33 – Distribuição uniforme das barras de chocolate para determinar a média.

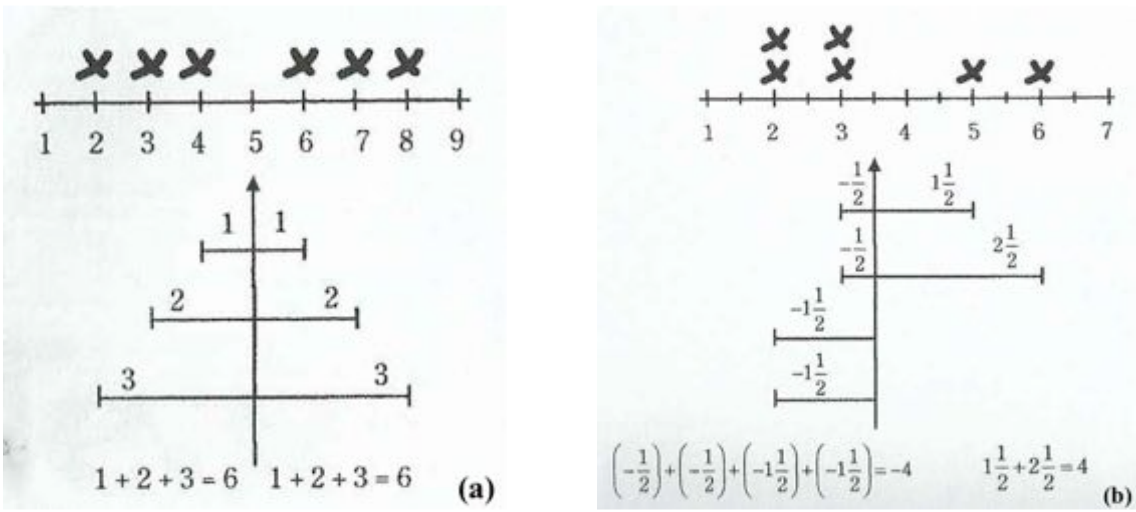


Fonte: Uccellini (1996, p.114)

Contudo, um problema que pode surgir é quando não se trata de objetos que podem ser fisicamente quebrados, como as pessoas. Uccellini (1996, p. 114, tradução nossa) propõe então a questão: “Perguntou-se a seis crianças qual o número de irmãos e irmãs eles tinham, e em seguida foram coletados os seguintes dados das crianças: 2, 1, 0, 3, 6, 1. Qual é o número médio de irmãos e irmãs destas crianças?”. Este autor propõe conduzir os estudantes a discutir as diferenças entre os dois problemas. No primeiro caso, objetos que podiam ser fisicamente divididos e no segundo caso os que não. Espera-se que eles percebam que 2 1/6 é a solução, mesmo que não se possa fisicamente dividir os irmãos. Esta forma de apresentar poderia levar a uma melhor compreensão da quinta questão apresentada por Cazorla (2002) em uma pesquisa realizada com alunos de graduação. Essa questão já foi tratada nessa tese anteriormente (ao tratar das pesquisas sobre as MTCD) e gerou um número de erros muito elevados e respostas que revelavam uma total falta de compreensão de que a média de variáveis discretas pode ser um número não inteiro.

Uccellini (1996) apresenta também uma forma de desenvolver o conceito de média como ponto de equilíbrio. Considerando uma linha graduada horizontal onde se marcaria através de x o valor das observações (figura 34) pelo valor da média, traça-se uma linha vertical. A soma dos valores à esquerda e à direita da média possuem a mesma medida. Na figura 34a, apresentamos a média de 2, 3, 4, 6, 7 e 8 que corresponde a 5. Na figura 34b, apresentamos a média do exemplo da barra de chocolate determinada em função dos valores 2, 3, 2, 6, 3 e 5. Além de explorar a propriedade da média como ponto de equilíbrio (propriedade 3), nesta questão pode-se explorar a propriedade 4 (a média como o valor que está mais próximo de todos os valores).

Figura 34 – A média como ponto de equilíbrio.



Fonte: Uccellini (1996, p.115)

Este dois exemplos indicam soluções no ensino da média que poderiam auxiliar na resolução de problemas detectados por pesquisadores sobre a aprendizagem da média, como exemplificamos através da pesquisa de Cazorla (2002) com alunos universitários e como foi observado por Uccellini (1996) em estudantes da educação básica nos Estados Unidos. Como os livros didáticos exploram o ensino do conceito de média? Eles procuram apresentar um ensino baseado no desenvolvimento do conceito ou não? Caso contrário, poderíamos chegar a conclusão de que os alunos apresentam deficiências na aprendizagem destes conceitos, em parte, porque os livros apresentam-nos de forma limitada. O que seria um obstáculo de origem didática trazida pelo livro didático.

Ao apresentar uma questão, o livro didático pode enfatizar mais o procedimento de resolução do problema, se o aluno emprega corretamente a técnica, se obtêm a média aritmética, se ele aprendeu o que é média. Assim teríamos uma questão do tipo: calcule a média, o aluno deveria para resolver este problema, utilizar as técnicas adequadas que se apoiam por sua vez em tecnologias e estas em teorias (se adotarmos os termos da TAD, já explicitados). Então se o aluno desenvolveu corretamente a questão e ele obteve a média ele está indo bem. Se pensarmos do ponto de vista do conceito, teríamos que observar as situações que dão sentido ao conceito. Neste exemplo, desenvolvido por Uccellini (1996), as questões propostas estão em uma situação que visa a construção do conceito de média tendo em vistas algumas propriedades. Pensa-se também em como levar o aluno a superar certos obstáculos à aprendizagem, como perceber que pessoas (em função dos procedimentos de cálculo) podem ser representadas por números não inteiros. Dificuldade esta apresentada por alunos da graduação na Bahia (CAZORLA, 2002).

Destacamos, contudo, que não depende apenas do livro, ou ainda das situações propostas pelo professor, mas também da forma como cada aluno vai interiorizar estas situações. Do significado atribuído pelo aluno ao conceito. Apesar disso, consideramos que podemos, ainda que com estas limitações, analisar as tarefas propostas pelo livro e a forma como elas podem vir a contribuir com a ampliação do conceito das MTCD. A forma como elas podem aproximar o significado dado ao conceito pelo aluno, do significado aceito pelos estatísticos.

São nas situações que os alunos desenvolvem o conceito. Elas também servem para ampliar o conjunto de signos verbais e não verbais associados ao conceito. Ao tratar das medidas de tendência central e de dispersão, observamos diferentes formas de representar este conceito. O significante "efetivo" usado por Régnier (2007), Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008) tem o mesmo significado de frequência absoluta para Dodge (2007a). Assim significantes diferentes para o mesmo significado usado por autores diferentes. Já os significantes "frequência relativa" e "frequência absoluta" têm significados diferentes para Dodge. Apesar disso, em alguns trechos do seu livro, este autor apresenta o termo "frequência" sem fazer a distinção de que tipo de frequência ele está tratando. O que leva, nestes casos, a dúvidas do leitor sobre o significado atribuído pelo autor ao significante. Assim, consideramos relevante observar os significantes utilizados pelos autores nos livros didáticos e investigar se eles mudam de país para país (Brasil e França), de autor para autor e se existem significados diferentes para o mesmo significante, o que poderia gerar problemas na aprendizagem. Consideramos que possíveis divergências podem criar barreiras para o desenvolvimento desse conceito pelos alunos.

As questões aqui discutidas serão retomadas na segunda parte desta tese, na criação das categorias de análise, quando faremos uma relação entre os pontos destacados na teoria dos campos conceituais, já abordadas neste capítulo, e uma proposta de análise dos livros e programas apoiada nesta teoria.

No próximo capítulo, trataremos do ensino médio no Brasil e na França abordando os programas e os livros didáticos. Essa apresentação servirá para indicarmos as delimitações e justificativas das escolhas utilizadas na amostra definida nesta pesquisa. Trataremos de quais documentos oficiais no Brasil e na França abordam o ensino, dando ênfase ao ensino das medidas de tendência central e de dispersão.

6. O ENSINO MÉDIO NO BRASIL E NA FRANÇA

Para tratar do ensino médio, apresentaremos inicialmente uma breve introdução à educação básica e focaremos em seguida o ensino médio. Esta apresentação, ainda que sintética, visa introduzir alguns características gerais da educação nestes dois países, para em seguida destacar os elementos que foram selecionados para análise. Depois nos deteremos no programa francês e nos documentos oficiais do Brasil que delineiam alguns aspectos da forma como as medidas de tendência central e de dispersão deverão ser apresentadas no ensino médio no Brasil e na França.

6.1. A EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL

No Brasil alguns documentos oficiais tomam forma de lei e outros como orientações. Ao tratarmos da Educação Básica tomaremos como referências os documentos:

- A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB);
- O Plano Nacional da Educação (PNE);
- Os Parâmetros Curriculares Nacionais+Ensino Médio (PCN+EM)
- As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM)

O termo Educação Básica aparece na LDB e designa a educação no Brasil que vai da educação infantil ao ensino médio. Utilizaremos o mesmo termo para designar o equivalente na França. O artigo 23 da LDB (BRASIL, 2010, p.20) esclarece que a educação básica:

> [...] poderá organizar-se em séries anuais, períodos semestrais, ciclos, alternância regular de períodos de estudos, grupos não seriados, com base na idade, na competência e em outros critérios, ou por forma diversa de organização, sempre que o interesse do processo de aprendizagem assim o recomendar.

Dessa forma, não existe um critério único de divisão. Podendo, por exemplo, o ensino fundamental ser organizado em ciclo ou apenas em séries anuais.

6.1.1. LEI DE DIRETRIZES E BASES DA EDUCAÇÃO NACIONAL (LEI Nº 9.394, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1996)

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) foi criada em 20 de dezembro de 1996 sofrendo ajustes ao longo do tempo. O parágrafo 2º do art. 4º sofreu mudanças na redação pela lei n. 12061 de 2009. Nele, o ensino médio que teria progressiva gratuidade, passar a ser universal e gratuito.

O artigo 24 da LDB estabelece uma carga horária da Educação Básica de no mínimo 800 horas. Este artigo também estabelece o mínimo de 200 dias letivos.

No que diz respeito ao currículo, o Art. 26 da LDB trata dos currículos do ensino fundamental e médio e esclarece que eles devem "[...] ter uma base nacional comum, a ser completada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela" (BRASIL, 2010, p.23). No parágrafo primeiro, esclarece-se que esta base comum deve incluir, entre outras coisas, o estudo de língua portuguesa e matemática. Essas indicações reforçam o papel dos documentos nacionais nas orientações curriculares para as escolas. Quanto ao papel do ensino médio, esse documento destaca a preparação para estudos posteriores, para o trabalho, desenvolver autonomia na aprendizagem, o desenvolvimento como pessoa humana e o conhecimento dos "fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos" (p. 29). Quanto à duração do ensino médio, ele deve ter no mínimo 3 anos (art. 35). O artigo 36 trata do currículo, mas não trata especificamente de Matemática, mas traz orientações que norteiam o papel das disciplinas no sentido de favorecer "a educação tecnológica básica, a compreensão do significado das Ciências, das Letras e das Artes; o processo histórico de transformação da sociedade e da cultura" destacando ainda o exercício da cidadania (inciso 1º do art.36). Destacamos que dentro dessas orientações, a educação estatística tem um papel relevante, tanto no exercício da cidadania como na educação tecnológica. Apesar disso, são orientações muito gerais que não permitem uma análise da organização matemática das medidas de tendência central e de dispersão, como também da organização didática proposta por Chevallard (1999).

A LDB divide a educação básica em educação infantil, ensino fundamental e ensino médio. A educação infantil é tratada pelo artigo 29. Este artigo estabelece que a educação infantil pode ser realizada em creches ou equivalentes para crianças de até 3 anos e pré-escolas para crianças entre 4 e 6 anos. O ensino fundamental (artigo 32) deve ser iniciado aos

6 anos. O tempo de duração do ensino fundamental foi ampliado da redação inicial da LDB de 8 para 9 anos (Lei n. 11.274, de 2006).

Quando trata de uma maneira geral no ensino médio, o Art. 35 estabelece o mínimo de 3 anos. A LDB organiza o ensino médio em algumas categorias:

- Ensino médio
- Educação profissional técnica de nível médio – pode ser realizada junto com o ensino médio ou após a sua conclusão e voltada para o exercício de profissões técnicas de nível médio técnico (seção IV-A e capítulo III da LDB).
- Educação de jovens e adultos (EJA) – constitui outra modalidade do ensino fundamental e médio com características próprias e duração diferenciada para aqueles que não puderam fazer o estudo na idade regular (seção 5 da LDB).
- Educação profissional e tecnológica – abrange diversos níveis: formação inicial e continuada ou qualificação profissional; profissional de nível médio, educação profissional tecnológica de graduação e pós-graduação.

A nossa pesquisa se restringe ao ensino médio regular.

6.1.2. PNE – PLANO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

Apesar de antiga a ideia de um Plano Nacional de Educação[65], apenas em 1962[66] é criado o primeiro PNE. A ideia de um plano nacional de 10 anos aparece na LDB em 1996. E em 2000 é aprovado o Plano Nacional de Educação com duração prevista de 10 anos. Em maio de 2011 tramita no congresso nacional um projeto para um novo Plano Nacional de Educação em atendimento à LDB por mais 10 anos.

O projeto de lei do PNE de 2000-2010 (BRASIL, 2001, s.n.), observamos como diretrizes para o ensino médio:

> Preparando jovens e adultos para os desafios da modernidade, o ensino médio deverá permitir aquisição de competências relacionadas ao pleno exercício da cidadania e da inserção produtiva: auto-aprendizagem; percepção da dinâmica social e capacidade para nela intervir; compreensão dos processos produtivos; capacidade

[65] Segundo o PNE (BRASIL, 2001) já estava previsto no artigo 150, acrescentado à Constituição em 1934 que a União elaborasse um Plano Nacional de Educação.
[66] O PNE de 1962 sofreu uma revisão em 1965 e em 1966 (BRASIL, 2001).

> de observar, interpretar e tomar decisões; domínio de aptidões básicas de linguagens, comunicação, abstração; habilidades para incorporar valores éticos de solidariedade, cooperação e respeito às individualidades.

O PNE de 2011-2020 está em tramitação no Congresso Nacional e o projeto propõe 20 metas. Observamos que o PNE 2000-2010 como o 2011-2020 (em tramitação) não trata especificamente de um programa para o ensino médio, nem algo que possa ser utilizado dentro dos objetivos propostos por esta pesquisa.

6.1.3. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) respondem à demanda do Plano Decenal de Educação, em acordo com a constituição de 1988, que coloca a necessidade e obrigação do estado de “elaborar parâmetros claros no campo curricular capazes de orientar as ações educativas do ensino obrigatório” (BRASIL, 2000a, p.15). Os Parâmetros Curriculares são organizados com orientações de primeira à quarta série e orientações da quinta à oitava série (criado antes da mudança de 8 para 9 anos no ensino fundamental). Para o ensino médio temos os Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio (PCNEM). Este documento é composto de um volume geral com as bases legais (BRASIL 2000b) e de três volumes divididos por área. A matemática é contemplada no volume que trata das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL 2000c). Este documento foi aprofundado em um novo volume lançado em 2002: os Parâmetros Curriculares+Ensino Médio (BRASIL, 2002). Em nossa pesquisa, nos deteremos nesta versão mais recente e aprofundada dos Parâmetros Curriculares+Ensino Médio (PCN+EM), no volume que trata das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2002).

6.1.4. ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO

Em 2006 são lançadas as Orientações Curriculares para o ensino médio (OCEM). Este documento propõe aprofundar algumas questões apresentadas nos PCN+EM, como observamos nesse documento (BRASIL, 2006, p. 8):

> A demanda era pela retomada da discussão dos Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino médio, não só no sentido de aprofundar a compreensão sobre pontos que mereciam esclarecimentos, como também, de apontar e desenvolver indicativos que pudessem oferecer alternativas didático-pedagógicas para a organização do trabalho pedagógico, a fim de atender às necessidades e às expectativas das escolas e dos professores na estruturação do currículo para o ensino médio.

No caso da estatística, observamos um aprofundamento nas questões sobre a forma de ensiná-la que reflete uma tendência, mais atual, e que discutimos no capítulo sobre a didática da estatística. Dessa forma, este documento será utilizado nesta pesquisa na análise do programa brasileiro.

6.2. A EDUCAÇÃO BÁSICA NA FRANÇA

Na França, o Ministério da Educação Nacional (Ministère de l'Éducation Nationale) estabelece de forma detalhada o currículo de cada disciplina e fornece diretrizes para o ensino, sem obrigar os professores a adotarem um método específico. Cabe também ao Ministério da Educação Nacional fornecer o estatuto e o regulamento das escolas e a cota de funcionários. Ele também realiza exames e prêmios nacionais de qualificação e emite diplomas como o baccalauréau (EURYDIC, 2009).

Para facilitar a política e administração do Ministério da Educação Nacional, ele tem uma estrutura externa administrativa dividida em zonas administrativas (Académies). Estas zonas possibilitam a aplicação regional das políticas públicas. Elas são dirigidas por um reitor que atua em nome do Ministério da Educação Nacional. A França é dividida em 30 academias. Cada academia está associada a uma região[67], com exceção para as regiões de Île de France (que comporta Paris), Provence-Alpes-Costa e Ródano-Alpes. Estas academias também estão incluídas nos departamentos ultramarinos[68], embora estes não sejam regidos por um reitor, mas por um vice-reitor. Cada região na França é dividida em departamentos que possuem um responsável da educação nacional subordinados ao reitor da região administrativa. No nível dos estabelecimentos de ensino que são organizados segundo o nível de escolaridade em escolas primárias (écoles primaires), colégios (collèges), e liceus (lycées), temos a gerência dos diretores de escolas e chefes de estabelecimentos.

[67] A França possui 21 regiões na região continental, uma na Ilha de Córsega e quatro regiões fora da Europa.
[68] São as regiões que estão fora da Europa: Guiana Francesa, Guadalupe, Martinica e Reunião.

Na França, a maioria dos alunos estuda em escolas públicas gratuitas. Em número reduzido, as escolas privadas podem assinar um contrato com o estado em que este assume a responsabilidade pelos custos com professores e em alguns casos com os custos da instituição (EURYDIC, 2009).

A educação obrigatória na França[69] inicia-se aos 6 anos (Lei de 28 março de 1882), dos 13 aos 14 anos passa a ser obrigatório em 9 de agosto de 1936 e até os 16 anos a partir de 6 de janeiro de 1959. Embora não seja obrigatório em 2009, 11,6% das crianças de 2 anos e quase a totalidade das crianças de 3 a 5 anos estavam no maternal[70]. A escola maternal é dividida em Petite Section (pequena seção), Moyenne Section (média seção) e Grande Section (grande seção). Após a escola maternal, temos a escola elementar que corresponde aos anos iniciais do ensino fundamental no Brasil (primeiro ao quinto ano). Esta é dividida em: curso preparatório (equivale ao primeiro ano do ensino fundamental), curso elementar dividido em dois anos CE1 e CE2 (equivale ao segundo e terceiro ano do ensino fundamental). Depois temos o cours moyen (curso médio) dividido em curso médio 1 e 2 (CM2 e CM1). Este curso corresponde aos dois últimos anos da escola elementar que corresponde no Brasil ao quarto e quinto ano do ensino fundamental. Os quatro últimos anos do ensino fundamental na França são chamados de colégio (collège). O ensino médio na França é chamado de Lycée. Os documentos oficiais franceses são agrupados em quatro tipos:

- Boletim Oficial da Educação Nacional
- Jornal Oficial (JO)
- O código da educação
- O Jornal Oficial da União Europeia.

O Boletim Oficial do Ministério da Educação Nacional é usado para publicar textos regulamentares (decretos, portarias, circulares etc) tendo em vista implementar as medidas ministeriais.

O Jornal Oficial (JO) é diário e corresponde ao diário oficial. Ele publica leis, decretos, regulamentos, portarias, declarações oficiais, publicações legais, contratos públicos, declaração de criação de associações.

O código da educação trata dos textos regulamentares relativos aos princípios gerais da educação e da administração da educação. Na parte legislativa, ele trata dos grandes princípios da educação, da administração da educação, da organização do ensino escolar, dos

---

[69] Fonte: fonte: http://www.education.gouv.fr/cid162/les-grands-principes.html
[70] Fonte: http://www.education.gouv.fr/cid166/l-ecole-maternelle.html

estabelecimentos de ensino escolar, da via escolar, da via universitária e das pessoas da educação.

Em nossa pesquisa nos detemos no Boletim Oficial que apresenta o programa francês atual. Como será detalhado mais a frente, a nossa pesquisa centrou-se no ensino médio Geral, Série Científica. Dessa forma, o programa que foi analisado é desta série. Contudo, como o ensino médio tem um tronco comum no primeiro ano do ensino médio, o programa do primeiro ano analisado é o mesmo para a Série Literária e para Série Econômica e Social. O ensino médio Francês está passando por uma reforma e temos novos programas que foram implantados. Para o primeiro ano do ensino médio (seconde) do novo currículo, temos o B.O. n.30 de julho de 2009 que apresentou o novo programa de Matemática. Este programa foi atendido pelos livros didáticos de matemática e pelas escolas para o ano letivo 2010-2011. O novo programa de Matemática para o segundo ano do ensino médio (Classe première do cycle terminal) da série científica é apresentada no Boletim Oficial n. 9 de 30 de setembro de 2010. Este programa foi implantado no ano letivo 2011-2012 que se iniciou em setembro de 2011. O último ano do ensino médio da série científica (classe terminale do cycle terminal) continuou utilizando o programa antigo que foi apresentado no Boletim Oficial n.4 de 30 de agosto de 2001. O novo programa que entrou em vigor no ano letivo de 2012-2013 está disponível na página do Ministério da Educação Nacional da França, assim como uma parte do programa nos livros didáticos.

6.3. COMPARAÇÃO GERAL ENTRE OS DOIS SISTEMAS

No quadro 7, apresentamos uma comparação mais geral da Educação Básica no Brasil e na França. Observamos na Educação Básica da França a organização de ciclos. Nos PCN (BRASIL, 1998) observamos a divisão em ciclos no ensino fundamental. Na proposta atual do ensino fundamental de nove anos, não foi apresentada a divisão em ciclos. Dessa forma, não agrupamos quando apresentamos a organização no Brasil em ciclos. Alguns termos utilizados na França já foram utilizados no Brasil, como escola secundária, escola primária, liceu e maternal.

Quadro 7 – Comparação entre a Educação Básica no Brasil e na França.

<table>
<tr><td colspan="3">BRASIL</td><td colspan="4">FRANÇA</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">Ensino médio</td><td>3^{a} série</td><td>Terminale</td><td rowspan="2">Le cycle terminal</td><td rowspan="3">Lycée</td><td rowspan="7">Secondaire</td></tr>
<tr><td>2^{a} série</td><td>Première</td></tr>
<tr><td>1^{a} série</td><td>Seconde</td><td>Le cycle de détermination</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Ensino fundamental</td><td rowspan="4">Anos finais</td><td>9º ano</td><td>Troisième</td><td>Cycle d'orientation</td><td rowspan="4">Collège</td></tr>
<tr><td>8º ano</td><td>Quatrième</td><td rowspan="2">Cycle central</td></tr>
<tr><td>7º ano</td><td>Cinquième</td></tr>
<tr><td>6º ano</td><td>Sixième</td><td>Cycle d'adaptation</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Anos iniciais</td><td>5º ano</td><td>Cours moyen 2ème anne CM2</td><td rowspan="3">Cycle 3 : cycle des approfondissements</td><td colspan="2" rowspan="5">École élémentaire</td></tr>
<tr><td>4º ano</td><td>Cours moyen 1ère anne CM1</td></tr>
<tr><td>3º ano</td><td>Cours élémentaire 2ème anne CE2</td></tr>
<tr><td>2º ano</td><td>Cours élémentaire 1ère anne CE1</td><td rowspan="3">Cycle 2 : cycle des apprentissages fondamentaux</td></tr>
<tr><td>1º ano</td><td>Cours préparatoire CP</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Educação infantil</td><td colspan="2">Pré-escola</td><td>Grande section</td><td colspan="2" rowspan="3">École maternelle</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">Creche ou equivalente.</td><td>Moyenne section</td><td rowspan="2">Cycle 1 : cycle d'apprentissages premiers</td></tr>
<tr><td>Petite section</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
</table>

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

O ensino médio na França (Lycée) possui uma estrutura mais diversificada do que no Brasil. Por esta razão, apresentamos a seguir estas características e, em função destas, apresentaremos que “Lycée” pretendemos investigar nos livros didáticos e nos programas.

6.4. O ENSINO MÉDIO NA FRANÇA – (LYCÉE)

Atualmente, o ensino médio na França está passando por uma reforma que vem sendo implantada iniciando no ano escolar 2009-2010 para o primeiro ano do liceu, no ano escolar 2010-2011 para o segundo ano e no ano escolar 2011-2012 para o terceiro ano.

O último ano do ensino fundamental na França (Troisième) faz parte do ciclo de orientação. Neste ano, o aluno deve escolher entre duas vias a trilhar no ensino médio: a via profissional e a via tecnológica e geral.

6.4.1. A VIA PROFISSIONAL

Na via profissional, 40% a 60% do tempo são empregados nos ensinos tecnológico e profissional. No lugar de aulas em classe, estas são dadas em ateliês, em laboratórios ou em um canteiro de obras. As disciplinas mais gerais como francês, matemática, história, geografia, ciências e inglês também são vistas. O objetivo desta via é dar uma formação profissional para o ingresso direto no mercado de trabalho. Existem vários caminhos a seguir na via profissional, cada um prepara para realizar a prova de um baccalauréau profissional específico.

Alguns dos objetivos do lycée profissional na França são semelhantes aos observados no Brasil, em cursos técnicos de nível médio, oferecidos pelos Institutos Federais de Educação. Estes possibilitam concluir o ensino médio e ao mesmo tempo se capacitar para o mercado de trabalho através de um curso técnico-profissionalizante. Contudo, não impossibilita o aluno de tentar o vestibular para ingressar em uma universidade.

Entre os cursos oferecidos no liceu profissional, temos:

- Baccalauréat profissional: curso de três anos, dividido em 75 especialidades diferentes. Ele prioriza a inserção profissional.
- Certificado de aptidão profissional (C.A.P.): curso com dois anos, oferece cerca de 200 especialidades diferentes.
- Breves estudos profissionais (B.E.P.): tinha uma duração de dois anos. Com a reforma no liceu, os cursos oferecidos passaram a integrar o baccalauréat profissional. Quatro cursos de dois anos foram mantidos na entrada de 2009 (primeiro ano após a reforma):

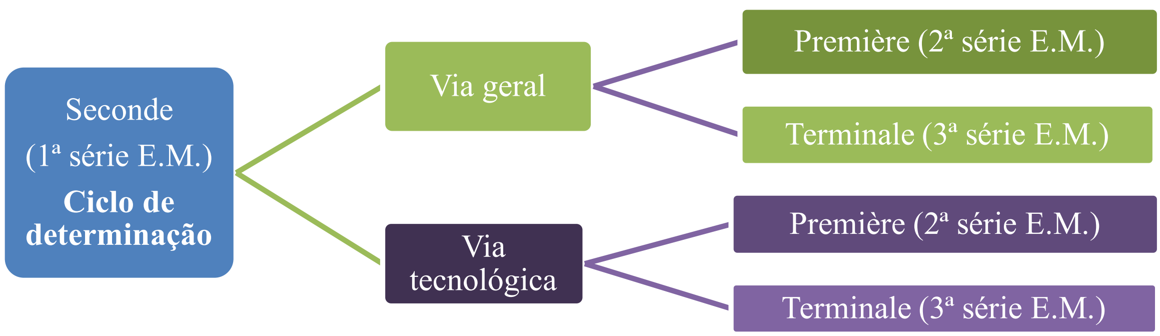
carreira sanitária e social; condução e serviço de transporte rodoviário; profissão de restauração e de hotelaria; oculista óptico.

Em função da profissão que se deseje seguir, deve-se procurar um liceu que ofereça o curso específico. Alguns liceus agrupam vários cursos relacionados a um tema, como o liceu do automóvel Émile Béjuit que fica na Região Rhône-Alpes e oferece vários cursos diferentes, como preparação para o C.A.P. de pintura de carroceria de automóveis, o BAC. Profissional em carroceria ou o post bac. Profissional de técnico em carroceria rápida. Além de outros cursos sobre outras especialidades ligadas a automóveis. Existem ainda os liceus de profissões (lycée des métiers) que oferecem uma formação variada e prepara o estudante para diversos diplomas profissionais.

6.4.2. VIA DE ENSINO GERAL E TECNOLÓGICA

Esta via possui um tronco comum, o primeiro ano do ensino médio (seconde), chamada de ciclo de determinação. Neste ano, o aluno deverá escolher entre a via geral e a via tecnológica (figura 35) e dentro da via qual percurso seguir.

Figura 35 – Via de ensino geral e tecnológica.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

6.4.2.1. Via tecnológica do lycée

A via tecnológica prepara o aluno aos estudos superiores tecnológicos em dois anos ou mais. Ele prepara o aluno para sete baccalauréat:

- Ciência e tecnologia industrial (S.T.I.). Esta série deve ser modificada pela nova série chamada STI2D que será organizada em quatro especialidades: inovação tecnológica e eco-design; sistema de informação e digital; energia e meio ambiente, arquitetura e construção;
- Ciência e tecnologia da gestão (S.T.G.);
- Ciência e tecnologia da saúde e social (S.T.2.S.);
- Ciência e tecnologia de laboratório (S.T.L.). Com a mudança no lycée, esta série comporá duas especialidades: biotecnologia e ciências aplicadas em laboratório;
- Técnica da música e da dança (T.M.D.);
- Hotelaria;
- Ciência e tecnologia da agronomia e da vida (STAV);
- Ciências e tecnologia do design e das artes aplicadas (STD2A). Antes, esta série fazia parte da STI.

6.4.2.2. via geral do lycée

A via geral do lycée prepara os alunos para o Baccalauréat[71] geral e consequentemente aos estudos superiores, principalmente para a universidade ou classe preparatória. A via geral do lycée é de dois anos e corresponde ao ciclo terminal formado pelas classes “terminale” e “seconde”. O ciclo terminal possui três séries, cada uma encaminha a um baccalauréat específico.

Série Econômica e Social (E.S.)

Esta série tem como especialidades: as Ciências Sociais e Políticas, a Matemática, a Economia Aprofundada (antes da reforma do lycée tínhamos como especialidades as Ciências Econômicas e Sociais, Matemática e Línguas Vivas). No segundo ano do ensino médio, a

[71] O Baccalauréat foi criado em 1808 e é um diploma que tem uma dupla particularidade: documentar o final do ensino médio e abrir o acesso ao ensino superior. O baccalauréaut é nacional e é o primeiro diploma de nível superior. Ele não tem um caráter provisório como um exame para entrar na Universidade. Como diploma ele é único para as áreas às quais se prestou. Tal como um diploma universitário, não faz sentido fazer novamente, como não faz sentido um engenheiro formado fazer novamente o curso de engenharia. Assim ele é para toda a vida e pode dar acesso a diferentes cursos nas áreas às quais ele foi prestado. Caso se queira mudar de área do curso, é que se faz necessário fazer um novo bacalauréaut ou outro diploma equivalente como o DAEU (Diplome d’accès aux études universitaires).

carga horária semanal de Matemática é de 3 horas e no último ano do ensino médio é de 4 horas (currículo antigo a ser mudado).

Série Literária (L)

Com esta série, o aluno tem como especialidade: as artes, artes do circo, língua e cultura da antiguidade (grego ou latim), linguagem viva 3, linguagem viva 1 ou 2 aprofundamento, matemática, direito e questões do mundo contemporâneo (antes da reforma tínhamos as letras clássicas, letras e línguas, letras e artes e letras e matemática). No segundo ano do ensino médio existe uma disciplina obrigatória para ser escolhida, que pode ser Matemática com carga horária de 3 horas ou outra disciplina de uma lista. No último ano do ensino médio a disciplina matemática é também opcional.

Série Científica (S)

Tem como especialidades: a matemática, físico-química, ciências da vida e da terra (SVT), informação e ciência digital (na grade anterior tínhamos matemática, físico-química, ciência da vida e da terra, ciência da engenharia). No segundo ano do ensino médio, a carga horária semanal de Matemática é de 4 horas. No último ano do ensino médio, a carga horária de Matemática é de 6 horas (currículo antigo a ser mudado).

6.4.3. COMPARANDO AS VIAS

Na tabela 37, temos os alunos inscritos no baccalauréat nos anos de 2010, 2011 e 2012 agrupados em baccalauréat geral, tecnológico e profissional. Em torno de 50% dos alunos concorreu nos três anos concorreram aos exames do baccalauréat geral, o que indica fortemente a preferência por esta via que melhor prepara para o curso superior e que se assemelha ao ensino médio no Brasil. Em segundo lugar, temos os candidatos aos diversos baccalauréat da via profissional e por último os candidatos à via profissional. Em relação aos candidatos inscritos no baccalauréat de 2010, observamos uma pequena mudança. A via geral apresentou uma redução de 53,22% para 50,18% (de 2010 para 2011) e para 47,57% (em 2012). A via tecnológica sofreu uma redução ao longo dos três anos levantados, passando do segundo para o terceiro lugar. A via profissional foi a que cresceu passando do terceiro lugar com 20,43% para o segundo lugar com 31,29%.

Tabela 37 – Candidatos ao baccalauréat de 2010, 2011 e 2012 agrupados nas vias geral, tecnológica e profissional.

	Candidatos inscritos no baccalauréat					
	2010		2011		2012	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%
Via geral	327.785	53,22	328.467	50,18	334.464	47,57
Via tecnológica	162.250	26,34	154.379	23,59	148.622	21,14
Via profissional	125.854	20,43	171.702	26,23	219.973	31,29
Total	615.889	100,00	654.548	100,00	703059	100,00

Fonte: Ministère de l'éducation nationale de la jeunesse et de la vie associative – France.
Disponível em: http://www.education.gouv.fr/cid56542/baccalaureat-2011.html#Les_chiffres clés du baccalauréat 2011.

Na tabela 38, apresentamos dados sobre os alunos inscritos no baccalauréat nos anos de 2010, 2011 e 2012 agrupados nas Séries Econômica e Social, Científica e Literária. A Série Científica permanece nos três anos como a mais procurada com mais de 50 % dos candidatos. A Série Econômica e Social fica em segundo lugar nos dois anos e a Série Literária é a que tem uma menor procura.

Tabela 38 – Candidatos inscritos nos baccalauréat de 2010, 2011 e 2012 agrupados nas séries científica, econômica e literária.

	Candidatos inscritos no baccalauréat					
	2010		2011		2012	
	Nº	%	Nº	%		
Série Científica	167.228	51,02	165.478	50,38	168.665	50,43
Série Econômica e Social	104.957	32,02	106.314	32,37	110.502	33,04
Série Literária	55.600	16,96	56.675	17,25	55.297	16,53
Total	327.785	100,00	328.467	100,00	334.464	100

Fonte: Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et de la vie associative – France.
Disponível em: http://www.education.gouv.fr/cid52071/baccalaureat-2010.html#Les modalités de l'examen des baccalauréats général et technologique> e <http://www.education.gouv.fr/cid56542/baccalaureat-2011.html#Les_chiffres clés du baccalauréat 2011>.

Em nosso estudo, vamos focar as escolas regulares no Brasil que correspondem à via geral. Dentro da via geral na Série Literária, a Matemática é opcional. Na Série Científica e na Série Econômica e Social, a Matemática é uma disciplina regular. A Série Científica possui uma carga horária maior de Matemática e é a mais procurada. Por essas razões optamos por analisar o programa (FRANCE, 1999, 2000, 2001, 2009a, 2010a) e os livros didáticos da Série Científica. O Ministério da Educação Nacional da França publica documentos suplementares chamados de “Ressources” (FRANCE, 2009b, 2012) que iremos utilizar para complementar a análise dos programas franceses.

CONCLUSÃO DA PRIMEIRA PARTE

Neste primeiro volume, apresentamos não apenas a fundamentação teórica, mas uma investigação para dar suporte a nossa pesquisa. Esta investigação permitiu observar diferenças entre as instituições de transposição de cada país, como também, mostrar que no processo de transposição didática para o programa e para o livro, o papel dos agentes e a influência destes mudam. Também neste primeiro volume, fizemos uma investigação longa sobre o saber científico, procurando muitas vezes desenvolver demonstrações ou se apoiar em demonstrações existentes, levantar propriedades apresentadas por pesquisadores conhecidos na área da estatística. Também apresentamos algumas pesquisas na área de educação sobre as medidas de tendência central e de dispersão, organizando estas pesquisas no sentido de levantar propriedades e observações que deveriam ser levadas em consideração, tendo em vista de serem supridas nos livros didáticos.

Além de tratar do fenômeno da transposição didática que nos apoiamos nesta pesquisa, apresentamos nesta parte duas teorias que tiveram um papel relevante em nossa investigação: a teoria antropológica do didático e a teoria dos campos conceituais. A teoria antropológica do didático acrescenta um aporte teórico importante para a análise da transposição didática e que vem a fundamentar as observações que fizemos no campo da transposição didática. Também utilizamos para análise, os níveis de codeterminação didática e as praxeologias. A apresentação desta teoria, nesta parte, servirá de base para a metodologia da construção e tratamento dos dados.

A teoria dos campos conceituais foi apresentada neste primeiro volume e dá suporte para a análise dos programas e livros. Esta teoria fornece um estrutura robusta que nos permite construir diversas ferramentas de análises no segundo volume desta tese. Quando pensamos nas situações que dão sentido ao conceito podemos também pensar que as técnicas utilizadas, as tecnologias e teorias podem fazer parte destas situações. Contudo, devido às particularidades de cada teoria, tratamos como aspectos diferentes de uma análise maior sobre as limitações nos programas e livros didáticos que norteiam a presente pesquisa.

Apresentamos no final deste volume uma breve exposição da estrutura da educação básica na França e no Brasil, suas diferenças e uma apresentação um pouco mais detalhada do ensino médio. Também tratamos das leis e programas nos dois países relativos à educação básica, especificando as diferenças de cada uma, as que tratam das MTCD e as que são orientações mais gerais como a LDB no Brasil. Assim, procuramos detalhar estas informações para servir de base para as escolhas realizadas na metodologia referentes aos programas e livros didáticos.

L'UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2

LYON France

École Doctorale ED485 EPIC [Éducation, Psychologie, Information et Communication] en Sciences de l'Éducation.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO – UFRPE

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PPGEC

Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade

Les concepts de mesures de tendance centrale et de dispersion dans la formation statistique en lycée au Brésil et en France. Approche exploratoire dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie des champs conceptuels

Os Conceitos de Medidas de Tendência Central e de Dispersão na Formação Estatística no Ensino Médio no Brasil e na França. Abordagem Exploratória no Quadro da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria dos Campos Conceituais

Volume II

Recife, 2013

Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade

Les concepts de mesures de tendance centrale et de dispersion dans la formation statistique en lycée au Brésil et en France. Approche exploratoire dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie des champs conceptuels

Os Conceitos de Medidas de Tendência Central e de Dispersão na Formação Estatística no Ensino Médio no Brasil e na França. Abordagem Exploratória no Quadro da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria dos Campos Conceituais

Volume II

Thèse en cotutelle dans le cadre des conditions requises pour l'obtention du titre de docteur en Sciences de l'Éducation à l'Université Lumière Lyon2

Tese em cotutela como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Ensino das Ciências pela Universidade Federal Rural de Pernambuco

Directeur de thèse (orientador) de l'Université Lumière/Lyon2:
Jean-Claude Régnier.

Orientadora (directrice de thèse) da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE): Anna Paula de Avelar Brito Lima

Recife, 2013

Ficha catalográfica

A553c Andrade, Vladimir Lira Veras Xavier de

Os conceitos de medidas de tendência central e de dispersão na formação estatística no ensino médio no Brasil e na França. Abordagem exploratória no quadro da teoria antropológica do didático e da teoria dos campos conceituais = Les concepts de mesures de tendance centrale et de dispersion dans la formation statistique en lycée au Brésil et en France. Approche exploratoire dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie des champs conceptuels / Vladimir Lira Veras Xavier de Andrade. – Recife, 2013.

2 v. (233; 315 f.) : il.

Orientadores: Anna Paula de Avelar Brito Lima e Jean-Claude Régnier.

. Tese em co-tutela (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Educação e L'Université Lumière Lyon 2 (Doutorado em Sciences de l'Éducation). Recife, 2013.

Referências.

1. Medidas de tendência central e de dispersão 2. Transposição didática 3. Teoria antropológica do didático 4. Teoria dos campos conceituais 5. Ensino médio I. Lima, Anna Paula de Avelar Brito, orientadora II. Régnier, Jean-Claude, orientador III. Título

CDD 507

LISTA DE FIGURAS DO VOLUME II

LISTA DE GRÁFICOS DO VOLUME II

LISTA DE QUADROS DO VOLUME II

LISTA DE TABELAS DO VOLUME II

LISTA DE FÓRMULAS DO VOLUME 2

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS DA TESE

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IASE	International Association for Statistical Education (Associação Internacional para a Educação Estatística).
INED	Institut national d'études démographiques (Instituto Nacional de Estudos Demográficos – França).
INSEE	Institut national de la statistique et des étude économiques (Instituto Nacional da Estatística e dos Estudos Econômicos - França)
ISI	International Statistical Institute (Instituto Estatístico Internacional)
LD	Livro Didático
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação (Brasil)
MEN	Ministère de l’éducation nationale (Ministério da Educação Nacional/França)
MTCD	Medidas de Tendência Central e de dispersão
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática)
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
OD	Organização didática
OM	Organização matemática
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PCN+EM	Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio
PNE	Plano Nacional de Educação
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PNLEM	Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SFdS	Société Française de Statistique (Sociedade Francesa de Estatística)
TAD	Teoria antropológica do didático
TCC	Teoria dos campos conceituais
TD	Transposição didática

SUMÁRIO DO VOLUME II

PARTE 2: PROBLEMÁTICA E METODOLOGIA DA CONSTRUÇÃO E TRATAMENTO DOS DADOS

Esta parte foi dividida em dois capítulos. No primeiro, tratamos da explicitação dos processos de construção da problemática, na qual retomamos às questões iniciais que envolvem os objetivos da pesquisa e as hipóteses. Nesta parte, tratamos de esclarecer como a primeira parte serviu como elemento de construção da problemática, de que forma esta apresenta em si alguns resultados decorrentes das análises feitas sobre os textos selecionados, atendendo às necessidades da pesquisa e servindo de elemento na construção e tratamento dos dados e como suporte para a terceira parte que trata da análise dos dados.

O segundo capítulo é dividido em duas seções. Na primeira, tratamos da metodologia utilizada na análise dos programas, como se constituiu a amostragem, os critérios utilizados, levando em consideração a problemática da pesquisa. Na segunda, abordamos a metodologia adotada na análise dos livros didáticos, o que inclui as unidades de análise, a forma como foi feita a seleção da amostra, os códigos usados, as categorizações e as limitações.

1. EXPLICITAÇÃO DOS PROCESSOS DE CONSTRUÇÃO DA PROBLEMÁTICA E DAS HIPÓTESES

Os problemas identificados na aprendizagem de algumas medidas de tendência central e de dispersão conduziram a esta pesquisa que considera que existe uma relação entre esses problemas e a forma como o saber é transposto para os programas e para os livros didáticos. Essa relação pode ser indicada pela ausência ou pouca exploração de praxeologias ou elementos que consideramos importantes no desenvolvimento do conceito das medidas de tendência central e de dispersão. Como as pesquisas levantadas não abrangem todos os temas investigados, com base no referencial teórico proposto e nos levantamentos que fizemos sobre as MTCD, propusemos diversas categorias de análises. Uma dessas é a comparação de um ou mais conjuntos de dados utilizando as MTCD. Esse tipo de atividade é fundamental na utilização dessas medidas e nas reflexões sobre as informações que elas podem nos dar sobre os dados. Nos resultados que seguem, observamos apenas 4 atividades que envolvem esse tipo de comparação de um total de 136 (em uma coleção do Brasil que selecionamos), focadas mais na determinação dessas medidas em um dos livros analisados. Consideramos assim, que essa coleção brasileira, nesse aspecto, possui "limitações". Dessa forma, se os professores e alunos se restringirem a essa exploração superficial das situações de comparação definidas por essa coleção brasileira, poderemos ter um desenvolvimento dos conceitos relativos às MTCD, no que diz respeito a esse aspecto com deficiências. Com base nessas questões de pesquisa, elaboramos a hipótese geral (apresentada na introdução desta tese):

H_G. Existem limitações na transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os programas e para livros didáticos de Matemática do ensino médio no Brasil e na França.

Com base nessa hipótese geral, propomos quatro hipóteses específicas na introdução do volume 1 que apresentamos a seguir:

H1. Existem limitações na transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os programas de Matemática brasileiros e franceses do ensino médio.

H2. Existem limitações na transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os livros didáticos de Matemática brasileiros e franceses do ensino médio.

H3. As limitações na transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os programas de Matemática brasileiros e franceses do ensino médio são de naturezas diferentes.

H4. As limitações na transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os livros didáticos de Matemática brasileiros e franceses do ensino médio são de naturezas diferentes.

A rejeição da hipótese H_3 não implica em rejeitar a hipótese H_1. Podemos ter limitações na transposição didática (H_1) e essas serem de mesma natureza (rejeição de H3). Contudo, a rejeição da hipótese H_1 (não existem limitações) implica na rejeição da hipótese $H_{3,}$ pois se não existem limitações não faz sentido em afirmar que estas são de natureza diferentes. O mesmo raciocínio é válido para as outras duas hipóteses. A rejeição da hipótese H_4 não implica em rejeitar a hipótese H_2. Contudo, a rejeição da hipótese H_2 implica na rejeição da hipótese H_4.

A confirmação de apenas uma das hipóteses H_1 e H_3 não implica na confirmação da primeira hipótese geral, uma vez que a hipótese geral trata tanto dos programas que são abordados na hipótese H_1, como do livro didático, tratado na hipótese H_3. A confirmação das duas hipóteses específicas (H_1 e H_3) implica na aceitação da hipótese geral.

Consideramos que podemos investigar essas limitações que podem estar associadas às dificuldades dos alunos na aprendizagem das medidas de tendência central, observadas como outras carências ainda não investigadas que envolvem as de dispersão. Não fomos investigar a sala de aula, assim não podemos analisar os seus efeitos, mas considerando que o livro didático é uma ferramenta muito usada pelos professores na construção das suas aulas, como também é utilizado pelos alunos no estudo das disciplinas escolares, podendo existir relação entre estas dificuldades e possíveis carências nos programas e livros didáticos.

Um outro aspecto que observamos ao tratar da exploração do saber científico estatístico é que os autores dos livros/artigos científicos que tratam desse saber apresentam divergências. Por exemplo, o conceito de histograma apresentado por muitos livros didáticos, conforme Régnier (1998b) não é adequado. Um outro exemplo entre os levantados é o significante “frequência” que apresenta significados diferentes em função do pesquisador da estatística que o utiliza, conforme apresentado no capítulo 2 do volume 1. Logo, podemos ter diferenças entre os significados e significantes de uma instituição para outra. Essas observações vão confirmar que na TAD um saber é de uma instituição. Portanto, não podemos ter transposição de saberes, mas transposição de saberes pertencentes a determinadas instituições. Essas instituições podem ser uma entidade como a Sociedade Francesa de Estatística (SFdS), como também um pesquisador conhecido como Maurice George Kendall. Existem alguns saberes que são compartilhados por algumas instituições e não por outras. No processo de transposição didática, os atores da noosfera mudam de país para país, como também o peso destes. Existem também influências de mudanças realizadas em outros países sobre os responsáveis pela transposição didática dos programas e livros didáticos. Observamos que existem diferenças nas instituições da noosfera que influenciam os programas e os livros didáticos. No Brasil, por exemplo, temos o PNLD que não existe na França.

Para responder a essas hipóteses, organizamos a nossa análise sobre dois tipos de documentos: os livros didáticos e os programas.

Para análise dos programas foram levantados:

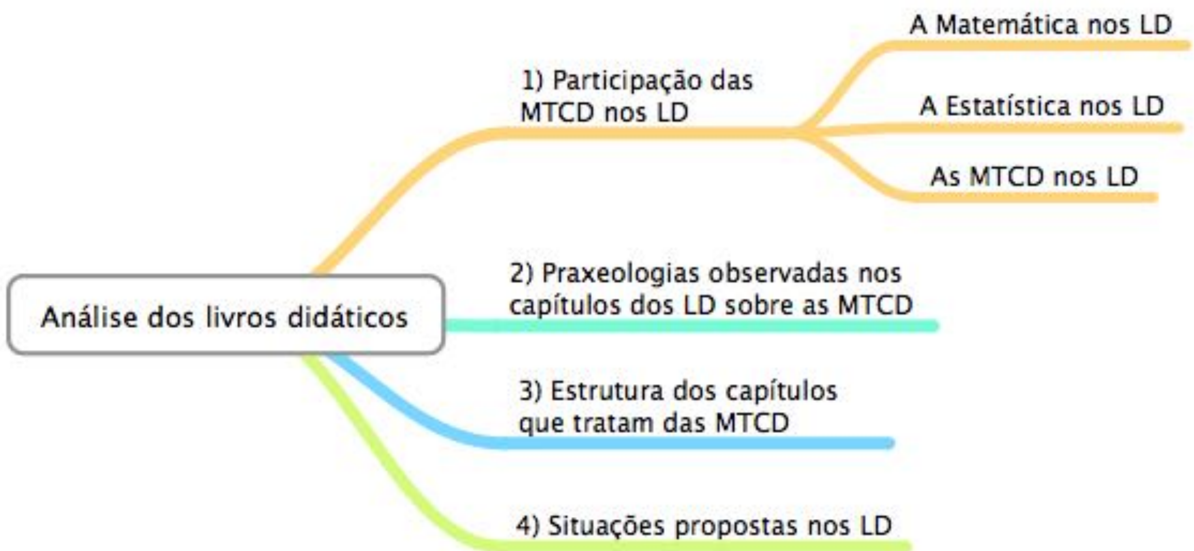
- Os elementos praxeológicos sobre as MTCD (tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias);
- Os níveis de codeterminação;
- As medidas de tendência central incluídas;
- As medidas de dispersão apresentadas;
- As ferramentas[1] e conceitos associados às medidas de tendência central e de dispersão;
- As situações propostas nos programas relativas às medidas de tendência central e de dispersão.

[1] Por exemplo, ao tratar do uso de ferramentas tecnológicas, como softwares e calculadora, o programa associa esses às MTCD.

Os dois primeiros elementos tomam como suporte teórico a TAD. Explicitamos esses elementos do ponto de vista teórico, em um capítulo sobre a TAD no primeiro volume desta tese. No terceiro item, consideramos que a ausência de uma medida de tendência central ou dispersão pode repercutir no livro, como também nas situações e praxeologias que deixaram de ser analisadas. Para os dois últimos itens, nos apoiamos na teoria dos campos conceituais para a justificativa dos mesmos.

Para análise dos livros didáticos, temos na figura 36 os quatro principais eixos.

Figura 36 – Análise dos livros didáticos: quatro principais eixos de análises.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

O primeiro eixo de análise visava observar qual era a participação das medidas de tendência central e de dispersão em relação à Estatística e a participação da Estatística em relação aos outros domínios da Matemática nos livros selecionados. Com essa análise, podemos observar a participação em número de páginas da Estatística em relação aos outros domínios, como também quais anos do ensino médio no Brasil e na França ela é abordada. Em relação às medidas de tendência central e de dispersão, procuramos observar quais os anos do ensino médio ela é apresentada no Brasil e na França e sua participação em cada coleção em termos de páginas.

O segundo eixo de análise (figura 36) envolve as praxeologias também incluídas na análise dos programas. Abordamos no primeiro volume desta tese as praxeologias, ao tratar da TAD. Ela permite observar diferenças entre as formas de lidar com este saber em termos de tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Podemos ter um livro didático que apresenta uma riqueza de praxeologias, o que pode vir a contribuir para ampliar a aprendizagem das medidas de tendência central e de dispersão por parte dos alunos que utilizam este livro nas suas aulas. Por outro lado, as limitações praxeológicas de um livro didático podem implicar, caso o professor se limite ao uso deste, em restrições nos conhecimentos a serem ensinados. Consideramos também que os programas podem definir alguns elementos praxeológicos a serem utilizados. Isto foi investigado nesta pesquisa. Para isso, foi necessário uma modelização das organizações praxeológicas[2] sobre as medidas de tendência central e de dispersão. Dificuldades em problemas que envolvem, determinar uma MTCD, podem estar associados às restrições das praxeologias apresentadas nos livros didáticos. Retomando as hipóteses, podemos ter limitações nas diferentes praxeologias, tanto no programa como nos livros didáticos analisados, referente a cada uma das MTCD. Estas podem ser de várias naturezas:

- A ausência do tema de estudo;
- A escassez de praxeologias;
- A concentração das atividades em poucas praxeologias, sendo pouco exploradas as demais.

No terceiro e quatro eixo de análise (figura 36) temos como principal suporte teórico a teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1996). Observamos em Cazorla (2002) um grande número de problemas em relação à média aritmética em alunos universitários, entre estes, uma limitação no conceito de média. Em um pré-teste com 757 estudantes, a maioria das respostas (41,7%) se restringia a uma descrição do algoritmo. Observou-se também respostas inadequadas (14,7 %) ou sem respostas (30,4%). Essa descrição do algoritmo, estava distante do que a pesquisadora esperava como um conhecimento do conceito da média, pois deixava de abordar questões importantes relativas a esse conceito. Além disso, existe uma grande diferença entre a compreensão de um conceito e a aprendizagem de um algoritmo. Discutimos e exemplificamos isto no primeiro volume ao tratar da teoria dos campos conceituais. Também nas pesquisas foram observados erros dos alunos a certos tipos de problemas. Nos apoiamos em Vergnaud (2012) ao considerar que as situações são o que dão sentido ao conceito, como também, os significados e significantes. Não podemos prever

---

[2] Observamos a necessidade da modelização das praxeologias para investigar as medidas de tendência central e de dispersão. Tomamos como referência a modelização realizada na pesquisa de doutorado de Araújo (2009), referente a equações do primeiro grau e fizemos as devidas adaptações e mudanças para se adequar as nossas necessidades de pesquisa.

os significantes e significados dos alunos associados às situações que se desenvolvem no ensino das MTCD, contudo se espera que estes se aproximem do que se pretende ensinar na escola.

As questões apresentadas sobre os campos conceituais e o conceito das medidas de tendência central e de dispersão (no capítulo 5 da parte 1 do primeiro volume) direcionaram algumas das categorias de análise feitas nesta pesquisa que serão tratadas no próximo capítulo. Apresentaremos a seguir os elementos de análise que se apoiaram na teoria dos campos conceituais para estruturá-la.

Elemento 1. As situações estão associadas aos significados e aos significantes. Este primeiro elemento induz a algumas questões:

- Ao abordar as medidas de tendência central e de dispersão quais os significantes e significados associados a essas medidas apresentadas nos livros didáticos?
- Existem divergências entre os significados e os significantes e o saber científico investigado?

Um dos elementos que indicamos na análise dos livros didáticos (figura 36) foi a análise da estrutura dos capítulos dos livros didáticos que abordam as MTCD. Nessa parte, foi analisado como estão estruturados os capítulos que tratam das MTCD e como estas medidas são abordadas (item 2.2.3 do próximo capítulo). Nessa análise, também procuramos observar como o autor do livro aborda as medidas de tendência central e de dispersão e possíveis divergências com o saber científico. Também procuramos analisar no texto do programa que conceitos das medidas de tendência central e de dispersão são apresentados e que outros conceitos ou ferramentas são associadas a este.

Elemento 2. Um conceito não está isolado. Para compreender um conceito é necessário muitas vezes a compreensão de outros conceitos interligados. As MTCD são um conjunto de conceitos que também devem ser compreendidos de forma interligada. Isso no leva a dois elementos que foram analisados:

- Quais os conceitos associados às medidas de tendência central e de dispersão que são apresentados nos livros didáticos ao abordarmos as MTCD?

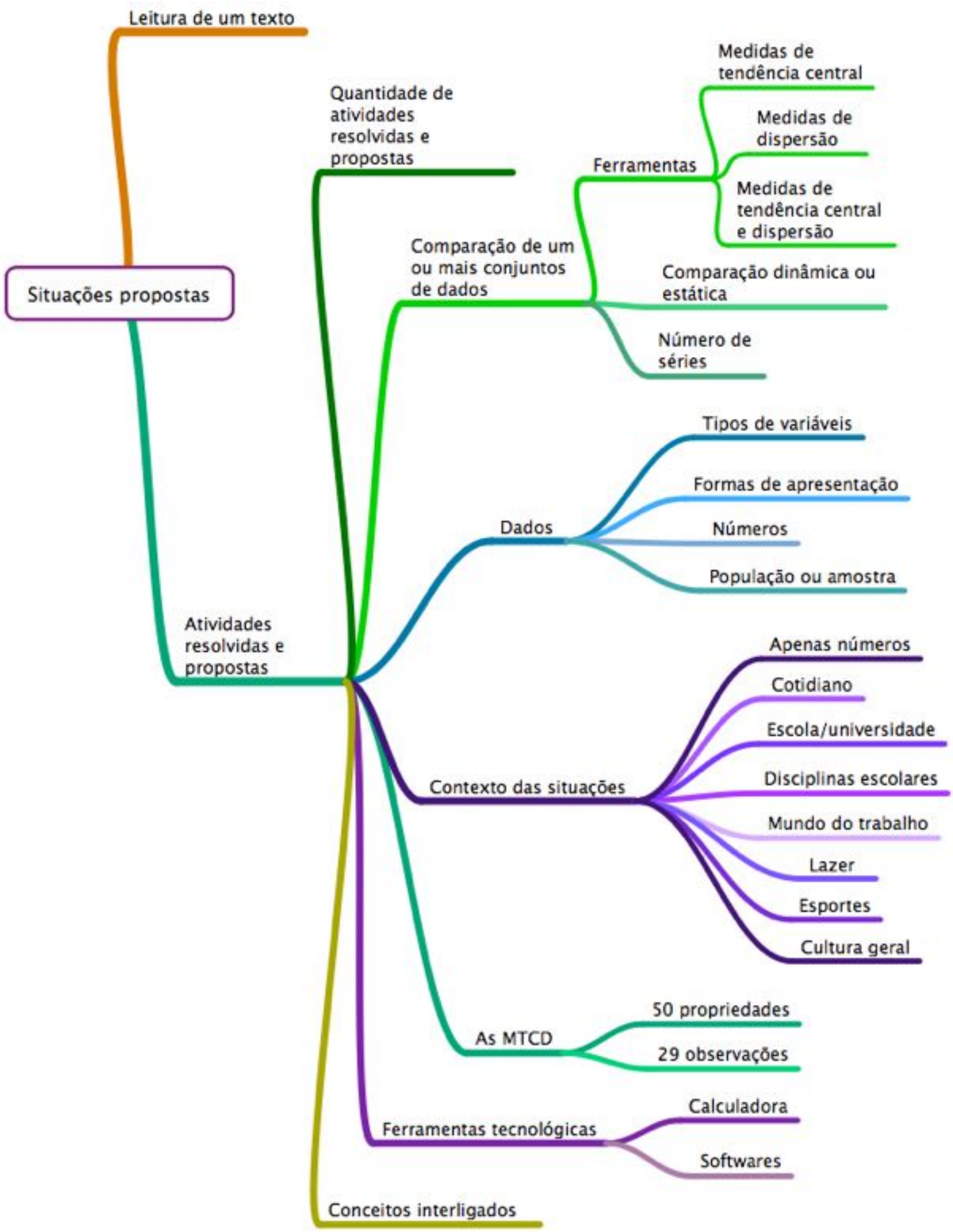
- Quais as medidas de tendência central e quais as medidas de dispersão são apresentadas nos programas e livros didáticos e como elas estão interligadas?

Existem outras questões que envolvem o segundo elemento:

- Os diversos conceitos das medidas de tendência central são apresentados isolados ou procurando relacioná-los? Por exemplo, se no livro didático foram exploradas em uma mesma situação, a média, a moda e a mediana, será que nessa situação há uma proposta de investigar qual será a mais adequada?
- Os diversos conceitos de dispersão são explorados de forma a compreender as ligações e diferenças entre eles?
- Ao tratar do conceito de medida de tendência central, se procura relacionar este conceito com o de dispersão?

Essas questões demandam uma análise que foi feita utilizando mais de uma categoria. Na observação das atividades resolvidas e propostas nos livros didáticos, apresentamos uma categoria específica para esse tipo de análise na qual consideramos as medidas de tendência central e de dispersão como ferramentas utilizadas na comparação (figura 37). Também consideramos esse aspecto no eixo 3, estrutura dos capítulos que tratam das MTCD. Por último, procuramos analisar essas relações no eixo quatro, abordando em um item específico observar os conceitos associados às medidas de tendência central e dispersão.

Figura 37 – Análise das situações propostas nos livros didáticos.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Outro aspecto da construção dos conceitos destacado por Vergnaud (1990) são as situações. Essas podem se apresentar no livro como um problema proposto para o aluno resolver, como um texto sobre o conceito que demanda a leitura do mesmo e uma reflexão sobre os elementos descritos no texto. Neste processo, são necessários os conhecimentos dos alunos construídos com base em outras situações que demandam o acionamento de esquemas. Sobre essas situações que constitui o quarto eixo de análise (figura 36), apresentamos três itens de investigação que indicamos no elemento 3.

Elemento 3. Quais os tipos de situações apresentadas pelos livros didáticos selecionados? São situações:

- Apresentadas em um texto (que requerem a leitura e o acionamento de esquemas que possibilitem a compreensão tanto do aluno como do professor)?
- Em um problema resolvido que demanda ao aluno uma reflexão sobre as estratégias que foram utilizadas na resolução e a sua pertinência?
- Apresentadas por meio de problemas propostos para resolução?

Assim, esses elementos constituem as seguintes unidades de análise: leitura de um texto, questões resolvidas e propostas indicadas na figura 37.

Um dos itens da figura 37 é a leitura de um texto, descrito no elemento 3 e que deve ser considerado nas situações de contrução do conceito. Temos também na figura 37, as quantidades de atividades resolvidas e propostas. Essas, junto com o tipo de atividades resolvidas e propostas, podem nos dá informações sobre quais as mais exploradas e as pouco exploradas. Se essa ênfase muda de país para país e como isso pode influenciar na construção do conceito das medidas de tendência central e de dispersão.

Indicamos na figura 37 as atividades de comparação de um ou mais conjuntos de dados que nos remete ao quarto elemento considerado.

Elemento 4: As atividades nas quais o aluno precisa comparar uma mesma série, duas ou mais séries podem levar o aluno a compreender as MTCD como instrumentos de análise dos mesmos dados ou de diferentes dados. Existem diferentes tipos de comparações que podem ser realizadas. Apresentamos a seguir as propostas em nossa pesquisa:

Comparação 1. Comparação focada nas informações fornecidas pelas MTCD. Podemos assim elaborar comparações de duas séries:

- Usando diferentes medidas de tendência central

  - Apenas comparação;
  - Comparação procurando observar qual é a mais eficiente em função das suas características.
- Usando diferentes medidas de dispersão
  - Apenas comparação;
  - Comparação procurando observar qual é a mais eficiente em função das suas características.
- Usando de forma articulada as medidas de tendência central e de dispersão
  - Apenas comparação;
  - Comparação procurando observar qual é a mais eficiente ou ainda quais as informações que cada uma pode fornecer para análise.

Isso foi analisado tanto nos programas, como no livro didático (figura 37).

Comparação 2. Levando em conta a temporalidade das séries. O que leva a uma comparação que pode ser evolutiva ou estática (COUTANSON, 2010).

- No caso de uma comparação evolutiva, comparação entre duas séries:
  - Dados do passado com dados do presente;
  - Dados do presente com dados do futuro;
  - Dados do passado com dados do futuro[3].
- No caso de uma análise estática, comparação de duas séries:
  - Dados do passado com dados do passado;
  - Dados do presente com dados do presente;
  - Dados do futuro com dados do futuro.

Comparação 3. Levando em conta o número de séries utilizadas na comparação. Podemo ter então:

- Uma série. Análise de uma série utilizando diferentes medidas de tendência central e/ou dispersão;
- Duas séries. Análise de duas séries, uma por exemplo, média com média) ou mais de uma medidas de tendência central e/ou dispersão;

---

[3] Por exemplo: com base no aumento acordado, apresentamos a tabela (1) com o salário dos professores para o próximo ano. Compare com o salário da categoria no final da década passada (tabela 2) utilizando como instrumento as medidas de tendência central e de dispersão. Justifique a escolha destas medidas.

- Três séries.
- Mais de três séries.

Outro aspecto considerado são os dados que foram apresentados nas situações resolvidas e propostas. Assim temos como quinto elemento de comparação os dados (indicado na figura 37).

Elemento 5: Os dados apresentados nas atividades resolvidas e propostas fazem parte dos diversos contextos que podem ampliar ou limitar as situações de construção do conceito das MTCD.

A existência do zero entre os dados foi investigado em pesquisas (apresentadas no primeiro volume), nas quais identificaram-se falhas no cálculo da média, quando entre as observações utilizadas nesse cálculo tínhamos uma ou mais observações cujo valor era zero. Existem outras variáveis cuja presença poderá levar o aluno a refletir sobre como utilizar as mesmas, que poderá conduzir a soluções inadequadas (como na presença do zero), como também a perceber as condições adequadas de uso, ampliando assim o conceito das MTCD. Assim, achamos pertinente avaliar diferentes aspectos quanto a apresentação dos dados. Isso foi investigado no item 'dados' (apresentado na figura 37) e será tratado dos aspectos metodológicos no próximo capítulo e foi abordado na análise dos dados. Dessa forma, levamos em consideração no item dados:

- **Tipos de variáveis**. Essas podem ser quantitativas (discretas ou contínuas) e qualitativas (ordinais ou nominais). O tipo de variável pode limitar o tipo de medida a ser utilizada. Por isso vamos levantar quais dos quatro tipos de variáveis são observadas nos livros didáticos e em que situações não podem ser utilizadas (por exemplo, as variáveis nominais não podem ser usadas com a média e a mediana);
- **Forma de apresentação dos dados.** Existem diferentes formas de apresentação dos dados como: apenas com números (ordenados ou não ordenados), em uma tabela (ordenados, agrupados etc), com o uso de diferentes gráficos entre outras;
- **Números**. Situações que envolvem números pertencentes a conjuntos numéricos diferentes ou não, mas que podem constituir obstáculos na resolução de problemas. Por exemplo, as observações podem se limitar a números pertencentes ao conjunto dos números naturais sem o zero ($\mathbb{N}^*$), os números naturais ($\mathbb{N}$) podem incluir frações, podem incluir números negativos etc. Assim como as dificuldades que citamos nas

pesquisas do cálculo da média com o zero, outras situações que envolvem números podem constituir obstáculos na resolução de uma atividade ou ampliar as situações que envolvem a exploração dessas medidas. O cálculo da média das horas perdidas em um engarrafamento envolve o conhecimento de um sistema de números de base 60, o que pode conduzir a erros na determinação de uma MTCD;

- **População ou amostra**. Situações de uso em que os dados são da população ou da amostra;

O sexto elemento levantado envolve o contexto.

Elemento 6. As situações propostas envolvem que tipo de contexto?

Procuramos investigar nos programas que tipos de contextos foram apresentados. Nos livros didáticos isso foi analisado no item contexto (trata do contexto das atividades resolvidas e propostas presentes nos livros). Esses contextos podem ampliar a construção do conceito e a percepção de uso. Por exemplo, podemos utilizar as medidas de dispersão para o controle da qualidade de uma máquina na indústria, observando os desvios em relação à média nas medidas produzidas. Esse contexto pode ampliar o conceito destas medidas. Por outro lado, o ensino das MTCD poderia se limitar a poucos contextos. Existem livros que privilegiam mais o treino ou repetições das técnicas (apenas com números) do que o estudo da sua aplicação em outros contextos. Consideramos relevante o contexto na construção do conceito (figura 37). Com base no que foi explicitado, levantamos os seguintes contextos:

- Do cotidiano do aluno;
- Da escola/universidade;
- De outras disciplinas escolares (História, Geografia, Matemática, Estatística etc);
- Do mundo do trabalho;
- Do lazer;
- Dos esportes;
- Envolvem conhecimentos culturais mais gerais;
- Números para serem manipulados, por exemplo, explorar uma determinada técnica.

No primeiro volume, ao abordarmos as medidas de tendência central e de dispersão (capítulo 2) e as pesquisas sobre essas medidas (capítulo 3), levantamos um total de 50 propriedades e 29 observações sobre as MTCD. Em algumas pesquisas sobre as medidas de tendência central, foram observados que os alunos tinham dificuldades para resolver algumas atividades que demandavam conhecimento ou aplicação de algumas dessas propriedades e observações. Assim, procuramos levantar no elemento 7 se os livros abordam estas propriedades ou observações levantadas.

Elemento 7. Das propriedades e observações que levantamos quais estão presentes nos livros didáticos ?

- Nas situações que envolvem as propriedades e observações referente às MTCD, podemos ter:
    1. Uma descrição;
    2. Uma demonstração;
    3. Apresentação dessa propriedade ou observação em uma atividade resolvida;
    4. Apresentação dessa propriedade ou observação na solução de uma atividade nas respostas do livro do aluno ou no livro do professor;
    5. A atividade pode levar a se pensar na propriedade ou observação.

Consideramos as situações que apresentam ou conduzem o aluno a certas observações sobre o conceito que devem ser levados em conta para uma boa compreensão desse conceito. Como exemplo, temos a observação n. 2 (sobre média aritmética, apresentada no primeiro volume): A média aritmética é um valor típico para uma série: uma série não pode ter várias médias aritméticas distintas, embora duas séries podem possuir a mesma média aritmética. Isso foi investigado no item propriedades e observações, presente no próximo capítulo e na análise dos dados. Apresentamos também na figura 37 as MTCD: propriedades e observações).

Outro elemento observado são as ferramentas tecnológicas que trataremos no elemento 8.

Elemento 8. Através das situações, o aluno pode ter uma melhor compreensão do conceito. Quais situações são propostas pelo livro didático que envolvem o uso de ferramentas tecnológicas atuais?

As ferramentas tecnológicas, como a calculadora e softwares, são indicados nos diversos currículos e servem como instrumentos de mediação. Elas são artefatos culturais resultantes do desenvolvimento tecnológico e servem como novas formas de interação e comunicação. Essas ferramentas tecnológicas podem ser utilizadas para fazer simulações em tempo real, podendo comunicar os efeitos nas mudanças de um conjunto de dados nas medidas de tendência central e nas medidas de dispersão, ampliando o nível de conceptualização. Por exemplo, pode-se simular a inclusão de valores extremos em um conjunto de dados para ver o efeito sobre a dispersão, a média, a mediana e o desvio interquartil. Pode-se modificar os dados de um distribuição moderadamente simétrica para dados com uma distribuição acentuada para esquerda ou direita e observar as mudanças nessas medidas. Podemos ter assim a instrumentalização (RABARDEL, 1995) que segundo Backes e Acioly-Régnier (2012, p.4, tradução nossa) “consiste na transformação do ser humano na medida na qual ele adapta-se, modifica-se, atualiza-se e cria novos esquemas mentais na utilização do instrumento”. Essas ferramentas podem também se limitar a apenas determinar as medidas ou ainda não serem utilizadas. Assim, foi investigado nesta tese a utilização ou não desses instrumentos. No caso de sua utilização, verificamos como eles foram empregados nas atividades resolvidas e propostas apresentadas nos livros didáticos. Também analisamos a sua apresentação nos programas (figura 37).

No próximo capítulo, tomando por base os elementos apresentados, abordaremos a construção e o tratamento dos dados.

2. CONSTRUÇÃO E TRATAMENTO DOS DADOS REQUERIDOS

Em função dos objetivos e das hipóteses da nossa pesquisa, analisamos tanto os programas que tratam do Ensino das Medidas de Tendência Central no Brasil e na França como algumas coleções de livros didáticos do Brasil e da França.

2.1. OS PROGRAMAS

No primeiro volume, tratamos do Ensino na França e no Brasil e dos documentos oficiais destes dois países. Na análise proposta, selecionamos os que tratam de descrever os elementos que devem ser considerados no ensino de estatística (dentro da matemática) no ensino médio no Brasil e na França (primeiro ano geral e segundo e terceiro ano da série científica). Apresentamos também no primeiro volume da tese, os critérios que nos levaram à escolha na França [4] da série científica. Outro aspecto considerado na escolha foi a temporalidade. O programa [5] sofre mudanças, logo procuramos analisar como era antes da implantação do programa em vigor e como é atualmente. No quadro 9, apresentamos os programas que tratam da Matemática no ensino médio nestes dois países. O atual e os anteriores considerando um intervalo de até no máximo 15 anos.

Dos programas apresentados no quadro 9, apenas não faremos uma análise do programa PCNEM de 2000, uma vez que não aborda as MTCD.

---

[4] Que tem os dois últimos anos do ensino médio geral dividido em três percursos.

[5] Na França se adota o termo programa. No Brasil se utilizava o termo parâmetros e atualmente orientações. Para simplificar a comparação chamamos de programas no Brasil e na França.

Quadro 9 – Programas e orientações para o ensino médio no Brasil e França.

País	Programa	Ano	Abrange	Observação
França	B.O de nº 5 de agosto de 1999.	1999	1º ano E.M	Apenas algumas alterações no programa anterior para implantação apenas no ano escolar 1999-2000). Válido por 1 ano.
	B.O de nº 6 de 12 de agosto de 1999. volume 2.	1999	1º ano E.M	Programa com duração de 10 anos, como o anterior. Implantado no ano escolar 2000-2001.
	B.O de nº 30 de 23 de julho de 2009.	2009	1º ano E.M	Programa atual. Implantado no ano escolar 2009-2010.
	B.O de nº 7 de 31 de agosto de 2000.	2000	2º ano E.M	Possuem dois documentos internos: pequena alteração no anterior para o ano de 2000-2001. Novo programa implantado no ano escolar 2001-2002.
	B.O de nº 9 de 30 de setembro de 2010.	2010	2º ano E.M	Programa atual implantado no ano escolar 2011-2012.
	B.O de nº 4 de 30 de agosto de 2001.	2001	3º ano E.M	Programa anterior. Não abrange a estatística descritiva. Como as MTCD não são abordadas, não analisaremos o mesmo.
	B.O de nº 8 de 13 de outubro de 2011.	2011	3º ano E.M	Programa atual implantado no ano de 2012-2013. As MTCD não são tratadas neste programa. Dessa forma não será analisado.
Brasil	Parâmetros Curriculares Nacionais.	2000	Todo E.M	Apresenta uma proposta geral para a matemática. As MTCD não são abordadas. Assim não será analisado.
	Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio.	2002	Todo E.M	Trata da estatística e das MTCD. Será analisado.
	Orientações Curriculares para o Ensino Médio	2006	Todo E.M	Trata da estatística e das MTCD. Será analisado.

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Procuramos analisar os programas com ênfase em alguns aspectos:

- Levantamento das medidas de tendência central que são apresentadas nos programas;
- Levantamento das medidas de dispersão que constam nos programas;
- Relações observadas entre essas medidas;

- Outros conceitos (como o conceito de somatório, de contexto etc) ou ferramentas (como as tecnológicas) que são associadas no programa às MTCD;
- As situações de utilização propostas para essas medidas;
- Elementos praxeológicos (TAD) sobre as MTCD (tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias);
- Os níveis de codeterminação (TAD) identificados nos programas;

Nas análises, procuramos fazer uma comparação do programas atuais com os anteriores, assim como comparar os do Brasil com os da França. Procuramos assim, observar se os elementos presentes nos programas podem auxiliar a elucidação da questão de pesquisa ou não. Na próxima seção trataremos dos livros didáticos.

2.2. OS LIVROS DIDÁTICOS

Para análise das MTCD nos livros didáticos, consideramos como pontos principais:

- Participação das medidas de tendência central e de dispersão nos livros didáticos;
- Análise da organização do capítulo que trata das medidas de tendência central e de dispersão nos livros selecionados;
- Levantar praxeologias relacionadas às medidas de tendência central e de dispersão e investigar a sua participação nos livros didáticos selecionados. ;
- Análise das situações presentes nos capítulos que abordam às medidas de tendência central e de dispersão.

Para realizar essas análises, o primeiro passo foi selecionar as coleções. Na primeira análise, selecionamos 7 coleções do Brasil e 7 da França. Nas outras três, em função do tempo e da diversidade de elementos utilizados na análise, selecionamos uma coleção de cada país.

Antes de iniciarmos a apresentação dos critérios de cada uma destas análises, apresentamos os critérios gerais de organização e codificação das coleções a ser apresentado na próxima seção.

2.2.1. CRITÉRIOS GERAIS DE ORGANIZAÇÃO E CODIFICAÇÃO DAS COLEÇÕES

Organizamos os critérios gerais em três partes. Na primeira parte, consideramos os critérios que foram considerados para seleção das coleções analisadas. Em seguida, tendo em vista as especificidades de cada país, apresentamos uma codificação das coleções e anos escolares. Por último, apresentamos a organização dos domínios que será utilizado na primeira análise, na qual apresentamos uma visão geral das coleções e comparações entre elas e os dois países selecionados para análise.

2.2.1.1. Critérios adotados para seleção das coleções do Brasil e da França

Na França, os livros didáticos devem seguir rigorosamente os programas que têm força de Lei. Os livros didáticos de Matemática para o ensino médio na França que tivemos acesso disponibilizam um extrato dos programas oficiais. O leitor ao comprar os livros com este extrato, poderá observar que os mesmos seguem o programa oficial. No Brasil, os programas não têm força de Lei, contudo, através do PNLD, podemos observar um cuidado com a qualidade dos livros. Este programa seleciona os LD, considerando-os com base em critérios de qualidade. Os livros não selecionados não podem ser adquiridos pelas escolas públicas. Dessa forma, tomamos como critério de seleção dos livros didáticos a serem analisados no Brasil, considerar aqueles que foram aprovados pelo PNLD.

Em 2012, o programa do PNLD para o ensino médio selecionou 7 coleções que foram utilizadas em nossas análises. Por outro lado, na França, consta na homepage do Ministério da Educação Nacional, 11 coleções de livros didáticos com versões digitais para o primeiro ano do ensino médio. Listamos em ordem alfabética, por editora, estas coleções no quadro 10.

Quadro 10 – Coleções do primeiro ano do ensino médio geral na França

Editora	Coleção	Editora	Coleção
Belin	Symboles	Hatier	Odyssée
Bordas	Indices	Nathan	Transmath
	Pixel		Hyperbole
Didier	Math’x		Antibi
Hachette	Déclic	Tangente	Não indica a coleção
	Repères		

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Para comparar com as 7 coleções selecionadas para análise do Brasil, selecionamos 7 coleções francesas. Dentre estas, 11 que foram apresentadas no quadro 10 como sugestões. O primeiro critério para seleção das 7 coleções foi escolher as coleções mais vendidas na França. Assim, obtivemos junto a um professor, a lista dos quatro livros de Matemática mais vendidos no último ano do ensino médio:

- Coleção Índice (20% das vendas)
- Coleção Repères (15,5% das vendas)
- Coleção Odyssée (12% das vendas)
- Coleção Déclic (7% das vendas)

Dessa forma, estas quatro coleções detêm 54,5% das vendas para esta série selecionada. As sete demais coleções possuem apenas 45,5% das vendas, o que dá uma média de 6,5% por coleção restante. Acrescentamos à lista das coleções, a Transmath, por ser uma das mais antigas. Para selecionar as duas coleções que totalizariam sete, observamos que três editoras não tinham sido contempladas: Belin, Didier e Tangente. A Tangente não tem nas páginas do Ministério Nacional da França nenhuma descrição da coleção. Também não encontramos livros desta editora em que levantamos as coleções e que era usada nos cursos de formação de professores. Assim, desconsideramos a coleção desta editora. A Didier e a Belin possuem apenas uma coleção citada na lista indicada. Assim, selecionamos a coleção da Didier e a da Belin completando sete coleções.

Um ponto importante é a criação de um código para cada coleção. O código permite, de forma rápida, uma identificação de que coleção estamos tratando. Os termos usados para designar o ensino médio e seus anos são diferentes, além, das características destes. Logo, consideramos pertinente uma denominação comum para estes anos, que também trataremos a seguir.

2.2.1.2. Codificação das coleções e anos escolares

No quadro 11, apresentamos as coleções selecionadas no Brasil e na França e o código que usamos para identificar estas coleções. A ordem de apresentação da coleção brasileira segue à ordem apresentada no PNLD 2012. Assim, a coleção C1 é a primeira coleção da lista do documento do PNLD (BRASIL, 2011). A ordem de apresentação das sete coleções francesas selecionadas segue inicialmente o primeiro critério de seleção para definir a ordem das quatro primeiras coleções (coleções mais vendidas) e depois um sorteio para definir a ordem das três outras coleções selecionadas. No início do código temos a indicação do país, Br para Brasil e Fr para França. Indicamos também a citação destas obras, que indicamos nas referências.

Quadro 11 – Codificação das coleções usadas no Brasil e na França

Brasil			**França**		
Cod.	Editora	Coleção	Cod.	Editora	Coleção
Br_C1	Moderna	Conexões com a matemática	Fr_C1	Bordas	Índice
Br_C2	Ática	Matemática: Contexto & aplicações	Fr_C2	Hachette	Déclic
Br_C3	Moderna	Matemática	Fr_C3	Hachette	Repères
Br_C4	Saraiva	Matemática: Ciências e aplicações	Fr_C4	Hatier	Odyssée
Br_C5	Scipione	Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia	Fr_C5	Nathan	Transmath
Br_C6	Saraiva	Matemática	Fr_C6	Belin	Symboles
Br_C7	FTD	Novo olhar – Matemática	Fr_C7	Didier	Math'x

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

A nossa análise dos livros didáticos será ao longo dos três anos do ensino médio. Existem diferenças entre o ensino médio na França e no Brasil, como esclarecemos no capítulo que tratamos da educação básica no Brasil e na França, assim como, a denominação dos anos também é diferente, logo resolvemos criar um critério único para comparação. No quadro 12, apresentamos o código criado e os termos usados no Brasil e na França.

Quadro 12 – Codificação dos anos do ensino médio no Brasil e na França.

Código	ensino médio no Brasil	Lycée
1º ano	1ª série	Second (Segundo geral)
2º ano	2ª série	1re Scientifique (Primeiro da série científica).
3º ano	3ª série	Terminale Scientifique (Classe final da série científica)

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

No terceiro ano das coleções francesas, o programa foi organizado pela maioria das editoras em dois volumes. O primeiro volume trata do que o programa chama de ensino específico e aborda entre outras coisas os três domínios da matemática. O segundo volume, com menor número de páginas, trata do ensino chamado de especialidade. O programa francês destaca, na especialidade, o papel da resolução de problemas e apresenta atividades de resolução em dois tópicos: 1. Aritmética; 2. Matrizes e sequências. Uma editora, a Hachette[6], apresenta no seu catálogo de venda de livros em papel, no lugar de dois volumes, um volume único com o conteúdo dos dois volumes e como segunda opção apenas o primeiro volume. Como para comparar o número de páginas precisamos de ter os dois volumes, tomamos como elemento de análise das duas coleções da Hachette este volume único.

No quadro 13, apresentamos as coleções francesas do terceiro ano indicando quais os volumes que constavam no catálogo de vendas no formato de livro em papel. Indicamos na tabela o termo “consta” para indicar que consta no catálogo de vendas. Estes catálogos refletem os volumes que tivemos acesso nas bibliotecas que pesquisamos.

Quadro 13 – Volumes de livros em papel do terceiro ano que constam nos catálogos das editoras.

			3º ano do ensino médio na França		
Cod.	Editora	Coleção	Volume único	Volume 1	Volume 2
Fr_C1	Bordas	Índice	--------	Consta	Consta
Fr_C2	Hachette	Déclic	Consta	Consta	--------
Fr_C3	Hachette	Repères	Consta	Consta	--------
Fr_C4	Hatier	Odyssée	--------	Consta	Consta
Fr_C5	Nathan	Transmath	--------	Consta	Consta
Fr_C6	Belin	Symboles	--------	Consta	Consta
Fr_C7	Didier	Math’x	--------	Consta	Consta

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

[6] Apenas a editora Hachette, nas suas duas coleções que selecionamos, adotou a proposta de um volume único. Na capa do volume único, consta a indicação que é vendido também, exclusivamente a parte do programa que trata do “ensino específico”, que corresponde ao volume 1, sozinho. Assim, a editora indica que não produziu para venda o volume 2. Faz parte da estratégia de venda da editora, para se diferenciar das outras, esta proposta. Essa estratégia oferece um preço melhor para o volume único do que se comprar os dois volumes separados, mas em contrapartida traz um livro mais pesado.

No quadro 14, apresentamos um código para indicar em cada coleção o livro tratado. O código indica o país (Br ou Fr), o número que indica a coleção (C1, C2...) e por último o ano que indica de qual volume da coleção estamos tratando (1A, 2A, 3A). Assim, na codificação das coleções francesas do terceiro ano, tomamos a indicação dos volumes em v1 para o primeiro volume e v2 para o segundo, e no caso da coleção única usamos vu para indicar volume único.

Quadro 14 – Codificação das coleções usadas no Brasil e na França por ano[7].

Brasil				**França**			
Coleção	1º ano	2º ano	3º ano	Coleção	1º ano	2º ano	3º ano
Br_C1	Br_C1.1^A	Br_C1.2^A	Br_C1.3^A	Fr_C1	Fr_C1.1^A	Fr_C1.2^A	Fr_C1.3^A.v1 Fr_C1.3^A.v2
Br_C2	Br_C2.1^A	Br_C2.2^A	Br_C2.3^A	Fr_C2	Fr_C2.1^A	Fr_C2.2^A	Fr_C2.3^{A}vu
Br_C3	Br_C3.1^A	Br_C3.2^A	Br_C3.3^A	Fr_C3	Fr_C3.1^A	Fr_C3.2^A	Fr_C3.3^{A}vu
Br_C4	Br_C4.1^A	Br_C4.2^A	Br_C4.3^A	Fr_C4	Fr_C4.1^A	Fr_C4.2^A	Fr_C4.3^A.v1 Fr_C4.3^A.v2
Br_C5	Br_C5.1^A	Br_C5.2^A	Br_C5.3^A	Fr_C5	Fr_C5.1^A	Fr_C5.2^A	Fr_C5.3^A.v1 Fr_C5.3^A.v2
Br_C6	Br_C6.1^A	Br_C6.2^A	Br_C6.3^A	Fr_C6	Fr_C6.1^A	Fr_C6.2^A	Fr_C6.3^A.v1 Fr_C6.3^A.v2
Br_C7	Br_C7.1^A	Br_C7.2^A	Br_C7.3^A	Fr_C7	Fr_C7.1^A	Fr_C7.2^A	Fr_C7.3^A.v1 Fr_C7.3^A.v2

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

[7] Referências: Br_C1.1A (BARROSO, 2010a), Br_C1.2A (BARROSO, 2010b), Br_C1.3A (BARROSO, 2010c), Br_C2.1A (DANTE, 2010a), Br_C2.2A (DANTE, 2010b), Br_C2.3A (DANTE, 2010c), Br_C3.1A (PAIVA, 2009a), Br_C3.2A (PAIVA, 2009b), Br_C3.3A (PAIVA, 2009c), Br_C4.1A (IEZZI et al., 2010a), Br_C4.2A (IEZZI et al., 2010b), Br_C4.3A (IEZZI et al., 2010c), Br_C5.1A (JACKSON, 2010a), Br_C5.2A (JACKSON, 2010b), Br_C5.3A (JACKSON, 2010c), Br_C6.1A (SMOLE; DINIZ, 2010a), Br_C6.2A (SMOLE; DINIZ, 2010b), Br_C6.3A (SMOLE; DINIZ, 2010c), Br_C7.1A (SOUZA, 2010a), Br_C7.2A (SOUZA, 2010b), Br_C7.3A (SOUZA, 2010c), Fr_C1.1A (GAUTHIER; PONCY, 2009a), Fr_C1.2A (PONCY; GUICHARD; RUSSIER, 2011a), Fr_C1.3A.V1 (PONCY; BONNAFET; RUSSIER, 2012a), Fr_C1.3A.V2 (PONCY; BONNAFET; RUSSIER, 2012b), Fr_C2.1A (BELTRAMONE et al., 2010), Fr_C2.2A (BELTRAMONE et al., 2011), Fr_C2.3A.Vu (BELTRAMONE et al., 2012), Fr_C3.1A (CHOQUER-RAOULT et al, 2010), Fr_C3.2A (CHOQUER-RAOULT et al, 2011), Fr_C3.3A.Vu (CHOQUER-RAOULT et al, 2012), Fr_C4.1A (SIGWARD, 2010), Fr_C4.2A (SIGWARD, 2011a), Fr_C4.3A.V1 (SIGWARD, 2011b), Fr_C4.3A.V2 (SIGWARD, 2012), Fr_C5.1A (BARRA, 2010), Fr_C5.2A (BARRA, 2011), Fr_C5.3A.V1 (BARRA, 2012a), Fr_C5.3A.V2 (BARRA, 2012b), Fr_C6.1A (DESCHAMPS, 2010), Fr_C6.2A (DESCHAMPS, 2011), Fr_C6.3A.V1 (DESCHAMPS, 2012a), Fr_C6.3A.V2 (DESCHAMPS, 2012b), Fr_C7.1A (CHESNÉ; YAOUANQ, 2010), Fr_C7.2A (CHESNÉ; YAOUANQ, 2011), Fr_C7.3A.V1 (CHESNÉ; YAOUANQ, 2012a), Fr_C7.3A.V2 (CHESNÉ; YAOUANQ, 2012b).

Além dos livros didáticos, um outro elemento utilizado na nossa análise foram as respostas dadas às questões propostas. Os livros selecionados para análise do Brasil e da França possuem uma estrutura diferente. No quadro 15 procuramos sintetizá-la.

Quadro 15 – Livro do aluno e do professor no Brasil e na França.

	Livro do aluno	Livro do professor
França	Livro com alguns exercícios resolvidos e com algumas respostas no final do livro.	Livro igual ao do aluno Livro em separado com a maioria das respostas das questões (não presentes no livro do aluno). Dimensões menores do que o do aluno, pois comportam basicamente as respostas. Apresentam algumas poucas informações complementares.
Brasil	Livro com alguns exercícios resolvidos.	Livro que unifica o do aluno e o do professor. Alguns possuem algumas das respostas na parte que corresponderia ao livro do aluno, usando uma variação no tipo e na cor da letra para indicar que não consta na versão que o aluno possui. Apresenta as respostas mais completas em uma parte chamada de guia do professor (ou outra denominação definida pela editora). Além das respostas, possuem outras orientações ao professor, bem mais completa do que os livros da França.

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Utilizamos o livro do professor para observar as respostas dadas e dessa forma poder classificar melhor as questões propostas, as técnicas utilizadas nas respostas e os conhecimentos que o autor do livro gostaria que o aluno mobilizasse. O acesso do professor a este livro pode induzi-lo a querer que o aluno adote determinada técnica ou resposta definida pelo autor do livro como a mais adequada. Nesta pesquisa não faremos uma análise do livro do professor.

Além do livro do professor, as editoras disponibilizam outros materiais em seus sites que não serão analisados.

Na próxima seção, apresentaremos como está organizada a matemática em termos de domínios como forma de comparar a estatística com os demais domínios.

2.2.1.3. Organização das grandes divisões propostas para Matemática no LD que incluem a Estatística e outros domínios

Para organizar os conteúdos em partes nos livros didáticos, para comparar a participação da estatística em relação aos outros domínios, tomamos como referência os programas do Brasil e da França.

Nos Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000c) não temos uma organização dos conteúdos em partes, no seu lugar, temos as características gerais da Matemática no ensino médio, as competências e habilidades a serem desenvolvidas e outros elementos relevantes.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio – PCN+EM (BRASIL, 2002) organizam os conteúdos de matemática em três grandes temas:

- Tema 1: Álgebra: números e funções
- Tema 2: Geometria e medidas
- Tema 3: Análise de dados

O programa mais recente, as Organizações Curriculares para o Ensino Médio – OCEM (BRASIL, 2006), organiza a matemática em torno de 4 blocos:

- Números e operações;
- Funções;
- Geometria;
- Análise de dados e probabilidade.

Para comparar com a organização proposta pelos dois programas brasileiros (que organiza a matemática em 3 temas e em 4 blocos) com o francês, em termos de participação da estatística, procuramos fazer uma junção levando em conta o programa francês que está agrupado em 3 partes para o primeiro ano: Funções, Geometria e Estatística e Probabilidade. No segundo e terceiro ano, o programa francês selecionado neste estudo, está organizado em 3 partes: Análise, Geometria e Estatística e Probabilidade. Procuramos agrupar, conforme o quadro 16, o assunto do ensino médio em 3 domínios[8], como forma de comparar a participação da estatística em relação aos outros domínios nos programas dos dois países

[8] Usamos o termo domínio usado por Chevallard (2002b) para organizar as grandes divisões da matemática encontradas nos programas.

Quadro 16 – Organização dos conteúdos do ensino médio no Brasil e na França.

<table>
<tr><td colspan="2">Programa brasileiro</td><td colspan="3">Programa francês</td><td rowspan="2">Domínios</td></tr>
<tr><td>(PCN+EM)</td><td>(OCEM)</td><td>1º ano</td><td>2º ano</td><td>3º ano</td></tr>
<tr><td>Números e operações</td><td rowspan="2">Álgebra: números e funções</td><td rowspan="2">Funções</td><td rowspan="2">Análise</td><td rowspan="2">Análise</td><td rowspan="2">Domínio 1.</td></tr>
<tr><td>Funções</td></tr>
<tr><td>Geometria</td><td>Geometria e medidas</td><td>Geometria</td><td>Geometria</td><td>Geometria</td><td>Domínio 2: Geometria</td></tr>
<tr><td>Análise de dados e probabilidade</td><td>Análise de dados</td><td>Estatística e probabilidade</td><td>Estatística e probabilidade</td><td>Estatística e probabilidade</td><td>Domínio 3: Estatística e probabilidade</td></tr>
</table>

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Alguns itens não entraram nesta comparação. No programa francês, além dessas partes, consta também o algoritmo (que é tratado nos livros em uma seção especial sobre este tema, descrevendo o que é o algoritmo e suas diversas situações de utilização), uso da calculadora (os livros apresentam algumas calculadoras e atividades envolvendo os temas dados com o uso da calculadora. São calculadoras que possibilitam representar gráficos em um pequeno monitor e trabalhar diversos temas), o uso de softwares (os livros analisados apresentam alguns softwares e atividades envolvendo o uso destes softwares), raciocínio e linguagem matemática. No terceiro ano, o programa francês acrescenta o ensino especializado que trata de resolução de problemas que envolve aritmética, matrizes e sequências. Não vamos aprofundar os outros domínios, nem tão pouco o de estatística e probabilidade. A nossa intenção é termos inicialmente uma visão geral da participação dos domínios nos programas.

Para organizar os livros em domínios e comparar a estatística com os demais, fizemos uma análise da organização de cada livro didático e depois agrupamos os conteúdos em torno dos domínios.

Na tabela 39, temos um exemplo de uma análise da organização realizada em cada livro. Depois selecionamos os capítulos dos livros e os organizamos por volume. Dessa forma, no cálculo do número de páginas do livro para comparar os domínios, os elementos que precedem os capítulos e após estes não foram considerados. Na tabela 39, por exemplo, o livro tem um total de 408 páginas, das quais 328 foram ocupadas com os capítulos do livro e 80 com outras partes do livro. Na tabela 40, como foi considerado apenas os capítulos para comparar os domínios, o número total de páginas é 328. Os domínios 1 e 2 foram agrupados pois existiam algumas divergências nos livros do Brasil e da França na forma de classificação.

Podemos observar neste livro que a estatística tem uma participação bem menor do que os outros domínios.

Tabela 39 – Organização da coleção Br_01, como apresentada no livro para o primeiro ano do ensino médio.

Unidade	Capítulo	Páginas		
		Inicial	Final	Total
	Folha de rosto	1	1	1
	Dados do livro/ficha catalográfica	2	2	1
	Apresentação da obra	3	3	1
	Sumário	4	5	2
	Esquema da unidade	6	7	2
1. Trabalho com a informação	Introdução à unidade	8	9	2
	1. Organização e apresentação de dados	10	35	26
2. Introdução ao estudo das funções	Introdução à unidade	36	37	2
	2. Conjuntos	38	67	30
	3. Funções	68	107	40
3. Funções polinomiais	Introdução à unidade	108	109	2
	4. Função afim	110	141	32
	5. Função quadrática e modular	142	197	56
4. Outras funções importantes e aplicações	Introdução à unidade	198	199	2
	6. Função exponencial	200	221	22
	7. Função logarítmica	222	251	20
	8. Sequências	252	285	34
5. Introdução à trigonometria	Introdução à unidade	286	287	2
	9. A semelhança e os triângulos	288	311	24
	10. Triângulo retângulo	312	335	24
	Questões de vestibular	336	350	15
	Questões do Enem	351	371	21
	Sugestões de leitura	372	373	2
	Respostas	374	406	33
	Listas de siglas	407	407	1
	Bibliografia	408	408	1
Total de páginas do livro				408

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Tabela 40 – Organização da coleção Br_01 para o primeiro ano do ensino médio segundo os domínios criados para comparar o Brasil com a França.

Domínio	Unidade	Páginas	
		Unidades	Blocos
Domínios 1 e 2	2. Introdução ao estudo das funções	72	300
	3. Funções polinomiais	90	
	4. Outras funções importantes e aplicações	88	
	5. Introdução à trigonometria	50	
Domínio 3: Estatística e probabilidade	1. Trabalho com a informação	28	28

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Procuramos assim, agrupar e comparar a estatística com os demais domínios. Na tese, apresentamos uma síntese destas que resumem estas informações.

Com base nas organizações observadas, apresentamos a seguir os critérios de análise geral da participação das Medidas de Tendência Central e de dispersão no livro didático.

2.2.2. CRITÉRIOS DE ANÁLISE DA VISÃO GERAL DAS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS.

A primeira parte desta pesquisa visa localizar a posição que é dada para as medidas de tendência central e de dispersão. Esta não é tratada de forma isolada, mas faz parte da estatística. Assim, consideramos importante observar qual a participação destas medidas dentro da Estatística e da Estatística dentro da Matemática. A Estatística tem uma posição importante ou é pouco valorizada em relação a outros temas? A Estatística é apresentada no ensino médio como parte da Matemática. Neste caso, a estatística tem uma participação menor em relação aos outros domínios da matemática ou não? Assim, consideramos importante ter uma visão geral da estatística em relação a outros domínios da matemática. A participação das medidas de tendência central e de dispersão se concentra em algum ano do ensino médio ou é visto de forma uniforme ao longo dos anos? Assim, teremos uma visão geral para depois aprofundar a nossa análise considerando os objetivos desta pesquisa.

Tendo em vista estes aspectos, organizamos esta análise nas seguintes partes:

- Comparação geral das coleções de livros didáticos de Matemática do Brasil e da França selecionados em termos de páginas;

- Participação da Estatística dentro do livro didático – comparação com os outros domínios;
- Participação das Medidas de Tendência Central e de dispersão dentro da Estatística nos livros didáticos no Brasil e na França.

Partindo de uma visão geral do livro, fomos aos poucos aprofundando a nossa análise. Na próxima etapa, procuraremos investigar como as MTCD foram apresentadas nos capítulos dos livros em que as mesmas são abordadas como objeto de estudo.

2.2.3. ESTRUTURA DOS CAPÍTULOS DOS LIVROS QUE TRATAM DAS MTCD

Para esta análise, selecionamos duas coleções em função dos limites temporais e materiais. Assim procuramos fazer uma análise mais detalhada, contudo com uma amostra menor. Como critério de seleção, escolhemos a coleção francesa mais utilizada. Para os livros do Brasil, selecionamos o primeiro da lista do PNLD. Assim foram selecionadas as coleções: Br_C1 e Fr_C1. As demais análises que seguem se limitam a estas duas coleções.

Nesta seção, procuramos fazer uma apresentação da estrutura de cada capítulo do livro que trata das MTCD. Qual a organização interna? Inicialmente para esta análise consideramos pertinente ter uma ideia do todo e depois discutir cada parte. A ordem de apresentação do livro pressupõe uma visão dos autores de como se deve ensinar as MTCD. Esta pode ter uma estrutura com ênfase no desenvolvimento das técnicas. Por outro lado, o livro didático pode apresentar uma estrutura baseada em questões que procuram levar o aluno a se apropriar de propriedades que definem o conceito, como exemplificamos ao tratar no primeiro volume da teoria dos campos conceituais. Podemos ter uma proposta no livro didático que privilegia o conhecimento predicativo em detrimento do conhecimento operatório (SAMURÇAY; VERGNAUD, 2012, tradução nossa). O livro pode apresentar uma estrutura mais tradicional baseada na memorização e na repetição do que na reflexão. Assim a estrutura de organização das partes foi considerada na nossa análise.

Analisamos também os problemas da transposição didática, ou seja, um conceito que não é adequadamente apresentado, divergindo do saber sábio o que conduz o aluno a se apropriar de forma inadequada do conhecimento. Em uma aula de francês que assistimos na França, observamos um erro conceitual em uma questão que envolvia a matemática. Este erro estava no livro didático adotado pela instituição. Mostramos à professora e ela disse que deveria ser engano, pois o livro não erra. A apresentação de falhas nas fórmulas (como observamos) e nos conceitos apresentados (que também identificamos) podem conduzir a construções inadequadas do saber pelo aluno que podem ser reforçadas pelo professor (para o caso deste considerar como valido o que está no livro didático)..

Assim nesta análise da estrutura, procuraremos fazer uma análise quantitativa, mas sobretudo qualitativa do livro didático. Sendo bastante pertinente esta análise, uma vez que queremos observar se o livro induz a erros, se cria uma estrutura, tendo em vista a construção do conceito e não um conhecimento baseado apenas no algoritmo, como apresentado por Cazorla (2002).

Na próxima seção, trataremos de outro elemento analisado no livro didático, as praxeologias.

2.2.4. MODELIZAÇÃO A PRIORI DE PRAXEOLOGIAS MATEMÁTICAS[9]

Tomando como referência o capítulo que tratamos da exploração do saber científico estatístico das MTCD e do capítulo sobre a TAD (ambos no primeiro volume desta tese), apresentamos uma "modelização" a priori das praxeologias matemáticas. Dentre as tarefas associadas às medidas de tendência central e de dispersão, temos as tarefas de determinação destas medidas. Este tipo de tarefa é muito frequente nos livros didáticos e indica um tipo de tarefa relevante. Assim, a nossa análise praxeológica foi feita em torno do gênero de tarefa "Determinar", construída em torno dos tipos de tarefas relativas à determinação das MTCD, o que constituem uma organização pontual. Limitamos nossa análise na maioria dos casos a apenas a este gênero de tarefa em função dos limites temporais e materiais.

Agrupamos diversos gêneros de tarefas que têm a mesma função. Assim, no livro, temos os gêneros de tarefa: obter a média, calcular a média, entre outros que têm a mesma função de determinar a média. A forma como as questões são apresentadas podem indicar que se trata de determinar a média. Assim podemos ter: Qual é o salário médio? E o consumo médio? Qual é a média? Para determinar a média. Qual é o salário mais frequente? Para determinar a moda[10]. Assim, diversas questões podem ser agrupadas no gênero de tarefa

---

[9] Tomamos como referência para a realização de uma modelização das praxeologias o trabalho de Araujo (2009).
[10] Exemplos tirados do livro Br_C1.3A.

determinar. Além da pergunta, a resposta no livro do professor indica claramente que o que se pretendia era determinar esta medida.

Esta modelização das praxeologias será utilizada nas análises dos livros didáticos. Listamos um exemplo dos símbolos utilizados em cada organização pontual sobre os tipos de tarefas nas quais serão determinadas as organizações praxeológicas investigadas nos livros didáticos:

- Tarefas de determinação de uma medida de tendência central;
    - Média aritmética (ao todo 6 organizações pontuais);
        - T_{m_01} – Tipo de tarefa sobre média aritmética 01;
        - $\boldsymbol{\tau_{m_{01-1}}}$ - Técnica 01 relativa ao tipo de tarefa 01- determinar a média aritmética;
        - $\boldsymbol{\tau_{m_{01-2}}}$ - Técnica 02 relativa ao tipo de tarefa 01 determinar a média aritmética;
        - $\boldsymbol{\theta}_m$ – Tecnologia sobre determinar a média aritmética;
        - Θ – Teoria estatística que envolve as MTCD;
        - $\boldsymbol{T_{mp\_01}}$ - Tipo de tarefa sobre média aritmética ponderada;
        - $\tau_{\mathrm{mp}_{01}\_1}$ - Técnica 01 relativa ao tipo de tarefa 01 - determinar a média aritmética ponderada;
        - $\boldsymbol{\theta}_{mp}$ – Tecnologia sobre determinar a média aritmética ponderada;
        - Θ – Teoria estatística que envolve as MTCD;
        - T_{md_01} – Tipo de tarefa sobre média aritmética ponderada 01;
    - T_{mc_01} – Tipo de tarefa 01 sobre determinar a média aritmética combinada;
    - T_{md_01} – Tipo de tarefa 01 sobre determinar a mediana;
    - T_{mo_01} – Tipo de tarefa 01 sobre determinar a moda;
- Tarefas de determinação de uma medida de dispersão;
    - T_{a_01} – Tipo de tarefa 01 sobre determinar a amplitude;
    - $T_{\sigma^2\_01}$ – Tipo de tarefa 01 sobre determinar a variância;
    - T_{σ_01} – Tipo de tarefa 01 sobre determinar o desvio padrão.
    - $T_{C.V\_01}$ – Tipo de tarefa 01 sobre determinar o coeficiente de variação.
    - $T_{[Q1;Q3]}$ – Tipo de tarefa 01 sobre determinar o intervalo interquartil.
    - $T_{\sigma^2\_01}$ – Tipo de tarefa 01 sobre determinar o desvio quartil ou a amplitude semi-interquartil.

Nas tarefas acima para identificar mais facilmente a tarefa utilizamos um índice. Assim temos, m para média, md para mediana etc. Apresentamos a seguir a nossa proposta de modelização, à priori destas organizações pontuais, em que criamos índices. Consideramos os tipos de tarefas bem definidos, contudo em alguns casos apresentamos exemplos de tarefas. Na modelização que segue foram indicadas em todos os tipos de tarefas, as técnicas. Fazemos uma explanação geral sobre as tecnologias e a teoria na organização praxeológica 1 sobre determinar a média aritmética. Para os demais casos, limitamos a apresentar a tecnologia ou teoria quando observada nos livros didáticos. Assim, por exemplo, ao tratar da organização praxeológica 3 sobre a média, apresentamos a tecnologia que identificamos no livro didático que justifica esta técnica. Não observamos nos livros didáticos analisados a indicação das teorias referentes a estas medidas. Assim, justificamos para os casos em que não foram observados a não indicação das tecnologias, uma vez que não seria utilizado na análise dos dados. Em alguns tipos de tarefas, consideramos interessante apresentar exemplos delas sobre este tipo de tarefa, por razões diversas, como por exemplo, para indicar que aquelas diferentes tarefas podem apresentar para sua solução a mesma técnica.

2.2.4.1. Organizações praxeológicas pontuais que se formam em torno de determinar a média aritmética

Dividimos a apresentação destas organizações sobre a média aritmética em três partes: organizações pontuais sobre a média aritmética, sobre a média aritmética combinada e sobre a média aritmética ponderada.

2.2.4.1.1. Organização matemática pontual 1 sobre a média aritmética $[\boldsymbol{T_{m_{01}}/\tau_{m_{01}}/\theta_{m01}/\Theta_{MTCD}}]$

Apresentamos a seguir a organização matemática pontual que se forma em torno do tipo de tarefa que chamamos de T_{m_01}.

Tipo de tarefa: $\mathbf{T_{m\_01}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{m_01} - Calcular a média aritmética de dados não ordenados ou de dados ordenados da população ou da amostra, apresentados ou não em uma tabela.

Tarefa

Podemos pensar em várias tarefas diferentes associadas a este tipo de tarefa. Como exemplo de tarefa, temos:

$t_{m\_01\_1}$ - Determine a média da amostra da altura dos alunos de um colégio A. Os dados não estão ordenados.

$t_{m\_01\_2}$ - Determine a média da altura dos alunos de um colégio A. Os dados estão ordenados.

$t_{m\_01\_3}$ - Determine a média da altura dos alunos de um colégio A. Os dados estão representados em uma tabela.

Apresentamos três técnicas para este tipo de tarefa.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{m01\_1}}$

Para todas estas tarefas, podemos usar a mesma técnica, que pode ser descrita como:

- Somar todas as observações (independente de estarem ou não ordenadas, de ser população ou amostra, soma-se) e a quantidade de observações.
- Dividir a soma das observações pelo total de observações e obtêm-se a média

O processo de soma e divisão pode ser efetuado de maneiras diferentes, tais como: através do cálculo mental, com o uso de alguma técnica que usa como ferramentas o lápis e o papel, uma calculadora ou uma planilha.

Esta técnica pode ser representada por uma fórmula, como a apresentada por Kendall e Yule (1948), que indicamos no capítulo 2 da primeira parte desta tese, como fórmula 2:

$$M = \overline{X} = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n) = \frac{1}{N}\Sigma(X)$$

Podemos ter também uma fórmula que se diferencia se os dados estão ordenados ou não ordenados (fórmulas 4 e 5 do capítulo 2 da primeira parte desta tese), como apresentada por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008). Ou ainda como apresentado por Régnier (2007) para dados diferenciando-os da população ou amostra (fórmulas 8 e 9). Em todos estes a técnica é a mesma. O que muda são os acréscimos de significantes utilizados para diferenciar população de amostra, dados ordenados dos não ordenados etc.

Apresentamos a seguir uma técnica que é específica da planilha eletrônica (consta no Excel esta técnica, devem constar técnicas similares em outras planilhas).

Tecnologia: $\boldsymbol{\theta_{m01}}$

A tecnologia é o discurso que explica a técnica. Em um livro didático essa explicação pode ser feita por um conjunto de exercícios que conduzem o aluno a perceber que tal técnica é mais eficiente do que outra.

Para justificar a técnica $\tau_{\mathrm{m01\_1}}$, apresentamos no capítulo 2 da primeira parte desta tese algumas propriedades, como a propriedade que indica que a média corresponde ao resultado de uma distribuição uniforme dos dados. Para obter uma distribuição uniforme, somam-se todos os valores e se divide ao meio. Isto também faz com que a média esteja especialmente no centro de equilíbrio dos conjuntos dos dados.

Teoria: $\boldsymbol{\Theta_{MTCD}}$

O índice que usamos na teoria se justifica, pois se aplica a todas as MTCD. Esta teoria está apoiada na teoria estatística, mas precisamente em um dos seus ramos que indicam que podemos condensar ao extremo através de um número os dados. Kendall e Yule (1948, p. 27) abordam este ramo que trata da estatística como resumo e descrição. Estes destacam que "o processo de condensação [...] pode ser levado muito além, conduzindo a um ramo da teoria que tem aplicações práticas muito importantes". Estes esclarecem que a noção de valor médio na qual pode-se fazer o resumo de uma série de observações através de um único número, como outros valores usados com este fim, são "o resultado de uma condensação levada ao extremo; por assim dizer, eles representam a concentração de uma massa difusa de algarismo em uma única gota". Através deste número, guardados os devidos cuidados, podemos ter informações sobre os dados que servem para descrevê-los. Podemos dizer que parte do pressuposto teórico que, dado os devidos cuidados, podemos resumir uma série através de números que indicam a posição central dos dados e números que indicam como estes dados estão dispersos. Esta teoria serve de suporte para as outras tarefas que trabalharemos a seguir.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{m_{01}}}$-2

Esta técnica pode ser descrita como:

- Digita-se em uma célula o nome da média e o intervalo no qual constam os valores aos quais se pretendem calcular essa medida. Esse procedimento pode ser descrito assim para o Excel (tal como consta no livro, para versão francesa do Excel):
- = Moyenne(A1:A10)

Poderíamos assim traduzir: calcule a média das observações que estão nas células e que estão no intervalo [A1; A10] = A1; A2; A3; A4; A5; A6; A7; A8; A9; A10.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{m_{01}}}$-3

Embora se possa utilizar a calculadora para calcular a média (usando a técnica tm 01-1), existem comandos específicos nas calculadoras recomendados nos livros didáticos franceses. Assim esta técnica pode ser descrita como:

- Entrar na calculadora com as observações e os efetivos (1 para este tipo de técnica no qual os dados não são dados com os efetivos). Usar o comando para listar as variáveis estatísticas (são listadas as variáveis estatísticas). O comando muda em função de ser uma calculadora Texas ou Casio (as apresentadas nos livros didáticos franceses analisados).

2.2.4.1.2. Organização matemática pontual 2 sobre a média aritmética $[\boldsymbol{T_{m_{02}}/\tau_{m_{02}}/\theta_m/\Theta_{MTCD}}]$

Tratamos neste tópico da organização matemática pontual que se forma em torno do tipo de tarefa denominada de T_{m_02}.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{m\_02}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{m_02} - Determinar a média aritmética de dados apresentados em uma tabela ou um gráfico com as observações e os efetivos de cada observação.

Tarefa

Apresentamos dois exemplos de tarefas. O primeiro calculando a partir de uma tabela e o segundo tomando por base um gráfico. Tanto em uma como na outra, pressupõe-se que o aluno deve ser capaz de observar uma tabela ou um gráfico e extrair os dados destes para realizar com isto a tarefa. Destacamos, contudo, que do ponto de vista do estudante que vai realizar estas tarefas, como temos uma mudança de tabela para gráfico, o nível de complexidade pode mudar. Em razão disso, essa diferença entre questões que envolvem gráficos e que envolvem tabelas deve ser levantado na pesquisa, tomando contudo para isto, como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990). Apresentamos dois exemplos de tarefas, uma com tabela e uma com gráfico[11]:

$t_{m\_03\_1}$ - Determine a média das notas da classe A apresentadas na tabela 41.

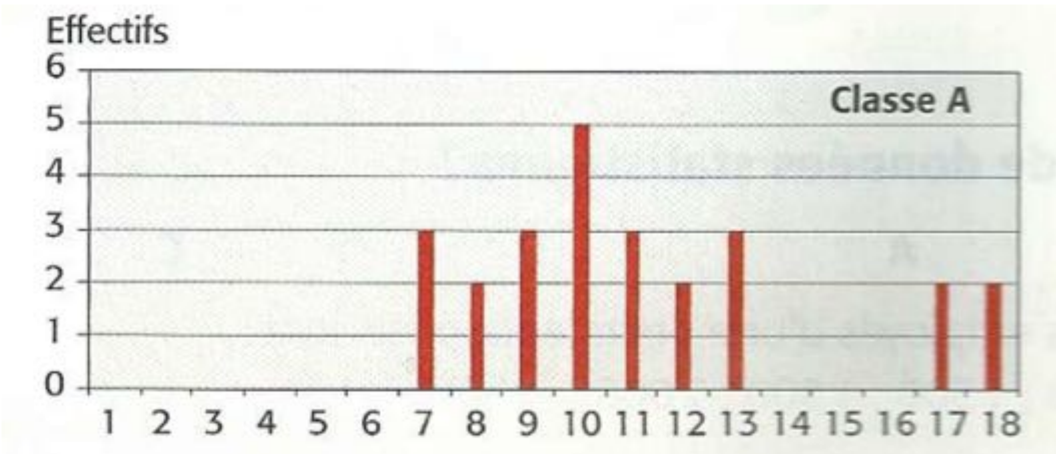
Tabela 41 – Notas da classe A do primeiro ano do ensino médio na França.

Notas	7	8	9	10	11	12	13	17	18
Efetivos	3	2	3	5	3	2	3	2	2

Fonte: Questão adaptada do livro de Gauthier e Poncy (2009a, p. 130) para o primeiro ano do ensino médio.

$t_{m\_03\_1}$ - Determine a média da notas da classe A apresentadas no gráfico 18.

Gráfico 18 – Notas da classe A.



Fonte: Gauthier e Poncy (2009a, p.130)

[11] As notas na França vão de 0 a 20.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{m_{02-1}}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Multiplica-se cada observação pelo seu efetivo ($n_K x_k$).
- Em seguida soma-se o produto obtido ($\sum_{k=1}^{K=p} n_K x_k$).
- Divide-se o resultado obtido pelo número total de observações e obtém-se a média ($\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{K=p} n_K x_k$).

Esta técnica pode ser representada por duas fórmulas apresentadas por Régnier (2007, p.9). Este diferencia nestas a fórmula para população (μ) e amostra (m):

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{K=p} n_K x_k$$ (Corresponde à fórmula 31 do capítulo 2 do volume 1)

$$m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K=p} n_K x_k$$ (Corresponde à fórmula 32 do capítulo 2 do volume 1)

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{m_{02-2}}}$

Podemos com o uso da calculadora determinar a média para as observações com os efetivos usando a técnica tm 02-1. Apesar disso, observamos nos livros didáticos franceses que analisamos um processo específico. Esta técnica pode ser descrita como:

- Entrar na calculadora com as observações e os efetivos. Usar o comando para listar as variáveis estatísticas (são listadas as variáveis estatísticas). O comando muda em função de ser uma calculadora Texas ou Casio (apresentadas nos livros didáticos analisados).

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{m_{02-3}}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Digita-se em uma célula o nome da média e o intervalo no qual constam os valores aos quais se pretende calcular a média. Este pode ser descrito assim para o Excel (tal como consta no livro cuja versão francesa é a que utilizamos):
- = MOYENNE (A1:A10)

Poderíamos assim traduzir: calcule a média das observações que estão nas células que estão no intervalo [A1; A10] = A1; A2; A3; A4; A5; A6; A7; A8; A9; A10.

Tanto a tecnologia como a teoria utilizada é a mesma do tipo de tarefa anterior, assim não apresentamos uma descrição destas.

2.2.4.1.3. Organização matemática pontual 3 sobre a média aritmética [$\boldsymbol{T_{m_{03}}/\tau_{m_{03}}/\theta_{m03}/\Theta_{MTCD}}$]

Tratamos neste tópico da organização matemática pontual que se forma em torno do tipo de tarefa denominada de T_{m_03}.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{m\_03}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{m_03} - Determinar a média aritmética de dados apresentados em uma tabela ou gráfico com as observações e a frequência (relativa) de cada observação (os dados tanto podem ser da amostra como da população, pois esta informação não altera o procedimento de cálculo).

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathrm{m}_{03}}}$

Tanto para a tabela como para o gráfico, esta técnica pode ser descrita como:

- Multiplica-se cada observação pela frequência correspondente ($f_K x_k$)
- Em seguida soma-se o produto obtido ($\sum_{k=1}^{K=p} f_K x_k$).
- Divide-se o resultado obtido pelo número total de observações e obtém-se a média ($\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{K=p} f_K x_k$).

Esta técnica pode ser representada por duas fórmulas apresentadas por Régnier (2007, p.9). Apresentamos estas fórmulas no capítulo 2 do volume 1 (fórmulas 33 e 34). O que muda de uma para outra é que a primeira é a fórmula para população (μ) e a segunda para a amostra (m):

$$\mu = \sum_{k=1}^{K=p} f_K x_k$$ (fórmula 33 do capítulo 2 do volume 1)

$$m = \sum_{k=1}^{K=p} f_K x_k \qquad \text{(fórmula 34 do capítulo 2 do volume 1)}$$

Tanto a tecnologia como a teoria utilizada é a mesma do tipo de tarefa anterior, assim não apresentamos uma descrição destas.

Tecnologia: $\boldsymbol{\theta_{m03}}$

Esta tecnologia pode ser apresentada de diferentes formas. Chevallard (1999) apresenta três observações sobre a tecnologia (que apresentamos com detalhes na primeira parte desta tese). Não vamos tratar da primeira neste caso. Na segunda observação temos que uma das funções da tecnologia é justificar a técnica. Na terceira observação, temos uma segunda função da tecnologia que é a produção de técnicas.

No livro didático Fr_C1.1[A] observamos a apresentação da tecnologia, indicamos esta na figura 38. Nesta figura temos a apresentação da técnica $\boldsymbol{\tau_{m01\_1}}$ utilizando tanto a linguagem escrita (através de uma definição apoiada no algoritmo) como a linguagem matemática apresentada através de uma fórmula. Em seguida temos a apresentação da técnica $\boldsymbol{\tau_{m_{03}-1}}$ para justificar esta técnica, apoiando-se na técnica anteriormente apresentada, temos a produção da nova técnica, assim como temos também a demonstração desta técnica utilizando-se para isto em dois momentos a aplicação da propriedade distributiva (AMARAL, 1999, P. 37).

Figura 38. Tecnologia referente a técnica $\boldsymbol{\tau_{m_{03}-1}}$.

Technique

Si les valeurs sont regroupées dans des classes, on prend le centre des classes pour calculer la moyenne.

■ Mesures de position

• **La moyenne** est la somme des produits $n_i x_i$ divisée par l'effectif total ; elle est souvent notée $\bar{x}$ et on a : $\bar{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{N}$.

On peut écrire $\bar{x} = \dfrac{n_1x_1}{N} + \dfrac{n_2x_2}{N} + \dots + \dfrac{n_px_p}{N}$ d'où : $\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_px_p$.

Fonte: Gauthier, Poncy (2009a, p. 134).

2.2.4.1.4. Organização matemática pontual 4 sobre a média aritmética $[\boldsymbol{T_{m_{04}}/\tau_{m_{04}}/\theta_{m04}/\Theta_{MTCD}}]$

Tratamos neste tópico da organização matemática pontual que se forma em torno do tipo de tarefa denominada de T_{m_04}.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{m\_04}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{m_04} - Determinar a média aritmética de uma variável estatística quantitativa contínua. Considerando os dados apresentados em uma tabela ou gráfico com os intervalos e os efetivos de cada intervalo, o procedimento é o mesmo tanto para população como amostra.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathrm{m}_{04}-1}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Determina-se o centro de cada intervalo - c_k - (uma aproximação da média destes valores);
- Multiplica-se o centro de cada intervalo pelo seu efetivo ($n_k c_k$);
- Em seguida soma-se o produto obtido ($\sum_{k=1}^{k=p} n_k\, c_k$);
- Divide-se o resultado obtido pelo número total de observações e obtém-se a média ($m = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k\, c_k$).

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathrm{m}_{04}-2}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Determina-se o centro de cada intervalo - c_k - (uma aproximação da média destes valores);
- Com o uso da calculadora, entra-se com os centros dos intervalos e os efetivos e efetua-se o comando para determinar a média.

2.2.4.1.5. Organização matemática pontual 5 sobre a média aritmética $[\boldsymbol{T_{m_{05}}}/\boldsymbol{\tau_{m_{05}}}/\boldsymbol{\theta_{m05}}/\boldsymbol{\Theta_{MTCD}}]$

Tratamos neste tópico da organização matemática pontual que se forma em torno do tipo de tarefa denominada de T_{m_05}.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{m\_05}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{m_05} - Determinar a média aritmética de uma variável estatística quantitativa contínua. Considerando os dados apresentados em uma tabela ou gráfico com os intervalos e sua respectiva frequência, o procedimento é o mesmo tanto para população como para amostra.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathrm{m\_05}}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Determina-se o centro de cada intervalo - c_k - (uma aproximação da média destes valores);
- Multiplica-se o centro de cada intervalo pelo sua frequência ($f_k c_k$);
- Em seguida soma-se o produto obtido ($\sum_{k=1}^{k=p} f_k\, c_k$);
- Divide-se o resultado obtido pelo número total de observações e obtém-se a média ($m = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} f_k\, c_k$).

2.2.4.1.6. Organização matemática pontual 6 sobre a média aritmética $[\boldsymbol{T_{m_{06}}}/\boldsymbol{\tau_{m_{06}}}/\boldsymbol{\theta_{m06}}/\boldsymbol{\Theta_{MTCD}}]$

Abordamos nesta seção a organização matemática pontual que se forma em torno do tipo de tarefa denominada de T_{m_05}.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{m\_06}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{m_06} - Determinar a média aritmética de uma variável estatística quantitativa contínua em um histograma. Considerando os dados apresentados em uma tabela ou gráfico com os intervalos e sua respectiva frequência, o procedimento é o mesmo tanto para população como para amostra.

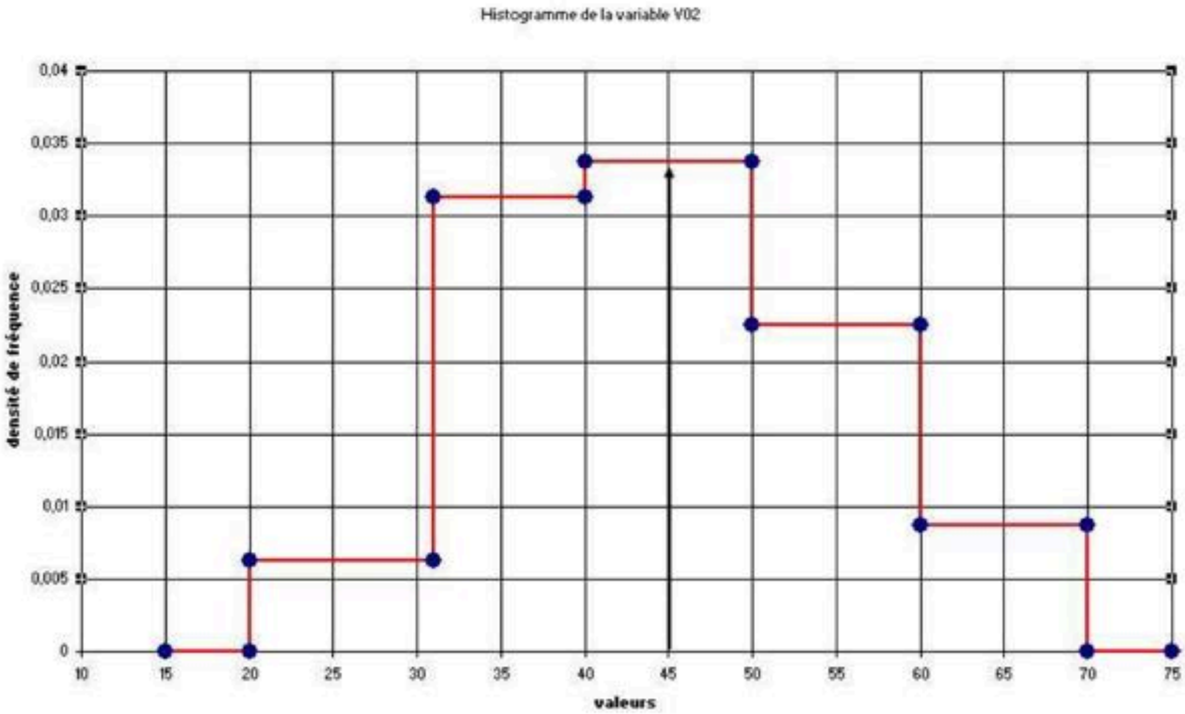
Técnica: $\boldsymbol{\tau_{m\_06-1}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Determina-se o centro de cada intervalo - c_k - (uma aproximação da média destes valores);
- Multiplica-se o centro de cada intervalo pela sua frequência ($f_k c_k$);
- Em seguida soma-se o produto obtido ($\sum_{k=1}^{k=p} f_k\, c_k$);
- Divide-se o resultado obtido pelo número total de observações e obtém-se a média ($m = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} f_k\, c_k$).
- Com o valor da média determinado, marca-se no eixo no qual estão marcados os intervalos à medida da média.

A figura 39, extraída de Régnier (2012, p.7) exemplifica esta demarcação. Uma vez determinada a média que media 44,99, demarcou-se a mesma neste gráfico.

Figura 39 – Determinação da média de uma variável contínua no histograma (RÉGNIER, 2012, P. 7).



Fonte: Régnier (2012, p. 7).

Apesar de defendermos o conceito de histograma do professor Régnier (1998b), no qual a medida de um dos eixos corresponde à densidade de frequência, consideramos que devemos levantar nos livros a existência de outras técnicas, assim descrevemos a técnica 2.

Técnica: $\tau_{\mathrm{m\_06-2}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Determina-se o centro de cada intervalo - c_k - (uma aproximação da média destes valores);
- Multiplica-se o centro de cada intervalo pelo sua frequência ($f_k c_k$);
- Em seguida soma-se o produto obtido ($\sum_{k=1}^{k=p} f_k\, c_k$);
- Divide-se o resultado obtido pelo número total de observações e obtém-se a média ($m = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} f_k\, c_k$).
- Com o valor da média determinado, marca-se no eixo no qual estão marcados os intervalos à medida da média, que no caso desta técnica corresponde à frequência.

2.2.4.1.7. Organização matemática pontual 1 sobre a média aritmética ponderada $[\boldsymbol{T_{mp_{01}}}/\boldsymbol{\tau_{mp_{01}}}/\boldsymbol{\theta_{mp01}}/\boldsymbol{\Theta_{MTCD}}]$

Tratamos neste tópico da organização matemática pontual que se forma em torno do tipo de tarefa denominada de T_{mp_01}.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{mp\_01}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{mp_01} - Determinar a média aritmética ponderada.

Em função da forma como se calcula a média aritmética temos duas técnicas diferentes.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathrm{mp}_{01}\_1}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Multiplica-se cada observação pelo seu peso;
- Soma-se o produto de cada observação pelo seu peso e divide-se pela soma dos pesos.

Podemos representar esta técnica pela fórmula 42, apresentada no capítulo 2 da primeira parte desta tese (MANN, 2006):

$$\mu = \frac{\sum xp}{\sum p}$$

Temos uma outra técnica apresentada por Dehon, Droesbeke e Vermandele (2008), que chamamos de técnica 2.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathrm{mp}_{01}\_2}}$

Para esta técnica é necessário inicialmente calcular o coeficiente de ponderação.

- Para determinar o coeficiente de ponderação, divide-se cada peso pela soma dos pesos, obtendo assim para cada observação um coeficiente de ponderação, que pode ser descrito pela fórmula 44 (capítulo 2 do volume 1):

$$w_1 = \frac{p_1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}; \cdots; w_j = \frac{p_j}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

Multiplica-se cada observação pelo coeficiente de ponderação respectivo. Somam-se os resultados obtidos para se ter a média aritmética ponderada. Este procedimento pode ser representado pela fórmula 45 (capítulo 2 do volume 1) que reproduzimos abaixo:

$$\bar{x}_w = \sum_{i=1}^{n} w_i \; x_i$$

2.2.4.1.8. Organização matemática pontual 1 sobre a média aritmética combinada $[\boldsymbol{T_{mc_{01}}}/\boldsymbol{\tau_{mc_{01}}}/\boldsymbol{\theta_{mc01}}/\boldsymbol{\Theta_{MTCD}}]$

Tratamos neste tópico da organização matemática pontual que se forma em torno do tipo de tarefa denominada de T_{mc_01}.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{mc\_01}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{mc_01} - Determinar a média aritmética combinada.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathrm{mc\_01}}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Multiplica-se cada média pelo tamanho da amostra correspondente, somam-se os valores obtidos e dividem-se pelo número de observações das duas amostras.

Podemos representar esta técnica pela fórmula 16 ou 17, apresentada no capítulo 2 da primeira parte desta tese.

2.2.4.2. Organizações praxeológicas pontuais que se formam em torno da mediana

Apresentamos nesta seção as organizações praxeológicas que levantamos sobre a mediana. A última destas não é sobre determinar a mediana, mas envolve o conhecimento da mediana para construir uma série.

2.2.4.2.1. Organização matemática pontual 1 sobre a mediana $[\boldsymbol{T_{md_{01}}/\tau_{md_{01}}/\theta_{md01}/\Theta_{MTCD}}]$

Tratamos neste tópico da organização matemática pontual que se forma em torno do tipo de tarefa denominada de T_{mc_01}. No capítulo 2 da primeira parte desta tese, ao abordarmos a mediana, apresentaremos com mais detalhes alguns dos elementos que seguem, inclusive apresentamos exemplos de tarefas.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{md\_01}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{md_01} - Determinar a mediana de dados não ordenados. O fato de ser amostra ou população não altera a técnica associada a este tipo de tarefa.

A este tipo de tarefa, em função das suas características, podemos ter três subtipos de tarefas:

- t_{md_01-1} – Determinar a mediana de dados não ordenados, considerando o efetivo total ser par.
- t_{md_01-2} – Determinar a mediana de dados não ordenados, considerando o efetivo total ser ímpar.
- tmd_{01-3} – Determinar a mediana de dados usando o comando da calculadora ou planilha. Neste caso não precisa levar em conta se o efetivo total é par ou ímpar, uma vez que o programa da calculadora ou planilha eletrônica faz isso.

Para cada um destes três subtipos de tarefas, temos técnicas específicas. Assim para estes tipos de tarefas, temos quatro técnicas associadas.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathbf{md_{01}-1}}}$

Esta técnica é utilizada quando o efetivo total é par ($t_{md_{01}-1}$). Esta pode ser descrita como:

- Ordenam-se os dados em ordem crescente ou decrescente.
- Determina-se a mediana utilizando a fórmula 48 (no capítulo 2 da primeira parte desta tese), que indicamos a seguir:

$$m_d = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$$

- O procedimento consiste em determinar o número total de efetivos, dividir este por dois e determinar a posição à observação que ocupa a n/2 e a posição (n/2)+1. Somam-se estas duas observações e dividem-se por dois, determinando o valor da mediana.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathbf{md_{01}-2}}}$

Esta técnica para efetivo total ímpar (t_{md_01-2}) pode ser descrita como:

- Ordenam-se os dados em ordem crescente ou decrescente;
- Determina-se a mediana utilizando a fórmula 42 (no capítulo 2 da primeira parte desta tese), que indicamos a seguir:

$$m_d = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

- Para determinar a mediana, determina-se o total de efetivos (n) e verifica-se qual a observação que ocupa a posição (n+1)/2. O valor desta observação é a mediana.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathbf{md_{01}-3}}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Digita-se em uma célula o nome mediana e o intervalo no qual constam os valores aos quais se pretende calcular a média. Este pode ser descrito assim para o Excel em francês:
- = MEDIANE(A1:A10)

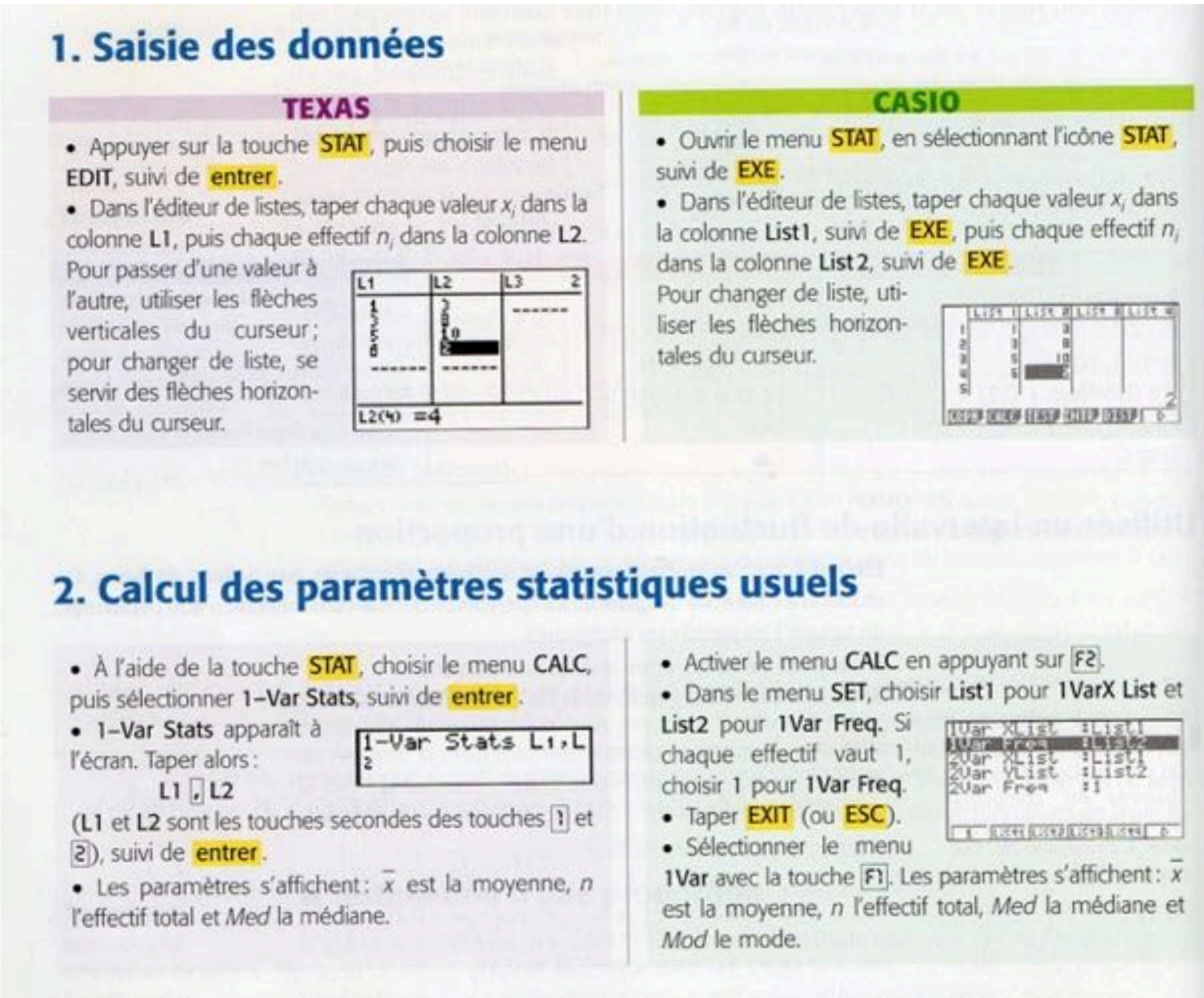
Poderíamos assim traduzir: calcule a mediana das observações que estão nas células do intervalo [A1; A10] = A1; A2; A3; A4; A5; A6; A7; A8; A9; A10.

Técnica: $\tau_{\mathrm{md}_{01}-4}$

Embora se possa utilizar a calculadora para calcular a mediana (usando a técnica $t_{md_{01}-1}$ ou $t_{md_{01}-2}$), existem comandos específicos nas calculadoras (utilizadas nos livros didáticos franceses) que automatizam o cálculo da mediana. Assim esta técnica pode ser descrita como:

- Entrar na calculadora com as observações e os efetivos (item 1, da figura 40, do livro Fr_C1.1[A]), na coluna L1 as observações e na coluna L2 os efetivos (figura 40). Como os dados não estão ordenados neste tipo de tarefa, insere cada observação na coluna L1 e na coluna L2 registra-se como efetivo 1. Usa-se o comando para listar as variáveis estatísticas (item 2, da figura 40). O comando muda em função de ser uma calculadora Texas ou Casio (apresentadas nos livros didáticos franceses analisados).

Figura 40. Determinar as medidas estatísticas com a calculadora.



1. Saisie des données

TEXAS

- Appuyer sur la touche STAT, puis choisir le menu EDIT, suivi de entrer.
- Dans l'éditeur de listes, taper chaque valeur x_i dans la colonne **L1**, puis chaque effectif n_i dans la colonne **L2**.

Pour passer d'une valeur à l'autre, utiliser les flèches verticales du curseur ; pour changer de liste, se servir des flèches horizontales du curseur.

CASIO

- Ouvrir le menu STAT, en sélectionnant l'icône STAT, suivi de EXE.
- Dans l'éditeur de listes, taper chaque valeur x_i dans la colonne **List1**, suivi de EXE, puis chaque effectif n_i dans la colonne **List2**, suivi de EXE.

Pour changer de liste, utiliser les flèches horizontales du curseur.

2. Calcul des paramètres statistiques usuels

TEXAS

- À l'aide de la touche STAT, choisir le menu CALC, puis sélectionner **1-Var Stats**, suivi de entrer.
- **1-Var Stats** apparaît à l'écran. Taper alors :

L1 , L2

(**L1** et **L2** sont les touches secondes des touches 1 et 2), suivi de entrer.

- Les paramètres s'affichent : $\bar{x}$ est la moyenne, n l'effectif total et *Med* la médiane.

CASIO

- Activer le menu **CALC** en appuyant sur F2.
- Dans le menu **SET**, choisir **List1** pour **1VarX List** et **List2** pour **1Var Freq.** Si chaque effectif vaut 1, choisir **1** pour **1Var Freq.**
- Taper EXIT (ou ESC).
- Sélectionner le menu **1Var** avec la touche F1. Les paramètres s'affichent : $\bar{x}$ est la moyenne, n l'effectif total, *Med* la médiane et *Mod* le mode.

Fonte: Poncy; Gauthier (2009a, p. 142).

Técnica: $\tau_{\mathbf{md}_{01}-5}$

Esta técnica foi observada em um tipo de atividade e é misto. Ela pode ser feita utilizando-se uma calculadora Casio ou Texas. Na solução da atividade, os dados não ordenados são agrupados em uma tabela com as observações e efetivos. Depois se utiliza a calculadora para inserir as observações e efetivos. Depois efetua o comando para apresentar as variáveis estatísticas. Este procedimento é muito parecido com a técnica anterior, a diferença é que antes de inserir os dados, eles são ordenados e constrói-se uma tabela com observações e efetivos, e depois se utiliza a calculadora

2.2.4.2.2. Organização matemática pontual 2 sobre a mediana $[T_{md_{02}}/\tau_{md_{02}}/\theta_{md02}/\Theta_{MTCD}]$

Tratamos neste tópico da organização matemática pontual que se forma em torno do tipo de tarefa denominada de T_{md_02}.

Tipo de tarefa: T_{md_02}

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{md_02} - Determinar a mediana de dados ordenados. O fato de ser amostra ou população não altera a técnica associada a este tipo de tarefa.

  Apresentamos 2 exemplos de tarefas.

Tarefas

$t_{md\_02\_1}$ - Determine a mediana das notas da classe B: 1; 2; 4; 7; 9; 10.

$t_{md\_02\_2}$ - Determine a mediana das notas da classe B, apresentadas na tabela 42.

Tabela 42 – Notas dos alunos da classe B.

Alunos	João	Pedro	Mário	Rita	Maria	Luís
Notas	1	3	4	7	9	10

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

A este tipo de tarefa, em função das suas características, podemos ter dois subtipos de tarefas:

- t_{md_02-1} – Determinar a mediana de dados ordenados, considerando o efetivo total ser par.
- t_{md_02-2} – Determinar a mediana de dados ordenados, considerando o efetivo total ser ímpar.

Para cada um destes subtipos de tarefas temos uma técnica associada que descreveremos a seguir.

Técnica: $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{md\_02-1}}$

Esta técnica é utilizada quando o efetivo total for par (t_{md_02-1}). Os procedimentos desta são:

- Determina-se a mediana utilizando a fórmula 43 (no capítulo 2 da primeira parte desta tese), que indicamos a seguir:

$$m_d = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$$

- O procedimento consiste em determinar o número total de efetivos (n), dividir estes por dois e determinar a posição n/2 da observação e a posição (n/2)+1. Somam-se estas duas observações e dividem-se por dois, determinando o valor da mediana.

Técnica: $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{md\_02-2}}$

Quando o efetivo total for ímpar (t_{md_02-2}) a técnica é:

- Determina-se a mediana utilizando a fórmula 42 (no capítulo 2 da primeira parte desta tese), que indicamos a seguir:

$$m_d = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

- Para determinar a mediana determina-se o total de efetivos (n) e verifica-se qual a observação que ocupa a posição (n+1)/2. O valor desta observação é a mediana.

Técnica: $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{md\_02-3}}$

Podemos com o uso da calculadora determinar a mediana para as observações. Esta técnica pode ser descrita como:

- Entrar na calculadora com as observações, usar o comando para listar as variáveis estatísticas. O comando muda em função de ser uma calculadora Texas ou Casio (as apresentadas nos livros didáticos franceses analisados).

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathrm{md\_02-4}}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Digita-se em uma célula o nome da mediana e o intervalo no qual constam os valores aos quais se pretendem determinar esta medida. Este pode ser descrito assim para o Excel (versão francesa):
- = MEDIANE(A1:A10)

Poderíamos assim traduzir: calcule a mediana das observações que estão nas células que estão no intervalo [A1; A10] = A1; A2; A3; A4; A5; A6; A7; A8; A9; A10.

2.2.4.2.3. Organização matemática pontual 3 sobre a mediana [$\boldsymbol{T_{md_{03}}/\tau_{md_{03}}/\theta_{md03}/\Theta_{MTCD}}$]

Tratamos neste tópico da organização matemática pontual que se forma em torno do tipo de tarefa denominada de T_{md_03}.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{md\_03}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{md_03} - Determinar a mediana de dados ordenados em uma tabela (ou gráfico) com as observações e os efetivos. O fato de ser amostra ou população não altera a técnica associada a este tipo de tarefa.

Em função das características deste tipo de tarefa podemos ter três subtipos de tarefas:

- t_{md_03-1} – Calcular a mediana de dados ordenados em uma tabela, considerando o efetivo total ser par.
- t_{md_03-2} – Calcular a mediana de dados ordenados em uma tabela, considerando o efetivo total ser ímpar.

- t_{md_03-3} – Determinar a mediana utilizando o módulo estatística da calculadora. Neste caso, o processo é o mesmo, caso o efetivo seja par ou ímpar.

Para cada um destes subtipos de tarefas, temos uma técnica associada. Como descrevemos a seguir:

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{md\_03-1}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Determina-se os efetivos acumulados de cada observação.
- Como o efetivo total é par (t_{md_03-1}) o procedimento é:
    - Determina-se a mediana utilizando a fórmula 43 (no capítulo 2 da primeira parte desta tese), que indicamos a seguir:

$$m_d = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$$

    - Determinam-se os valores na posição x(n/2) e x(n/2 +1). Para isto observa-se na tabela dos efetivos acumulados qual ou quais intervalos correspondem à posição $x_{\left(\frac{n}{2}\right)}$ e $x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. Determinam-se as observações de cada um destes intervalos. Se os intervalos forem os mesmos, a mediana é o valor das observações destes intervalos. Se os intervalos forem diferentes, tira-se a media aritmética do valor das observações correspondentes a cada um destes intervalos. O valor encontrado é a mediana.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{md\_03-2}}$

Os procedimentos desta técnica é:

- Determinar os efetivos acumulados de cada observação.
- Como o efetivo total é ímpar (t_{md_03-2}) deve-se:
    - Determinar a mediana utilizando a fórmula 42 (no capítulo 2 da primeira parte desta tese), que indicamos a seguir:

$$m_d = \mathrm{x}_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

    - Para determinar a mediana, determina-se o total de efetivos (n) e verifica-se qual a observação que ocupa a posição (n+1)/2. O valor desta observação é a mediana. Para determinar este valor, verifica-se qual o maior valor do efetivo acumulado que seja igual ou maior do que o valor desta posição. A observação que corresponde a este efetivo corresponde à medida da mediana.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathrm{md\_03-3}}}$

Os procedimentos desta técnica são:

- Entrar na calculadora com as observações e os efetivos. Usar o comando para listar as variáveis estatísticas. O comando muda em função de ser uma calculadora Texas ou Casio (as apresentadas nos livros didáticos franceses analisados).

2.2.4.2.4. Organização matemática pontual 4 sobre a mediana [$\boldsymbol{T_{md_{04}}/\tau_{md_{04}}/\theta_{md04}/\Theta_{MTCD}}$]

Abordamos neste tópico a organização pontual que se forma em torno do tipo de tarefa T_{mc_04} que envolve a determinação da mediana.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{md\_04}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{md_04} - Determinar a mediana de dados agrupados em intervalos. O fato de ser amostra ou população não altera a técnica associada a este tipo de tarefa.

Apresentamos a seguir a técnica.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathrm{md\_04-1}}}$

A técnica é a mesma para os dados quando n é par ou ímpar. Não temos como ordenar os dados, mas podemos identificar a classe que contém a mediana e determinar o valor aproximado. O procedimento para determinar a mediana pode ser representado pela fórmula 49 (CARVALHO, 2006), que apresentamos abaixo:

$$Md = l_{inf} + \left[\frac{\left(\frac{n}{2}\right) - fac_{ant}}{f_i}\right] \cdot h$$

A descrição detalhada e exemplificação apresentam-se no capítulo 2 da primeira parte desta tese (volume 1 desta tese), como também a demonstração desta fórmula.

Observamos um procedimento similar em um dos livros utilizados para análise (BARROSO, 2010). Apesar de ter algumas similaridades, observamos a necessidade de algumas mudanças nas operações realizadas. Que demanda a utilização de algumas técnicas descritas por Araújo (2009), tais como: transpor termos ou coeficientes invertendo as operações; reagrupar os termos semelhantes, invertendo o sinal dos termos transpostos. Na concepção de Bessa Menezes (2010) estas aparecem com uma subtécnica da técnica principal que envolve determinar a mediana de dados agrupados. Dessa forma, consideramos como conveniente apresentar como uma segunda técnica.

Técnica: $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{md\_04-2}}$

Essa técnica apresenta algumas etapas:

- Determinar a posição da mediana.
    - Determina-se o total dos efetivos e divide-se por dois:
    - $\frac{\sum f_i}{2}$
- Determina-se o intervalo que contém a posição da mediana;
- Utilizando-se a fórmula 86, determina-se a mediana. Considere que Me é a mediana (Md, na técnica anterior), a diferença entre os extremos da classe mediana corresponde a h (na técnica anterior).

Fórmula 86 – Técnica utilizada para o cálculo da mediana em dados agrupados.

$$\frac{\text{diferença entre os extremos da classe mediana}}{\text{frequência da classe mediana}} = \frac{\text{diferença entre } Me \text{ e o extremo inferior da classe mediana}}{\text{diferença entre } \frac{\sum f_i}{2} \text{ e a frequência acumulada da classe anterior à classe mediana}}$$

Fonte: Barroso (2010, p. 67).

2.2.4.2.5. Organização matemática pontual 5 sobre a mediana $[\boldsymbol{T_{md_{05}}/\tau_{md_{05}}/\theta_{md05}/\Theta_{MTCD}}]$

Observamos nos livros didáticos diversas situações em que os dados são apresentados ordenados ou não ordenados e solicita-se a construção de uma tabela com as observações, com os efetivos e efetivos acumulados. Ainda na mesma atividade pede-se para determinar a mediana. Considerando-se que os dados foram organizados em uma tabela com os efetivos acumulados, recaímos em parte no tipo de tarefa Tmd_03. Esta forma, a partir de dados não ordenados ou ordenados, solicita o cálculo da mediana para induzir a uma técnica não prevista inicialmente, assim consideramos pertinente descrever esta organização matemática 5. Ela é definida por um percurso pensado pelos autores dos livros didáticos, que é necessário quando temos um volume grande de dados. Descrevemos a seguir o tipo de tarefa T_{mc_05}.que envolve a determinação da mediana.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{md\_05}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{md_05} - Determinar a mediana de dados ordenados ou não ordenados. No procedimento de cálculo deve-se inicialmente construir uma tabela com as observações, os efetivos e os efetivos acumulados. O fato de ser amostra ou população não altera a técnica associada a este tipo de tarefa.

Em função das características deste tipo de tarefa, podemos ter dois subtipos delas:

- t_{d_05-1} – Determinar a mediana de dados ordenados ou não ordenados, construindo-se inicialmente uma tabela com os efetivos e efetivos acumulados, considerando o efetivo total ser par.
- t_{md_05-2} – Determinar a mediana de dados ordenados ou não ordenados, construindo-se inicialmente uma tabela com os efetivos e efetivos acumulados, considerando o efetivo total ser ímpar.

Para cada um destes dois subtipos de tarefas, temos uma técnica associada como descrevemos a seguir.

Técnica: $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{md\_05-1}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Construir uma tabela com as observações e efetivos;
- Determinam-se os efetivos acumulados de cada observação;
- Como o efetivo total é par (t_{md_05-1}) o procedimento é:
    - Determina-se a mediana utilizando a fórmula 48 (do capítulo 2 do primeiro volume da tese), que indicamos a seguir:

$$m_d = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$$

    - Determinam-se os valores na posição x(n/2) e x(n/2 +1). Para isto observa-se na tabela dos efetivos acumulados, qual ou quais intervalos correspondem à posição $x_{\left(\frac{n}{2}\right)}$ e $x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. Determinam-se as observações de cada um destes intervalos. Se os intervalos forem os mesmos, a mediana é o valor das observações destes intervalos. Se os intervalos forem diferentes, tira-se a media aritmética do valor das observações correspondentes a cada um destes intervalos. O valor encontrado é a mediana.

Técnica: $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{md\_05-2}}$

Os procedimentos desta técnica são:

- Construir uma tabela com as observações e efetivos;
- Determinar os efetivos acumulados de cada observação;
- Como o efetivo total é ímpar (t_{md_05-2}) deve-se:
    - Determinar a mediana utilizando a fórmula 47 (no capítulo 2 da primeira parte desta tese), que indicamos a seguir:

$$m_d = \mathrm{x}_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

    - Para determinar a mediana, determina-se o total de efetivos (n) e verifica-se qual é a observação que ocupa a posição (n+1)/2. O valor desta observação é a mediana. Para determinar este valor, verifica-se qual o maior valor do efetivo acumulado que seja igual ou maior do que o valor desta posição. A observação que corresponde a este efetivo corresponde à medida da mediana.

2.2.4.2.6. Organização matemática pontual 6 sobre a mediana $[\boldsymbol{T_{md_{06}}}/\boldsymbol{\tau_{md_{06}}}/\boldsymbol{\theta_{md06}}/\boldsymbol{\Theta_{MTCD}}]$

Tratamos neste tópico da organização matemática pontual que se forma em torno do tipo de tarefa denominada de T_{md_06}.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{md\_06}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{md_06} - Determinar a mediana de dados ordenados em uma tabela (ou gráfico) com as observações, os efetivos e os efetivos acumulados. O fato de ser amostra ou população não altera a técnica associada a este tipo de tarefa. Como já temos os efetivos acumulados, este tipo de tarefa é o mesmo para o caso de apresentar os efetivos acumulados e não apresentar os efetivos.

Em função das características deste tipo de tarefa, podemos ter dois subtipos dela:

- t_{md_06-1} – Calcular a mediana de dados ordenados em uma tabela, considerando o efetivo total ser par.
- t_{md_06-2} – Calcular a mediana de dados ordenados em uma tabela, considerando o efetivo total ser ímpar.

Para cada um destes dois subtipos de tarefas temos uma técnica associada. Como descrevemos a seguir.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathrm{md\_06-1}}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Como o efetivo total é par (t_{md_03-1}) o procedimento é:
  - Determina-se a mediana utilizando a fórmula 48 (no capítulo 2 da primeira parte desta tese do volume 1 desta tese), que indicamos a seguir:

$$m_d = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$$

  - Determinam-se os valores na posição x(n/2) e x(n/2 +1). Para isto observa-se na tabela dos efetivos acumulados qual ou quais intervalos correspondem à posição $x_{\left(\frac{n}{2}\right)}$ e $x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. Determinam-se as observações de cada um destes intervalos. Se os intervalos forem os mesmos, a mediana é o valor das observações destes intervalos. Se os intervalos forem diferentes, tira-se a media aritmética do valor das observações correspondentes a cada um destes intervalos. O valor encontrado é a mediana.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathrm{md\_06-2}}}$

Os procedimentos desta técnica são:

- Como o efetivo total é ímpar (t_{md_03-2}) deve-se:
    - Determinar a mediana utilizando a fórmula 47 (do capítulo 2 do primeiro volume desta tese), que indicamos a seguir:

$$m_d = \mathrm{x}_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

    - Para determinar a mediana, determina-se o total de efetivos (n) e verifica-se qual a observação que ocupa a posição (n+1)/2. O valor desta observação é a mediana. Para determinar este valor, verifica-se qual o maior valor do efetivo acumulado que seja igual ou maior do que o valor desta posição. A observação que corresponde a este efetivo corresponde à medida da mediana.

2.2.4.2.7. Organização matemática pontual 7 sobre a mediana [$\boldsymbol{T_{md_{07}}/\tau_{md_{07}}/\theta_{md07}/\Theta_{MTCD}}$]

Tratamos neste tópico da organização matemática pontual que se forma em torno do tipo de tarefa denominada de T_{md_07}.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{md\_07}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

T_{md_07} - Determinar a mediana a partir da observação de um diagrama de caixas ou bigode também chamado de diagrama de box plot (Mann, 2006) ou em francês diagramme en boîte.

Técnica: $\tau_{\mathrm{md\_07}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Observar a medida da linha que divide o retângulo do diagrama em duas partes. Esta medida pode está indicada na linha ou em um eixo próximo ao diagrama.

2.2.4.2.8. Organização matemática pontual 1 sobre a mediana para determinar uma ou mais séries [$T_{mds_{01}}/\tau_{mds_{01}}/\theta_{mds01}/\Theta_{MTCD}$]

Tratamos neste tópico da organização matemática pontual que se forma em torno do tipo de tarefa denominada de T_{md_08}. Esta organização foi observada em um livro didático em mais de uma questão e consideramos pertinente apresentá-la.

Tipo de tarefa: T_{md_08}

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

T_{md_08} – Dadas as medidas do primeiro quartil, da mediana (segundo quartil), do terceiro quartil e o número de observações da série construir uma série com estes dados.

Tarefa

Para exemplificar este tipo de tarefa, apresentamos a tarefa abaixo.

$t_{md\_08\_1}$ – Construir uma série de 11 valores, no qual o primeiro quartil é 4, a mediana é 7 e o terceiro quartil é 11 (PONCY, GUICHARD, RUSSIER, 2011a, p.249, tradução nossa).

Solução: como o total dos efetivos é ímpar, a posição da mediana é dada por (11+1)/2=6. Logo a mediana é o sexto valor. O valor dos quartis pode ser calculado rapidamente usando a tabela proposta por Régnier (2011a) que apresentamos no capítulo 2 da primeira parte desta tese. Usando esta tabela, observamos que os dados podem ser escritos na forma: N=4q+3 onde temos 11=(4x2)+3. Logo, temos as posições dos quartis: Q1=q+1=2+1=3 (3 posição) e Q2=3q+3=3x2+3=9.

Outra forma de calcular é apresentada na solução do problema. Como Q1 corresponde a aproximadamente 25% dos efetivos, 25% de 11 é igual a 2,75, logo Q1=3. Como Q3 corresponde a aproximadamente 75% dos efetivos, 75% de 11 é igual a 8,25, então Q3=9. Os demais valores podem ser propostos, logo esta questão admite diversas soluções. Na tabela 43 apresentamos a proposta do livro. Na tabela 44 apresentamos uma outra possível solução à mesma tarefa. Colocamos em destaque nas duas tabelas os valores que não podem ser alterados.

Tabela 43 – Possível solução à tarefa $t_{md\_08\_1}$.

	Mín.		Q1			Md			Q3		Máx.
Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Valor	3	3	4	5	5	7	9	9	11	12	12

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Tabela 44 – Segunda possível solução à tarefa $t_{md\_08\_1}$.

	Mín.		Q1			Md			Q3		Máx.
Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Valor	- 5	3	4	5	6	7	8	10	11	15	50

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Observamos que este problema admite mais de uma solução. Ele pode ser usado com a função didática, de compreensão de que a mediana não é influenciada pela medida dos valores, inclusive quando temos valores extremos como o segundo exemplo de resposta que apresentamos. Na solução do problema, apresentamos duas técnicas que envolvem a determinação dos quartis. Na primeira técnica temos a aplicação da tabela de Régnier (2011a) que consideramos mais prática. Em função desta variação, apresentamos duas técnicas para este tipo de tarefa.

Técnica: $\tau_{\mathrm{md\_08-1}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Determinar a posição da mediana
    - Se o total de observações for par, a mediana ocupa entre a observação n/2 e a observação n/2 +1 .
    - Se o total de observações for ímpar, a mediana ocupa a posição (n+1)/2.

- Usando-se a tabela proposta por Régnier (2011a) que apresentamos no capítulo 2 da primeira parte desta tese, determina-se a posição dos quartis.
- Marca-se em uma tabela as posições dos dados indicando a posição de Q1, Q2, Q3 e os seus valores. Preenche as demais posições, considerando que os valores escolhidos devem ser tais que os valores apresentados na tabela estejam ordenados.

Técnica: τ_{md_08-2}

Esta técnica pode ser descrita como:

- Determinar a posição da mediana
  - Se o total de observações for par, a mediana ocupa entre a observação n/2 e a observação n/2 +1 .
  - Se o total de observações for ímpar, a mediana ocupa a posição (n+1)/2.
- Para determinar o primeiro quartil (Q1) determina-se 25% do efetivo total. Utiliza-se para isto a técnica $\tau_{\%\_01}$. A primeira observação igual ou acima deste valor obtido corresponde ao Q1.
- Para determinar o terceiro quartil (Q3) determina-se 75% do efetivo total. Utiliza-se para isto a técnica $\tau_{\%\_01}$. O valor obtido se for um número inteiro corresponde a posição Q3, se ele não for inteiro o valor de Q3 será o número natural mais próximo e de valor maior do que o encontrado.
- Marca-se em uma tabela as posições dos dados indicando a posição de Q1, Q2, Q3 e os seus valores. Preenche as demais posições considerando que os valores escolhidos devem ser tais que os valores apresentados na tabela estejam ordenados.

2.2.4.3. Organizações praxeológicas pontuais que se formam em torno de determinar a moda

Apresentamos nesta seção as organizações praxeológicas que levantamos sobre a moda.

2.2.4.3.1. Organização matemática pontual 1 sobre a moda $[T_{mo\_01}/\tau_{mo\_01}/\theta_{mo01}/\Theta_{MTCD}]$

Trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa T_{mo_01}.que trata do cálculo da moda.

Tipo de tarefa: T_{mo_01}

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{mo_01} – determinar a moda de dados não ordenados. O fato de ser amostra ou população não altera a técnica associada a este tipo de tarefa.

Técnica: $\tau_{\mathrm{mo\_01-1}}$

Podemos descrever esta técnica assim:

- Ordenam-se as observações;
- Calculam-se as que possuem maior frequência;
- Se o número de efetivos for o mesmo para todas as observações, os dados não possuem moda. Se observamos um efetivo com valor maior do que os demais, podemos dizer que este é o valor da moda e temos uma série modal; se tivermos dois valores com o maior número de efetivos esta série é dita bimodal; se tivermos três efetivos com valores máximos temos uma série trimodal; se o número de efetivos máximo for maior que três temos uma série plurimodal (DODGE, 2007b).

Técnica: $\tau_{\mathrm{mo\_01-2}}$

Procedimentos desta técnica:

- Insere-se na calculadora as observações e os efetivos. Usa-se o comando da calculadora para listar os parâmetros estatísticos. O procedimento é similar para a calculadora TEXAS e CASIO mudando os comandos. Na lista consta o valor da moda. Este procedimento foi observado nos livros didáticos franceses que analisamos

(GAUTHIER, PONCY, 2009a, 2009b; PONCY, GUICHARD, RUSSIER, 2011a, 2011b).

2.2.4.3.2. Organização matemática pontual 2 sobre a moda $[\boldsymbol{T_{mo\_02}}/\boldsymbol{\tau_{mo\_02}}/\boldsymbol{\theta_{mo02}}/\boldsymbol{\Theta_{MTCD}}]$

Trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa T_{mo_02}.que trata do cálculo da moda.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{mo\_02}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{mo_02} – determinar a moda de dados ordenados. O fato de ser amostra ou população não altera a técnica associada a este tipo de tarefa.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathrm{mo\_02-1}}}$

Podemos descrever esta técnica assim:

- Com base nos dados ordenados, calculam-se as observações que possuem maior frequência.
- Se o número de efetivos for o mesmo para todas as observações, os dados não possuem moda. Se observarmos um efetivo com valor maior do que os demais, podemos dizer que este é o valor da moda e temos uma série modal, se tivermos dois valores com o maior número de efetivos esta série é dita bimodal, se tivermos 3 efetivos com valores máximos temos uma série trimodal, se o número de efetivos máximo for maior que 3 temos uma série plurimodal (DODGE, 2007a).

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathrm{mo\_02-2}}}$

Descrevemos esta técnica como:

- As observações e os efetivos são inseridos na calculadora. Deve-se listar os parâmetros estatísticos usando para isto as funções da calculadora. O procedimento é o mesmo para a calculadora TEXAS e CASIO, alterando-se apenas os comandos. Na lista dos parâmetros estatísticos encontramos o valor da moda. Destacamos que esta técnica foi observada nos livros didáticos franceses que analisamos (GAUTHIER, PONCY, 2009a, 2009b; PONCY, GUICHARD, RUSSIER, 2011a, 2011b).

2.2.4.3.3. Organização matemática pontual 3 sobre a moda $[T_{mo\_03}/\tau_{mo\_03}/\theta_{mo03}/\Theta_{MTCD}]$

Trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa T_{mo_03}.que trata do cálculo da moda.

Tipo de tarefa: T_{mo_03}

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{mo_03} – Determinar a moda de dados apresentados em uma tabela ou gráfico com as observações e os efetivos de cada observação. O fato de ser amostra ou população não altera a técnica associada a este tipo de tarefa.

Técnica: $\tau_{\mathrm{mo\_03-1}}$

Podemos descrever esta técnica assim:

- Observa-se na tabela ou gráfico o valor com maior número de efetivos ou frequência (o maior efetivo também é o que possui o valor da maior frequência).
- Se o número de efetivos ou frequência for o mesmo para todas as observações, os dados não possuem moda. Se observarmos um efetivo ou frequência com valor maior do que os demais, podemos dizer que este é o valor da moda e temos uma série modal. Se tivermos dois valores com o maior número de efetivos, esta série é dita bimodal. Se tivermos 3 efetivos ou frequência com valores máximos, temos uma série trimodal. Se o número de efetivos ou frequência máximo for maior que 3 temos uma série plurimodal (DODGE, 2007b).

Técnica: $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{mo\_03-2}}$

Podemos descrever esta técnica assim:

- Insere-se na calculadora as observações e os efetivos. Usa-se o comando da calculadora para listar os parâmetros estatísticos. O procedimento é similar para a calculadora TEXAS e CASIO mudando os comandos. Na lista consta o valor da moda. Este procedimento foi observado nos livros didáticos franceses que analisamos (GAUTHIER, PONCY, 2009a; PONCY, GUICHARD, RUSSIER, 2011a).

2.2.4.3.4. Organização matemática pontual 4 sobre a moda $[\boldsymbol{T_{mo\_04}}/\boldsymbol{\tau_{mo\_04}}/\boldsymbol{\theta_{mo04}}/\boldsymbol{\Theta_{MTCD}}]$

Trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa T_{mo_04}.que trata do cálculo da moda.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{mo\_04}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrito como:

- T_{mo_04} – Determinar a moda de variáveis quantitativas contínuas. O fato de ser amostra ou população não altera a técnica associada a este tipo de tarefa.

Apresentamos duas técnicas. A primeira é baseada no conceito de histograma de Régnier (1998b). A segunda é levando em conta os intervalos indicando a frequência

Técnica: $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{mo\_04-1}}$

Podemos descrever esta técnica assim:

- Determina-se a densidade de frequência de cada intervalo. Esta é obtida ao dividir a frequência pela amplitude de cada intervalo;
- Determina-se o centro do intervalo de maior densidade de frequência;
- A moda é determinada no centro do intervalo de maior densidade de frequência;
- O valor obtido é uma estimação pontual para moda (RÉGNIER, 2012), como não temos todos os valores não podemos calcular a moda.

Técnica: $\tau_{\mathrm{mo\_04-2}}$

Podemos descrever esta técnica assim:

- Determina-se o intervalo de maior frequência;
- Determina-se o ponto médio do intervalo de maior frequência;
- A moda é a medida da frequência correspondente ao centro do intervalo de maior frequência;

Apesar dos problemas apresentados por Régnier (1998b) no qual se mostra, deve-se no histograma considerar como medida dos valores, indicada em um dos eixos, a densidade de frequência e não a frequência. Criamos esta técnica para indicá-la, quando no livro se utiliza esta técnica.

2.2.4.3.5. Organização matemática pontual 5 sobre a moda [$T_{mo\_05}/\tau_{mo\_05}/\theta_{mo05}/\Theta_{MTCD}$]

Trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa T_{mo_05}.que trata do cálculo da moda.

Tipo de tarefa: T_{mo_05}

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{mo_05} – Determinar a moda com base nas porcentagens de observações em um gráfico.

Técnica: $\tau_{\mathrm{mo\_05}}$

Podemos descrever esta técnica assim:

- Observa-se no gráfico qual a observação com maior percentual. Esta corresponde à moda.

2.2.4.3.6. Organização matemática pontual 6 sobre a moda $[\boldsymbol{T_{mo\_06}}/\boldsymbol{\tau_{mo\_06}}/\boldsymbol{\theta_{mo06}}/\boldsymbol{\Theta_{MTCD}}]$

Trataremos neste item, da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa T_{mo_06} sobre a moda.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{mo\_06}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{mo_06} – Determinar a moda sobre um histograma de uma variável contínua.

  Apresentamos duas técnicas para este tipo de tarefa.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathrm{mo\_6-1}}}$

Podemos descrever esta técnica assim:

- Segundo Régnier (2012) pode-se fornecer como estimação pontual a medida determinada no centro do intervalo de maior densidade de frequência.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathrm{mo\_6-2}}}$

Apesar de considerarmos mais adequado para o histograma a utilização do termo densidade de frequência e não frequência, a medida de um dos eixos que indica a moda em um dado ponto do intervalo, observamos nos livros didáticos analisados esta segunda técnica que descrevemos como:

- Determina-se no centro do intervalo de maior frequência a moda. Este intervalo de maior frequência é chamado de intervalo modal ou classe modal.

2.2.4.4. Organizações praxeológicas pontuais que se formam em torno de determinar a amplitude

Apresentamos nesta seção as organizações praxeológicas que levantamos sobre a amplitude.

2.2.4.4.1. Organização matemática pontual 1 sobre a amplitude $[\boldsymbol{T_{a\_01}}/\boldsymbol{\tau_{a\_01}}/\boldsymbol{\theta_{a01}}/\boldsymbol{\Theta_{MTCD}}]$

Trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa T_{a_01}.que trata do cálculo da amplitude.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{a\_01}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{a_01} - Determinar a amplitude de dados não ordenados da população ou da amostra.

Para este tipo de tarefa apresentamos duas técnicas:

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\mathrm{a\_01-1}}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Ordenar os dados;
- Determinar o maior e o menor valor do conjunto de dados;
- Calcular a diferença entre o maior valor (x_p) e o menor valor (x_1). Esta pode ser representada pela fórmula (fórmula elaborada tomando como referência a representação de RÉGNIER, 2007):

$$[\mathrm{x_1};\ \mathrm{x_p}] = \mathrm{x_p} - \mathrm{x_1}$$

Quando temos um grande volume de dados em uma planilha e não ordenados, embora possamos dar um comando para ordenar os dados, quando se trata de fazer várias simulações, a técnica que apresentamos a seguir é bastante prática. Observamos o uso da mesma em um dos livros analisados (PONCY; GUICHARD; RUSSIER, 2011a).

Técnica: $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{a\_01-2}}$

Esta técnica pode ser descrita como:

- Digita-se em uma célula o nome MAX (máximo) e o intervalo que se pretende determinar o maior valor, o sinal de subtração, o nome MIN e o intervalo no qual se pretende obter o menor valor. Este pode ser descrito assim para o Excel (versão francesa):
- = MAX(A1:A10) – MIN(A1:A10).

Poderíamos assim traduzir: determine a amplitude das observações que estão nas células que estão no intervalo [A1; A10] = A1; A2; A3; A4; A5; A6; A7; A8; A9; A10.

2.2.4.4.2. Organização matemática pontual 2 sobre a amplitude $[\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{a}\_\mathbf{02}}/\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{a}\_\mathbf{02}}/\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{a}\mathbf{02}}/\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{MTCD}}]$

Trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa T_{a_02}.que trata do cálculo da amplitude.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{a}\_\mathbf{02}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{a_02} - Determinar a amplitude de dados ordenados da população ou da amostra de uma série apresentados em uma tabela, um gráfico ou um diagrama de caixa e bigodes.

Técnica: $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{a\_02}}$

Para todas estas tarefas podemos usar a mesma técnica, que pode ser descrita como:

- Identificar o maior valor e menor valor do conjunto de dados;
- Calcular a diferença entre o maior valor (x_p) e o menor valor (x_1). Esta pode ser representada pela fórmula (fórmula elaborada tomando como referência a representação de RÉGNIER, 2007):

$$[\mathrm{x}_1;\ \mathrm{x}_\mathrm{p}] = \mathrm{x}_\mathrm{p} - \mathrm{x}_1$$

2.2.4.4.3. Organização matemática pontual 3 sobre a amplitude $[\boldsymbol{T_{a\_03}}/\boldsymbol{\tau_{a\_03}}/\boldsymbol{\theta_{a03}}/\boldsymbol{\Theta_{MTCD}}]$

Trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa T_{a_03}.que trata do cálculo da moda.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{a\_03}}$

Este tipo de tarefa pode ser descrita como:

- T_{a_03} - Determinar a amplitude de dados agrupados da população ou da amostra.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{a\_03}}$

Para esta tarefa podemos:

- Determinar o centro de duas classes extremas;
- Determinar a diferença entre o centro de duas classes extremas: δ_1 (centro da primeira classe) e δ_k (centro da última classe):

$Amplitude = \delta_k - \delta_1$ (DODGE, 2007a, tradução nossa, apresentado na fórmula 58 do volume 1 desta tese)

2.2.4.5. Organizações praxeológicas pontuais que se formam em torno de determinar a variância

Apresentamos nesta seção as organizações praxeológicas que levantamos sobre a variância.

2.2.4.5.1. Organização matemática pontual 1 sobre a variância $[T_{\sigma^2\_01}/\tau_{\sigma^2\_01}/\theta_{\sigma^2 01}/\Theta_{MTCD}]$

Trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa $T_{\sigma^2\_01}$.que trata do cálculo da variância.

Tipo de tarefa: $T_{\sigma^2\_01}$

Podemos descrever este tipo de tarefa como:

- $T_{\sigma^2\_01}$ – Determinar a variância de dados não ordenados ou ordenados da população ou da amostra.

Tarefa

Temos diversas tarefas diferentes associadas a esta tarefa.

- $t_{\sigma^2\_01\_1}$ - Determinar a variância da série A={7; 4; 9; 5} formada pelas notas dos alunos de uma turma D (dados não ordenados);
- $t_{\sigma^2\_01\_2}$ - Determinar a variância da série A={4; 5; 7; 9} formada pelas notas dos alunos de uma turma D (dados ordenados);
- $t_{\sigma^2\_01\_3}$ - Determinar a variância da série A, formada pelas notas dos alunos de uma turma D. As notas estão na tabela 45.

Tabela 45 – Notas dos estudantes da turma D.

Estudante	E1	E2	E3	E4
Notas	4	5	7	9

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Apresentamos técnicas para este tipo de tarefa.

Técnica: $\tau_{\sigma^2\_01-01}$

Podemos descrever a técnica como:

- Calcular a diferença entre cada observação e a média;
- Elevar ao quadrado o resultado;

- Somam-se os resultados obtidos;
- Divide-se o resultado pelo número de sujeitos da população, se for uma amostra pelos sujeitos da amostra.

Este processo é representado pela fórmula 70 (capítulo 2 do volume 1) que reproduzimos abaixo:

$$\boldsymbol{s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\sigma^2\_01-02}}$

Podemos descrever a técnica como:

- Elevar ao quadrado cada observação;
- Somam-se os resultados obtidos.
- Divide-se o resultado pelo número de sujeitos da população, se for uma amostra pelos sujeitos da amostra;
- Subtrai-se o resultado pelo quadrado da média aritmética.

Este processo é representado pela fórmula 69 (capítulo 2 indicada no primeiro volume desta tese) que reproduzimos abaixo:

$$\boldsymbol{s^2} = \left(\boldsymbol{\frac{1}{n}}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} x_i^2\right) - \bar{x}^2$$

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\sigma^2\_01-03}}$

Esta técnica é para ser utilizada em uma planilha eletrônica (Excel). Podemos descrever a técnica como:

- Digita-se em uma célula o nome do comando para variância e o intervalo no qual constam os valores aos quais se pretende calcular o desvio padrão. Este pode ser descrito assim para o Excel:
- = VAR.P(A1:A10)

Poderíamos assim traduzir: calcule a variância das observações que estão nas células que estão no intervalo [A1; A10] = A1; A2; A3; A4; A5; A6; A7; A8; A9; A10.

2.2.4.5.2. Organização matemática pontual 2 sobre a variância $[T_{\sigma^2\_02}/\tau_{\sigma^2\_02}/\theta_{\sigma^2 02}/\Theta_{MTCD}]$

Trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa $T_{\sigma^2\_01}$.que trata do cálculo da variância.

Tipo de tarefa: $T_{\sigma^2\_02}$

Podemos descrever este tipo de tarefa como:

- $T_{\sigma^2\_02}$ – Determinar a variância de dados em uma tabela com as observações e os efetivos de cada observação.

Para o cálculo deste tipo de tarefa, Régnier (2007) apresenta duas técnicas:

Técnica: $\tau_{\sigma^2\_02-1}$

Podemos descrever a técnica como:

- Calcular a diferença entre cada observação e a média;
- Elevar ao quadrado o resultado;
- Multiplica-se o resultado pelo número de efetivos de cada observação;
- Somam-se os resultados obtidos;
- Divide-se o resultado pelo número de sujeitos da população, se for uma amostra pelos sujeitos da amostra.

Este processo pode ser representado pelas fórmulas 70 e 71 (capítulo 2 da primeira parte desta tese), apresentadas por Régnier (2007, p.12) que reproduzimos abaixo:

Variância sobre a população (N):

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(x_k - \mu)^2}$$

Variância sobre a amostra (n):

$$\sigma^2_{ech} = \boldsymbol{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(x_k - m)^2}$$

Técnica: $\tau_{\sigma^2\_02-2}$

Podemos descrever a técnica como:

- Eleva-se cada observação ao quadrado e multiplica-se respectivamente o valor obtido pelo número de efetivos de cada observação;
- Somam-se os resultados obtidos;
- Divide-se o resultado pelo número de sujeitos da população, se for uma amostra pelos sujeitos da amostra;
- Subtrai-se o resultado obtido da média elevado ao quadrado obtendo a variância.

Este processo pode ser representado pelas fórmulas 70 e 71 (capítulo 2, da primeira parte desta tese), apresentadas por Régnier (2007) que reproduzimos abaixo:

Variância sobre a população (N):

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k x_k^2\right) - \mu^2}$$

Variância sobre a amostra (n):

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=p} n_k x_k^2\right) - m^2}$$

No caso do uso de funções específicas da calculadora, temos uma terceira técnica.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\sigma^2\_02-3}}$

Podemos descrever a técnica como:

- Entrar na calculadora com as observações e os efetivos. Usa-se o comando específico para listar a variância. O comando muda em função de ser uma calculadora Texas ou Casio (as apresentadas nos livros didáticos franceses analisados).

2.2.4.5.3. Organização matemática pontual 3 sobre determinar a variância $[\boldsymbol{T_{\sigma^2\_03}}/\boldsymbol{\tau_{\sigma^2\_03}}/\boldsymbol{\theta_{\sigma^2 03}}/\boldsymbol{\Theta_{MTCD}}]$

Trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa $T_{\sigma^2\_03}$.que trata do cálculo da variância.

Tipo de tarefa: $T_{\sigma^2\_03}$

Podemos descrever este tipo de tarefa como:

- $T_{\sigma^2\_03}$ – Determinar a variância de variáveis estatísticas contínuas.

Para o cálculo deste tipo de tarefa, Régnier (2000a) apresenta duas técnicas.

Técnica: $\tau_{\sigma^2\_03-1}$

Podemos descrever a técnica como:

- Calcular a diferença entre cada centro do intervalo e a média;
- Elevar ao quadrado o resultado;
- Multiplica-se o resultado pelo número de efetivos de cada intervalo;
- Somam-se os resultados obtidos;
- Divide-se o resultado pelo número de sujeitos da população, se for uma amostra pelos sujeitos da amostra.

Este processo pode ser representado pela fórmula 70 (capítulo 2 da primeira parte desta tese), apresentada por Régnier (2007) para população que reproduzimos abaixo:

$$\boldsymbol{\sigma^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k(c_k - \mu)^2}$$

Este processo é o mesmo para amostra (fórmula 71, nesta tese), conforme a fórmula abaixo (RÉGNIER, 2007):

$$\sigma_{ech}^2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k(c_k - m)^2}$$

Técnica: $\tau_{\sigma^2\_03-2}$

Podemos descrever a técnica como:

- Eleva-se cada centro do intervalo ao quadrado e multiplica-se respectivamente o valor obtido pelo número de efetivos de cada intervalo;
- Somam-se os resultados obtidos;

- Divide-se o resultado pelo número de sujeitos da população, se for uma amostra pelos sujeitos da amostra;
- Subtrai-se o resultado obtido da média elevada ao quadrado obtendo a variância.

Este processo pode ser representado pela fórmula 70 (capítulo 2 da primeira parte desta tese), apresentada por Régnier (2007) para população que reproduzimos abaixo:

$$\boldsymbol{\sigma^2} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k c_k}^{\mathbf{2}}\right) - \boldsymbol{\mu}^2$$

Este processo é o mesmo para amostra (fórmula 71, nesta tese), conforme a fórmula abaixo (RÉGNIER, 2007):

$$\sigma_{ech}^2 = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k c_k}^{\mathbf{2}}\right) - \boldsymbol{m}^2$$

Uma outra forma de determinar é usando a calculadora indicada nas coleções francesas que analisamos. Descrevemos a seguir esta técnica.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\sigma^2\_03-3}}$

Podemos descrever a técnica como:

- Entrar na calculadora com os centros dos intervalos e os efetivos. Usar o comando para listar as variáveis estatísticas. O comando muda em função de ser uma calculadora Texas ou Casio (apresentadas nos livros didáticos franceses analisados).

2.2.4.5.4. Organização matemática pontual 4 sobre a variância $[\boldsymbol{T_{\sigma^2\_04}/\tau_{\sigma^2\_04}/\theta_{\sigma^2 04}/\Theta_{MTCD}}]$

Trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa $T_{\sigma^2\_04}$.que trata do cálculo da variância.

Tipo de tarefa: $T_{\sigma^2\_04}$

Podemos descrever este tipo de tarefa como:

- $T_{\sigma^2\_02}$ – Determinar a variância de dados em uma tabela com as observações e as frequências de cada observação.

Apoiando-se nas duas técnicas que usamos no tipo de tarefa 02 sobre variância, apresentamos as duas técnicas para este tipo de tarefa.

Técnica: $\tau_{\sigma^2\_04-1}$

Podemos descrever a técnica como:

- Calcular a diferença entre cada observação e a média;
- Elevar ao quadrado o resultado;
- Multiplica-se o resultado pela frequência $\left({n_k}/{efetivo\ total}\right)$ de cada observação;
- Somam-se os resultados obtidos.

Este processo pode ser representado pelas fórmulas 66 e 67 (capítulo 2 da primeira parte desta tese), adaptado de uma outra fórmula apresentada por Régnier (2007, p.12) que reproduzimos abaixo:

Variância sobre a população (N):

$$\boldsymbol{\sigma^2} = \sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{f_k(x_k - \mu)^2}$$

Variância sobre a amostra (n):

$$\sigma^2_{ech} = \sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{f_k(x_k - m)^2}$$

Tecnologia: $\theta_{\sigma^2\_04-1}$

A tecnologia é empregada para justificar uma técnica e pode vir por meio de uma demonstração. Neste item levantaremos formas de justificativa desta técnica nos livros didáticos analisados. Observamos apenas uma situação no livro Fr_C1.2[A] que trata da demonstração da fórmula.

Técnica: $\tau_{\sigma^2\_04-2}$

Podemos descrever a técnica como:

- Eleva-se cada observação ao quadrado e multiplica-se respectivamente o valor obtido pela frequência de cada observação;
- Somam-se os resultados obtidos;
- Subtrai-se o resultado obtido da média elevada ao quadrado obtendo a variância.

Este processo pode ser representado pelas fórmulas 66 e 67 (capítulo 2 da primeira parte desta tese), adaptado de uma outra fórmula apresentada por Régnier (2007, p.12) que reproduzimos abaixo:

Variância sobre a população (N):

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \left(\sum_{k=1}^{k=p} f_k x_k^2\right) - \mu^2}$$

Variância sobre a amostra (n):

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \left(\sum_{k=1}^{k=p} f_k x_k^2\right) - m^2}$$

2.2.4.6. Organizações praxeológicas pontuais que se formam em torno do desvio padrão

Apresentamos nesta seção as organizações praxeológicas que levantamos sobre o desvio padrão. Duas delas não envolvem determinar o desvio padrão (nº 5 e 6), mas as consideramos importantes. Estas foram levantadas na coleção francesa que analisamos.

2.2.4.6.1. Organização matemática pontual 1 sobre o desvio padrão [$\boldsymbol{T_{\sigma\_01}/\tau_{\sigma\_01}/\theta_{\sigma 01}/\Theta_{MTCD}}$]

Trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa T_{σ_01}.que trata do cálculo da variância.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{\sigma\_01}}$

Podemos descrever este tipo de tarefa como:

- T_{σ_01} – Determinar o desvio padrão de dados não ordenados ou ordenados da população ou da amostra. Estes dados podem ou não ser apresentados em uma tabela sem os efetivos e/ou a frequência.

Descrevemos duas técnicas para determinar o desvio padrão para este tipo de tarefa.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\sigma\_01-01}}$

Os procedimentos desta técnica são:

- Determinar a diferença entre cada observação e a média;
- Elevar ao quadrado o resultado;
- Somar os resultados obtidos;
- Divide-se o resultado pelo número de sujeitos da população, se for uma amostra pelos sujeitos da amostra. E em seguida, calcula-se a raiz quadrada deste valor.

Este processo é representado pela fórmula 73 (capítulo 2 do primeiro volume desta tese) que reproduzimos abaixo:

$$\boldsymbol{s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}$$

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\sigma\_01-02}}$

Os procedimentos desta técnica são:

- Elevar ao quadrado cada observação;
- Somar os resultados obtidos;
- Divide-se o resultado pelo número de sujeitos da população, se for uma amostra pelos sujeitos da amostra;
- Subtrai-se do resultado da divisão do quadrado da média;
- Tira-se a raiz quadrada do valor obtido na etapa anterior.

Este processo é representado pela fórmula 74 (capítulo 2 do primeiro volume) que reproduzimos abaixo:

$$s = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \overline{x}^2}$$

A técnica utilizada pode se limitar a usar um comando. Neste caso, a técnica não aparece, sendo conhecida pelo programador do software utilizado na planilha ou na calculadora. Descrevemos a seguir uma técnica utilizada em planilha eletrônica que não aparece assim nas técnicas anteriores descritas.

Técnica: τ_{σ_01-3}

Esta técnica é para ser utilizada em uma planilha eletrônica (Excel). Podemos descrever a técnica como:

- Digita-se em uma célula o nome do comando para o desvio padrão e o intervalo, no qual constam os valores aos quais se pretendem calcular o desvio padrão. Este pode ser descrito assim para o Excel na versão francesa:
- = ECARTYPEP(A1:A10)

Poderíamos assim traduzir: calcule o desvio padrão das observações que estão nas células que estão no intervalo [A1; A10] = A1; A2; A3; A4; A5; A6; A7; A8; A9; A10.

Técnica: τ_{σ_01-4}

Embora se possa utilizar a calculadora para determinar o desvio padrão (usando uma das duas técnicas iniciais que apresentamos), existem comandos específicos na calculadoras recomendadas nos livros didáticos franceses. Assim esta técnica pode ser descrita como:

- Entrar na calculadora com as observações e os efetivos (1 para este tipo de técnica no qual os dados não são dados com os efetivos). Usar o comando listar a média e o desvio padrão (são listadas as variáveis estatísticas). O comando muda em função de ser uma calculadora Texas ou Casio (as apresentadas nos livros didáticos franceses analisados).

2.2.4.6.2. Organização matemática pontual 2 sobre o desvio padrão [$T_{\sigma\_02}/\tau_{\sigma\_02}/\theta_{\sigma 02}/\Theta_{MTCD}$]

Trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa T_{σ_02}.que trata do desvio padrão.

Tipo de tarefa: T_{σ_02}

Podemos descrever este tipo de tarefa como:

- T_{σ_02} – Determinar o desvio padrão de dados em uma tabela com as observações e os efetivos de cada observação.

Régnier (2007) apresenta duas técnicas para a variância que adaptamos para o desvio padrão. Apresentamos a seguir estas duas técnicas.

Técnica: τ_{σ_02-1}

Os procedimentos desta técnica são:

- Calcular a diferença entre cada observação e a média;
- Elevar ao quadrado o resultado;
- Multiplica-se o resultado pelo número de efetivos de cada observação;
- Somar os resultados obtidos;
- Divide-se o resultado pelo número de sujeitos da população, se for uma amostra pelos sujeitos da amostra;
- Tira-se a raiz quadrada do resultado.

Este processo pode ser representado pelas fórmulas 75 e 76 (capítulo 2 da primeira parte desta tese), adaptado de Régnier (2007) que reproduzimos abaixo:

Desvio padrão sobre a população (N):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{k=p}} \boldsymbol{n_k}(\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{2}}}$$

Desvio padrão sobre a amostra (n):

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k}(\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{m})^2}$$

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\sigma\_02-2}}$

Podemos descrever a técnica como:

- Eleva-se cada observação ao quadrado e multiplica-se respectivamente o valor obtido pelo número de efetivos de cada observação;
- Somar os resultados obtidos;
- Divide-se o resultado pelo número de sujeitos da população, se for uma amostra pelos sujeitos da amostra;
- Subtrai-se o resultado obtido da média elevada ao quadrado;
- Tira-se a raiz quadrada do resultado obtido e determina-se assim o desvio padrão.

Este processo pode ser representado pelas fórmulas 75 e 76 (capítulo 2 da primeira parte desta tese), adaptada de Régnier (2007, p.12):

Desvio padrão tomando por bases dados de uma população (N):

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k x_k^2}\right) - \boldsymbol{\mu^2}}$$

Desvio padrão tomando por bases dados de uma amostra (n):

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k x_k^2}\right) - \boldsymbol{m^2}}$$

Apresentamos uma terceira técnica, apresentada nos livros franceses analisados, usando a calculadora.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\sigma\_02-3}}$

Podemos descrever como:

- Entrar na calculadora com as observações e os efetivos (1 para este tipo de técnica no qual os dados não são dados com os efetivos). Usar o comando para listar as variáveis estatísticas. O comando muda em função de ser uma calculadora Texas ou Casio (as apresentadas nos livros didáticos analisados).

2.2.4.6.3. Organização matemática pontual 3 sobre o desvio padrão [$\boldsymbol{T_{\sigma\_03}/\tau_{\sigma\_03}/\theta_{\sigma 03}/\Theta_{MTCD}}$]

Trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa T_{σ_02}.que trata do desvio padrão.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{\sigma\_03}}$

Podemos descrever este tipo de tarefa como:

- T_{σ_03} – Determinar o desvio padrão de variáveis estatísticas contínuas.

Régnier (2007) apresenta duas técnicas para a variância que adaptamos para o desvio padrão. Apresentamos a seguir estas duas técnicas.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\sigma\_03-1}}$

Podemos descrever a técnica como:

- Determina-se o centro de cada intervalo;
- Calcular a diferença entre cada centro do intervalo e a média;
- Elevar ao quadrado o resultado;
- Multiplica-se o resultado pelo número de efetivos de cada intervalo;
- Somar os resultados obtidos;
- Divide-se o resultado pelo número de sujeitos da população, se for uma amostra pelos sujeitos da amostra;
- Tira-se a raiz quadrada do resultado obtido.

Este processo pode ser representado pela fórmula 79 (capítulo 2 da primeira parte desta tese) apresentada por Régnier (2000a) para população que reproduzimos abaixo:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}}\sum_{k=1}^{k=p} n_k(c_k-\mu)^2}$$

Em caso de amostra o procedimento não muda. Contudo, temos em Régnier uma fórmula específica que apresentamos nesta tese como sendo a fórmula 80 (capítulo 2 do primeiro volume):

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k(c_k - m)^2}}$$

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\sigma\_03-2}}$

Apresentamos os passos desta técnica:

- Determina-se o centro de cada intervalo;
- Eleva-se cada centro do intervalo ao quadrado e multiplica-se respectivamente o valor obtido pelo número de efetivos de cada intervalo;
- Somam-se os resultados obtidos;
- Divide-se o resultado pelo número de sujeitos da população, se for uma amostra pelos sujeitos da amostra;
- Subtrai-se o resultado obtido da média elevada ao quadrado;
- Eleva-se ao quadrado o resultado obtido.

Este processo pode ser representado pela fórmula 79 (capítulo 2, da primeira parte desta tese), apresentada por Régnier (2007) para população que reproduzimos abaixo:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k c_k}^{\mathbf{2}}\right) - \boldsymbol{\mu}^2}$$

Em caso de amostra, o procedimento não muda. Contudo temos em Régnier (2007) uma fórmula específica que representamos no volume 1 desta tese, como sendo fórmula 80:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{n_k c_k}^{\mathbf{2}}\right) - \boldsymbol{m}^2}$$

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\sigma\_03-3}}$

Apresentamos os passos desta técnica:

- Determina-se o centro de cada intervalo;
- Entrar na calculadora com os centros dos intervalos e os efetivos. Usar o comando para listar as variáveis estatísticas. O comando muda em função de ser uma calculadora Texas ou Casio (as apresentadas nos livros didáticos franceses analisados).

2.2.4.6.4. Organização matemática pontual 4 sobre o desvio padrão $[\boldsymbol{T_{\sigma\_04}}/\boldsymbol{\tau_{\sigma\_04}}/\boldsymbol{\theta_{\sigma\_04}}/\boldsymbol{\Theta_{MTCD}}]$

Trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa T_{σ_04}.que trata do desvio padrão.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{\sigma\_04}}$

Podemos descrever este tipo de tarefa como:

- T_{σ_04} – Determinar o desvio padrão de dados em uma tabela com as observações e as frequências de cada observação.

Régnier (2007) apresenta duas técnicas para a variância que adaptamos para o desvio padrão. Apresentamos a seguir estas duas técnicas.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\sigma\_04-1}}$

Os procedimentos desta técnica são:

- Calcular a diferença entre cada observação e a média;
- Elevar ao quadrado o resultado;
- Multiplica-se o resultado pela frequência de cada observação;
- Somam-se os resultados obtidos;
- Tira-se a raiz quadrada do resultado.

Este processo pode ser representado pelas fórmulas 77 e 78 (capítulo 2, da primeira parte desta tese), adaptado de Régnier (2007) que reproduzimos abaixo:

Desvio padrão sobre a população (N):

$$\sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=p} f_k(x_k - \mu)^2}$$

Desvio padrão sobre a amostra (n):

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=p} f_k(x_k - m)^2}$$

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\sigma\_04-2}}$

Podemos descrever a técnica como:

- Eleva-se cada observação ao quadrado e multiplica-se respectivamente o valor obtido pela frequência de cada observação;
- Somam-se os resultados obtidos;
- Subtrai-se o resultado obtido da média elevada ao quadrado;
- Tira-se a raiz quadrada do resultado obtido e determina-se assim o desvio padrão.

Esta processo pode ser representado pelas fórmulas 77 e 78 (capítulo 2, da primeira parte desta tese), adaptada de Régnier (2007, p.12):

Desvio padrão tomando por base dados de uma população (N):

$$\sigma = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{f_k x_k^2}\right) - \boldsymbol{\mu^2}}$$

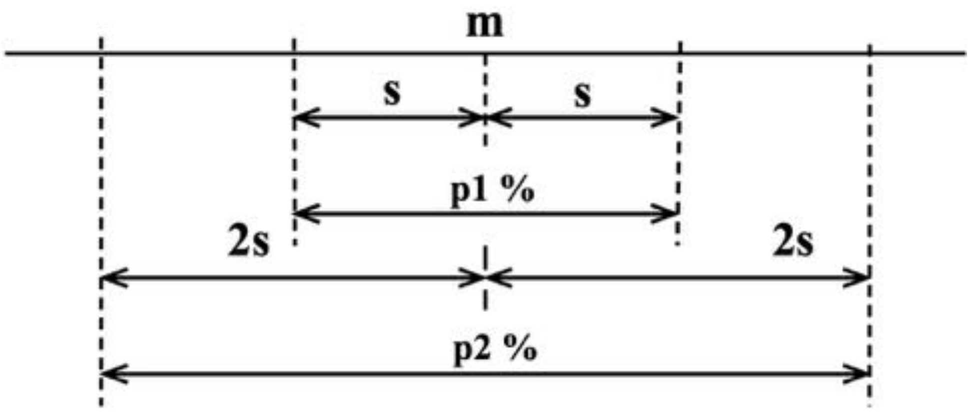
Desvio padrão tomando por base dados de uma amostra (n):

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{k=p} \boldsymbol{f_k x_k^2}\right) - \boldsymbol{m^2}}$$

2.2.4.6.5. Organização matemática pontual 5 sobre o desvio padrão [$\boldsymbol{T_{\sigma\_05}/\tau_{\sigma\_05}/\theta_{\sigma\_05}/\Theta_{MTCD}}$]

O desvio padrão nos dá uma informação importante de como os dados estão dispersos em torno da média. Em função das características dos dados, distribuição (para os casos de simétrica ou moderadamente assimétrica) e do número de observações, podemos ter uma ideia do percentual das observações em torno da média. Observamos uma atividade no livro didático com a demanda deste tipo de cálculo e consideramos pertinente para ampliar o nível de conceptualização em torno do desvio padrão, como também, o conhecimento sobre as organizações praxeológicas que se formam em torno deste. Podemos ter a informação que envolve um desvio padrão em torno da média ou dois desvios padrões em torno da média. Este tipo de tarefa pressupõe que o desvio padrão e a média já foram determinadas. A figura 41, ilustra esse tipo de informação.

Figura 41 – Porcentagem em torno da média, considerando a porcentagem das observações entre um desvio padrão acima e abaixo da média e entre dois desvios padrões em torno da média.



Fonte: Desenho nosso feito com o software iDraw. Usamos o s, pois não encontramos a fonte com letras gregas minúsculas para o símbolo que estamos usando no software. O s, conforme descrevemos no capítulo 2 do primeiro volume, também é utilizado para o desvio padrão.

Podemos precisar identificar qual é o percentual. Logo, trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa T_{σ_04}.que trata do desvio padrão.

Tipo de tarefa: T_{σ_05}

Podemos descrever este tipo de tarefa como:

- T_{σ_05} – Determinar o percentual de observações em torno da média, considerando um ou mais desvios padrões.

Técnica: τ_{σ_05}

Podemos descrever a técnica como:

- Determina-se o valor a um ou mais desvios padrões em torno da média. Este pode ser assim expresso: $m - \sigma$ e $m + \sigma$ para um desvio padrão; $m - 2\sigma$ e $m + 2\sigma$ para dois desvios padrões.
- Levanta-se o número de observações que estão compreendidas no intervalo determinado;
- Divide-se o número de observações encontradas pelo total de observações da série e multiplica-se por 100 determinando o percentual.

2.2.4.6.6. Organização matemática pontual 6 sobre o desvio padrão $[T_{\sigma\_06}/\tau_{\sigma\_06}/\theta_{\sigma\_06}/\Theta_{MTCD}]$

Tal como a anterior, esta surgiu de observações deste tipo de organização matemática em um livro didático. Este tipo de organização é realizada em torno do tipo de tarefa T_{σ_06} que trata do desvio padrão.

Tipo de tarefa: T_{σ_06}

Podemos descrever este tipo de tarefa como:

- T_{σ_06} – Determinar as observações que estão dentro ou ultrapassam um determinado número de desvio padrão em torno da média.

Tarefa: t_{σ_06}

Apresentamos , na figura 42, um exemplo prático da aplicação deste tipo de tarefa.

Figura 42 – Tarefa encontrada em Poncy, Guichard, Russier (2011a, p. 259).

72 Contrôle de qualité

Le contrôle qualité des analyses de biologie médicale est un ensemble de moyens utilisé par le biologiste pour détecter et corriger les erreurs pouvant entacher les résultats des examens de laboratoire.

Voici un des éléments de ce dispositif.

Un même échantillon d'urée (une substance présente dans les urines) a été dosé sur les 31 jours d'un mois ; on a obtenu les résultats suivants, en grammes par litre :

0,3 – 0,28 – 0,31 – 0,3 – 0,3 – 0,29 – 0,25 – 0,32 – 0,29 – 0,3 – 0,31 – 0,29 – 0,33 – 0,32 – 0,3 – 0,28 – 0,29 – 0,31 – 0,3 – 0,28 – 0,31 – 0,32 – 0,28 – 0,3 – 0,29 – 0,3 – 0,27 – 0,38 – 0,29 – 0,3 – 0,31.

1. Calculer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type σ de cette série de résultats.

2. Le laboratoire indique que les « limites de confiance » sont à $\overline{x} - 2\sigma$ et $\overline{x} + 2\sigma$, et que les « limites d'alerte » sont à $\overline{x} - 3\sigma$ et $\overline{x} + 3\sigma$.

a. A-t-on atteint pendant le mois les limites de confiance ou celles d'alerte ?

b. Interpréter ces termes et expliquer leur utilité pour un laboratoire.

Fonte: Poncy, Guichard, Russier (2011a, p. 259).

Considere na figura 42 o item 2. No laboratório temos um limite de confiança de dois desvios padrões acima e abaixo da média ($m - 2\sigma$ e $m + 2\sigma$) e um limite de alerta de 3 desvios padrões acima e abaixo da média ($m - 3\sigma$ e $m + 3\sigma$). Como nesta atividade temos: $\bar{x} = 0{,}3$ e $\sigma \cong 0{,}0217$, os limites de confiança são 0,2566 e 0,3434 que foram ultrapassados duas vezes. Os limites de alerta da máquina são de 0,2349 e 0,3651 e foram ultrapassados uma vez. Estes resultados indicam problemas com a máquina utilizada na realização dos exames de laboratório e a necessidade de uma regulagem neste equipamento.

Apresentamos a seguir a técnica usada para este tipo de tarefa.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\sigma\_06}}$

Podemos descrever a técnica como:

- Determina-se o valor a um ou mais desvios padrões em torno da média. Este pode ser assim expresso: $m - \sigma$ e $m + \sigma$ para um desvio padrão; $m - 2\sigma$ e $m + 2\sigma$ para dois desvios padrões;
- Verifica-se as observações que estão compreendidas neste intervalo determinado e as que estão fora deste intervalo.

2.2.4.6.7. Organização matemática pontual 7 sobre o desvio padrão $[\boldsymbol{T_{\sigma\_07}/\tau_{\sigma\_07}/\theta_{\sigma\_07}/\Theta_{MTCD}}]$

Esta organização matemática pontual surgiu de observações de um tipo de tarefa em um livro didático analisado (PONCY; GUICHARD; RUSSIER, 2011a). Apresentamos a seguir o tipo de tarefa que organizamos em função da atividade proposta no livro.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{\sigma\_07}}$

Podemos descrever este tipo de tarefa como:

T_{σ_07} – Determinar o desvio padrão de uma série A. A série A é formada pela soma das observações de uma série B (com um total de N1 efetivos) com C (com um total de N2) efetivos. Dessa forma, o número total de efetivos da série A é dado por N = N1+N2. Sabe-se o valor do desvio padrão da série B e da série C, assim como, a média destas duas séries. Poderíamos chamar, por analogia à media aritmética combinada, esse desvio padrão obtido de desvio padrão combinado.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{\sigma\_07}}$

Esta técnica pode ser representada por uma fórmula na qual apresentamos os passos. Tomando como referência a construção observada no livro, procuramos desenvolver a fórmula que reproduz em parte a técnica utilizada no livro (PONCY; GUICHARD; RUSSIER, 2011a).

Para simplificar a apresentação, utilizamos os símbolos de y e z. Temos assim como elementos dados no problema:

Série B:

Média de B: $\bar{y}$

Variância de B: σ_B^2 (obtido elevando-se ao quadrado o desvio padrão de B fornecido no problema)

Total de efetivos de B: N_B

Série C:

Média de C: $\bar{z}$

Variância de C: σ_C^2(obtido elevando-se ao quadrado o desvio padrão de C fornecido no problema)

Total de efetivos de C: N_C

Série A:

Média de A: $\bar{x}$ (obtida com a técnica para determinar a média aritmética combinada já apresentada).

Variância de A: σ_A^2 (A ser determinado)

Desvio padrão de A: $\sigma_{A=}\sqrt{\sigma_A^2}$ (A ser determinado)

Total de efetivos de A: $N_A = N_B + N_C$

Com base nestas informações e utilizando a fórmula para o cálculo da variância (adaptada da fórmula 69 apresentada no primeiro volume), podemos escrever para a série C:

$$\sigma_C^2 = \left(\frac{z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2}{N_C}\right) - \bar{z}^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{p} z_i^2}{N_C}\right) - \bar{z}^2$$

Transpondo os termos e isolando o somatório das observações de um lado temos (1):

$$\sum_{i=1}^{p} z_i^2 = (\sigma_C^2 + \bar{z}^2)N_C$$

Fazendo a mesma coisa para a série B, temos (2):

$$\sigma_B^2 = \left(\frac{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2}{N_B}\right) - \bar{y}^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{p} y_i^2}{N_B}\right) - \bar{y}^2$$

Considerando para a série A:

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2}{N_C + N_B}\right) - \bar{x}^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{p} z + \sum_{i=1}^{p} y}{N_C + N_B}\right) - \bar{x}^2$$

Substituindo 1 e 2 na série A, temos a fórmula que apresentamos abaixo, que vamos chamar da fórmula da variância combinada, usando o mesmo princípio da média aritmética combinada:

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{(V_C + \bar{z}^2)N_C + (V_B + \bar{y}^2)N_B}{N_C + N_B}\right) - \bar{x}^2 \quad (87)$$

Fórmula 87 – Fórmula da variância combinada.

Com base nesta apresentação, podemos assim descrever a técnica:

- Determinar a média da série A tomando por base as médias das séries B e C (usando a técnica da média aritmética combinada já apresentada (τ_{mc_01});
- Determinar as variâncias das séries B e C. Para isto basta elevar ao quadrado o desvio padrão destas séries;
- Determinar a variância da série A, tendo para isso a fórmula da variância combinada (87);
- Tirar a raiz quadrada da variância da série A, obtendo assim o desvio padrão da série A.

2.2.4.7. Organizações praxeológicas pontuais que se formam em torno de determinar o coeficiente de variação

Apresentamos nesta seção as organizações praxeológicas que levantamos sobre o coeficiente de variação.

2.2.4.7.1. Organização matemática pontual sobre o coeficiente de variação [$\boldsymbol{T_{C.V.\_01}}$/ $\boldsymbol{\tau_{C.V.\_01}}$/$\boldsymbol{\theta_{C.V.07}}$/$\boldsymbol{\Theta_{MTCD}}$]

Trataremos neste item da organização pontual realizada em torno do tipo de tarefa $T_{C.V\_\mathbf{01}}$.que trata de determinar o coeficiente de variação.

Tipo de tarefa $\boldsymbol{T_{C.V\_01}}$.

Este tipo de tarefa trata de:

- $T_{C.V\_01}$ - Determinar o coeficiente de variação de dados ordenados ou não, da amostra ou população.

Para determinar o C.V. podemos utilizar a técnica:

Técnica: $\mathbf{T_{C.V\_01}}$

Esta técnica consiste em dividir o desvio padrão pela média. Este procedimento pode ser representado pelas fórmulas:

Para população:

$$C.V. = \frac{\sigma}{\mu}$$

Para amostra:

$$C.V. = \frac{\sigma_{ech}}{m}$$

2.2.4.8. Organizações praxeológicas pontuais que se formam em torno de determinar o intervalo interquartil ou o desvio interquartil

Apresentamos nesta seção as organizações praxeológicas que levantamos sobre o intervalo interquartil (como determinar a porcentagem das observações no interior do intervalo interquartil) ou sobre determinar o desvio interquartil.

2.2.4.8.1. Organização matemática pontual 1 sobre a determinação da medida do intervalo interquartil ou desvio interquartil [$\boldsymbol{T_{[Q1;Q3]\_01}/\tau_{[Q1;Q3]\_01}/\theta_{[Q1;Q3]\_01}/\Theta_{MTCD}}$]

Abordamos, neste item, a organização pontual em torno do tipo de tarefa $T_{[Q1;Q3]\_01}$ que versa sobre determinar o comprimento do intervalo interquartil, também chamado de desvio interquartil, que corresponde à medida da diferença entre o terceiro quartil e o primeiro quartil.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{[Q1;Q3]\_01}}$

Podemos descrever este tipo de tarefa como:

- $T_{[Q1;Q3]}$ – Determinar a medida do intervalo interquartil.

Para este tipo de tarefa, vamos apresentar mais de uma técnica.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{[Q1;Q3]\_01-1}}$

Para esta técnica, apresentamos as seguintes etapas:

- Determina-se o valor de Q1 e Q3. Para isso podemos recorrer ao quadro 1 (RÉGNIER, 2000a), que apresentamos no capítulo 2 do volume 1 desta tese.
- Um vez determinado este valor, subtrai-se do Q3 o valor de Q1.

Isto pode ser representado na fórmula 83 (apresentada no capítulo 2 da primeira parte desta tese) que reproduzimos abaixo:

$$[Q_1;\ Q_3] = Q_3 - Q_1$$

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{[Q1;Q3]\_01-2}}$

Embora se possa calcular usando uma planilha eletrônica, usando a técnica anterior. Quando temos um volume grande de dados, e sobretudo se estes não estiverem ordenados, esta técnica se torna bastante prática.

- Digita-se em uma célula o comando para determinar o quartil, indica-se o intervalo no qual consta as observações, indica-se 3 para definir como terceiro quartil. Indica-se o sinal de subtração. Digita-se o comando para determinar o quartil, informa-se o intervalo no qual estão as observações, digita-se 1 para informar que o cálculo é referente ao primeiro quartil. Este pode ser descrito assim para o Excel (versão francesa do Excel):
- = QUARTILE (A1:A10:3)-QUARTILE(A1:A10:1)

Poderíamos assim traduzir: calcule o desvio interquartil das observações que estão nas células que estão no intervalo [A1; A10] = A1; A2; A3; A4; A5; A6; A7; A8; A9; A10.

2.2.4.8.2. Organização matemática pontual 2 sobre a medida do intervalo interquartil ou desvio interquartil [$\boldsymbol{T_{[Q1;Q3]\_02}/\tau_{[Q1;Q3]\_02}/\theta_{[Q1;Q3]\_02}/\Theta_{MTCD}}$]

Abordamos neste item a organização pontual em torno do tipo de tarefa $T_{[Q1;Q3]\_02}$ que versa sobre determinar o comprimento do intervalo interquartil também chamado de desvio interquartil, que corresponde à medida da diferença entre o terceiro quartil e o primeiro quartil.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{[Q1;Q3]\_02}}$

Podemos descrever este tipo de tarefa como:

- $T_{[Q1;Q3]\_2}$ – Determinar a medida do intervalo interquartil considerando os dados em um diagrama de caixas e bigodes.

Para este tipo de tarefa, vamos apresentar uma técnica.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{[Q1;Q3]\_02}}$

Para esta técnica apresentamos as seguintes etapas:

- Determina-se o valor de Q1 e Q3. Estes valores estão definidos pelos limites inferiores e superiores do retângulo.
- Um vez determinado este valor, subtrai-se do Q3 o valor de Q1.

Isso pode ser representado na fórmula 83 (apresentada no capítulo 2 da primeira parte desta tese) que reproduzimos abaixo:

$$[Q_1;\ Q_3] = Q_3 - Q_1$$

2.2.4.8.3. Organização matemática pontual 3 sobre o intervalo interquartil ou desvio interquartil [$\boldsymbol{T_{[Q1;Q3]\_03}/\tau_{[Q1;Q3]\_03}/\theta_{[Q1;Q3]\_03}/\Theta_{MTCD}}$]

Abordamos neste item a organização pontual em torno do tipo de tarefa $T_{[Q1;Q3]\_01}$ que trata de determinar quantos valores estão compreendidos no intervalo interquartil.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{[Q1;Q3]\_03}}$

Podemos descrever este tipo de tarefa como:

- $T_{[Q1;Q3]\_3}$ – Determinar o número de observações no intervalo interquartil.

Para este tipo de tarefa, vamos apresentar uma técnica.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{[Q1;Q3]\_03}}$

Para esta técnica apresentamos as seguintes etapas:

- Determina-se a posição de Q1 e Q3. Para isso podemos recorrer ao quadro 1 (RÉGNIER, 2000a), que apresentamos no capítulo 2 da primeira parte desta tese.
- Um vez determinado este valor, subtrai-se a posição do Q3 da medida da posição de Q1.

2.2.4.8.4. Organização matemática pontual 4 sobre a determinação da medida do intervalo interquartil ou desvio interquartil [$\boldsymbol{T_{[Q1;Q3]\_04}/\tau_{[Q1;Q3]\_04}/\theta_{[Q1;Q3]\_04}/\Theta_{MTCD}}$]

Abordamos neste item a organização pontual em torno do tipo de tarefa $T_{[Q1;Q3]\_01}$ que trata de determinar a porcentagem dos valores que estão compreendidos no intervalo interquartil. Este valor é em torno de 50%, mas observamos situações em que se demandam o cálculo desta porcentagem (PONCY; GUICHARD,;RUSSIER, 2011a).

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T_{[Q1;Q3]\_04}}$

Podemos descrever este tipo de tarefa como:

- $T_{[Q1;Q3]\_4}$ – Determinar a porcentagem das observações no intervalo interquartil.

Para este tipo de tarefa, vamos apresentar uma técnica.

Técnica: $\boldsymbol{\tau_{[Q1;Q3]\_04}}$

Para esta técnica apresentamos as seguintes etapas:

- Determina-se a posição de Q1 e Q3. Para isso podemos recorrer ao quadro 1 (RÉGNIER, 2000a), que apresentamos no capítulo 2 da primeira parte desta tese do volume 1 desta tese.
- Um vez determinado este valor, determinam-se quantas observações estão compreendidas entre o Q1 e Q3.
- Divide-se o número de observações encontradas pelo total de observações da série e multiplica-se por 100 determinando o percentual.

2.2.4.9. Organizações praxeológicas pontuais que se formam em torno de determinar o desvio quartil ou amplitude semi-interquartil

Apresentamos nesta seção as organizações praxeológicas que levantamos sobre o desvio quartil ou amplitude semi-interquartil.

2.2.4.9.1. Organização matemática pontual 1 sobre o desvio quartil ou amplitude semi-interquartil $[\boldsymbol{T}_{\frac{[Q1;Q3]}{2}\_\mathbf{01}}/\boldsymbol{\tau}_{\frac{[Q1;Q3]}{2}\_\mathbf{01}}/\boldsymbol{\theta}_{\frac{[Q1;Q3]}{2}\_\mathbf{01}}/\Theta_{MTCD}]$

Trataremos neste item da organização pontual organizada em torno do tipo de tarefa $T_{\frac{[Q1;Q3]}{2}\_\mathbf{01}}$.que trata de determinar a medida do desvio interquartil.

Tipo de tarefa: $\boldsymbol{T}_{\frac{[Q1;Q3]}{2}\mathbf{01}}$

Podemos descrever este tipo de tarefa como:

- $T_{\sigma^2\_01}$ – Determinar o desvio quartil ou a amplitude semi-interquartil.

Para este tipo de tarefa vamos apresentar uma técnica.

Técnica: $\boldsymbol{\tau}_{\frac{[Q1;Q3]}{2}\mathbf{01}}$

Para esta técnica apresentamos as seguintes etapas:

- Determina-se o valor de Q1 e Q3. Para isso podemos recorrer ao quadro 1 (RÉGNIER, 2000a), que apresentamos no capítulo 2 do volume 1 desta tese;
- Um vez determinado este valor, subtrai-se de Q3 o valor de Q1;

- Divide-se por dois o resultado.

Isto pode ser representado na fórmula 85 (apresentada no capítulo 2 da primeira parte desta tese) que reproduzimos abaixo:

$$\frac{[Q_1;\ Q_3]}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

2.2.5. AS ATIVIDADES PREVISTAS NOS LIVROS DIDÁTICOS SOBRE AS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO

Para análise dos dados, usaremos como elemento principal a inclusão das medidas de tendência central e de dispersão dentro da estatística descritiva. Dessa forma, o uso da média para outros fins que não seja descrever os dados e compará-los não será nosso foco. Quando tratamos de amostras, por exemplo, podemos fazer inferências sobre a probabilidade desta média estar mais ou menos próxima da média da população. Neste caso, iríamos além da estatística descritiva para o campo da estatística inferencial, o que não é o caso desta pesquisa. Logo, informamos que o nosso objeto de estudo são algumas medidas de tendência central e dispersão que estão em um dos ramos da teoria estatística, a estatística descritiva (KENDALL; YULE, 1948). Nesta terceira parte da análise, o foco será as atividades previstas no livro didático que envolvem as medidas de tendência central e de dispersão.

Para análise das medidas de tendência central e de dispersão devemos considerar diferentes contextos oferecidos pelo livro didático:

- Leitura de um texto;
- Questões resolvidas ou propostas;

Tanto na leitura de um texto, como nas questões resolvidas e propostas, utilizamos a mesma codificação, o indicativo que se trata de uma atividade relacionada às medidas de tendência central e de dispersão e o número da atividade, assim temos: MTCD_01, MTCD_02, ... , MTCD_N. Onde N corresponde ao total das atividades que podem ser tanto de leitura como questões resolvidas ou propostas. Não apresentaremos esta codificação nas tabelas ou na análise dos dados, ela faz parte apenas dos métodos que utilizamos para organizar os dados.

Assim, utilizamos como unidade de análise do livro o que chamamos de atividade. Uma questão proposta no livro pode ter uma ou mais atividades. Por exemplo, podemos ter uma atividade que pode ser do tipo: dada a série A, calcule a média. Consideramos como uma atividade de determinar a média. Podemos ter também uma questão com várias atividades, por exemplo: Dada a série A, B e C, obtenha a média, a moda e a mediana e compare os resultados. Neste caso, temos que determinar três medidas em três séries, ou seja, nove atividades de determinar. Temos também uma atividade de comparar. Podemos também em um texto termos várias atividades, por exemplo, um texto pode apresentar três fórmulas, cada fórmula impõe uma leitura e uma interpretação, assim temos três atividades. O texto pode conter várias definições, cada definição é uma unidade de análise, uma atividade. Nas atividades são mobilizados os esquemas pelo aluno. O aluno pode contudo não utilizar o livro ou não passar por todas as atividades, isto não temos como prever. Também não podemos prever os significados atribuídos pelo aluno. Estes podem divergir dos que o professor pretende ensinar, que podem divergir dos utilizados pelo autor do livro.

Apresentamos a seguir as duas principais unidades de análise desta seção: leitura de um texto e questões resolvidas e propostas.

2.2.5.1. Leitura de um texto

Nas situações de leitura de um texto, procuramos observar se é apresentada uma definição ou descrição das MTCD, como por exemplo: “a moda é o valor com maior efetivo” ou “O intervalo interquartil é o intervalo $[Q_1; Q_3]$”, apresentadas no livro Fr_C1.1^A (GAUTHIER, PONCY, 2009a, p. 134, tradução nossa). Podemos ter também uma definição apoiada em algoritmo. Por exemplo: “A média é a soma dos produtos $n_i x_i$ divididos pelo efetivo total” (GAUTHIER; PONCY, loc. cit.) ou como apresentada no livro Br_C1.1^A, temos que a “média aritmética é o quociente entre a soma dos valores observados e o número de observações” (BARROSO, 2010, p. 57). Outra situação é a apresentação de propriedades ou observações no texto, por exemplo: “A média é fortemente influenciada por valores extremos da série” (GAUTHIER; PONCY, loc. cit.), descrevemos no capítulo 2 da primeira parte desta tese, como propriedade 1 da média aritmética. Podemos ter no texto apresentação de fórmulas, a demonstração de apenas uma fórmula, aplicações de uma fórmula e como usar um software ou calculadora. Nas atividades que envolvem um software ou calculadora, vamos usar a abreviatura calc./soft[12]. Temos também contextos de uso. Estes contextos podem ser apresentados através das questões propostas ou resolvidas, mas também podem vir em um texto que as trata. Podemos ter um texto que procura comparar quais das medidas de tendência central e de dispersão são mais adequadas em função de situações de uso. Assim, apresentamos as seguintes situações de atividades de leitura de um texto:

- Definição ou descrição;
- Descrição apoiada no algoritmo;
- Apresentação de propriedades e/ou observações;
- Demonstração de propriedades ou observações;
- Apresentação de fórmulas;
- Demonstrar fórmulas;
- Aplicações de fórmulas;
- Como usar calculadora/software .
- Contextos – Corresponde a textos que apresentam situações de uso em diferentes contextos.
- Comparação de qual medida de tendência central é mais adequada em função das situações de uso;
- Apresentação de uma distinção de que variáveis podem ser utilizadas com as MTCD (por exemplo, nas variáveis qualitativas nominais, podemos apenas utilizar a moda).

Além dos textos apresentados nos livros didáticos, temos as questões resolvidas e propostas que foram analisadas.

2.2.5.2. Questões resolvidas e propostas

Ao tratar das questões nos livros didáticos, consideramos que não aprofundamos a discussão se estas são um problema, se são uma situação problema ou trata-se de um exercício etc. Cada um destes termos apresentam diversos sentidos e são frutos de investigação. Por

---

[12] Não observamos nas coleções francesas outro tipo de instrumento tecnológico como ferramenta. Na coleção brasileira analisada, não se utiliza nenhuma ferramenta tecnológica. Na coleção francesa analisada utiliza o termo calculadora e TICE uma abreviatura de technologies de l'information et de la communication pour l'enseignement (Tecnologia da informação e da comunicação para o ensino). O termo TICE é aplicado a diversas tecnologias utilizadas no ensino. Contudo, o símbolo TICE no livro se limita ao seu uso com softwares. As calculadoras apresentadas nestes livros também poderiam ser incluídas nas TICE.

exemplo, Priolet (2008) apresenta diversos sentidos para a palavra "problema" do ponto de vista epistemológico, histórico, dos matemáticos, da didática, da psicologia, diferenciando os vários sentidos de problema, como também de outros termos como exercícios. Nesta pesquisa não pretendemos ampliar a discussão desse tema. Assim, colocamos o termo "questão" no sentido da formulação de uma pergunta no livro didático para o aluno responder ou ainda respondida pelo próprio autor do livro. Nas questões, estão as unidades de análises que fazem parte de outras partes do livro, assim como, dos textos. Esta unidade de análise chamamos de "atividade". O termo atividade possui vários significados. No nosso caso, consideramos uma resposta solicitada pelo autor do livro didático. Assim uma questão em que se demanda que se determine a média e a mediana é composta de duas atividades: determinar a média, determinar a mediana. Distinguimos as atividades em um texto isolado e também como fazendo parte de uma questão proposta ou resolvida no livro.

Inicialmente, procuramos levantar algumas categorias gerais das atividades resolvidas e propostas, são elas:

- Determinar uma medida - Por exemplo, determinar a moda;
- Comparar - Uma situação de comparação de um ou mais conjuntos de dados que trataremos com mais detalhes em uma análise específica;
- Aplicar uma propriedade ou observação - Trata-se de uma atividade na qual na sua solução se aplica uma propriedade ou observação sobre o tema abordado na questão;
- Solicitar uma demonstração - Tratam-se de atividades que demandam uma demonstração.
- Outra - Outra que não inclui nenhuma dessas categorias.

Depois de apresentar uma visão geral, fizemos uma análise mais detalhada das situações propostas e resolvidas em torno das categorias:

- Comparação de um ou mais conjuntos de dados;
- Dados;
- Contextos;
- Propriedades e observações;
- Uso da calculadora e softwares nos livros didáticos;
- Conceitos associados às MTCD nos livros selecionados.

Apresentamos no primeiro capítulo desta parte a explicitação das razões desta divisão. Agora vamos detalhar um pouco mais como serão analisadas estas categorias, obedecendo à ordem de apresentação.

2.2.5.2.1. Comparação de um ou mais conjuntos de dados

Esta análise foi subdividida em três categorias:

- Comparação estática e dinâmica de séries;
- Levando em consideração as ferramentas utilizadas, as medidas de tendência central e/ou dispersão utilizadas;
- Número de séries utilizadas na comparação.

Trataremos a seguir de cada uma delas.

2.2.5.2.1.1. Comparação estática e dinâmica de séries;

Um elemento fundamental na estatística é a variabilidade. A variabilidade pode ser observada em situações variadas. É necessário distinguir dois estudos possíveis: quando observamos dados que descrevem informações em um determinado tempo e lugar preciso (aspecto estático, diacrônico) e as observações sobre a evolução (dinâmico, cronológico) de um conjunto de dados (COUTANSON, 2010, p. 125) que permitem observar um dado fenômeno. Assim podemos ter uma comparação entre duas séries considerando:

- Comparação estática
  - Comparação de duas amostras dos mesmos dados;
  - Uma série do passado com uma do passado;
  - Uma série do presente com uma série do presente;
  - Uma série do futuro com uma do futuro (por exemplo a estimativa da população de uma cidade no futuro, organizada segundo determinados grupos sociais).
- Comparação dinâmica
  - Uma série do passado com uma do presente;
  - Uma série do passado com uma do futuro;

  - o Uma série do presente com uma do futuro;
- Comparação apenas com números ou exemplos artificiais sem informações sobre a data.

Dessa forma, será observada em cada atividade proposta ou resolvida quando trata-se de uma comparação estática ou uma comparação dinâmica. Podemos também não termos nenhuma comparação ou podemos solicitar, por exemplo, para determinar uma MTCD de uma série ou outra atividade que não envolva a comparação. Um outro elemento que analisamos foram os instrumentos utilizados na comparação que trataremos na próxima seção.

2.2.5.2.1.2. Levando em consideração as ferramentas utilizadas: as medidas de tendência central e/ou dispersão utilizadas;

As medidas de tendência central e de dispersão são instrumentos que permitem resumir um conjunto de dados, extrair informações sobre estes, comparar um ou mais conjuntos ou ainda analisar o mesmo conjunto de dados. Para isto podemos utilizar:

- As medidas de tendência central;
- As medidas de dispersão;
- As medidas de tendência central e de dispersão.

Existem diversas combinações que podemos realizar, por exemplo, poderemos fazer uma comparação de dois conjuntos de dados utilizando: média com média, moda com moda, mediana com mediana, média e mediana com média e mediana etc. O mesmo para as medidas de dispersão e o mesmo para as duas articuladas. Queremos observar nesta análise quais as combinações presentes no livro. Isto permitirá observar a riqueza das mesmas, que podem contribuir para ampliar o conceito destas medidas ou a limitação dos LD.

Outro aspecto é o número de séries utilizadas na comparação que trataremos a seguir.

2.2.5.2.1.3. Número de séries utilizadas na comparação

Podemos ter uma análise de uma série utilizando algumas medidas. Podemos analisar uma série comparando a medida da média com a mediana ou a média com o desvio padrão.

Quando dizemos que a média do salário de uma empresa é de R$ 5.000,00, podemos pensar em outras médias de salários e no que este número pode representar. Podemos também comparar com a moda, que pode ser de R$ 800,00. Podemos também comparar com o desvio padrão para observar como os valores estão próximos ou dispersos em torno da média. Podemos também comparar duas séries, por exemplo, o salário dos empregados na empresa A e B. O número de lixo produzido por duas indústrias de alimentos, etc. Podemos comparar três séries ou mais. Que tipo de comparação o livro apresenta? Para responder a esta questão organizamos a resposta em:

- Na mesma série. São utilizadas medidas diferentes para analisar a mesma série;
- 2 séries. A comparação é realizada entre duas séries;
- 3 séries. A comparação é feita entre três séries;
- Mais de 3 séries. A comparação é feita com mais de três séries.

O próximo item da análise refere-se aos dados.

2.2.5.2.2. Dados

Neste item foram previstos quatro tipos de análises:

- Tipos de variáveis;
- Forma de apresentação dos dados;
- Números;
- População ou amostra;
- Contexto.

Apresentamos a seguir a descrição de cada uma dessas variáveis.

2.2.5.2.2.1. Tipos de variáveis

Organizamos neste item o tipo de variável apresentada nas situações observadas nos livros didáticos que tratam das medidas de tendência central e de dispersão. Estas situações poderiam ser em um texto que apresenta um exemplo de como aplicar uma fórmula (atividade resolvida) ou ainda uma atividade proposta. Assim fizemos o levantamento de quatro tipos de variáveis e também das situações apenas com números que não permitem identificar as variáveis:

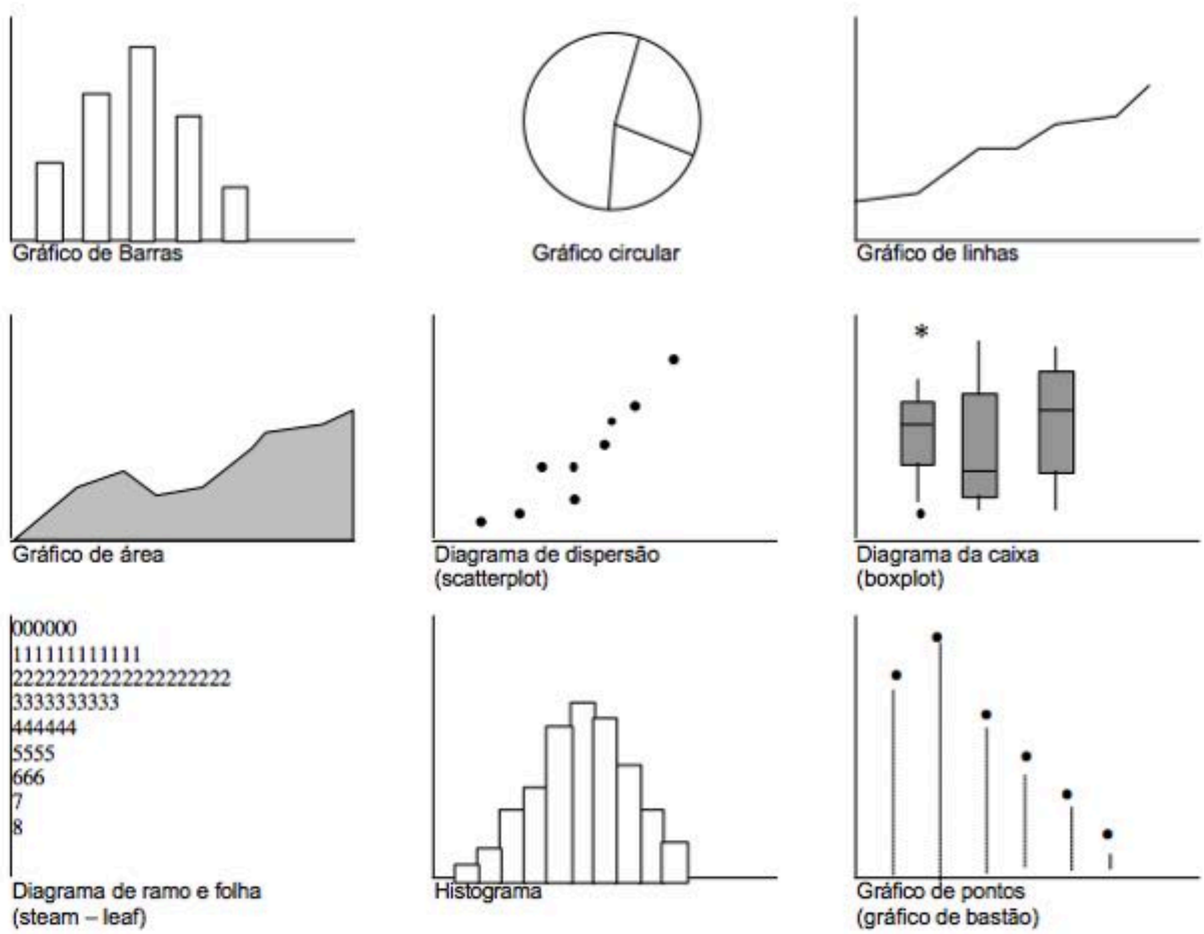
- Variáveis quantitativas discretas – Valores que podem ser contados. Ex: um carro, filhos por família etc;
- Variáveis quantitativas contínuas – Valores que podem ser medidos assumindo qualquer valor. Ex: o peso, a altura etc;
- Variáveis qualitativas ordinais;
- Variáveis qualitativas nominais;
- Apenas números – Apresentam apenas os números. Por exemplo, determine a média de: 9, 10, 11, 12. Essa forma de apresentação apenas com números da estatística, na nossa perspectiva, na qual a estatística deve ser utilizada na educação básica como instrumento de observação do mundo, deveriam ser evitadas. Quando em uma atividade, apenas com números, temos uma tabela com os dados agrupados em intervalos de classe, classificamos como uma variável contínua. Nos outros casos, não temos como dizer. Tomando como este exemplo de apenas números indicados em uma atividade, o número 9 sem unidade não permite classificar a variável. Contudo indicando-se a unidade poderíamos ter: 9 kg (variável quantitativa contínua), 9 veículos (variável quantitativa discretas), 9 cabelos na cor preta (variável qualitativa nominal).

Destacamos que uma variável quantitativa discreta pode ser apresentada como uma variável contínua, em uma tabela com intervalos de classe, ou seja, a forma de apresentação dos dados também é outro item que devemos levar em conta e será apresentado a seguir.

2.2.5.2.2.2. Forma de apresentação dos dados

Os dados podem ser apresentados de diferentes formas, o que pode ser um elemento gerador de dificuldades, ou ainda, de ampliação do campo conceitual em torno das medidas de tendência central e de dispersão. Para determinar a mediana, pode-se observar para uma tabela com efetivos acumulados ou observar este valor em um diagrama de caixa. Pode-se solicitar ao aluno que marque em um histograma a posição da moda. Cazorla (2002, p. 48) apresenta um levantamento de gráficos estatísticos mais utilizados, que reproduzimos na figura 43.

Figura 43 – Gráficos estatísticos mais utilizados.



Fonte: Cazorla (2002, p.48)

Alguns dos tipos de gráficos indicados nesta figura podem ter mais de um uso. Por exemplo, o gráfico de linhas pode ser um gráfico de curva acumulada crescente. O histograma pode ser representado, nesta classificação de Cazorla, tanto como histograma como por um gráfico de áreas.

Será que estes gráficos são utilizados em situações que envolvem as MTCD?

Consideramos dessa maneira as seguintes formas de apresentações dos dados:

1) Dados não ordenados. Para o cálculo da média independe se está ou não ordenado. Contudo, para o cálculo da mediana, é necessário que ordenem-se os dados, exigindo assim mais uma tarefa pelo estudante.
2) Dados ordenados. Facilita o cálculo da mediana.
3) Dados não ordenados em uma tabela. Normalmente ao se colocar os dados em uma tabela se ordena. Contudo, podemos ter casos em que não se ordena, como observamos em um livro didático.
4) Dados em uma tabela com as observações. É a forma mais simples de apresentar, usada algumas vezes para um pequeno número de observações. Por exemplo, a lista dos 20 homens mais ricos do planeta (com o nome e montante da fortuna).
5) Dados em uma tabela com as observações e efetivos. Uma forma mais comum de apresentar os dados, quando temos medidas que se repetem.
6) Dados em uma tabela com as observações, efetivos e efetivos acumulados. É muito prático em diversas situações como para o cálculo da mediana.
7) Dados em uma tabela com as observações e as frequências (podendo também apresentar os efetivos)
8) Dados em uma tabela com os intervalos de classes e os efetivos;
9) Dados em uma tabela com os intervalos de classes e a frequência;
10) Gráfico de barras;
11) Histograma;
12) Diagrama de caixa/box plot (CAZORLA, 2002), box plot (MANN, 2006), boîte à moustaches (DEHON; DROESBEKE; VERMANDELE, 2008).
13) Gráfico circular (CAZORLA, 2002), também chamado de gráfico de pizza (MANN, 2006);
14) Gráfico de linhas (CAZORLA, 2002);
15) Gráfico de áreas (CAZORLA, 2002);
16) Diagrama de dispersão (CAZORLA, 2002);
17) Diagrama de ramo e folha/steam-leaf (CAZORLA, 2002);

18) Gráfico de pontos.

Outro aspecto levantado foi em relação ao número, que será abordado na próxima seção.

2.2.5.2.2.3. Números

Observamos em algumas pesquisas, a dificuldade com o cálculo da média quando um dos valores é igual a zero (descritas no capítulo que levantamos as pesquisas sobre as MTCD). Consideramos que estas dificuldades podem se ampliar para outras situações, como por exemplo, quando se tratam de decimais, frações etc. Logo, procuramos levantar dentro das situações que envolvem as questões, o número. Observamos situações nas quais os números das questões são naturais sem zero; são naturais com zero; temos, entre os números, os negativos; são apresentados números com decimais (não fizemos distinção se são racionais ou irracionais); logaritmos, sistema de numeração com base 60. No livro Br_C1.3[A] selecionado, observamos situações nas quais os números eram gerados por proposições (quadro 17) e uma série formada por logaritmos. Não observamos situações que incluem frações, que dependendo do contexto podem ser importantes.

Quadro 17 – Exemplo de questão na qual os números são gerados por uma P.A.

A média aritmética dos números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{14}, a_{15}$ é 24. Determine a média aritmética dos números: $a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 3, \cdots, a_{14}\ e\ a_{15} + 15$.

Fonte: Barroso (2010, p. 75)

Assim, levantamos as seguintes situações:

- Naturais sem zero (N*)
- Naturais
- Negativos
- Inclui frações
- Inclui decimais
- Logaritmos

- Medidas com base 60, como medida de ângulo em graus, medida de tempo (horas, minutos, segundos).
- Valores gerados por proposições.

Outro elemento observado sobre o número era observar se os dados eram da população ou da amostra.

2.2.5.2.2.4. População ou amostra.

Alguns autores apresentam fórmulas diferentes para o cálculo das medidas de tendência central e de dispersão quando é amostra ou população. Esta distinção é relevante, pois não se podem tomar decisões sobre a amostra como se faz com a população. Apesar de não explorarmos a estatística inferencial, consideramos importante apresentar uma indicação nos dados quando se trata de amostra ou população. Para a nossa análise, esta indicação pode não ser explícita, mas implícita no problema. Assim, podemos ter uma situação em que os dados são de população ou de amostra. Observamos também casos em que os dados não possibilitam indicar se é população ou amostra, uma vez que são apenas números ou sem uma indicação de que se trata de população ou amostra. Assim nesta categoria foram consideradas três situações:

- População;
- Amostra;
- Não identificado.

Na próxima seção abordaremos a categoria contexto.

2.2.5.2.3. Contexto

Quando pensamos nas situações, deve-se levar em consideração o contexto. Esse contexto pode ser um facilitador ou criar dificuldades para a compreensão. Existem questões apenas com números, comum no contexto da matemática. Mas, no caso da estatística, que se constitui uma ferramenta para descrever e analisar o mundo, não deveria ser apresentado em muitas situações. Um exemplo desse tipo de situação seria: calcular a média de 2, 3 e 5, no lugar de calcular a média das alturas de três alunos que, neste caso, exigiria o levantamento de dados, a organização e o cálculo (questões como a precisão do instrumento de medida, a unidade de medida utilizada, a seleção dos alunos, entre outras, se colocaria em evidência). Contudo, consideramos que alguns livros podem apresentar questões apenas com números para manipular as técnicas. Existem questões que podem envolver disciplinas escolares etc. Assim, apresentamos alguns contextos que procuramos identificar nas atividades resolvidas e propostas presentes nos livros didáticos:

- Apenas números;
- Contexto do cotidiano do aluno;
- Contexto da escola;
- De disciplinas escolares:
    - História;
    - Geografia;
    - Matemática;
    - Biologia;
    - Estatística;
    - Outras não listadas.
- Contexto que envolve atividades relacionadas ao mundo do trabalho (comércio, indústria, serviços etc);
- Contexto que envolve o lazer (férias, jogos, leitura etc);
- Contexto que envolve esporte (futebol, basquete etc);
- Contexto que envolve a cultura geral (jornais, revistas, entretenimento, curiosidades etc);
- Outros contextos não previstos

Outro aspecto analisado são as propriedades e observações.

2.2.5.2.4. Propriedades e observações

Um elemento importante na ampliação do conceito das MTCD é o conhecimento de propriedades relativas a essas medidas, como também, certas observações que são importantes para a compreensão dessas medidas. Um exemplo, é a observação 7 sobre média, na qual temos: "a média de uma variável quantitativa discreta pode ser um número não inteiro que não faz sentido no contexto dos dados". Aparentemente uma observação um pouco óbvia para um estatístico ou matemático, mas que não é tão simples. Assim, foi apresentada como um elemento não compreendido por estudantes, inclusive universitários (no capítulo 3 da primeira parte desta tese). Na primeira parte que consta no volume um desta tese, apresentamos diversas propriedades sobre algumas medidas de tendência central e de dispersão mais utilizadas. Sobre a média aritmética, foram levantadas 16 propriedades, numeradas de 1 a 16 como forma de identificá-las, além de 7 observações. As propriedades e observações das medidas de tendência central e de dispersão que levantamos encontram-se em dois capítulos, além de listados no início do primeiro volume, na lista de propriedades e observações (elementos pré-textuais). Cada atividade observada no livro sobre as medidas de tendência central e de dispersão foi analisada, procurando identificar se podem ser identificadas algum tipo de referência a uma dessas propriedades e observações levantadas.

Essas propriedades e observações podem aparecer como uma descrição, podem ir além da descrição se apresentando como uma demonstração, podem ser apresentadas em atividades resolvidas, podem ser solicitadas em atividades propostas (indicadas que se devem explorar estas propriedades nas soluções apresentadas no livro do professor[13] ou ainda no final do livro, quando esse apresenta a solução), temos ainda a possibilidade de não se apresentar nas soluções das atividades propostas, mas pelo tipo de atividade, consideramos que se pode induzir a pensar nesta propriedade.

Dessa forma, apresentamos os elementos que foram levantados direcionando o olhar do pesquisador para as propriedades e observações:

- Desc - Descrição da propriedade/observação;
- Demo - Demonstração da propriedade/observação;
- A.Res. - Apresentação da propriedade/observação em uma atividade resolvida;
- Sol. - Indicada a propriedade/observação na solução de uma atividade apresentada no livro do aluno (exercícios corrigidos) ou ainda no livro do professor;

[13] Na coleção francesa que analisamos, temos no final do livro uma parte chamada de "Corrigés" (que poderíamos traduzir como respostas ou correções) na qual temos a solução de algumas das atividades propostas. Em um livro à parte, chamado de livro do professor, temos a solução das atividades dos livros. Destacamos que algumas dessas se limitam a apresentar um número ou uma descrição bastante sumária sem nenhuma orientação. Na coleção brasileira analisada, as respostas são apresentadas em um livro do professor que é o livro do aluno, com comentários e respostas dentro do livro, geralmente na cor vermelha ou em um anexo chamado de guia do professor, no qual constam resoluções, comentários, além de outras partes tais como: pressupostos teóricos e objetivos da coleção, organização e estrutura da obra, a importância do livro, a interdisciplinaridade, a avaliação, a formação e o desenvolvimento do professor, sugestões para consulta do professor, sugestões para leitura do aluno e textos para reflexão sobre a educação.

- Pensar - Pode-se pensar na propriedade ou observação pela forma como a atividade foi formulada.

Outro elemento analisado nesta tese são as ferramentas tecnológicas.

2.2.5.2.5. Ferramentas tecnológicas

Na coleção brasileira que selecionamos, não observamos nenhuma indicação ou referência a estas ferramentas. No caso da coleção francesa, se utiliza tanto a calculadora como softwares. No caso das MTCD, observamos tanto o uso da calculadora como o uso de planilha eletrônica, assim como de um software de geometria (para um caso específico). Nas fichas de softwares são apresentadas duas planilhas eletrônicas o Excel e o Open Office. O uso destas ferramentas foi observado na coleção selecionada na França ao longo de todas as partes. Muitas vezes com uma indicação se é uma atividade para ser feita com o auxílio da calculadora ou da planilha.

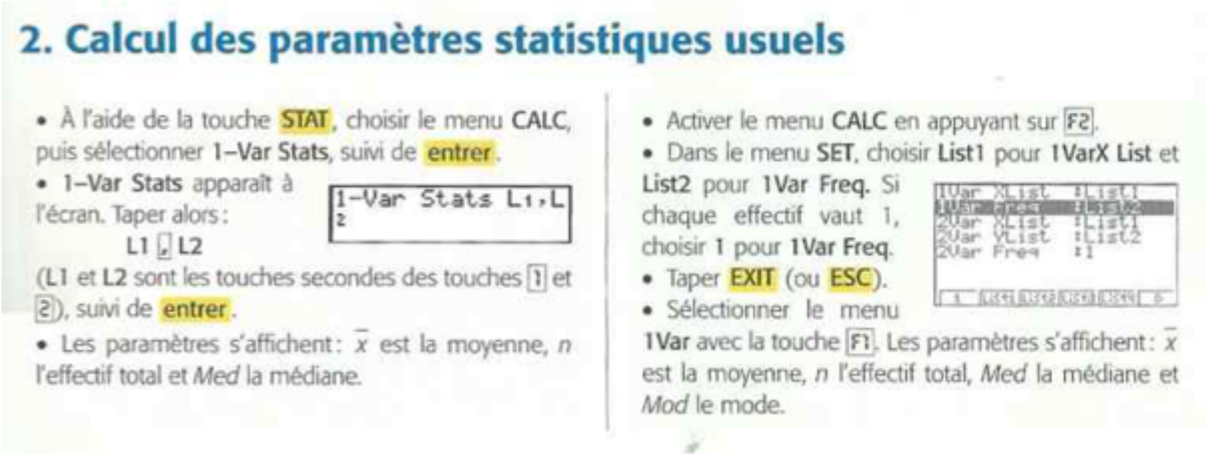
Com base no que observamos nos livros, criamos cinco categorias as quais agrupamos as atividades levantadas:

- Comando para obter uma medida
- Obter uma medida
- Resolver uma atividade
- Descobrir propriedades
- Comparar medidas

2.2.5.2.5.1. Comando para obter uma medida

Podemos ter um texto indicando que com determinado comando se obtém uma medida. Na figura 44, temos um exemplo de um texto que descreve como obter uma medida (Fr_C1.1^{A}). No lado esquerdo, os comandos são da calculadora TEXAS e no lado direito os comandos são da calculadora CASIO. Neste exemplo, temos como medidas obtidas na calculadora CASIO a média aritmética, a mediana e a moda. No caso do uso da planilha, temos comandos específicos para obter uma medida, que são apresentados na coleção Fr_C1, como por exemplo o comando ECARTYPEP para determinar o desvio padrão.

Figura 44 – Comando para obter uma medida.



2. Calcul des paramètres statistiques usuels

- À l'aide de la touche **STAT**, choisir le menu **CALC**, puis sélectionner **1–Var Stats**, suivi de **entrer**.
- **1–Var Stats** apparaît à l'écran. Taper alors :
  L1 , **L2**
  (**L1** et **L2** sont les touches secondes des touches 1 et 2), suivi de **entrer**.
- Les paramètres s'affichent : $\bar{x}$ est la moyenne, *n* l'effectif total et *Med* la médiane.

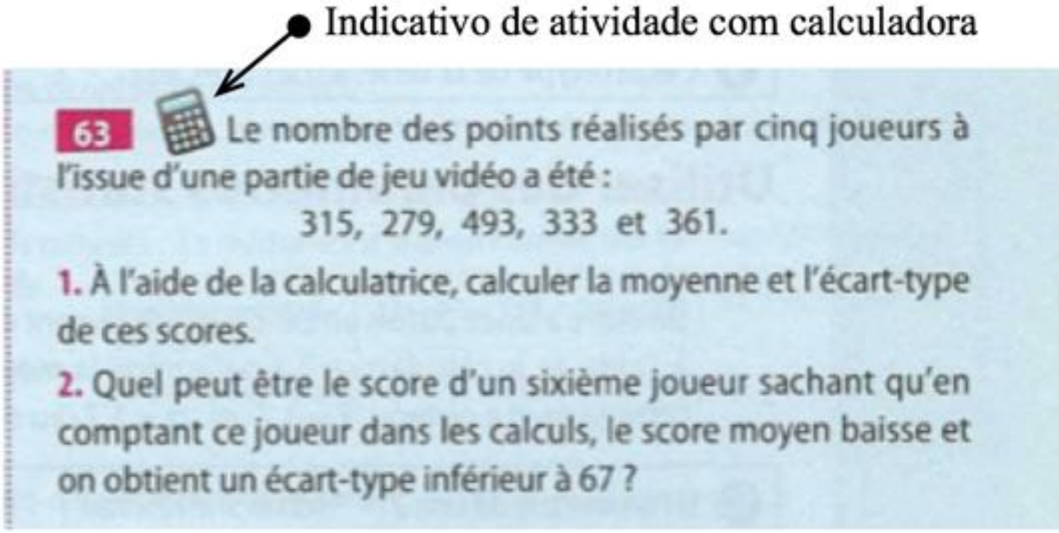
- Activer le menu **CALC** en appuyant sur F2.
- Dans le menu **SET**, choisir **List1** pour **1VarX List** et **List2** pour **1Var Freq**. Si chaque effectif vaut 1, choisir **1** pour **1Var Freq**.
- Taper **EXIT** (ou **ESC**).
- Sélectionner le menu **1Var** avec la touche F1. Les paramètres s'affichent : $\bar{x}$ est la moyenne, *n* l'effectif total, *Med* la médiane et *Mod* le mode.

Fonte: Gauthier e Poncy (2009, p. 142).

2.2.5.2.5.2. Obter uma medida

Nas atividades do livro didático, temos situações nas quais se indicam que devemos obter as medidas com o uso de um software ou de uma calculadora. Na coleção Fr.C1.2[A], as atividades com o uso da calculadora ou de software eram normalmente acompanhadas de um símbolo indicativo. Na figura 45, temos um exemplo, com o símbolo de uma ferramenta para uso da calculadora. No primeiro item, temos duas atividades que chamamos de obter uma medida: calcular a média (codificamos como TCD 187) e calcular o desvio padrão (TCD 188).

Figura 45 – Atividade encontrada no livro Fr.C1.2[A]



Indicativo de atividade com calculadora

63 Le nombre des points réalisés par cinq joueurs à l'issue d'une partie de jeu vidéo a été :

315, 279, 493, 333 et 361.

1. À l'aide de la calculatrice, calculer la moyenne et l'écart-type de ces scores.

2. Quel peut être le score d'un sixième joueur sachant qu'en comptant ce joueur dans les calculs, le score moyen baisse et on obtient un écart-type inférieur à 67 ?

Fonte: Poncy, Guichard e Russier (2011a, p. 255).

2.2.5.2.5.3. Resolver uma atividade

Como exemplo do uso para responder a uma questão específica, temos a questão da figura 45. Nesta questão, se utiliza a calculadora para determinar a média e o desvio padrão (1) e depois se solicita que indique qual seria o valor de uma sexta observação a ser acrescentada as demais, de forma que se tenha uma média aritmética mais baixa e um desvio padrão inferior a 67. Esta questão leva o aluno a fazer simulações com os possíveis valores. O uso da calculadora agiliza esse processo e deixa que o aluno se concentre na atividade. O aluno deve observar que o valor deve ser menor do que o da média para poder reduzir o valor desta medida e também deve ser próximo da média (menor dispersão) para ter um valor menor do desvio padrão.

2.2.5.2.5.4. Descobrir uma propriedade

Como exemplo desse tipo de atividade, poder-se-ia realizar alterações nos valores das observações de uma série para se chegar à conclusão que a média é influenciada por valores extremos, enquanto que a mediana não, ampliando assim o nível de conceptualização sobre estas medidas.

2.2.5.2.5.5. Comparar medidas

Essas ferramentas podem ser usadas para comparar duas ou mais séries, observando as alterações nestas séries e sua influência nas medidas de tendência central. Poder-se-ia ainda, solicitar alterações nos valores das observações, conduzindo o aluno a perceber o papel das MTCD para comparar duas ou mais séries.

Com a apresentação das ferramentas tecnológicas encerramos a parte 2, no qual apresentamos a metodologia utilizada na análise dos programas e livros didáticos. na próxima parte, apoiados na proposta de análise apresentada nesta parte, trataremos dos resultados, discussões e prolongamentos.

PARTE 3: RESULTADOS, DISCUSSÕES, PROLONGAMENTOS

Organizamos esta parte em três capítulos. No primeiro, apresentamos os resultados e discussões relativas aos programas analisados no Brasil e na França. No segundo, tratamos dos resultados e discussões sobre o livro didático. No terceiro, fazemos um prolongamento das discussões, tratando das implicações dos resultados e propostas da continuação desta pesquisa.

1. PROGRAMAS

Organizamos o capítulo de análise dos programas em três partes. Inicialmente tratamos da análise do programa da França. Na segunda parte, fazemos uma análise do programa brasileiro. Na terceira parte fazemos uma comparação entre os dois programas. Nos dois casos, fazemos uma avaliação dos programas nos últimos 15 anos no Brasil e na França. No primeiro volume desta tese, fizemos uma apresentação geral dos programas no Brasil e na França. Nesta fase de análise nos detemos a analisar o programa, tendo em vista os objetivos da pesquisa (em relação aos programas) que é analisar como as medidas de tendência central e de dispersão são apresentadas nos programas brasileiro e francês. Partindo da hipótese de que existem deficiências na forma de tratar as MTCD e que estas limitações vão influenciar a transposição destes saberes para sala de aula através dos livros didáticos. Foram analisados os elementos que podem contribuir para o desenvolvimento do conceito das MTCD e as praxeologias matemáticas presentes nos programas.

Além dos programas, temos documentos complementares como:

- Ressources (recursos)- estes servem junto com o programa para orientar a atividade do professor.

Na primeira parte que trata do programa da França, faremos uma comparação do que é apresentado no programa atual com o Ressources em relação às MTCD. Isto tem como objetivo, analisar se este pode ampliar as informações apresentadas no programa no que se refere às MTCD. Na terceira parte deste capítulo, limitaremos comparação dos programas, uma vez que este documento é uma complementação, não fazendo parte do programa. Assim não queremos compará-lo com os programas brasileiros,pois trata-se de um elemento à parte.

1.1. RESULTADOS E DISCUSSÕES SOBRE OS PROGRAMAS NA FRANÇA SELECIONADOS

No primeiro volume, fizemos uma descrição dos documentos oficiais da França. Selecionamos para análise os programas oficiais que indicam como devem ser abordadas as medidas de tendência central dentro da Matemática no ensino médio geral (primeiro ano do ensino médio) e Tecnológico e nos dois últimos anos da série científica. No primeiro volume também esclarecemos as razões da escolha da série científica.

1.1.1. PROGRAMAS DO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO (LYCÉE GÉNÉRAL).

Vamos tratar dos documentos oficiais presentes nos Boletins Oficiais do programa atual e do programa anterior, com um intervalo entre eles de aproximadamente uma década. Iniciamos com o programa anterior ao atual.

1.1.1.1. Programa do primeiro ano do ensino médio na França, anterior ao atual, para o Ensino de Matemática.

Temos os seguintes Boletins Oficiais da Educação Nacional (B.O.) que tratam do programa do primeiro ano do ensino médio geral na França, que precedem o atual programa:

- B.O. Nº 5 de agosto de 1999
- B.O. Nº 6 de 12 de agosto de 1999. Volume 2.
- B.O. N.2 de 30 de agosto de 2001.

O Boletim n. 5 aborda a matemática. O n.2 faz uma apresentação geral, trata de outras disciplinas e apresenta, no caso da matemática, um link para o boletim n. 6 que aborda a matemática. Existem outros boletins que não abordam a matemática que não tratamos. Descrevemos assim os dois boletins que envolvem a Matemática (incluindo neste caso as MTCD dentro da estatística).

1.1.1.1.1. O B.O. Nº 5 de agosto de 1999

Trata-se de uma modificação no programa anterior para o ano escolar de 1999-2000. Para matemática, é apresentada apenas uma redução de alguns itens do programa anterior definido pela lei de 25 de abril de 1990 (B.O. n. 20 de 17 de maio de 1990). Esta redução na estatística se restringe a retirar do programa, efetivos acumulados e frequência acumulada. Veremos nos livros atuais que os efetivos acumulados são abordados no livro do primeiro ano do ensino médio na França. Em relação às MTCD, a determinação dos efetivos acumulados é bastante prática para determinar a posição da mediana.

1.1.1.1.2. B.O. Nº 6 de 12 de agosto de 1999. Volume 2.

Este programa do primeiro ano do ensino médio geral e tecnológico (classe de seconde générale et technologique) foi previsto para iniciar no ano escolar de 2000-2001. O volume 2 trata, entre outras coisas, da Matemática. Inicialmente é destacado que se deve conduzir o aluno a ter consciência da diversidade da atividade matemática, tais como: pesquisar, descobrir um resultado parcial, colocar questões, aplicar técnicas bem escolhidas, estudar uma demonstração, explicar oralmente um procedimento, redigir um esboço mais adequado, estudar uma demonstração. Alguns destes aspectos foram considerados ao analisar os livros didáticos no que diz respeito às técnicas apresentadas nos livros (dentro das praxeologias), como também na construção do conceito, as demonstrações apresentadas, solicitadas ou induzidas.

O programa também destaca o papel da informática. Analisamos nos livros didáticos, como ela foi utilizada na construção do conceito das MTCD.

O programa de matemática apresentado foi dividido em três grandes capítulos: estatística, cálculo e funções e geometria. Este também informa que deve-se consagrar à estatística 1/8 do tempo e o restante dividido entre os dois outros capítulos. Esta divisão coloca a estatística em uma posição de desvantagem em relação aos outros dois grandes capítulos. Também neste programa é feito um recorte do programa dos últimos 4 anos do ensino fundamental. Neste pode-se ver que no oitavo ano do ensino fundamental (quatrième) são abordados os efetivos acumulados, a frequência acumulada (usada no cálculo da mediana), a média ponderada, a média de uma série estatística agrupada em classes de intervalo. No nono ano do ensino fundamental (troisième) são vistas as características da posição e da dispersão de uma série estatística. Assim, as MTCD são retomadas no ensino médio em um processo de aprofundamento destes conceitos. O programa de matemática é organizado em conteúdos, capacidades esperadas e comentários. No quadro 18, apresentamos o trecho que diz respeito às MTCD.

Quadro 18 – As MTCD no B.O. Nº 6 de 12 de agosto de 1999.

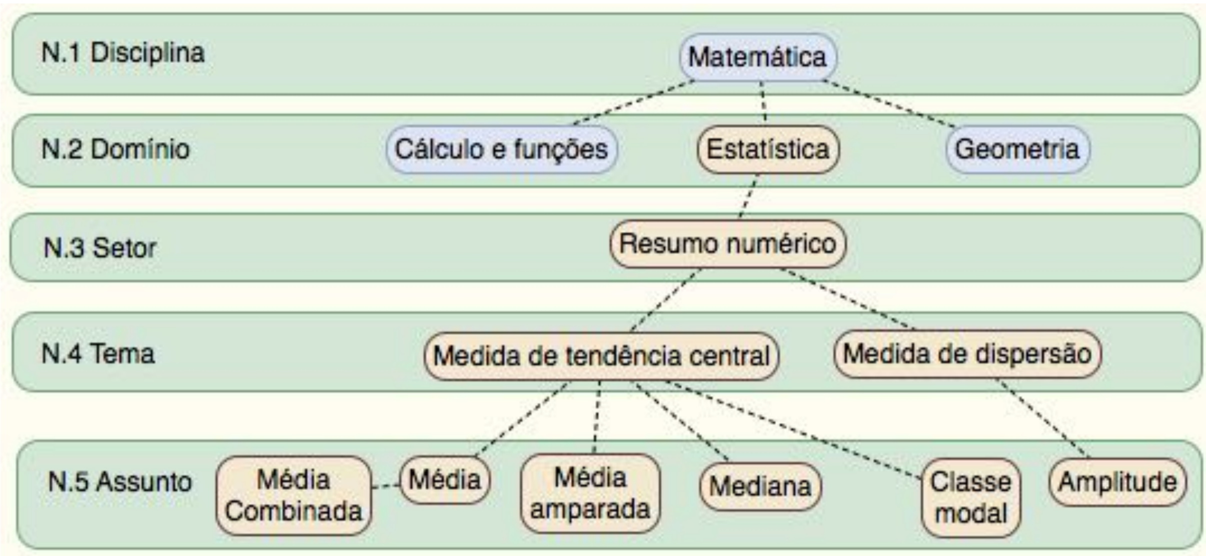
Conteúdos	Capacidades esperadas	Comentários
Resumo numérico por uma ou mais medidas de tendência central (média aritmética, mediana, classe modal, média aritmética amparada) e uma medida de dispersão (limitada ao primeiro ano do ensino médio, a amplitude).	Utilizar as propriedades da linearidade da média de uma série estatística. Calcular a média de uma série a partir da média de subgrupos. Calcular a média a partir da distribuição de frequências.	O objetivo é fazer os alunos refletirem sobre a natureza dos dados tratados e de se apoiar sobre as representações gráficas para justificar a escolha do resumo. Pode-se iniciar a utilizar o símbolo. Comentar os casos em que a média e a mediana se diferenciam sensivelmente. Comentar-se-á que a mediana de uma série não pode se deduzir da mediana dos subgrupos desta série. O cálculo da mediana necessita de triar os dados, o que se coloca problemas de natureza algorítmicas.

Fonte: France (1999, p. 30, tradução nossa)

Do ponto de vista das praxelogias, não temos informações suficientes para que possamos definir alguns tipos de tarefas, como as ligadas ao gênero de tarefa determinar. Como por exemplo, determinar a média aritmética, a mediana, a classe modal, a média aritmética amparada, a média aritmética combinada. Embora não se tenha citado no programa média combinada, o termo média combinada é utilizado para o cálculo da média de uma série a partir da média de duas ou mais séries, que juntas formam esta série, descrito na capacidade esperada deste programa. Embora pelo programa possamos pensar no gênero de tarefa determinar, o programa não detalha as situações de utilização destas medidas. Levantamos para análise dos livros, apenas para o tipo de tarefa determinar a média aritmética, cinco tipos de tarefas diferentes. O programa também não fornece informações sobre as técnicas, tecnologias e teorias.

Um outro elemento abordado na TAD são os níveis de codeterminação (CHEVALLARD, 2002b). Na figura 46, tomando por base os dados do programa, apresentamos os níveis de codeterminação didática[14]. No qual podemos visualizar a divisão da matemática em três domínios neste programa (já descritos). O termo resumo numérico é amplo e pode abrigar, como nesta apresentação, as medidas de tendência central e de dispersão. No assunto, a descrição do programa nos levou a incluir o termo média combinada para indicar o que no programa é apresentado, como calcular a média de uma série a partir da média de subgrupos.

Figura 46 – Níveis de codeterminação do primeiro ano do ensino médio na França conforme o programa Nº 6 de 12 de agosto de 1999.



Fonte: elaborado pelo autor da tese com base nas análises realizadas.

Observamos a utilização do termo classe modal. O termo é utilizado quando temos dados agrupados em intervalos de classe. Consideramos mais adequado incluir o termo moda, que é mais abrangente, e indicar que deveria se explorar a moda como as demais medidas de tendência central, também com dados agrupados em intervalos de classe. Observamos o destaque para média amparada, contudo não se explora outras médias como a média ponderada, média harmônica, média geométrica e média quadrática.

Na figura 47, apresentamos os conceitos associados às medidas de tendência central e de dispersão descritos no programa. Observamos no programa a orientação de se apoiar na representação gráfica para justificar a escolha do resumo, como descrito no programa. Isto pode ser importante na compreensão do conceito de medida de tendência central e de

[14] Os termos domínio, tema e assunto são utilizados por Chevallard (2002b)

dispersão, possibilitando novas formas de pensar sobre estas medidas. Contudo, não se deve usar como única forma, uma vez que estas medidas fornecem informações para se pensar sobre os dados e devem-se explorá-las de forma ampla sem limitar-se à observação de gráficos. Alguns recursos que podem ser utilizados como suportes para construção de um conceito podem, se limitados a estes, servir como obstáculo na construção do mesmo.

Figura 47 – Conceitos associados às medidas de tendência central e de dispersão no programa Nº 6 de 12 de agosto de 1999.

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Associada à média, observamos o conceito de linearidade (exploramos isto na propriedade 10 sobre a média e observamos também as limitações em relação ao desvio padrão, nas propriedades 7 e 8, e a variância nas propriedades 3 e 4). Consideramos a importância deste conceito nas MTCD, que se bem explorado, pode ampliar o nível de conceptualização dos estudantes, aprimorar novos instrumentos para manipular estas ferramentas, tão como observar suas limitações em relação à linearidade. Contudo, o programa não deveria apresentar outro elementos que possibilitassem ampliar o conceito das MTCD que apresentamos na fundamentação teórica. Outro conceito associado à média é o de distribuição de frequência. Consideramos que o programa poderia ter ampliado o seu uso com a moda, a mediana e a amplitude, uma vez que podem ser usados para determinar estas medidas.

Destacam-se também no programa as diferenças da média para a mediana. A mediana precisa de uma triagem dos dados, o que o programa coloca como um problema de natureza algorítmica. Consideramos neste caso que este aspecto pode ser explorado para mostrar que a média possui um tratamento algébrico mais simples do que a mediana (como destacamos na fundamentação desta tese), isto é um elemento importante que envolve as praxeologias, mas também o conhecimento do conceito da média e mediana.

Apesar da importância de ferramentas tecnológicas como as calculadoras, os softwares, entre outros, este programa apresenta o uso destes. No caso da estatística a outros temas e não às medidas de tendência central e de dispersão, consideramos isto como uma limitação deste programa.

Do ponto de vista da nossa hipótese de pesquisa, o programa não explora muitos dos elementos que iremos utilizar para analisar os livros na construção do conceito, como o contexto, mas apresenta apenas uma propriedade sobre a média, dentre as 16 que apresentamos sobre esta medida e 7 observações sobre a média. As outras propriedades e observações sobre as medidas apresentadas, além de outros elementos que investigaremos no livro didático. Do ponto de vista das praxeologias, os elementos são insuficientes para defini-las. Assim consideramos que este programa apresenta limitações.

1.1.1.2. Programa de Matemática do 1º ano do ensino médio atual na França

O programa atual de Matemática para o primeiro ano do ensino médio na França consta no B.O de nº 30 de 23 de julho de 2009. Este entrou em vigor no ano escolar 2009-2010 que iniciou-se em setembro de 2009. Depois de 10 anos com o programa anterior em vigor.

Este programa apresenta como objetivo geral de formar os alunos no seu desenvolvimento científico de todas as suas formas para ser capaz de (FRANCE, 2001, p.1, tradução nossa):

- Modelizar-se envolvimento em uma atividade de pesquisa;
- Conduzir um raciocínio, uma demonstração;
- Praticar uma atividade experimental ou algorítmica;
- Fazer uma análise crítica de um resultado, de uma pesquisa;
- Praticar uma leitura ativa de informação (crítica, tratamento), privilegiando as mudanças de registro (gráfico, numérico, algébrico, geométrico);
- Utilização de softwares (computador e calculadora) adaptados à resolução de problemas;
- Comunicar-se por escrito e oral.

A estatística e mais particularmente as MTCD se enquadram nestes objetivos que consideramos, que se bem explorados, podem ser importantes na construção do conceito das

MTCD. O programa anterior não apresentava objetivos gerais. O programa anterior fazia uma retomada do que foi abordado nos anos finais do ensino fundamental, porém o programa atual não faz esta retomada.

No que diz respeito à Estatística, o programa atual apresenta como objetivos no quadro da análise dos dados (FRANCE, 2009a, p. 8, tradução nossa):

- Determinar e interpretar os resumos de uma série estatística;
- Realizar a comparação de duas séries estatísticas com a ajuda de indicadores de posição e de dispersão ou com curvas de frequência acumulada.

Tal como no programa anterior, o programa de Matemática é organizado em conteúdos, capacidades esperadas e comentários. No quadro 19, apresentamos o que trata das MTCD.

Quadro 19 – As MTCD no B.O. nº 30 de 23 de julho de 2009.

Conteúdos	Capacidades esperadas	Comentários
Estatística descritiva, análise de dados. Característica da posição e dispersão • Mediana, quartis; • Média aritmética.	• Utilizar um software (por exemplo, uma planilha) ou uma calculadora para estudar uma série estatística; • Passar dos efetivos às frequências, calcular as características de uma série definida por efetivos ou frequências; • Cálculo dos efetivos acumulados, das frequências acumuladas; • Representar uma série estatística graficamente (nuvens de pontos, histograma, curvas de frequência acumuladas).	O objetivo é dos alunos refletirem sobre os dados reais, ricos e variados (saídos por exemplo, de um arquivo colocado à disposição pela INSEE [15]), sintetizar a informação e propor as representações pertinentes.

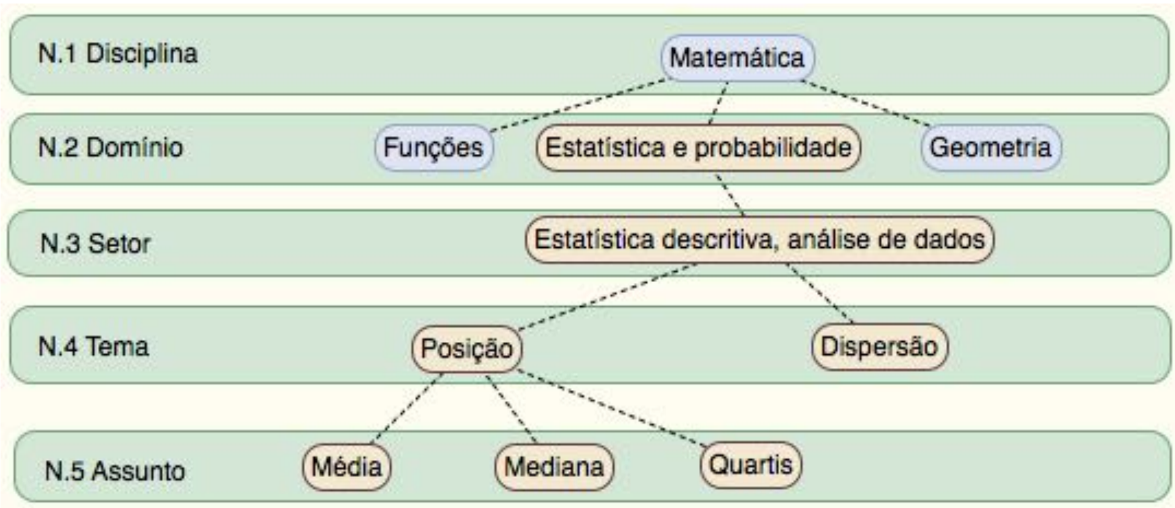
Fonte: France (2009a, p. 8, tradução nossa)

Comparando com o programa anterior, observamos nos conteúdos uma simplificação e retirada de algumas medidas: a classe modal, média aritmética amparada, a amplitude, estas não aparecem no novo programa. Trata-se nos objetivos e nos conteúdos da dispersão, mas não se indicam que medidas utilizar. Na construção do conceito das MTCD, destaca-se um

[15] Institut national de la statistique et des étude économiques (Instituto Nacional da Estatística e dos Estudos Econômicos). Pode ser acessado em: http://www.insee.fr/fr/.

ponto que consideramos relevante que é a utilização das MTCD para comparar duas séries que iremos analisar nos L.D. Mas não se indica com detalhe que tipo de comparação pode ser feita (dinâmica ou estática) como trataremos na análise do L.D. A linearidade da média, uma importante propriedade que abordamos ao tratar do saber científico (propriedade 10) foi tirada do programa. A utilização de dados reais, como o do Instituto Nacional de Estudos Econômicos é importante, contudo consideramos que o programa também deveria tratar da construção dos dados pelos alunos com base em objetivos de investigações para responder a questões do contexto dos alunos. Na figura 48, apresentamos a organização do programa considerando os níveis de codeterminação (CHEVALLARD, 2002b). Tal como no programa anterior, temos a divisão da matemática em três partes, contudo, observamos uma mudança nos nomes dados a estas divisões. Assim, no lugar de "cálculo e funções" temos "funções". A estatística foi dividida em estatística e um dos seus ramos a probabilidade. No nível do setor temos o termo "posição" para se referir às medidas de tendência central (média e mediana) e a uma medida separatriz acrescentada ao programa (os quartis) que possuem duas medidas de posição Q1 e Q3 e uma medida que pode ser considerada de posição ou de tendência central o Q2 (ou mediana). O programa indica a dispersão, mas não apresenta nenhuma medida de dispersão, assim no nível do assunto a dispersão fica vazia.

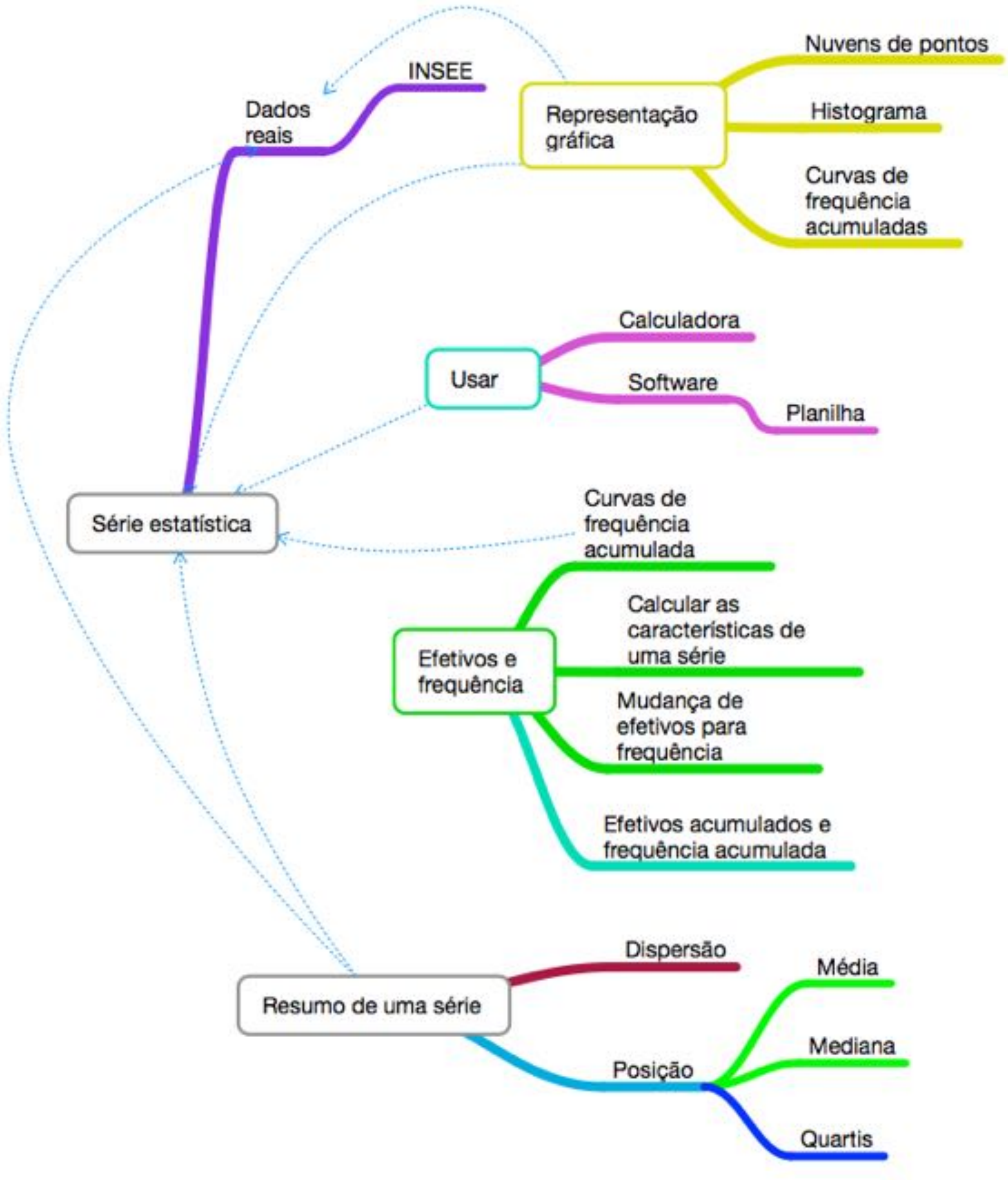
Figura 48. Níveis de codeterminação do primeiro ano do ensino médio na França conforme o programa atual.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Na figura 49, apresentamos os principais conceitos e capacidades esperadas. O conceito principal o qual estão ligados os demais é o da série estatística. Observa-se a preocupação do estudo desta está associado a dados reais, como os apresentados pela INSEE (que analisaremos no livro dentro do item contexto). Observamos que o programa propõe uma sintetização destes dados e uma representação pertinente. Não observamos uma ligação entre a representação gráfica e as MTCD. No programa anterior, se indicava esta ligação.

Figura 49. Principais conceitos e capacidades esperadas no programa atual na França para o primeiro ano do ensino médio.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Entre os objetivos da estatística, temos determinar e interpretar os resumos de uma série estatística, assim agrupamos as medidas de posição e de dispersão ao resumo desta série . Temos também nos objetivos como realizar a comparação de duas séries estatísticas com a utilização de indicadores de posição e dispersão, também se pode utilizar curvas de frequência acumuladas. Assim, fizemos a ligação das curvas de frequência acumulada à série estatística, assim como, as medidas de resumo de uma série.

Não observamos um detalhamento sobre a dispersão, mas pelos objetivos temos uma indicação que ela pode ser utilizada para comparar duas séries. Assim, temos uma apresentação bastante limitada da dispersão.

Podemos observar outros conceitos que são apresentados sem uma indicação clara da sua ligação às MTCD, como é o caso da representação gráfica.

Este programa destaca o uso de calculadoras e softwares para estudar uma série estatística, se uma especificação da forma como deve ser feita e com que objetivos (comparar as séries, desenvolver o conceito das MTCD, utilizar em determinadas praxeologias ligadas às MTCD etc). Destacamos que o conceito de calculadora para o uso na educação básica é um pouco diferente do que muitos professores e estudantes podem ter no Brasil. As calculadoras utilizadas na França (apresentadas nos livros que tivemos acesso) são programáveis, vêm com funções específicas para a estatística, por exemplo, traçam gráficos entre outras coisas[16]. Por outro lado, o programa apresenta como hardware, a calculadora e o computador, deixando de lados os smartphones e tablets. Apesar da sua evidente ligação, não foi apresentada a importância de se explorar o conceito de efetivos e frequência junto às MTCD.

Tal como no programa anterior, as informações não eram muito detalhadas, não permitindo identificar organizações praxeológicas, ficando a cargo do livro defini-las, se atender às considerações gerais do programa. Alguns elementos mais aprofundados com relação à construção do conceito, terão que ser vistas na análise do L.D. pelas limitações do programa.

Investigamos no documento “Recursos para o primeiro ano do ensino médio”[17] (FRANCE, 2009b, tradução nossa), possíveis acréscimos às informações presentes neste programa sobre as MTCD. Neste documento, observamos a indicação de que foram vistos nos anos finais do ensino fundamental (collège) as seguintes MTCD: média, mediana, amplitude,

---

[16] Observamos além do uso deste tipo de calculador nos livros do ensino médio, o uso nos livros do ensino fundamental. No livro do ensino fundamental observamos a utilização de dois tipos calculadora frabricadas especialmente para o ensino fundamental: Casio Collège 2 D+ e Ti-collège Plus (BRAULT et al, 2012).

[17] Título do documento original: Ressources pour la classe de seconde no documento original.

quartis e desvio interquartil. Este documento destaca o histograma, as representações gráficas, as médias, a mediana, os quartis, como ferramentas que podem ser utilizadas para levantar questões sobre os dados e desenvolver problemáticas. Aborda também o papel da informática para explorar volumes grandes de dados. Este documento reforça o que apresentamos na figura 49, que o foco é a exploração dos dados. Consideramos este foco bem apropriado, pois mobiliza diferentes ferramentas sem se prender ao nível de codeterminação do assunto ou do tema, além de se trabalhar com dados reais com o uso de ferramentas tecnológicas. Contudo, do ponto de vista da nossa pesquisa, ele não acrescenta ou detalha as MTCD para este ano.

Observamos também neste documento, se tratar da importância de se explorar o contexto de outras disciplinas escolares como a "estatística descritiva, análise de dados": Ciências físicas, Ciências da vida e da terra, Ciências da engenharia etc. Consideramos o contexto com outras disciplinas no ensino das MTCD e investigaremos nos livros didáticos. Este documento apresenta links para as páginas do INSEE, INED[18] e da meteorologia na França. Assim, este documento não apresenta maiores informações sobre as medidas de tendência central e de dispersão que permitam ampliar a nossa análise deste programa. Trataremos a seguir da análise do programa para o segundo ano do ensino médio na França.

1.1.2. RESULTADOS E DISCUSSÕES SOBRE OS PROGRAMAS DO SEGUNDO ANO DO ENSINO MÉDIO NA FRANÇA.

Apresentamos a seguir os documentos oficiais, presentes nos boletins oficiais do programa atual e do programa anterior com um intervalo entre eles de aproximadamente uma década. Iniciamos com o programa anterior ao atual.

1.1.2.1. Programa do segundo ano do ensino médio na França, anterior ao atual para o ensino de Matemática, B.O. nº 7 de 31 de agosto de 2000.

Este boletim é composto de um arquivo principal e de vários anexos. No arquivo principal, temos no artigo primeiro, a informação que este contém modificações no programa anterior (lei de 27 de março de 1991) que são aplicáveis apenas para o ano escolar de 2000-

[18] Institut national d'études démographiques (Instituto Nacional de Estudos Demográficos – França), homepage: http://www.ined.fr .

2001. Estas modificações constam no anexo 1. A estatística não aparece nesta parte. No segundo artigo, é informado que para o ano escolar de 2001-2002, o programa anterior é anulado e substituído pelo programa que consta no anexo dois desta lei. Este novo programa permaneceu em vigor por 10 anos até a mudança para o programa atual.

No arquivo principal, observamos que um programa deve responder às especificações de formações fornecidas pelas instituições, de um lado (representado em particular pelo Conselho Nacional dos Programas) e de outro menos explícita, pela comunidade científica. Assim temos informações sobre a atuação da noosfera na modificação do programa, embora de forma superficial. Este boletim ainda informa que o Conselho Nacional dos Programas introduziu algumas modificações para o programa dos dois últimos anos da série científica que foi a introdução da estatística e a introdução das possibilidades oferecidas pela informática.

O programa de estatística e probabilidade do segundo ano do ensino médio na França destacam que a probabilidade e a estatística devem ser centradas em (FRANCE, 2000, p.175):

> - [...] colocar em prática os elementos de base indispensáveis para compreender ou praticar a estatística em qualquer lugar que ela esteja presente;
> - [...] aquisição dos conceitos de probabilidade permitindo a compreensão e explicação de certos fatos simples observados experimentalmente ou por simulação.

Em relação à estatística consideramos bastante pertinente. Neste sentido, os dados devem ser construídos ou tomados como referências dos dados reais de contextos diversos, desde do contexto de outras disciplinas a contextos do mundo do trabalho, do cotidiano dos alunos etc. A apresentação destes contextos pode contribuir para a compreensão das MTCD como instrumentos de leitura do mundo, isto foi investigado em nossa pesquisa nos L.D. Consideramos que devemos considerar também as pesquisas que apontam para dificuldades na compreensão das MTCD e a importância dos contextos para uma melhor compreensão do uso destas medidas.

Este programa destaca a introdução de ferramentas descritivas novas:

- Os diagramas em caixa que permitem apreender facilmente características das repartições dos aspectos estudados e que complementam o panorama das ferramentas gráficas mais classicamente utilizadas;
- Duas medidas de dispersão: desvio padrão e o intervalo interquartil.

Embora o diagrama de caixa não faça parte de nossa pesquisa, consideramos relevante para visualização dos dados este diagrama, como também do seu uso associado à compreensão do papel da mediana, da amplitude, do desvio interquartil para comparar os dados. Evidentemente que a compreensão da mediana, da amplitude, do desvio interquartil, não deve estar restrita ao uso de qualquer gráfico, mas estes podem contribuir para ampliar o conceito.

Outro aspecto destacado foi a introdução de duas medidas de dispersão fundamentais. Consideramos pertinentes e relevantes a introdução das mesmas e que fazem parte do nosso objeto de estudo.

O programa de Matemática deste ano é organizado em conteúdos, modalidades de aplicação (no programa do primeiro ano utilizavam-se capacidades esperadas) e comentários. No quadro 20, apresentamos o trecho que diz respeito às MTCD.

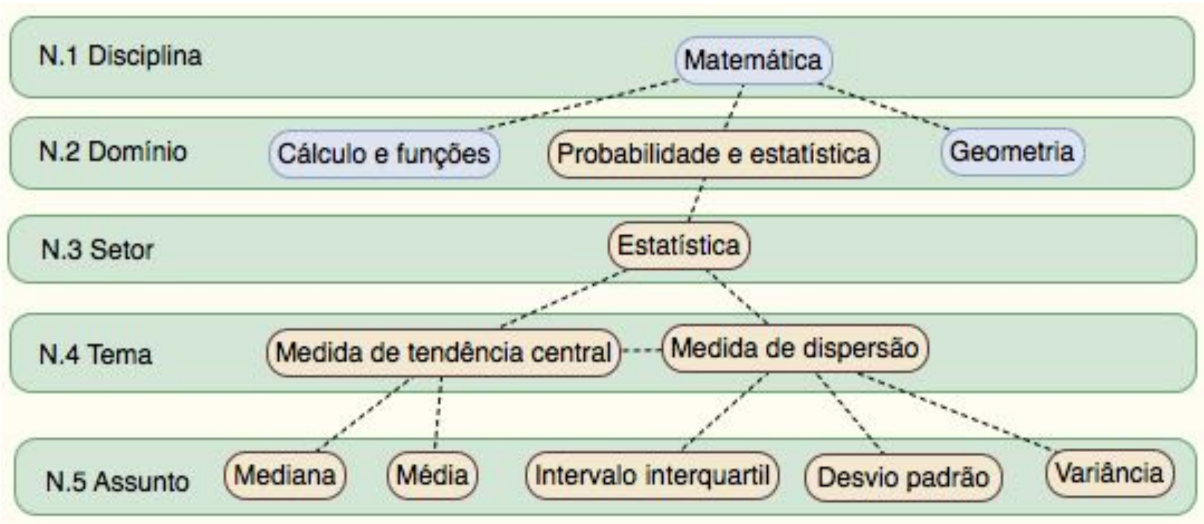
Quadro 20 – As MTCD no B.O. Nº 7 de 31 de agosto de 2000.

Conteúdos	Modalidades de aplicação	Comentários
Estatística Variância e desvio padrão. Diagrama em caixa; intervalo interquartil. Influência sobre o desvio padrão e o intervalo interquartil de uma transformação afim dos dados.	Pesquisar os resumos pertinentes e comentar os diagramas em caixa de quantidades numéricas associadas a séries simuladas ou não. Observar a influência dos valores extremos de uma série sobre o desvio padrão e também a flutuação do desvio padrão entre séries de mesmo tamanho. O uso de uma planilha eletrônica ou de uma calculadora permite observar dinamicamente e em tempo real os efeitos das modificações dos dados.	O objetivo de resumir uma série por uma dupla (medida de tendência central; medida de dispersão). Duas escolhas usuais são correntemente propostas: a dupla (mediana; intervalo interquartil), robusta em relação a valores extremos da série e a dupla (média aritmética; desvio padrão). Demonstrará que a média é o número real que minimiza $\sum(x_1 - x)^2$, então que ela não minimiza $\sum\lvert x_1 - x\rvert$. Observará se o desvio padrão de uma série, mais precisamente σ, reservará ao desvio padrão uma lei de probabilidade.

Fonte: France (2000, p. 175, tradução nossa)

Na figura 50, apresentamos os níveis de codeterminação para este programa. Em relação ao programa do primeiro ano do ensino médio não observamos no nível do setor uma indicação como no anterior pelas informações dadas, o que poderia se aproximar do setor foi o termo estatística utilizado em alguns momentos como parte do domínio. Estes níveis de codeterminação não estavam tão bem definidos, talvez procurando reduzir estas diferenças, dando uma visão mais completa e não fragmentada, o que seria mais relevante. Esta divisão rígida levando a uma fragmentação dos níveis no ensino é criticada por Chevallard (2002b).

Figura 50. Níveis de codeterminação do segundo ano do ensino médio na França, conforme o programa anterior ao atual.



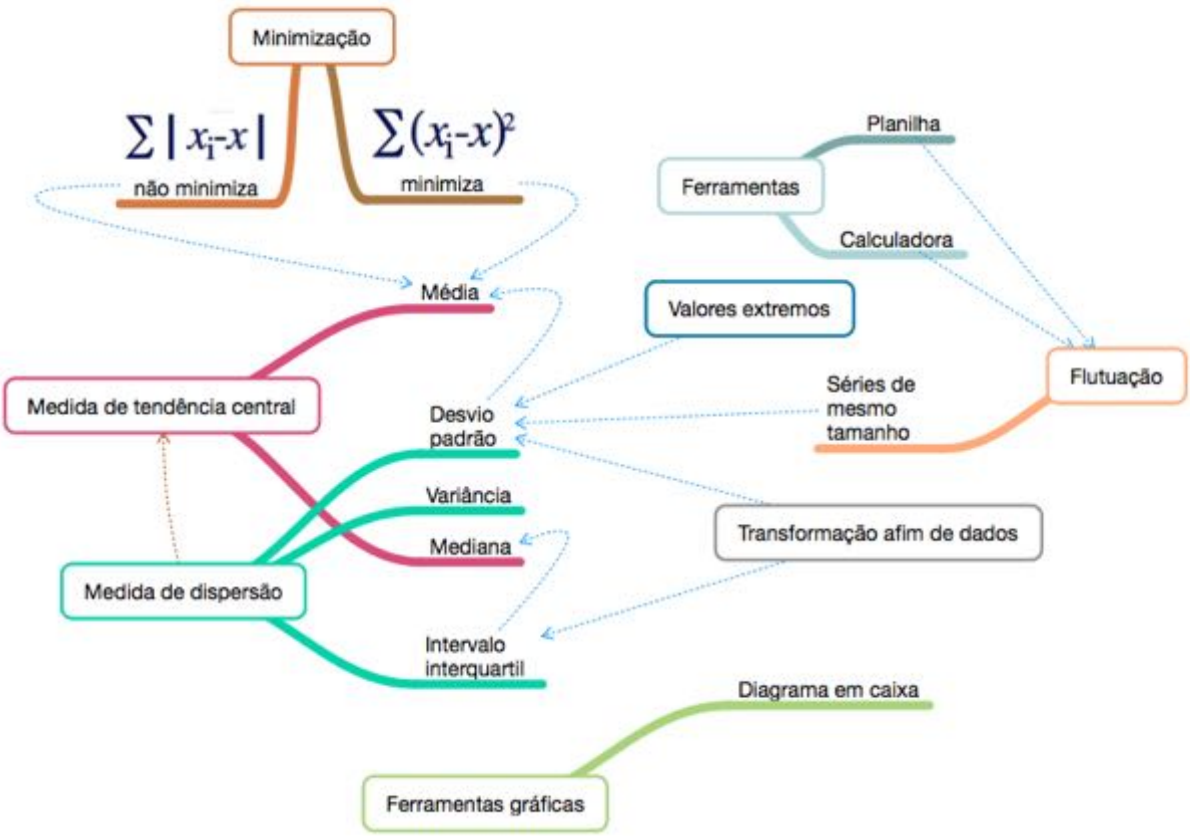
Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Observamos também no nível do tema que temos a variância e a ligação das medidas de dispersão com as medidas de tendência central, através das duplas média e desvio padrão e mediana e intervalo interquartil.

Na figura 51, com base na descrição deste programa, apresentamos os seus conceitos. O conceito de medida de tendência central apresenta ligado ao de dispersão, através da dupla desvio padrão e média e intervalo interquartil e mediana. Esta comparação amplia a compreensão do uso destas ferramentas em conjunto para análise de dados, como também no entendimento das limitações de uma dupla em relação à outra, favorecendo a escolha das medidas mais adequadas. Destacamos, contudo, que deveria se usar no programa ou "a medida do intervalo interquartil" ou o termo "desvio interquartil" e não "intervalo interquartil". Uma vez que o intervalo é [Q1; Q3] enquanto que a medida do intervalo é Q3-Q1 que é uma medida de dispersão.

Na figura 51, temos a variância, contudo outras medidas como a amplitude, o coeficiente de variação e a moda não são indicados no programa. O desvio padrão está ligado aos valores extremos, devia também haver uma ligação destes com o intervalo interquartil que não recebe influência deste e é mais adequado junto com a mediana na presença de valores extremos. Um outro aspecto rico é a análise da flutuação de séries do mesmo tamanho através do desvio padrão. Através desta análise, pode-se chegar a propriedades importantes desta medida. A planilha e a calculadora aparecem como ferramentas para explorar a flutuação. São de fatos instrumentos ricos possibilitando uma análise dinâmica destes. Isto deveria se estender ao estudo das medidas de tendência central e de dispersão procurando avaliar os efeitos da flutuação sobre estas medidas de forma dinâmica com o uso destes instrumentos. Observamos isto no livro Fr_C1.1[A].

Figura 51. Conceitos e ferramentas no programa anterior ao atual na França para o segundo ano do ensino médio.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Consideramos bastante pertinente o estudo da transformação afim, que permite compreender e facilitar o cálculo da média, do desvio padrão e da variância. Isto pode ser observado nas propriedades que apresentamos na fundamentação teórica: a propriedade 10 da média (linearidade), as propriedades 3 e 4 da variância e as propriedades 7 e 8 do desvio padrão. Destacamos este aspecto que possibilita um tratamento algébrico com estas medidas, como também perceber a limitação de cada uma destas em relação a estas transformações. Como exemplo de aplicação, pode-se observar o efeito de um aumento uniforme nos salários sobre a média e o desvio padrão e a variância sem precisar tomar os valores das observações novamente.

A importância da média na minimização das somas dos quadrados dos desvios é bastante pertinente e pode ser utilizada para indicar a sua relação com o desvio padrão. Contudo, em relação à minimização do módulo do desvio, deve-se conduzir o aluno a perceber que esta minimização não é dada pela média (como indicado no programa) e sim pela mediana (não indicado no programa). Estes dois casos foram demonstrados na fundamentação teórica, no primeiro volume. E com base neles, apresentamos duas propriedades: propriedade 6 (da média) e propriedade 5 (da mediana). Na figura 51, pode-se observar que as ligações são apenas com a média e poderiam se ampliar para a mediana, invertendo o sentido (negação/afirmação), uma vez que o que é uma negação para a média é uma afirmação para mediana e vice-versa.

Na figura 51, a representação gráfica aparece isolada e deveria estar associada às medidas de tendência central e de dispersão em algumas situações, como um recurso para comparar dois conjuntos de dados através destas medidas e de gráficos, para fornecer informações no cálculo das MTCD, entre outras. O diagrama em caixa é muito importante para comparar duas séries e observando simultaneamente a mediana, o desvio interquartil e a amplitude. Não queremos dizer que isto não vai ser feito ou não foi intenção dos autores do programa não fazer este tipo de vínculo, contudo no programa não aparece isto e deixa assim livre para interpretações dos autores dos livros. Tal como os demais programas apresentados, os elementos são insuficientes para determinar as organizações praxeológicas. O programa não aprofunda algumas das questões levantadas nas pesquisas que tratam das dificuldades de aprendizagem das MTCD. Ele também apresenta poucos elementos que permitem orientar os livros para um bom aprofundamento do conceito das MTCD.

Trataremos a seguir do programa atual na França.

1.1.2.2. Programa de Matemática do 2º ano do ensino médio atual na França

O programa de Matemática em vigor para o primeiro ano do ensino médio na França da série cientifica consta no B.O de nº 9 de 30 de setembro de 2010 que entrou em vigor no ano escolar 2011-2012 que iniciou em setembro de 2011, após 10 anos com o programa anterior em vigor.

Dentre os objetivos gerais, o que pode ser aplicado às MTCD é fazer refletir sobre situações reais, ricas e variadas (como um arquivo do INSEE). Discutimos este aspecto no programa anterior e foi levado em consideração na nossa análise dos L.D. Em conteúdos, modalidades de aplicação (no programa do primeiro ano utilizavam-se capacidades esperadas) e comentários.

O programa de Estatística do segundo ano é organizado em conteúdos, capacidades esperadas (no programa do segundo ano anterior utilizavam-se modalidades de aplicação) e comentários. Esta organização é a mesma organização do programa do primeiro ano. No quadro 21 apresentamos o trecho que diz respeito às MTCD.

Quadro 21 – As MTCD no B.O. Nº 9 de 30 de setembro de 2010.

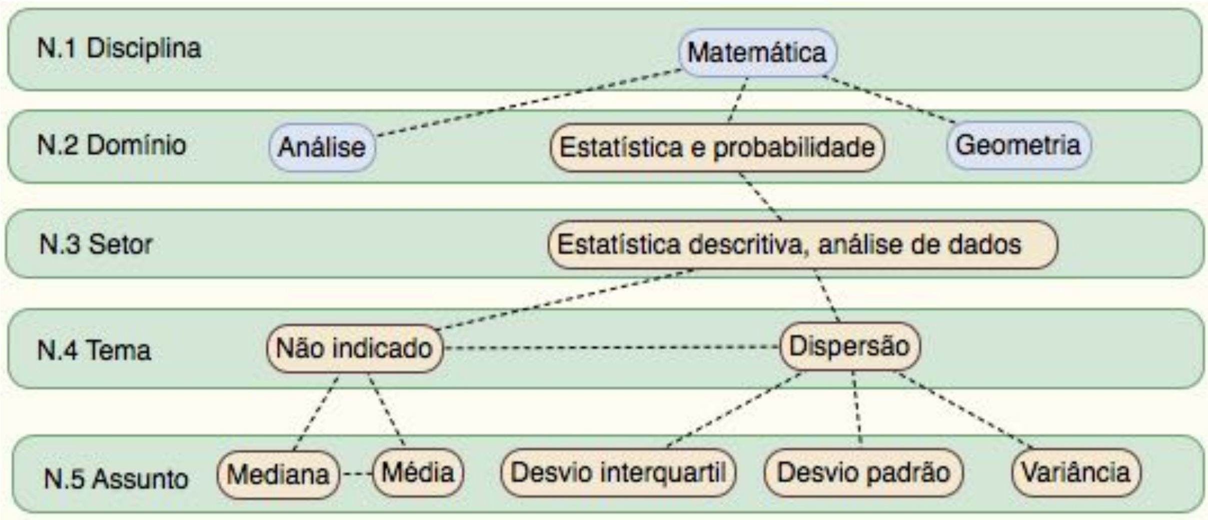
Conteúdos	Capacidades esperadas	Comentários
Estatística descritiva, análise de dados. Característica da dispersão: variância e desvio padrão. Diagrama em caixa	Utilizar de forma apropriada as duas duplas usuais que permitem resumir uma série estatística: (média, desvio padrão) e (mediana, desvio interquartil). Estudar uma série ou realizar uma comparação pertinente de duas séries estatísticas com ajuda de um software ou de uma calculadora.	Utilizar a calculadora ou um software para determinar a variância e o desvio padrão de uma série estatística. Os trabalhos realizados com auxílio de um software permitem fazer observar os exemplos dos efeitos da estrutura por ocasião do cálculo da média.

Fonte: France (2010a, p. 175, tradução nossa)

Comparando o programa atual com o anterior, observamos que alguns elementos importantes foram mantidos, outros retirados (influência de uma transformação afim dos dados, influência dos valores extremos, a média e mediana na minimização dos desvios) ou simplificados (a comparação dinâmica de duas séries com ajuda do software ou calculadora foi retirada da descrição das aplicações destas ferramentas).

Apresentamos na figura 52 os níveis de codeterminação para este programa. Não observamos nenhuma indicação de um termo que se referisse à média e mediana, assim indicamos no nível do tema como não indicado. Para se referir às medidas de dispersão, observamos o termo dispersão usado no programa. No assunto, existem medidas usuais de tendência central e de dispersão que não aparecem, tais como: a moda, a amplitude e o coeficiente de variação.

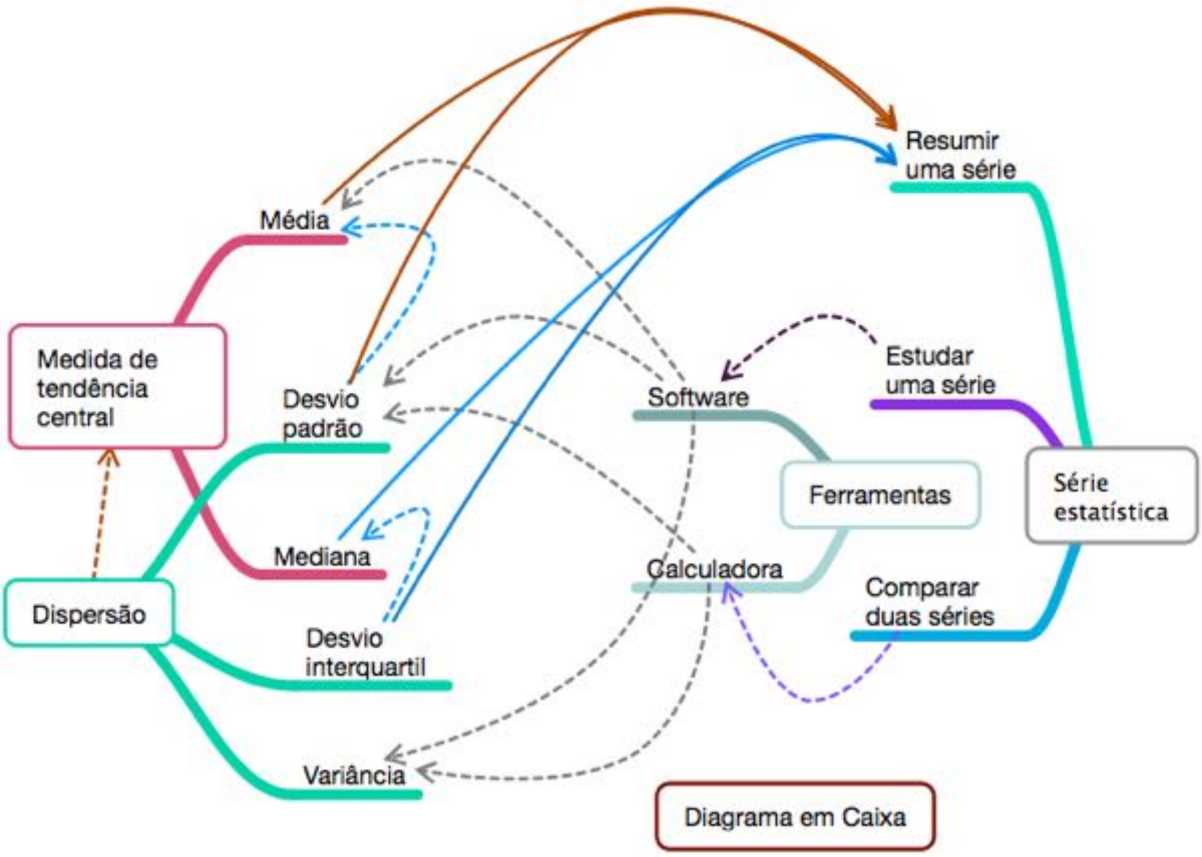
Figura 52 – Níveis de codeterminação do programa atual do segundo ano do ensino médio na França (série científica).



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Na figura 53, apresentamos conceitos e ferramentas observados no programa atual da França. Comparado com o programa anterior, muitos elementos foram retirados, procurando simplificar ainda mais o programa. Assim, deixa de se explorar algumas propriedades e limites das medidas de tendência central e de dispersão. Por outro lado, observamos a ligação dos softwares (no outro programa se limitava à planilha) e calculadora com a média, desvio padrão e variância. Observamos também o uso da dupla “desvio padrão e média” e “desvio interquartil e mediana” para resumir uma série. Observamos uma correção no programa anterior. O intervalo interquartil era tratado como medida de dispersão. Neste novo programa ele foi substituído pelo termo apropriado que é desvio interquartil ou ainda a medida do intervalo interquartil. O diagrama em caixa aparece sem mostrar nenhuma relação com a mediana e o desvio interquartil. A amplitude, a moda e o coeficiente de variação não aparecem.

Figura 53. Conceitos e ferramentas apresentadas no programa atual para o segundo ano do ensino médio na França.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Observamos nesse programa a indicação do gênero de tarefa "determinar". Podemos, com base no programa, pensar em quatro tipos de tarefas associadas a esse gênero:

- Determinar o desvio padrão usando a calculadora;
- Determinar o desvio padrão usando um software;
- Determinar a variância utilizando a calculadora;
- Determinar a variância utilizando um software.

Contudo, o tipo de tarefa está parcialmente definido, pois vai depender do tipo de calculadora, do tipo de software e da forma de apresentação dos dados para poder definir esse tipo de tarefa.

O programa não especifica que tipo de técnica, tecnologia e teoria estão associadas a esse tipo de tarefa. Também não especifica o tipo de software nem o tipo de calculadora[19].

Não observamos uma referência a elementos que possamos associar aos problemas identificados na aprendizagem das MTCD. Do ponto de vista da construção dos conceitos, existem muitos aspectos não abordados e algumas medidas não apresentadas. Dessa forma, investigamos esses aspectos nos livros franceses.

Levantamos no documento intitulado "Recursos para o segundo ano do ensino médio via geral e tecnológica" (FRANCE, 2012, tradução nossa), documento complementar produzido pelo Ministério da Educação Nacional da França. Em termos de temas de estudo, esse documento não acrescenta nada ao que já foi levantado nos programas, pois são citados: as duplas média/desvio padrão e mediana/desvio interquartil, ressaltando o papel dessas. Contudo, esse documento acrescenta um problema de minimização que envolve as duplas média/desvio padrão e mediana/desvio interquartil. Esse documento também destaca o poder da média em situações que envolvem o cálculo algébrico, indicando uma vantagem do uso dessa medida e ressaltando que, apesar dessa vantagem, quando na presença de valores extremos, a média é pouco significativa. Por outro lado, destaca o papel da mediana que não é influenciada por valores extremos, sendo nesse caso, mais adequada do que a média. Esse documento também ressalta a importância do uso de gráficos associados a essas medidas e em especial o diagrama de caixa, indicando dois processos usuais de determinação do diagrama. Indicando assim alguns elementos praxeológicos relativos ao diagrama de caixa (duas técnicas utilizadas). Esse documento deixa de abordar o uso de ferramentas tecnológicas associadas às medidas de tendência central e de dispersão.

Trataremos a seguir do programa brasileiro.

1.2. RESULTADOS E DISCUSSÕES DOS PROGRAMAS NO BRASIL

Para análise dos programas no Brasil, fizemos um levantamento dos seguintes documentos oficiais:

---

[19] A calculadora funciona com um software. Na França, são utilizadas na educação básica calculadoras mais sofisticadas que permitem traçar gráficos e determinar as MTCD com base em um conjunto de dados introduzidos nessa ferramenta. Assim, fica vago o termo software que pode ser o da própria calculadora, para PC, tablet etc. Existem vários softwares que podem ser usados no ensino das MTCD. Logo, fica ampla essa descrição, deixando em aberto para o livro didático a sua determinação.

- 1996 (com algumas modificações sofridas ao longo dos anos): A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB): Brasil (2010);
- 2000. O Plano Nacional de Educação (PNE): Brasil (2001);
- 2000. Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio: Brasil (2000a, 2000b, 2000c)
- Os Parâmetros Curriculares Nacionais+Ensino Médio (PCN+EM): Brasil (2002);
- As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM): Brasil (2006).

Estes documentos foram apresentados no volume 1 desta tese. Destes, os três últimos, os parâmetros e as orientações tratam das disciplinas e o seu ensino. Sendo que apenas os dois últimos apresentam de forma mais detalhada estes programas. Apresentando-se as divisões temáticas para a matemática, chegando a ser abordado tanto a estatística como as MTCD. Assim estes serão analisados, correspondendo à proposta nacional para o ensino médio de Matemática que contempla a estatística e as MTCD. Trataremos a seguir da análise destes dois.

1.2.1. OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS + ENSINO MÉDIO (PCN+EM):

Nos PCN+EM a matemática é dividida em três temas estruturadores para o ensino dessa disciplina :

- Tema 1: Álgebra: números e funções;
- Tema 2: Geometria e medidas;
- Tema 3: Análise de dados.

O tema 3 é dividido em três unidades temáticas:

- Estatística;
- Contagem;
- Probabilidade.

Sobre estatística, reproduzimos no quadro 22 a orientação deste programa. Ele aborda as três medidas de tendência central que estamos investigando. Como medida de dispersão é apresentada a variância e o desvio padrão, deixando-se de explorar outras medidas importantes como a amplitude, o desvio interquartil e o coeficiente de variação. Este programa destaca, no quadro 22, a identificação de formas adequadas de descrever e representar os dados, o que incluiria as MTCD. Apesar disso, apresenta linhas gerais, não indicando, por exemplo o mundo do trabalho, o ambiente escolar, das outras disciplinas entre outros. Destacamos também a preocupação em usar estas e outros conhecimentos estatísticos na leitura e interpretação de dados estatísticos presentes em diferentes formas utilizadas para divulgá-los.

Quadro 22 – Apresentação da unidade temática Estatística nos PCN+EM

1. Estatística: descrição de dados; representações gráficas; análise de dados: média, moda e mediana, variância e desvio padrão. • Identificar formas adequadas para descrever e representar dados numéricos e informações de natureza social, econômica, política, científico-tecnológica ou abstrata. • Ler e interpretar dados e informações de caráter estatístico apresentados em diferentes linguagens e representações, na mídia ou em outros textos e meios de comunicação. • Obter médias e avaliar desvios de conjuntos de dados ou informações de diferentes naturezas. • Compreender e emitir juízos sobre informações estatísticas de natureza social, econômica, política ou científica apresentadas em textos, notícias, propagandas, censos, pesquisas e outros meios.

Fonte: Brasil (2002, p. 127)

Ao contrário da OCEM que nós apresentaremos em seguida, os PCN+EM apresentam a organização dos conteúdos por ano. Apresentamos no quadro 23 o que diz respeito à estatística e probabilidade (o número 3 é indicativo do terceiro tema). Comparado com a descrição do programa francês, ele é muito mais resumido deixando de detalhar elementos importantes. O que pode levar a questionamentos, como: As MTCD entram na análise dos dados do segundo ano? Este quadro é previsto para uma situação de 4 aulas de matemática por semana (similar ao definido na França para a série científica).

Quadro 23 – Organização do trabalho escolar para o terceiro tema (Estatística e probabilidade).

1º ano	2º ano	3º ano
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

Fonte: Brasil (2002, p. 128)

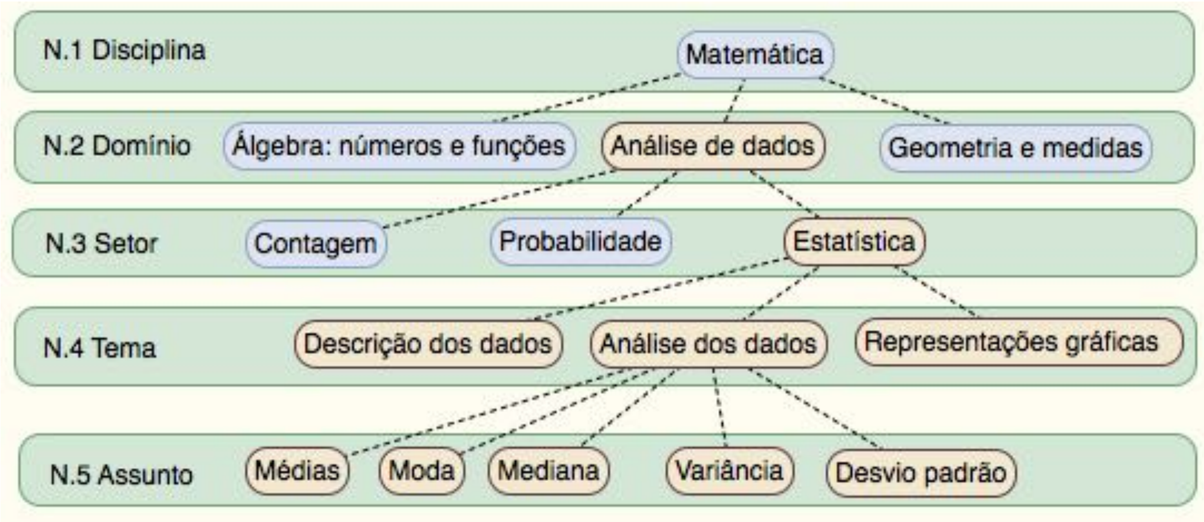
Em seguida, este documento informa que, caso o número de aulas de matemática seja inferior a quatro, o professor deve-se centrar nas ideias centrais de cada tema. No caso da estatística, o professor deve considerar que a: “estatística descritiva e as medidas de tendência central bastam para analisar a maioria dos gráficos e tabelas veiculados pela mídia; além disso, o aluno deve entender o conceito de probabilidade e suas aplicações mais simples”. A não definição de um número de horas mínimo para matemática é uma deficiência deste programa, contrário ao francês que chega a estes detalhes de forma a garantir um padrão de qualidade nacional. Um outro limitante deste programa para nossa pesquisa (não pretendemos ampliar a discussão) foi a retirada da dispersão para os casos com menos de 4 horas/aula de matemática por semana. Consideramos que as medidas de dispersão são importantes para analisar e até escolher que medida de tendência central é a mais adequada para o que se pretende analisar.

Outro aspecto importante desta proposta é a utilização da calculadora e softwares, apesar de não detalhar muito o seu uso limitando a sua importância para se trabalhar com dados reais. Neste aspecto, o programa francês (anterior ao atual) apresenta um exemplo prático de utilização.

Destacamos alguns aspectos gerais relevantes das propostas: trabalhar com projetos, contextualização, ir além da leitura para todas as decisões com base nos dados. Apesar da importância de se trabalhar com projetos, não observamos nos livros analisados qualquer menção ao assunto. Analisamos nos livros selecionados os tipos de atividades propostas o que inclui o contexto das atividades.

Na figura 54, apresentamos a codeterminação didática em relação a este programa. Com base no texto do programa, pudemos identificar todos os níveis de codeterminação, o que não foi possível no programa atual do segundo ano na França. Apesar de bem definidos, este documento esclarece que deve-se evitar o modelo curricular de assuntos enfileirados. Consideramos importante esta afirmação para evitar um ensino fragmentado, sem que o aluno perceba o todo. Esta forma também é criticada por Chevallard (2002.b) ao abordar os níveis de codeterminação. Isto foi abordado na análise dos livros, tendo em vista a construção do conceito das MTCD que deve ser baseada em situações variadas com diferentes contextos.

Figura 54 – Níveis de codeterminação nos PCN+EM

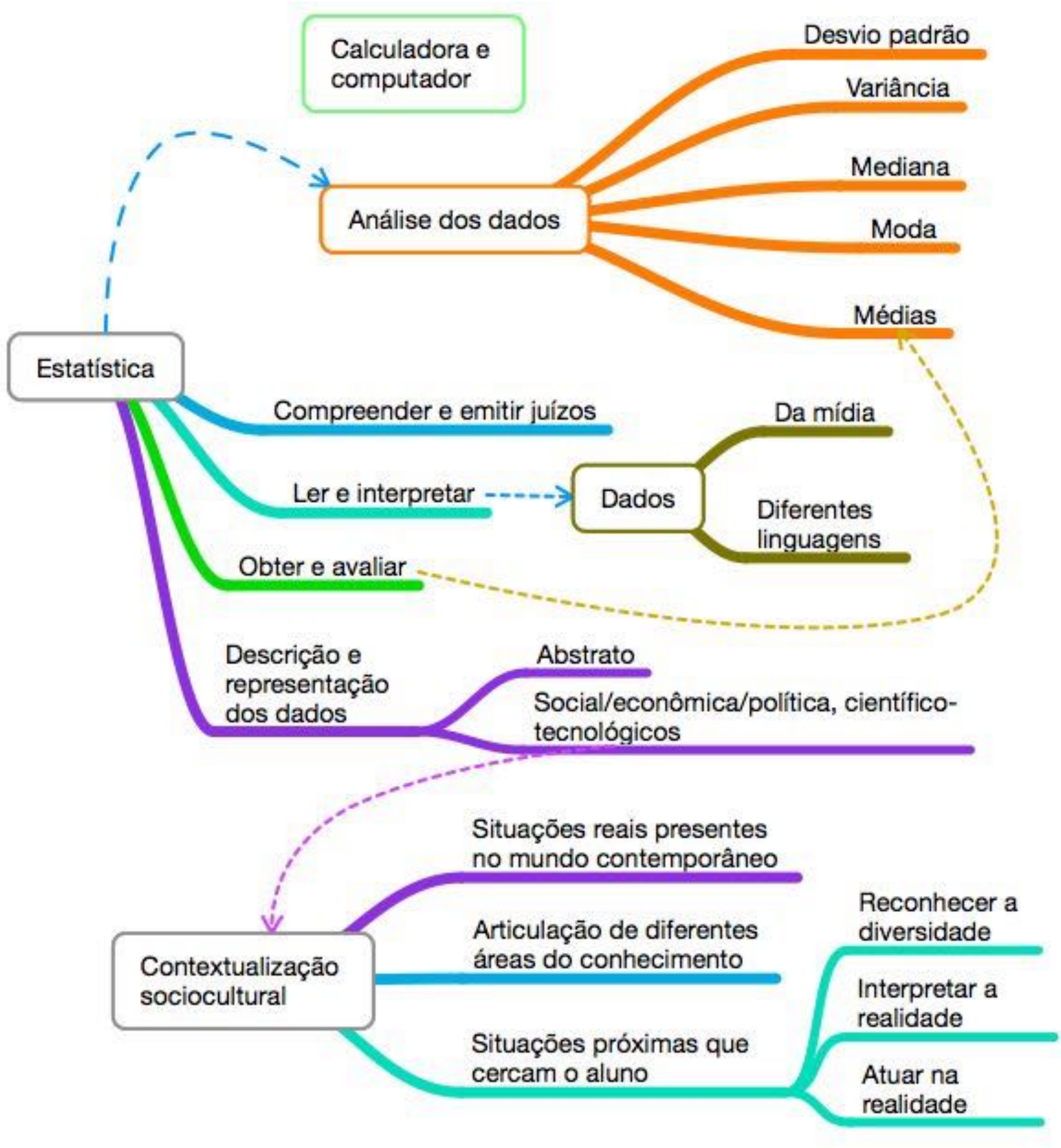


Fonte: elaborado pelo autor da tese.

As medidas de tendência central e de dispersão estão ligadas à análise dos dados, embora essas medidas também sirvam para descrevê-los. Analisando os níveis de codeterminação, observamos que ao ligar as medidas de tendência central e de dispersão apenas à análise dos dados (figura 54), estamos limitando-as ao ensino desta ao segundo ano do ensino médio. Esta proposta apresenta a restrição de abordar o assunto de forma pontual e não de forma evolutiva, como previsto no programa francês, no qual as MTCD são vistas no primeiro e segundo ano do ensino médio. Observamos também que no nível dos assuntos alguns temas deixam de ser indicados, tais como: amplitude, desvio interquartil e coeficiente de variação. A moda aparece nas medidas de tendência central, o que não observamos no programa atual da França.

Na figura 55, apresentamos os conceitos associados às medidas de tendência central e de dispersão nos PCN+EM. Alguns elementos citados, como a descrição dos dados, a calculadora e o computador, não aparecem ligados diretamente às MTCD, embora se presuma que devem ser usadas.

Figura 55. Conceitos, ferramentas no PCN+EM sobre as MTCD.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Com relação à calculadora e ao computador, este documento (BRASIL, 2002, p. 127) apenas destaca a sua importância na "abordagem de problemas com dados reais" e a "oportunidade de familiarizar com máquinas e equipamentos". Aspectos mais detalhados, como descritos no programa francês, não aparecem. Poderia se destacar o seu papel para compará-lo, utilizando a dupla média/desvio padrão com mediana/desvio interquartil, fazer simulações sobre grandes volumes de dados ou séries de mesmo tamanho e ver os efeitos sobre estas medidas. Assim como estes exemplos, poderiam se explorar outros aspectos ampliando o uso destes instrumentos tecnológicos. Logo, não apresentamos na figura 54 nenhuma ligação direta com as medidas de tendência central e de dispersão. Como este documento é de 2002, na ocasião não existiam nem o iPhone® (lançado em 2007 e no Brasil em 2008) nem tampouco o iPad®, que foi lançado em 2010, assim como outras linhas concorrentes destes produtos da Apple® que surgiram depois. Atualmente estes produtos estão estão sendo utilizadas em muitas escolas. O mesmo ocorreu com as OCEM (2006) que é anterior a estes. No caso do programa francês que é mais recente, eles não são citados no que se refere à matemática e em especial às MTCD (não analisamos de outras áreas ou documentos mais gerais).

Ao tratar dos dados, estes se referem aos dados da mídia e de diferentes linguagens, sem contudo especificar. Outras questões que investigamos sobre os dados nesta pesquisa que podem ampliar o conceito das MTCD, não aparecem indicados. A ligação dos dados no texto deste documento é apenas com a leitura e interpretação.

Na figura 55, temos a estatística que aparece dividida neste documento em torno de quatro atividades. Apenas uma cita as médias, sem contudo, ampliar para outras medidas.

Um conceito que aparece descrito neste documento é o de contextualização sociocultural em dois trechos deste documento e cada um apresentando um aspecto. O primeiro trecho apresenta-se como sendo uma forma de "aproximar o aluno da realidade e fazê-lo vivenciar situações próximas que lhe permitam reconhecer a diversidade que o cerca e reconhecer-se como indivíduo capaz de ler e atuar nesta realidade". Este aspecto não observamos em nenhum dos programas da França apresentados (atual ou anterior) e é um aspecto muito importante. Para isso, a estatística é em especial para esta pesquisa as medidas de tendência central e de dispersão que são um importante instrumento. Questões ligadas à vida do aluno podem ser tratadas na escola. Por exemplo, o preço de determinados produtos nos supermercados dos bairros podem ser levantados pelos alunos determinando-se a média e a dispersão do preço de cada produto, observando se existem grandes diferenças, o que influencia o orçamento familiar. Estas situações como outras, são um campo rico para a exploração das MTCD. Não observamos nos livros investigados este tratamento com as MTCD. Outros dois aspectos importantes, tratados em outra parte do documento, é a articulação com diferentes áreas do conhecimento que envolvem as disciplinas escolares e que procuramos investigar nos livros didáticos, além de situações mais presentes no mundo contemporâneo que ampliam a estatística para análises mais amplas. Estes dois aspectos observamos no programa francês e analisamos no livro didático. Apesar da importância desses elementos, o programa não apresenta uma ligação direta destes com as medidas de tendência central e de dispersão. Por essa razão os colocamos isolados. Eles são tratados em relação à matemática, assim não fizemos uma ligação com a estatística, embora se possa supor a sua ligação, uma vez que esta faz parte da matemática neste programa.

Com relação às medidas de tendência central e de dispersão (figura 55), estas aparecem ligadas diretamente ao conceito de análise de dados. Elas não são agrupadas ao conceito de medidas de tendência central ou ao conceito de medidas de dispersão ou aos dois, (MTCD) ou ao conceito de estatística descritiva. Não observamos outras medidas de dispersão como a amplitude, o desvio interquartil ou o coeficiente de variação. A média é apresentada como médias, mas não se detalham estas médias, ficando a cargo dos livros didáticos escolherem que médias devem ser exploradas (média harmônica, média amparada, média combinada etc).

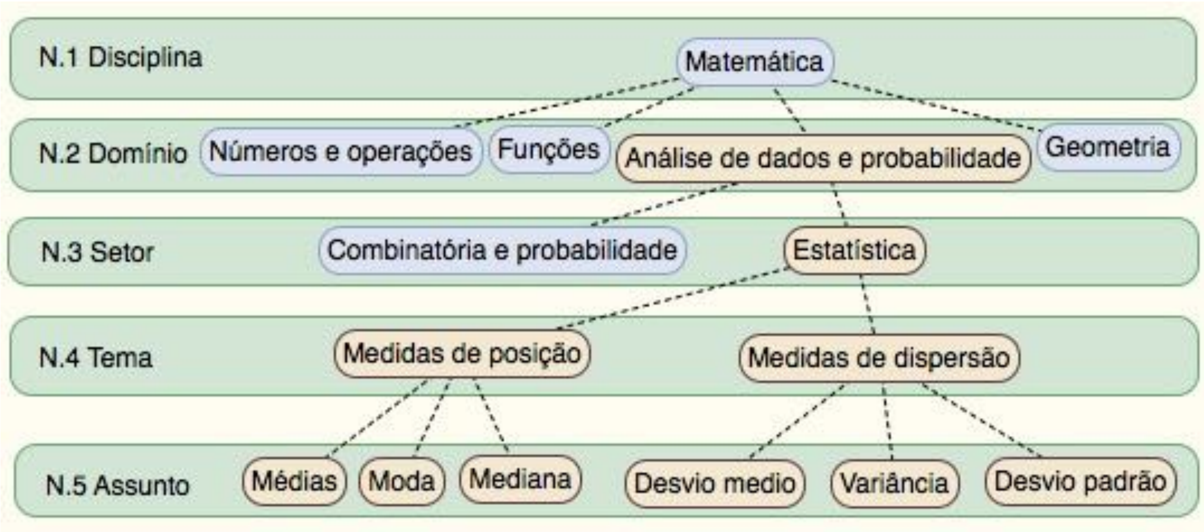
A apresentação do programa não nos permite analisar as praxeologias, uma vez que estas não são tratadas. Também não temos elementos para analisar as situações propostas nas atividades, de modo a comparar com os problemas detectados nas pesquisas sobre as MTCD. Portanto, do ponto de vista da construção do conceito, faz-se necessário analisar os livros, uma vez que este programa apresenta algumas limitações pelas descrições de caráter mais gerais.

Trataremos a seguir do programa atual no Brasil.

1.2.2. AS ORIENTAÇÕES CURRICULARES NACIONAIS PARA O ENSINO MÉDIO (OCEM).

Na figura 56, apresentamos os níveis de codeterminação referentes às OCEM (BRASIL, 2006). Este programa divide a matemática em quatro blocos, indicados nesta figura no nível 2 (domínio). Contudo, ele esclarece que estes não devem ser trabalhados de forma estanque, mas buscar uma articulação entre estes. Analisamos nos livros didáticos, no item contexto, o contexto deste com outras disciplinas. Observamos no livro brasileiro analisado, no capítulo que trata das MTCD, a inclusão de outros temas da matemática, tais como: progressão aritmética, logaritmo etc.

Figura 56. Níveis de codeterminação nas OCEM.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

No nível do setor, não temos uma definição clara destes setores, contudo, podemos observar ao tratar dos assuntos, abordar a estatística, a combinatória e probabilidade. Com base nesta organização do texto, indicamos este no nível dos setores. Observamos os temas relativos às MTCD agrupados nas medidas de posição (média, moda e mediana) e as medidas de dispersão (desvio médio, variância e desvio padrão). Este documento destaca que a estatística pode viabilizar perguntas que podem ser respondidas com uma coleta de dados, organização e representação. Ele destaca ainda que se oriente um trabalho que valorize a construção e representação de tabelas e gráficos analisando a sua conveniência e acrescenta o uso da tecnologia. Apesar da importância destes aspectos, ele não menciona nestas atividades o uso das medidas de tendência central e de dispersão. Assim, neste aspecto, consideramos uma limitação do mesmo.

Em outro trecho, o programa ressalta a necessidade de “intensificar a compreensão” (BRASIL, 2006, p.79) das medidas de posição (média, moda e mediana) e de dispersão (desvio médio, variância e desvio padrão). Contudo, este não aprofunda a discussão de como deve ser feita esta “intensificação” da compreensão.

Este programa não organiza os temas e setores por ano (ao contrário do programa anterior e os programas franceses), o que deixa mais aberto aos livros didáticos esta escolha levando a problemas, como observado no livro analisado, que concentra as MTCD em apenas um ano.

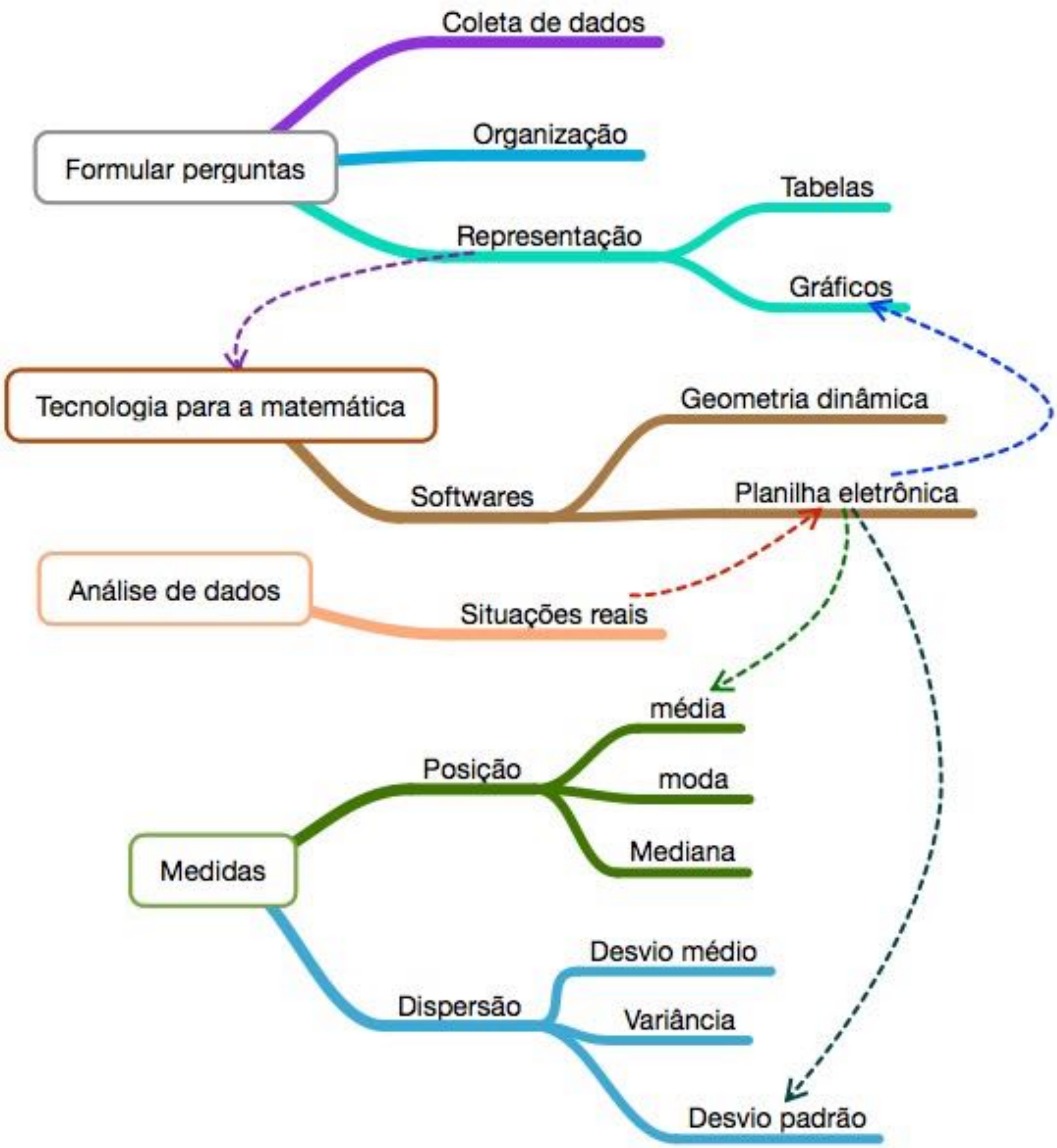
Na figura 57, apresentamos os conceitos observados. Ao tratar da tecnologia, este programa aborda os programas de computador ou softwares utilizados para construir conceitos matemáticos. Ele destaca os softwares de geometria dinâmica, programas de expressão (para o estudo de funções, desigualdades da geometria analítica, programas de visualização espacial e planilhas eletrônicas. Destes, o que existe uma descrição ligada à estatística são as planilhas (figura 57). Nesta descrição apresentamos as medidas de tendência central e de dispersão associadas a obter medidas. Assim, colocamos uma ligação da planilha com estas medidas. Contudo, ele não apresenta outros usos das planilhas ligados a estas medidas, como discutimos anteriormente na crítica aos programas franceses. Como também não apresenta outros softwares que poderiam ser utilizados para explorar as MTCD.

O programa destaca o papel de formular perguntas e respondê-las através da coleta, da organização e da representação (figura 57). Como forma de representação se apresenta as tabelas e gráficos. Neste processo ele não destaca o papel das MTCD.

Na análise de dados, destacamos o papel de se trabalhar com situações reais e utilizamos para isso uma planilha, não se fazendo nenhuma menção às MTCD.

As medidas de tendência central e de dispersão foram organizadas em torno de medidas de posição e medidas de dispersão (figura 57). Em relação ao programa anterior, observamos a inclusão do desvio médio. O desvio médio é um conceito importante, como também deve-se considerar certas particularidades, como quando os desvios são tomados em relação à média. Mas não vejamos que deveria ser apresentado sem uma descrição do seu contexto de uso como uma medida de dispersão. Contudo, deixa de se explorar outras medidas como a amplitude, o desvio interquartil e o coeficiente de variação. Dos conceitos e proposições apresentadas na figura 57, apenas observamos uma ligação da média com a planilha eletrônica, sem citar as demais medidas.

Figura 57. Os conceitos e outros elementos das OCEN.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Dessa forma, a apresentação das medidas de tendência central é bastante limitada neste programa, no que se refere à construção do conceito, como também os elementos que não permitem definir as organizações praxeológicas.

1.3. COMPARANDO O PROGRAMA BRASILEIRO E FRANCÊS

No quadro 23, apresentamos um quadro comparativo das medidas de tendência central e de dispersão indicadas nos programas do Brasil e da França, bem como, são agrupadas. No programa do anterior, na França, utiliza-se os termos medida de tendência central e de dispersão. No programa atual se utilizam os termos posição e dispersão. O termo posição se justifica, pois ele agrupa os quartis. No programa anterior no Brasil (PCN+EM), não aparece um termo mais específico para estas medidas, limitando-se à análise dos dados. Nas OCEN (2006) utilizam-se os termos medida de posição e de dispersão. Comparando as medidas apresentadas, o programa francês anterior apresenta algumas médias específicas, tais como: as médias amparada e combinada, apresenta o termo classe modal mais específico e não o termo mais amplo moda que designaria esta medida de posição. O programa francês também apresenta o desvio interquartil e a amplitude que não são apresentados nos dois programas do Brasil. No programa atual da França, a amplitude foi tirada e a apresentação da média simplificada. O programa atual inclui o desvio médio, apresenta a moda, mas deixa de tratar da amplitude e do desvio interquartil. Assim, ambos os programas, quando comparados, possuem limitações. Nenhum dos dois programas tratam do coeficiente de variação. Outras médias, tais como: a média geométrica, a média harmônica e a quadrática não são indicadas em nenhum dos dois programas, como também não aparecem nos livros atuais.

Observamos que o programa anterior na França apresentava alguns elementos importantes com relação à média, como a propriedade da linearidade, problemas com o algoritmo que poderiam levar a questões como a possibilidade do tratamento algébrico da média, do desvio padrão e variância, além das limitações da medianas condições de minimização dos desvios ao quadrado e dos módulos dos desvios. O programa brasileiro apresenta uma exploração mais ampla dos contextos, chegando ao contexto mais próximo do aluno. Existem outros elementos destes programas que foram apresentados com mais detalhes ao apresentar cada um deles, contudo, em relação às questões-chave desta pesquisa, observamos que as limitações das apresentações impossibilitam de traçar os elementos praxeológicos das medidas apresentadas neste programa, sendo necessário investigar os livros didáticos para identificar estas organizações. Do ponto de vista do conceito, observamos alguns elementos nos programas, contudo, em todos os programas bastante limitados, no que diz respeito à abordagem das MTCD. O que neste caso direciona o nosso olhar para a análise do livro didático que será feita no próximo capítulo.

Quadro 24 – Comparando a participação das medidas de tendência central e de dispersão nos programas do ensino médio analisados na França com o Brasil.

FRANÇA (anterior)		FRANÇA (atual)		BRASIL	
Primeiro ano (1999)	Segundo ano (2000)	Primeiro ano (2009)	Segundo ano (2010)	PCN+EM (2002)	OCEN (2006)
Medida de tendência central e de dispersão.	Medida de tendência central e de dispersão.	Posição e dispersão	Característica da dispersão	Análise dos dados	Medidas de posição e de dispersão
Média aritmética	Média aritmética	Média aritmética	Média	Médias	Médias
Média aritmét. amparada;	--------------	------------	--------------	--------------	--------------
Média aritmét. combinada.	--------------	------------	--------------	--------------	--------------
Mediana	Mediana	Mediana	Mediana	Mediana	Mediana
Classe modal	--------------	------------	--------------	Moda	Moda
Amplitude	--------------	------------	--------------	--------------	--------------
--------------	Variância	------------	Variância	Variância	Variância
--------------	Desvio padrão	------------	Desvio padrão	Desvio padrão	Desvio padrão
--------------	Intervalo interquartil	------------	Desvio interquartil	--------------	--------------
--------------	--------------	------------	--------------	--------------	Desvio médio

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

2. LIVROS DIDÁTICOS

Conforme descrito na segunda parte, organizamos a análise dos livros didáticos em quatro partes:

- Participação das medidas de tendência central e de dispersão nos livros didáticos;
- Análise da estrutura do capítulo de cada coleção selecionada no Brasil e na França;
- Análise praxeológica pontual das medidas de tendência central e de dispersão nos capítulos selecionados;
- Análise das situações propostas nos capítulos que abordam as medidas de tendência central e de dispersão.

Trataremos a seguir de cada uma destas análises.

2.1. PARTICIPAÇÃO DAS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS

Em função dos objetivos da pesquisa e procurando sistematizar a nossa análise, organizamos inicialmente uma visão geral levando em conta o número de páginas nos livros didáticos. Esta análise foi dividida em três partes. Para esta foram selecionadas 7 coleções de livros didáticos na França e 7 coleções no Brasil, conforme descritos na segunda parte desta tese. Tratamos a seguir da primeira destas.

2.1.1. VISÃO GERAL DA MATEMÁTICA NAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS SELECIONADAS

Nesta seção, procuramos comparar a participação da matemática nos livros didáticos do Brasil e da França. Procuramos responder algumas questões iniciais:

- As coleções dos livros didáticos possuem o mesmo número de páginas no Brasil consagrados à matemática? E na França?

- Quando comparamos estes dois países, o que muda entre eles?

Na tabela 46, apresentamos o resultado do levantamento realizado nas 7 coleções selecionadas no Brasil. No primeiro ano, temos a maior dispersão com um coeficiente de variação de 21. Das 7 coleções, temos apenas dois valores acima da média representados pelas coleções Br_C2 com 504 páginas e Br_C1 com 408 páginas. O mínimo neste ano é a coleção Br_C3 com 256 páginas. No segundo ano, o máximo é a coleção Br_C6 com 448 páginas e o mínimo continua sendo coleção Br_C3 com 312 páginas. No terceiro ano, o número máximo de páginas é da coleção Br_C5 com 376 páginas e o mínimo é a coleção Br_C3 com 200 páginas. Assim, o número máximo de páginas por ano muda de coleção a cada ano. O número mínimo de páginas se mantém constante com a mesma coleção. Observamos a média de páginas por ano. O segundo ano é o ano com uma maior média de páginas, sendo seguido pelo primeiro ano. Logo, o terceiro ano é o ano com o menor número de páginas. Contudo, este comportamento não é padronizado, como que resultante da necessidade de cada ano. Apenas três coleções mantêm este padrão (Br_C1, Br_C3 e Br_C4). As outras 4 seguem quatro padrões de comportamentos diferentes. Uma coleção, a Br_C2, a cada ano apresenta uma redução significativa. Tendo no primeiro ano o maior valor (504 páginas) e no último ano o menor (264 páginas). Esta coleção é a que possui uma maior dispersão com um desvio padrão de 98 e um coeficiente de variação de 26. Ela possui também a maior amplitude com 240 páginas e também o maior total de páginas. A coleção Br_C5 possui o maior número de páginas, no primeiro ano, sendo seguido pelo último ano. A coleção Br_C6 possui o maior número de páginas no segundo ano (sendo o maior valor neste ano), seguido pelo último ano. A Br_C7 possui o maior número de páginas no primeiro ano, os dois outros anos possuem o mesmo número de página. Esta coleção é a que possui a menor dispersão com o desvio padrão de 8 e o coeficiente de variação com 2. Considerando a dispersão por ano, o primeiro ano possui a maior dispersão, influenciado pela coleção Br_C2 (que possui quase o dobro da coleção com menor número de páginas), que faz com que este ano tenha a maior amplitude.

Tabela 46. Número de páginas consagradas à matemática nas 7 coleções do ensino médio selecionadas no Brasil.

L.D.	1º ano	2º ano	3º ano	Total	$[x_1;\ x_p]$	m	σ	CV (%)
Br_C1	408	440	280	1128	160	376	69	18
Br_C2	504	384	264	1152	240	384	98	26
Br_C3	256	312	200	768	112	256	46	18
Br_C4	304	320	272	896	48	299	20	7
Br_C5	384	328	376	1088	56	363	25	7
Br_C6	320	448	352	1120	128	373	54	15
Br_C7	336	320	320	976	16	325	8	2
Total	2512	2552	2064	7128				
$[x_1;\ x_p]$	248	136	176	384				
m	359	365	295	1018				
σ	75	55	55	133				
CV (%)	21	15	19	13				

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Na tabela 47, apresentamos o número de páginas das coleções francesas do ensino médio selecionadas. Nas coleções francesas, observamos claramente um padrão bem definido. No primeiro ano temos o menor número de páginas em todas as coleções. O número de páginas por coleção aumenta no segundo ano. No terceiro ano, temos o maior número de páginas por coleção em todas as coleções. Observamos também que a cada ano existe um padrão bem definido com uma pequena dispersão a cada ano. O coeficiente de variação no primeiro ano é 9 e nos dois outros é 7. A dispersão por ano no Brasil é bem maior. O total de páginas destinadas à matemática das coleções francesas é 9455 contra a brasileira 7128.

Considerando o número médio de páginas, observamos que nos dois primeiros anos a média da coleção francesa e brasileira são bastante próximas se diferenciando apenas no terceiro ano. Esta diferença maior no terceiro ano se deve ao programa do terceiro ano da França com uma parte suplementar que em cinco coleções é representada por um segundo volume. Para ilustrar este comportamento, apresentamos o gráfico 19.

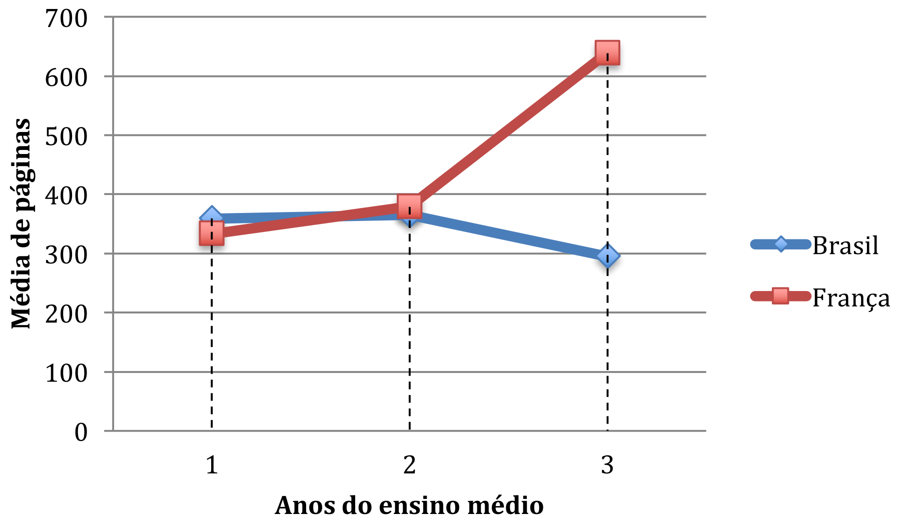
Assim, consideramos que as diferenças maiores destas coleções por países, tomando a média, é no terceiro ano do ensino médio. Contudo, levando em conta o comportamento, enquanto que as coleções francesas possuem um comportamento previsível com pequena dispersão por ano, as coleções brasileiras quando comparadas entre si possuem comportamentos diferentes a cada ano e uma maior dispersão.

Tabela 47. Número de páginas consagradas à matemática nas 7 coleções do ensino médio selecionadas na França.

L.D.	1º ano	2º ano	3º ano	Total	$[x_1;\ x_p]$	m	σ	CV (%)
Fr_C1	304	367	577	1248	273	416	117	28
Fr_C2	357	405	614	1376	257	459	112	24
Fr_C3	374	422	582	1378	208	459	89	19
Fr_C4	325	353	650	1328	325	443	147	33
Fr_C5	294	390	664	1348	370	449	157	35
Fr_C6	316	357	698	1371	382	457	171	37
Fr_C7	360	360	686	1406	326	469	154	33
Total	2330	2654	4471	9455				
$[x_1;\ x_p]$	80	69	121	158				
m	333	379	639	1351				
σ	29	25	45	48				
CV (%)	9	7	7	4				

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Gráfico 19. Média de páginas por ano do ensino médio nas coleções selecionadas no Brasil e na França.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

2.1.2. PARTICIPAÇÃO DA ESTATÍSTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS DAS 7 COLEÇÕES SELECIONADAS

2.1.2.1. Coleções do Brasil

Na tabela 48, apresentamos a participação da estatística em relação aos outros domínios das coleções do Brasil. Ao compararmos a participação da estatística em relação aos demais domínios, observamos que em relação ao total de páginas por ano, temos uma participação da estatística no primeiro ano de apenas 3% do total de páginas destinadas a cada domínio no Brasil. Observamos que das 7 coleções do primeiro ano, apenas 2 tratam da estatística. O ano com a maior participação por páginas é o segundo ano com 24 % sendo seguido pelo segundo ano com 15%. Quanto à dispersão, o primeiro ano é o ano com maior dispersão. Enquanto que para os domínios 1 e 2 temos um coeficiente de variação de 22 para a estatística, o coeficiente de variação é de 158 para o primeiro ano. Esta grande dispersão se deve ao fato de termos 5 coleções com 0 páginas destinadas à estatística. Considerando as coleções como um todo, a participação da estatística no total das coleções é de 14% das páginas enquanto que temos 86% divididos entre os outros domínios. Estes dados indicam uma valorização maior dos outros domínios em detrimento da estatística. Das 7 coleções, considerando o total de páginas, a coleção Br_02 foi a que teve a menor participação da estatística em relação aos outros domínios com 10% do total de páginas destinadas a este domínio. A coleção em que a estatística tem uma maior participação é a Br_06 com 19% do total de páginas destinada a este domínio, com uma média de 59 páginas destinadas à estatística. A coleção em que observamos uma maior dispersão na apresentação da estatística é a Br_05 com um coeficiente de variação de 103. Esta coleção não apresenta nenhuma página destinada à estatística no primeiro ano, apresenta 124 páginas destinadas à estatística no segundo ano e apenas 30 páginas destinada à estatística no terceiro ano. Ao contrário de apresentar de forma mais uniforme ao longo dos três anos do ensino médio, esta coleção centrou o ensino de estatística em um dos anos do ensino médio. Das 7 coleções, a Br_C6 e a Br_C1 foram a que apresentaram um maior percentual de páginas destinada à estatística (respectivamente 19% e 16% do total) e, em relação às outras coleções, uma distribuição mais equilibrada com menor dispersão (com um coeficiente de variação de 44 e 31).

Tabela 48 – Participação da estatística nos livros didáticos do Brasil selecionados segundo a organização em domínios proposta nesta pesquisa.

Cole-ção.	Domínio	1º ano		2º ano		3º ano		Total		$[x_1;\ x_p]$	m	σ	CV
		N	%		%		%		%				(%)
Br_C1	D.1 e 2	300	91	290	82	162	76	752	84	138	251	63	25
	D.3(est.)	28	9	64	18	52	24	144	16	36	48	15	31
	Total	328	100	354	100	214	100	896	100	140	299	61	20
Br_C2	1 e 2	435	100	266	80	186	85	887	90	249	296	104	35
	3 (est.)	0	0	67	20	34	15	101	10	67	34	27	81
	Total	435	100	333	100	220	100	988	100	215	329	88	27
Br_C3	1 e 2	234	100	225	82	155	88	614	89	79	205	35	17
	3 (est.)	0	0	51	18	22	12	73	11	29	24	21	86
	Total	234	100	276	100	177	100	687	100	99	229	41	18
Br_C4	1 e 2	271	100	241	80	191	84	703	88	80	234	33	14
	3 (est.)	0	0	60	20	37	16	97	12	60	32	25	76
	Total	271	100	301	100	228	100	800	100	73	267	30	11
Br_C5	1 e 2	358	100	180	59	322	91	860	85	178	287	77	27
	3 (est.)	0	0	124	41	30	9	154	15	124	51	53	103
	Total	358	100	304	100	352	100	1014	100	54	338	24	7
Br_C6	1 e 2	231	89	287	76	243	82	761	81	56	254	24	9
	3 (est.)	30	11	93	24	53	18	176	19	63	59	26	44
	Total	261	100	380	100	296	100	937	100	119	312	50	16
Br_C7	1 e 2	292	100	206	75	242	88	740	88	86	247	35	14
	3 (est.)	0	0	68	25	34	12	102	12	68	34	28	82
	Total	292	100	274	100	276	100	842	100	18	281	8	3
Total	1 e 2	2121	97	1695	76	1501	85	5317	86	620	1772	259	15
	3 (est.)	58	3	527	24	262	15	847	14	469	282	192	68
	Total	2179	100	2222	100	1763	100	6164	100	459	2055	207	10
$[x_1;\ x_p]$	1 e 2	143		110		167		273					
	3 (est.)	58		73		30		103					
	Total	201		106		175		327					
m	1 e 2	303	97	242	76	214	85	760	86				
	3 (est.)	8	3	75	24	37	15	121	14				
	Total	311	100	317	100	252	100	881	100				
σ	1 e 2	67		38		54		85					
	3 (est.)	13		23		10		34					
	Total	64		37		55		106					
CV (%)	1 e 2	22		16		25		11					
	3 (est.)	158		31		28		28					
	Total	20		12		22		12					

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Tratamos a seguir das coleções na França.

2.1.2.2. Coleções da França

Na tabela 49, temos uma comparação da estatística (domínio 3) em relação aos outros domínios nas 7 coleções selecionadas da França.

Ao compararmos o número de páginas em todas as 7 coleções para o total de páginas referente aos três domínios, observamos um crescimento constante de tal forma que o número de páginas do segundo ano ($n_{pag}2^0$a) é maior do que o do primeiro ano ($n_{pag}1^0$a), e o número de páginas do terceiro ano ($n_{pag}3^0a$) é maior do que o dos outros dois anos. Poderíamos representar esta relação por: $n_{pag}1^0a$ < $n_{pag}2^0a$ < $n_{pag}3^0a$. Esta relação é válida também para a soma de páginas dos domínios 1 e 2. No caso do domínio 3 (estatística), observamos que apenas na coleção C3.Fr temos uma mudança nesta relação, que pode ser traduzida por: $n_{pag}1^0a$ < $n_{pag}3^0a$ < $n_{pag}2^0a$. Esta coleção apresenta 120 páginas para a estatística no segundo ano, 94 páginas para a estatística no terceiro ano e 82 páginas para a estatística no primeiro ano do ensino médio. Assim, trata-se de uma exceção a esta relação e apenas em uma coleção.

Nas coleções do primeiro ano, o maior número de páginas dedicadas à estatística foi na coleção Fr_C3 com 82 páginas e o mínimo de páginas com a coleção Fr_C1 com 46 páginas. No segundo ano, o maior número de páginas foi na coleção Fr_C3 com 120 páginas e o menor número de páginas foi 76 em duas coleções a Fr_C1 e Fr_C4. No terceiro ano, a coleção com maior número de páginas destinada à estatística foi a coleção Fr_C5 com 114 páginas sendo seguida pela coleção Fr_C2 com 111 páginas. Estas duas apresentaram o maior percentual destinado à estatística, ambas com 26% destinadas à estatística e 74% destinados aos outros domínios. Considerando o total de páginas destinadas à estatística, observamos que na coleção Fr_C3 temos uma maior participação proporcional com 26% destinadas à estatística. Um valor bem menor do que os outros domínios que ficam próximos de ¾ das páginas. Ainda levando em conta este critério, a coleção com menor participação proporcional da estatística é a coleção Fr_C7 com 22%. Ficando esta participação em relação ao número total de páginas entre ¼ e 1/5 quando comparado aos outros domínios. Observamos também que a dispersão não é grande em relação às páginas destinadas à estatística, com um coeficiente de variação para o primeiro ano de 21, para o segundo ano de 18 e para o terceiro ano de 11. Apesar disso, quando comparado com os outros domínios, observamos que ela é bem maior. Por um lado, isto pode se justificar por que estou considerando os dois domínios juntos, podendo haver uma certa compensação. Por outro lado, também podemos ter influência do amadurecimento destes. A estatística na série científica foi implantada em 2000, enquanto que os outros domínios são mais antigos. Outro aspecto que consideramos para comparar estas duas séries em relação à dispersão foi o uso do coeficiente de variação. Se compararmos apenas o desvio padrão, podemos observar que o desvio padrão nos domínios 1 e 2 são maiores do que a estatística. Contudo, estes domínios possuem uma média de páginas bem diferente, que deve ser levado em conta, sendo mais apropriado quando uma comparação entre domínios diferentes.

Tabela 49 – Participação da estatística nos livros didáticos da França selecionados segundo a organização em domínios proposta nesta pesquisa.

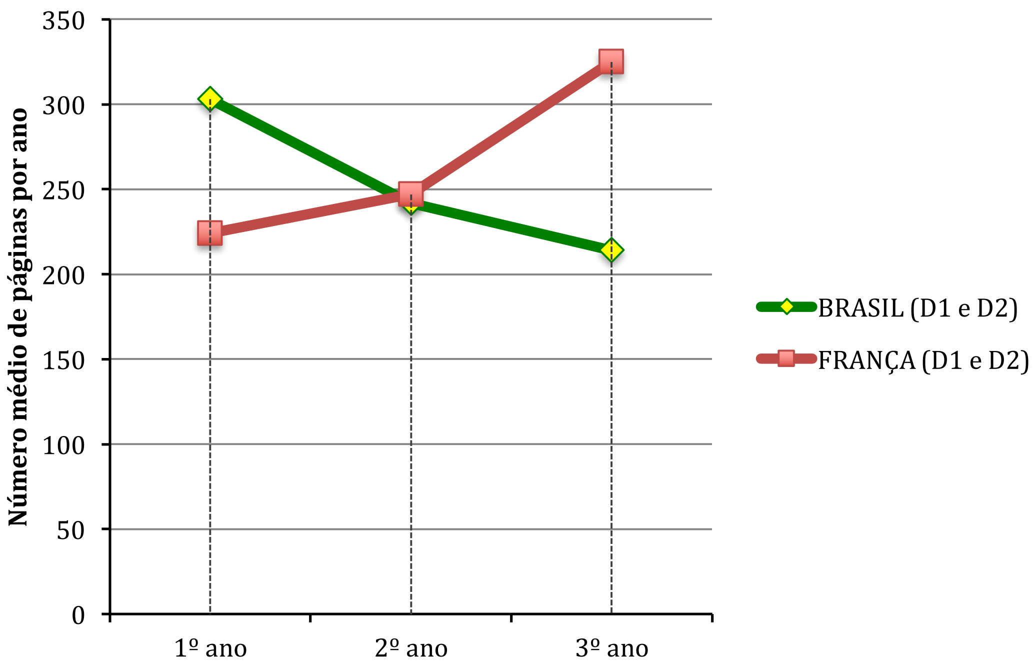
Cole-ção.	Domínio	1º ano		2º ano		3º ano		Total		$[x_1;\ x_p]$	m	σ	CV
		N	%	N	%	N	%	N	%				(%)
Fr_C1	D.1 e 2	198	81	234	75	284	76	716	77	86	239	35	15
	D.3(est.)	46	19	76	25	90	24	212	23	44	71	18	26
	Total	244	100	310	100	374	100	928	100	130	309	53	17
Fr_C2	1 e 2	250	82	268	77	314	74	832	77	64	277	27	10
	3 (est.)	54	18	80	23	111	26	245	23	57	82	23	29
	Total	304	100	348	100	425	100	1077	100	121	359	50	14
Fr_C3	1 e 2	242	75	270	69	320	77	832	74	78	277	32	12
	3 (est.)	82	25	120	31	94	23	296	26	38	99	16	16
	Total	324	100	390	100	414	100	1128	100	90	376	38	10
Fr_C4	1 e 2	242	82	248	77	334	77	824	78	92	275	42	15
	3 (est.)	54	18	76	23	98	23	228	22	44	76	18	24
	Total	296	100	324	100	432	100	1052	100	136	351	59	17
Fr_C5	1 e 2	180	76	244	75	328	74	752	75	148	251	61	24
	3 (est.)	56	24	81	25	114	26	251	25	58	84	24	28
	Total	236	100	325	100	442	100	1003	100	678	334	84	25
Fr_C6	1 e 2	216	81	220	74	348	79	784	78	132	261	61	23
	3 (est.)	52	19	78	26	92	21	222	22	40	74	17	22
	Total	268	100	298	100	440	100	1006	100	172	335	75	22
Fr_C7	1 e 2	240	76	244	76	350	81	834	78	110	278	51	18
	3 (est.)	76	24	78	24	84	19	238	22	8	79	3	4
	Total	316	100	322	100	434	100	1072	100	118	357	54	15
Total	1 e 2	1568	79	1728	75	2278	77	5574	77	710	1858	304	16
	3 (est.)	420	21	589	25	683	23	1692	23	263	564	109	19
	Total	1988	100	2317	100	2961	100	7266	100	973	2422	404	17
$[x_1;\ x_p]$	1 e 2	70		50		66		376					
	3 (est.)	36		44		30		84					
	Total	88		92		68		200					
m	1 e 2	224	79	247	75	325	77	796	77				
	3 (est.)	60	21	84	25	98	23	242	23				
	Total	284	100	331	100	423	100	1038	100				
σ	1 e 2	25		16		21		44					
	3 (est.)	12		15		10		25					
	Total	32		28		22		60					
CV (%)	1 e 2	11		7		6		5					
	3 (est.)	21		18		11		11					
	Total	11		8		5		6					

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

2.1.2.3. Comparando a participação da estatística nos livros didáticos das coleções selecionadas

Apresentamos no gráfico 20, uma comparação do número médio de páginas destinado aos domínios 1 e 2 para os três anos do ensino médio para o Brasil e para a França. Pelo gráfico, pode-se observar que no total de páginas das coleções selecionadas no Brasil, o número de páginas destinada aos domínios 1 e 2 diminui conforme se muda do primeiro para o segundo e do segundo para o terceiro ano. Na França, observamos uma tendência inversa.

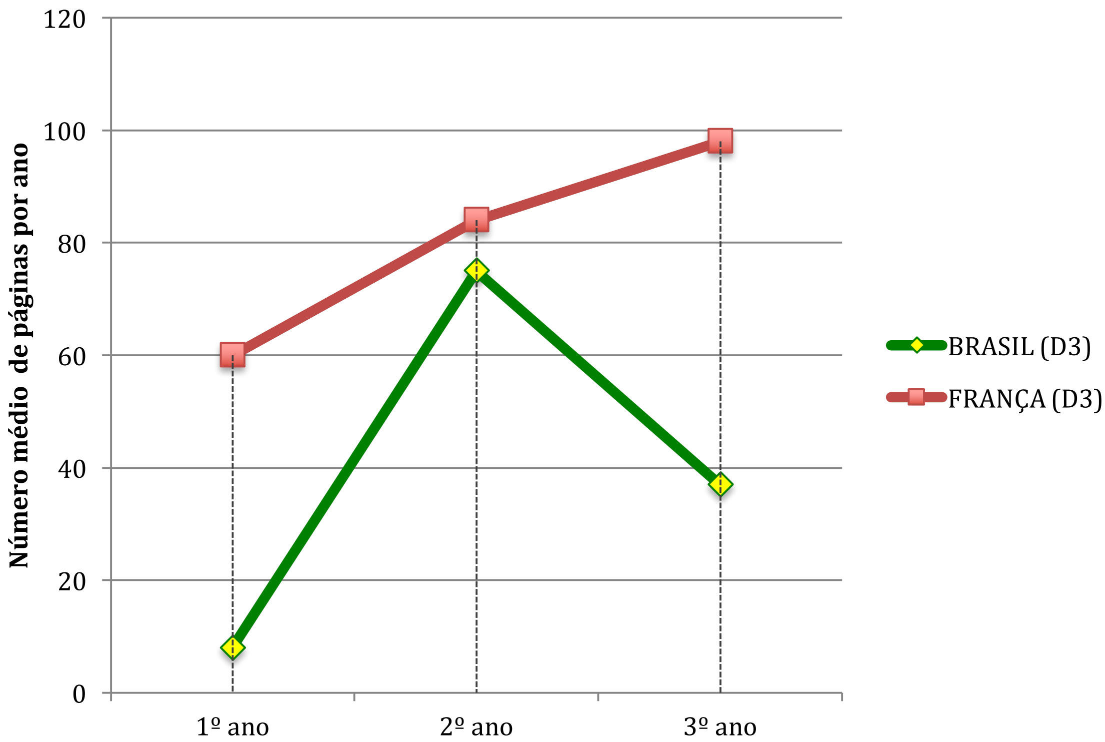
Gráfico 20 – Comparando a média de páginas por ano para os domínios 1 e 2 nas coleções selecionadas do Brasil e da França.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

No gráfico 4, apresentamos uma comparação da média de páginas destinadas à estatística por ano no ensino médio, tanto no Brasil como na França. Enquanto que na França temos um total de páginas iniciais considerável para o primeiro ano, no Brasil, o número de páginas das coleções ou é muito pequeno ou é igual a zero. Nas coleções francesas, este número de páginas aumenta como indicado no gráfico. No Brasil, temos um aumento para o segundo ano e depois uma redução. Considerando o critério do número de páginas, as coleções valorizam muito mais a estatística do que as coleções do Brasil. Em parte, isto se deve ao programa francês que tem força de lei e define claramente o que deve ser dado em cada ano.

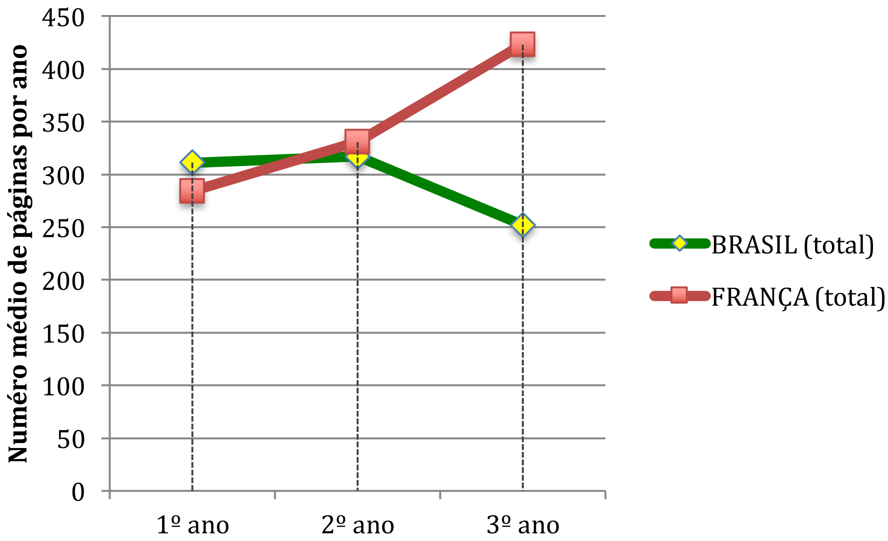
Gráfico 21 – Comparando a média de páginas por ano para o domínio 3 (estatística) nas coleções selecionadas do Brasil e da França.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

No gráfico 22, apresentamos uma comparação levando em conta a média de páginas nos três domínios nas coleções do Brasil e da França organizados por ano. Levando em conta o gráfico 22 e as tabelas 48 e 49 já apresentadas, observamos que o número médio de páginas nas coleções francesas (1038) é maior do que nas coleções brasileiras (880). Considerando o número médio de páginas por ano, apenas no primeiro ano as coleções brasileiras têm um número médio superior às coleções francesas. Nas coleções francesas existem um crescimento no número médio de páginas a cada ano. Nas coleções brasileiras, o número médio de páginas por ano das coleções do primeiro ano e do segundo ano são muito próximos, tendo uma redução nas coleções do terceiro ano do ensino médio.

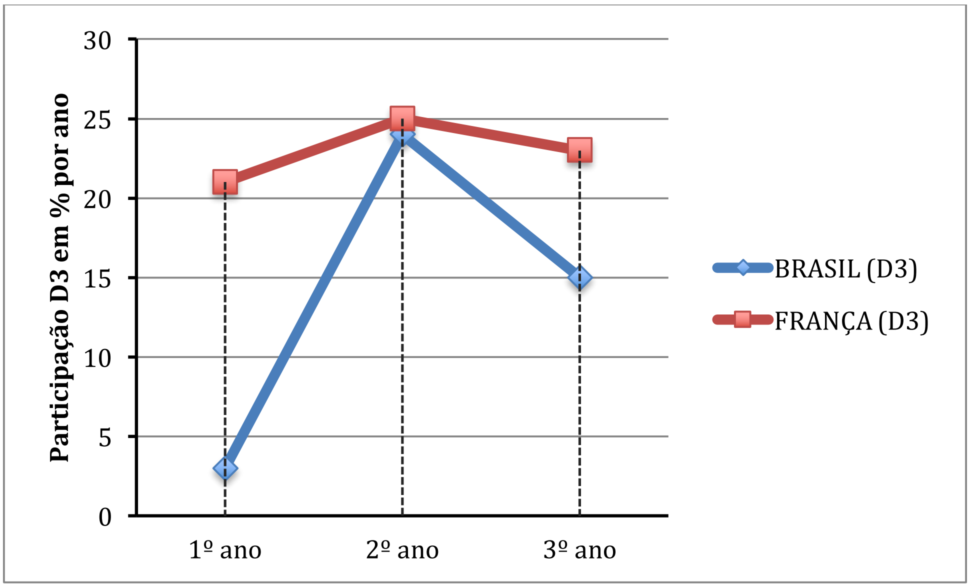
Gráfico 22 – Comparando o número médio de páginas por ano para os três domínios nas coleções selecionadas do Brasil e da França.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

No gráfico 23, apresentamos uma comparação da participação da estatística em relação aos outros domínios nas coleções do Brasil e na França em porcentagem. Enquanto no Brasil temos no primeiro ano do ensino médio 3% da média de páginas das coleções selecionadas que são destinadas à estatística (contra 97% dos outros domínios), na França temos 21%. No segundo ano temos o maior percentual de páginas, tanto nas coleções brasileiras (24%) como francesas (25%) destinadas à estatística. No terceiro ano, o percentual de páginas destinada à estatística nas coleções brasileiras (15%) como nos outros anos, é menor do que o destinado nas coleções francesas (23%). Além de destinar um percentual de páginas maior do que nas coleções do Brasil, nas coleções francesas esta distribuição é mais equilibrada, como se pode observar neste gráfico e comparar os coeficientes de variação da participação da estatística no total de páginas nas coleções da França (11%) e do Brasil (28%), apresentado nas tabelas 48 e 49. Pode-se observar o mesmo quando comparado por ano.

Gráfico 23 – Porcentagem da participação de D3 (em relação aos outros domínios) nas coleções selecionadas no Brasil e na França.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Outro aspecto que devemos considerar é como os dados estão dispersos em torno da média. No primeiro ano do ensino médio no Brasil, temos uma grande dispersão com um coeficiente da variação de 158 (temos apenas duas coleções que abordam a estatística neste ano), enquanto que na França o coeficiente de variação é de 21. No segundo ano do ensino médio, a dispersão é menor (CV=31), mas comparado com a França (CV=18) é bem maior. No terceiro ano, a dispersão do número de páginas destinado à estatística por coleção é o menor dos três anos (no Brasil) com um coeficiente de variação de 28. Na França, este ano também possui menor dispersão em relação aos outros três anos com um coeficiente de variação de 11. Em relação ao Brasil, observamos que a dispersão para este ano é ainda menor. Comparando os três anos no Brasil e na França, ambos têm uma redução da dispersão a cada ano: CV do 1º ano > CV do 2º ano> CV do 3º ano.

O número de páginas dedicadas à estatística pode não corresponder proporcionalmente ao número de páginas destinadas às medidas de tendência central e de dispersão. Na próxima seção vamos investigar qual a participação das MTCD na estatística.

2.1.3. PARTICIPAÇÃO DAS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO DENTRO DA ESTATÍSTICA NAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS SELECIONADOS

Apresentamos a seguir uma descrição das observações em cada país e depois uma síntese.

2.1.3.1. Coleções do Brasil

Na tabela 50, temos a participação das MTCD e da estatística nas 7 coleções selecionadas do Brasil. No primeiro ano do ensino médio, a estatística é apresentada em duas coleções: Br_C1 e Br_C6. Observamos no primeiro ano do ensino médio na coleção Br_01 a apresentação da estatística reduzida a um capítulo de livro. Este capítulo trata, entre outras coisas, da organização e apresentação dos dados. As medidas de tendência central poderiam ter sido apresentadas como forma de resumo de uma série. Contudo, a apresentação se limitou neste capítulo à organização dos dados e representação tabular e gráfica. Pontualmente observamos o uso dos termos: em média, linha média, médias, médios. Contudo, o seu uso se limitou a informações sobre a forma como os dados estavam organizados em um gráfico ou tabela, pressupondo o conhecimento do que é média.

Em nenhuma atividade ou exercício se propôs o cálculo da média, discutia-se o conceito de média ou se usava a média como ferramenta de resolução de um problema. Assim, consideramos que do ponto de vista, o ensino das medidas de tendência central, neste capítulo, não abordava estas medidas. Por isso, na tabela, indicamos com páginas destinadas ao ensino como 0. Além desta coleção, apenas a coleção Br_06 apresenta a estatística no primeiro ano do ensino médio no Brasil.

Na coleção Br_06, a estatística limita-se à coleta, organização dos dados e apresentação dos dados em tabelas e gráficos. Assim, dessa forma, as medidas de tendência central não são contempladas.

Tabela 50 – Participação das MTCD dentro do domínio da estatística nos livros didáticos do Brasil selecionados.

Cole-ção.	MTCD/ Domínio	1º ano		2º ano		3º ano		Total		$[x_1;\ x_p]$	m	σ	CV
		N	%		%		%		%				(%)
Br_C1	MTCD	0	0	0	0	24	32	24	14	24	8	11	141
	3 (estat.)	28	100	64	100	52	68	144	86	36	48	15	31
	Total	28	100	64	100	76	100	168	100	48	56	20	36
Br_C2	MTCD	0	0	0	0	9	21	9	8	9	3	4	141
	3 (estat.)	0	0	67	100	34	79	101	92	67	34	27	81
	Total	0	0	67	100	43	100	110	100	67	37	28	76
Br_C3	MTCD	0	0	0	0	12	35	12	14	12	4	6	141
	3 (estat.)	0	0	51	100	22	65	73	86	51	24	21	86
	Total	0	0	51	100	34	100	85	100	51	28	21	75
Br_C4	MTCD	0	0	0	0	21	36	21	18	21	7	10	141
	3 (estat.)	0	0	60	100	37	64	97	82	60	32	25	76
	Total	0	0	60	100	58	100	118	100	60	39	28	71
Br_C5	MTCD	0	0	0	0	30	50	30	16	30	10	14	141
	3 (estat.)	0	0	124	100	30	50	154	84	124	51	53	103
	Total	0	0	124	100	60	100	184	100	124	61	51	83
Br_C6	MTCD	0	0	16	15	12	18	28	14	16	9	7	73
	3 (estat.)	30	100	93	85	53	82	176	86	63	59	26	44
	Total	30	100	109	100	65	100	204	100	79	68	32	48
Br_C7	MTCD	0	0	15	18	15	31	30	23	15	10	7	71
	3 (estat.)	0	0	68	82	34	69	102	77	68	34	28	82
	Total	0	0	83	100	49	100	132	100	83	44	34	77
Total	MTCD	0	0	31	6	123	32	154	15	123	51	52	102
	3 (estat.)	58	100	527	94	262	68	847	85	469	282	192	68
	Total	58	100	552	100	385	100	1001	100	500	334	207	62
$[x_1;\ x_p]$	MTCD	0		16		21		21					
	3 (estat.)	30		73		31		103					
	Total	30		73		42		119					
m	MTCD	0	0	4	6	18	32	22	15				
	3 (estat.)	8	100	75	94	37	68	121	85				
	Total	8	100	80	100	55	100	143	100				
σ	MTCD	0		7		7		8					
	3 (estat.)	13		23		10		34					
	Total	13		25		13		40					
CV (%)	MTCD	0		158		40		36					
	3 (estat.)	158		31		28		28					
	Total	158		32		24		28					

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Ao contrário do primeiro ano, a estatística é abordada em todas as coleções selecionadas do Brasil no segundo ano do ensino médio. Apesar disso, apenas duas das sete coleções brasileiras, abordam as medidas de tendência central. São as coleções Br_06 e Br_07, mesmo assim, temos uma participação pequena. Na Br_06, apenas 15 % das páginas envolvem as MTCD e na Br_07 temos 18%. Isso fez com este ano a dispersão das MTCD fosse grande.

As medidas de tendência central e de dispersão são abordadas em todas as coleções no livro destinado ao terceiro ano do ensino médio. Neste ano, o máximo de páginas é da coleção Br_C5 com 30 páginas e o mínimo é a coleção Br_C2 com 9 páginas, o que dá uma amplitude de 21. Temos assim, uma diferença considerável entre o número de páginas por coleção. A média de páginas é de 18. A dispersão (CV 40) é um pouco alta, considerando que todas as coleções apresentadas abordam este assunto. A participação das MTCD em relação à estatística oscila muito no terceiro ano. A maior participação é na coleção Br_C5 com 50% das páginas destinada às MTCD e 50% destinada a outros temas da estatística. Na coleção Br_C6, temos a menor participação das MTCD em relação à estatística com apenas 18% das páginas destinadas às MTCD e o restante destinado à estatística. Apesar deste número baixo, deve-se considerar o total de páginas uma vez que a Br_C6, assim como a Br_C7, apresenta as MTCD em dois anos, enquanto que as demais não.

Levando em consideração o total de páginas nos três anos do ensino médio, observamos que temos duas modas, com 30 páginas, representadas pela coleção Br_C5 e Br_C7. A coleção com a menor participação é a coleção Br_C2 com apenas 9 páginas destinadas às MTCD. Levando em conta o total de páginas, a participação das MTCD na estatística em relação ao total de páginas, oscila entre 8% e 23%, indicando que a presença apenas da estatística no livro didático não indica a participação das MTCD nestes livros, no caso das coleções brasileiras. Logo, vamos analisar a seguir as coleções francesas.

2.1.3.2. Coleções da França

Na tabela 51, apresentamos uma comparação da participação das medidas de tendência central e de dispersão em relação aos outros temas da estatística nas 7 coleções selecionadas na França. Apenas no terceiro ano do ensino médio, as MTCD não são vistas nas coleções. Nos dois primeiros anos do ensino médio, todas as coleções abordam as medidas de tendência central e de dispersão.

No primeiro ano do ensino médio, a coleção com o maior número de páginas é a coleção Fr_C7 com 25 páginas e o mínimo é a coleção Fr_C1 com 14 páginas. Comparando com os outros temas da estatística, a coleção Fr_C6 é a que proporcionalmente possui uma maior participação das MTCD com 29%.

No segundo ano do ensino médio, a coleção com o maior número de páginas é a coleção Fr_C3 com 30 páginas e a coleção com o menor número de páginas é a coleção Fr_C4 com 18 páginas. Em termos de participação, temos duas coleções em que as MTCD têm a maior participação que são as coleções Fr_C1 e Fr_C5 com 24%. Apesar de haver uma menor participação proporcional das MTCD em relação aos outros temas da estatística, no segundo ano, com uma redução em relação ao total de páginas de 24% para 22%. Como o número de páginas destinadas à estatística aumentaram neste ano, tivemos também um aumento do número de páginas destinadas às MTCD, que passou de 132 para 164.

A dispersão no primeiro ano (CV=20) foi maior do que no segundo ano (CV=15).

Na próxima seção, faremos uma comparação das coleções do Brasil e da França.

Tabela 51. Participação das MTCD dentro do domínio da Estatística nos livros didáticos selecionados na França, em termos de número de páginas.

Cole-ção.	MTCD/ Domínio	1º ano		2º ano		3º ano		Total		$[x_1;\ x_p]$	m	σ	CV
		N	%		%		%		%				(%)
Fr_C1	MTCD	14	23	24	24	0	0	38	15	24	13	10	78
	3 (estat.)	46	77	76	76	90	100	212	85	44	71	18	26
	Total	60	100	100	100	90	100	250	100	40	83	17	20
Fr_C2	MTCD	15	22	23	22	0	0	38	13	23	13	10	75
	3 (estat.)	54	78	80	78	111	100	245	87	57	82	23	29
	Total	69	100	103	100	111	100	283	100	42	94	18	19
Fr_C3	MTCD	22	21	30	20	0	0	52	15	30	17	13	73
	3 (estat.)	82	79	120	80	94	100	296	85	38	99	16	16
	Total	104	100	150	100	94	100	348	100	56	116	24	21
Fr_C4	MTCD	18	25	18	19	0	0	36	14	18	12	8	71
	3 (estat.)	54	75	76	81	98	100	228	86	44	76	18	24
	Total	72	100	94	100	98	100	264	100	26	88	11	13
Fr_C5	MTCD	17	23	26	24	0	0	43	15	26	14	11	75
	3 (estat.)	56	77	81	76	114	100	251	85	58	84	24	28
	Total	73	100	107	100	114	100	294	100	41	98	18	18
Fr_C6	MTCD	21	29	20	20	0	0	41	16	21	14	10	71
	3 (estat.)	52	71	78	80	92	100	222	84	40	74	17	22
	Total	73	100	98	100	92	100	263	100	25	88	11	12
Fr_C7	MTCD	25	25	23	23	0	0	48	17	25	16	11	71
	3 (estat.)	76	75	78	77	84	100	238	83	8	79	3	4
	Total	101	100	101	100	84	100	286	100	17	95	8	8
Total	MTCD	132	24	164	22	0	0	296	15	164	99	71	72
	3 (estat.)	420	76	589	78	683	100	1692	85	263	564	109	19
	Total	552	100	753	100	683	100	1988	100	201	663	83	13
$[x_1;\ x_p]$	MTCD	11		12		0		16					
	3 (estat.)	36		44		30		84					
	Total	44		56		30		98					
m	MTCD	19	24	23	22	0	0	42	15				
	3 (estat.)	60	76	84	78	98	100	242	85				
	Total	79	100	108	100	98	100	284	100				
σ	MTCD	4		4		0		5					
	3 (estat.)	12		15		10		25					
	Total	16		18		10		30					
CV (%)	MTCD	20		15		0		0					
	3 (estat.)	21		18		11		11					
	Total	20		16		11		10					

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

2.1.3.3. Comparando a participação das medidas de tendência central e de dispersão nas coleções selecionadas no Brasil e na França.

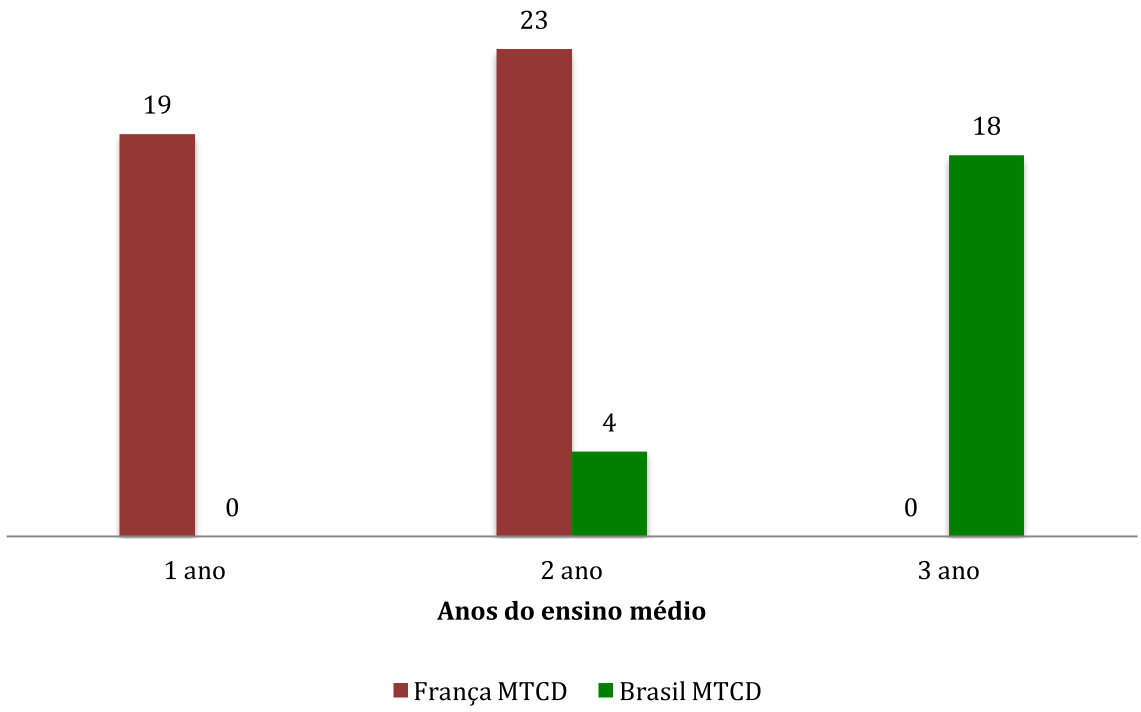
Comparando a participação da estatística no Brasil com a França, nas coleções de livros didáticos selecionadas, observamos que a França possui mais do que o dobro de páginas do que o Brasil. São 1998 páginas destinadas à estatística, enquanto que no Brasil este número é de 995 páginas. Em relação às medidas de tendência central e de dispersão, a participação na França é bem maior do que no Brasil, não chegando ao dobro, mas próximo disso. São 296 páginas destinadas às MTCD na França contra 154 páginas no Brasil. Considerando o total de páginas nos dois países destinadas às MTCD, temos aproximadamente a mesma proporção das MTCD no Brasil e na França, com 15% para as MTCD e 85% para os outros temas da estatística. Apesar disso, podemos observar que na coleção francesa temos uma apresentação em dois anos em todas as coleções, enquanto que nas coleções do Brasil, na maioria das coleções, temos a participação concentrada no terceiro ano do ensino médio.

A dispersão nos anos em que as medidas de tendência central e de dispersão aparecem nos livros didáticos no Brasil é bem maior do que na França. No Brasil, temos no segundo ano do ensino médio um coeficiente de variação das medidas de tendência central e de dispersão de 158 e no terceiro ano de 40. Na França, o coeficiente de variação para o primeiro ano é de 20 e no segundo ano de 15.

No gráfico 24, apresentamos uma comparação das médias de páginas destinadas às MTCD no Brasil e na França por ano. Pode-se observar, neste gráfico, uma participação mais equilibrada na França, com uma introdução das medidas de tendência central e de dispersão no primeiro ano do ensino médio e um crescimento desta participação no segundo ano, quando temos a consolidação e finalização do estudo destas medidas no ensino médio. No Brasil, apenas duas coleções adotam este padrão, se resumindo na maioria das coleções a uma participação das medidas de tendência central e de dispersão limitada ao terceiro ano do ensino médio.

Estes dados indicam que considerando apenas este critério de análise das coleções em termos de páginas, as coleções francesas possuem uma organização mais equilibrada.

Gráfico 24. Comparando a participação das medidas de tendência central no Brasil e na França: médias de páginas por ano.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

2.2. ANÁLISE DA ESTRUTURA DO CAPÍTULO DE CADA COLEÇÃO SELECIONADA DO BRASIL E DA FRANÇA

Apresentamos neste eixo uma análise detalhada de cada coleção selecionada, observando a estrutura das coleções e a forma como as medidas de tendência central e de dispersão aparecem nestas coleções. Destacamos que as MTCD são abordadas nos livros do primeiro ano e do segundo ano do ensino médio na coleção francesa selecionada. Assim, não vamos analisar os livros do terceiro ano desta coleção. Na coleção brasileira selecionada, as medidas de tendência central e de dispersão são abordadas em um capítulo do livro do terceiro ano do ensino médio. Dessa forma, não trataremos dos outros livros desta coleção.

2.2.1. COLEÇÃO FR_C1

Apresentamos a seguir a estrutura do livro didático de matemática de cada ano e suas características. Trata-se do livro didático usado pelo aluno que é o mesmo usado pelo professor.

2.2.1.1. Coleção Fr_C1.1A

Para efeito de análise, vamos dividir as coleções em duas partes: os domínios e outros elementos (que não estão incluídos nos capítulos dos domínios, mas pode-se estar relacionados a eles, serem elementos do programa, ou elementos complementares como revisão, tabela de fórmulas etc) que vamos chamar de “elementos complementares”. Na tabela 52, temos uma visão geral do livro. Esta tabela está dividia em três partes. Nos elementos antes dos domínios, nos domínios e nos elementos que aparecem após os domínios. Na tabela 53, apresentamos apenas os domínios, considerando o domínio 3 da estatística e os outros domínios. Na tabela 54, apresentamos os elementos complementares.

Tabela 52 – Organização das partes do livro didático Fr_C1.1[A]

Parte/Capítulo	Páginas		
	Inicial	Final	Total
Folha de rosto	1	1	1
Sumário	2	3	2
Descobrir o manual	4	5	2
Programa de 2009 para o primeiro ano do ensino médio	6	8	3
Novas ferramentas para o primeiro ano do ensino médio	9	9	1
Algoritmo	10	20	11
Conjuntos – raciocínio lógico	21	27	7
Uso da calculadora	28	29	2
1. Generalidades sobre as funções	30	57	28
2. Expressões algébricas	58	79	22
3. Funções de referências	80	103	24
4. Equações e inequações	104	127	24
5. Estatística	128	157	30
6. Probabilidade	158	173	16
7. Configuração do plano	174	197	24
8. Determinar a posição e vetores	198	223	26
9. Retas e sistemas	224	249	26
10. Geometria no espaço	250	273	24
Fichas de softwares	274	279	6
TP transversal	280	285	6
Revisão dos anos finais do ensino fundamental	286	292	7
Tabelas de números aleatórios20	293	293	1
Exercícios corrigidos	294	301	8
Index	302	303	2
Ficha do livro	304	304	1
Total de páginas do livro	01	304	304

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Das 304 páginas do livro, temos 244 páginas destinadas aos três domínios. Sendo que destas, apenas 18,85 % é destinada à estatística (estatística e probabilidade), enquanto que 81,15% é para os outros domínios, o que indica que não existe uma distribuição equilibrada, tendo a estatística uma participação bem menor do que a soma dos outros dois domínios.

[20] No original tabela de “nombres au hasard”.

Tabela 53 – Organização dos capítulos segundo os domínios no livro didático Fr_C1.1[A]

Domínio	Capítulo	Páginas	
		Capítulos	%
Domínios 1 e 2	1. Generalidades sobre as funções	28	11,48
	2. Expressões algébricas	22	9,02
	3. Funções de referências	24	9,84
	4. Equações e inequações	24	9,84
	7. Configuração do plano	24	9,84
	8. Repérage et vecteurs	26	10,66
	9. Retas e sistemas	26	10,66
	10. Geometria no espaço	24	9,84
Total domínios 1 e 2		198	81,15
Domínio 3: Estatística e probabilidade	5. Estatística	30	12,30
	6. Probabilidade	16	6,56
Total Domínio 3		46	18,85
Total		244	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Tabela 54 – Organização das seções com elementos complementares no livro didático Fr_C1.1[A]

Parte/Capítulo	Páginas		
	Inicial	Final	Total
Algoritmo	10	20	11
Conjuntos – raciocínio lógico	21	27	7
Uso da calculadora	28	29	2
Fichas de softwares	274	279	6
TP transversal	280	285	6
Revisão dos anos finais do ensino fundamental	286	292	7
Tabelas de números aleatórios	293	293	1
Exercícios corrigidos	294	301	8
Total de páginas complementares selecionadas			30

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Para nossa análise, vamos nos deter no capítulo que trata das medidas de tendência central e de dispersão (MTCD) que está dentro do domínio da estatística. Na tabela 55, temos a estrutura deste capítulo.

Tabela 55 – Estrutura do capítulo que trata das medidas de tendência central do livro didático Fr_C1.1[A]

N.	Parte	Do que trata	Páginas		
			Inicial	Final	Total
01	Abertura do capítulo	Apresenta uma introdução do capítulo, indicando as aplicações deste e o que será abordado no mesmo.	128	128	1
02	Antes de iniciar...teste-se	Visa levar o aluno a testar os seus conhecimentos sobre o que será abordado com algumas questões sobre o discente.	129	129	1
03	Descobrir	É composta de algumas atividades variadas sobre o que será abordado no capítulo.	130	131	2
04	O Curso/ métodos	Trata dos assuntos abordados/apresenta exercícios resolvidos para assimilar esses assuntos abordados.	132	141	10
06	Com a calculadora	Utilização da calculadora científica como ferramenta para resolver problemas abordados no capítulo.	142	142	1
07	Ferramentas para simular	Apresenta como gerar simulações com a calculadora e com uma planilha eletrônica.	143	143	1
08	Exercícios e problemas	Os exercícios são classificados pelas noções abordadas e pelo nível de dificuldade em: para praticar; para aprofundar; para ir mais longe. Além destes, temos 4 atividades chamadas de "para trabalhar em ajuda individualizada".	144	153	10
09	TP – trabalho prático	Abordam certas utilizações da calculadora e dos softwares	154	157	4
Total de páginas					30

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

A seguir, vamos analisar cada uma destas partes para discutir como as MTCD aparecem neste capítulo.

2.2.1.1.1. Abertura do capítulo

Na abertura do capítulo, temos uma apresentação da estatística e da sua importância. Para exemplificar, é apresentado um exemplo de flutuação no jogo da loto. Assim, as MTCD não aparecem nesta abertura. Ainda nesta página, temos uma lista de 6 itens que foram abordados no capítulo:

- Vocabulário (introdução há alguns elementos estatísticos como: indivíduo, população, efetivos, efetivos total, efetivo acumulado e frequência);
- Representação gráfica;
- As medidas estatísticas;

- Flutuação e amostragem;
- Simulação de uma experiência aleatória;
- Intervalo de flutuação no limite de 95% de uma proporção.

Nossa análise centra-se sobre o terceiro item que envolve as medidas de tendência central e de dispersão, ao contrário da coleção brasileira que apresenta um capítulo dedicado exclusivamente a estas medidas. Neste capítulo ela é apresentada junto com outros cinco temas.

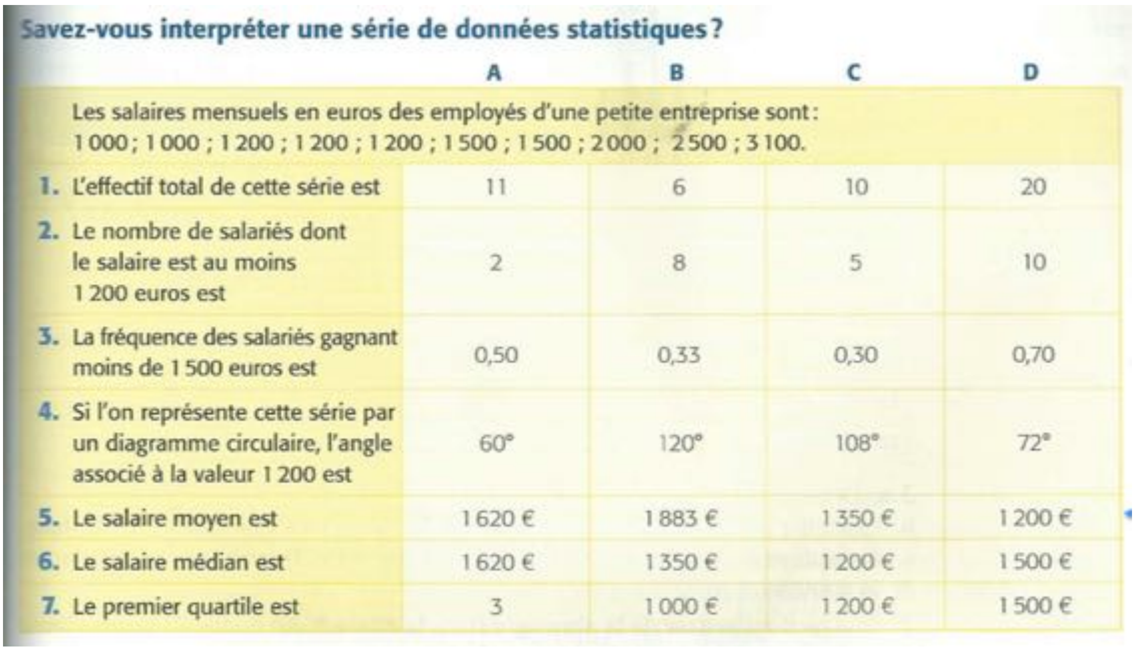
2.2.1.1.2. Antes de iniciar...teste-se

Esta seção do livro é dividida em duas partes, cada uma composta de um conjunto de atividades propostas pelo livro, com a intenção de testar os conhecimentos prévios dos alunos. As duas partes são:

- Você sabe interpretar uma série de dados estatísticos?
- Você sabe interpretar um diagrama estatístico?

A primeira parte reproduzimos na figura 58.

Figura 58 – Atividade da coleção Fr_C1.1^A: Você sabe interpretar uma série estatística?



Savez-vous interpréter une série de données statistiques ?

	A	B	C	D
Les salaires mensuels en euros des employés d'une petite entreprise sont : 1 000 ; 1 000 ; 1 200 ; 1 200 ; 1 200 ; 1 500 ; 1 500 ; 2 000 ; 2 500 ; 3 100.				
1. L'effectif total de cette série est	11	6	10	20
2. Le nombre de salariés dont le salaire est au moins 1 200 euros est	2	8	5	10
3. La fréquence des salariés gagnant moins de 1 500 euros est	0,50	0,33	0,30	0,70
4. Si l'on représente cette série par un diagramme circulaire, l'angle associé à la valeur 1 200 est	60°	120°	108°	72°
5. Le salaire moyen est	1 620 €	1 883 €	1 350 €	1 200 €
6. Le salaire médian est	1 620 €	1 350 €	1 200 €	1 500 €
7. Le premier quartile est	3	1 000 €	1 200 €	1 500 €

Fonte: Gauthier e Poncy (2009a, p.129)

Na primeira parte (figura 58), temos uma série dos salários mensais de uma empresa europeia formada por 10 observações com o salário dos funcionários. Solicitam-se sete informações apresentadas para cada solicitação com cinco opções de respostas numeradas de A a D. Vamos chamar dentro do nosso quadro de análise (os itens de G01 a G07 gerais e itens MTCD.1 e MTCD.2 sobre as MTCD). Temos assim, dois itens sobre as MTCD nos quais temos o salário médio e o salário mediano. Com isto, se pretende verificar se os alunos sabem calcular estas medidas. O item 5 (G05 ou MTCD.1) se enquadra no tipo de tarefa $\boldsymbol{T_{m\_01}}$ - calcular a média aritmética de dados não ordenados ou de dados ordenados da população ou amostra. Neste caso temos os dados ordenados da população. Não são observados outros elementos que indiquem a técnica, tecnologia ou teoria, uma vez que é uma questão proposta. A solução da questão apresentada no final do livro e no livro do professor limitam-se a indicar a letra A como solução, sem indicar os procedimentos para obter. Esta questão se limita a determinar a média e observar o resultado, não sendo uma questão de comparação. O tipo de variável utilizada é quantitativa discreta. Os números limitam-se a inteiros sem zero. A situação proposta é a resolução de um exercício proposto. A forma de apresentação dos dados é ordenado. Trata-se da população e não temos uma situação de comparação. O contexto da questão faz parte do que chamamos de "mundo do trabalho". Não temos nesta questão uma indicação de uma propriedade associada à média na solução do problema, embora possamos identificá-la. No item 6 (figura 58), é solicitado para indicar qual coluna corresponde à mediana dos dados apresentados. Para isso, é necessário tal como a anterior, determinar este valor. Este tipo de questão corresponde ao tipo de tarefa T_{md_02} - Calcular a mediana de dados ordenados. A questão não indica os demais elementos praxeológicos (técnica, tecnologia, teoria). No manual do professor e no final do livro, temos apenas a letra com a solução correta. Os demais elementos que definimos como situações que envolvem esta atividade é similar ao item 6. No item 7 (figura 58), para responder esta questão é necessário determinar a medida do primeiro quartil. Este procedimento é importante na determinação de duas medidas de dispersão: o cálculo do desvio interquartil assim como no cálculo do desvio quartil. Esta primeira parte envolve uma situação prática de organizar os dados e determinar algumas medidas, entre elas a média e a mediana. Como estas medidas já tinham sido vistas no ensino fundamental, pretende-se avaliar o conhecimento dos alunos sobre o assunto.

A segunda parte não envolve as MTCD. Tal como o anterior, são solicitadas quatro informações sobre dois gráficos apresentados. Chamamos estas questões gerais de (G08 a G11). Nesta parte, deixou-se de avaliar se os alunos poderiam determinar as medidas de tendência central tomando por base os dados apresentados em gráficos estatísticos.

2.2.1.1.3. Descobrir

Esta seção é composta de 3 partes,chamada pelo autor de atividades. Destas, apenas a primeira trata da média e da mediana. A primeira parte é chamada de "Em torno da média e da mediana" (tradução nossa). Nesta parte, temos dois gráficos com a nota dos alunos de duas classes (que varia de 0 a 20) do primeiro ano do ensino médio. A primeira classe é denominada de classe A (com dados quantitativos discretos) e a segunda de B (com as notas agrupadas em intervalos de classes (dados quantitativos contínuos). Nessa questão, são solicitadas oito respostas. Organizamos estas, dando continuidade ànumeração inicial deste capítulo, de G.12 a G.19. Na figura 59 apresentamos esta primeira parte. No item 2 (G.14) é solicitado o preenchimento de duas tabelas com base nos gráficos. Neste item (G.14), temos a necessidade de observar os valores em um gráfico e transpô-los para uma tabela, como também determinar os efetivos acumulados. Estes conhecimentos são necessários em alguns tipos de tarefas que envolvem determinar as MTCD. No item 3a é solicitado o cálculo da média (G.15 ou TCD.03) e da mediana (G.16 ou TCD.04). Neste caso, podemos pensar em dois tipos de tarefas:

- T_{m_02} - Determinar a média aritmética de dados apresentados em uma tabela (ou gráfico) com as observações e os efetivos de cada observação.
- T_{md_03} - Determinar a mediana de dados ordenados em uma tabela (ou gráfico) com as observações e os efetivos. O fato de ser amostra ou população, não altera a técnica associada a este tipo de tarefa.

No cálculo da mediana, este tipo de tarefa demanda determinar os efetivos acumulados, já calculados no item (G.14). Para o cálculo da mediana, a técnica muda em função de termos o efetivo total par ou ímpar. Temos dois subtipos de tarefas associados ao tipo de tarefa T_{md_03}. Neste caso, o efetivo total é par (280) e o subtipo de tarefa associado à mediana é:

- t_{md_03-1} – Calcular a mediana de dados ordenados em uma tabela, considerando o efetivo total ser par.

A resposta no livro do professor não corresponde a esta questão. Dessa forma deve ter ocorrido um erro na montagem do livro. Assim, não podemos observar uma indicação dos demais elementos praxeológicos associados a esta questão.

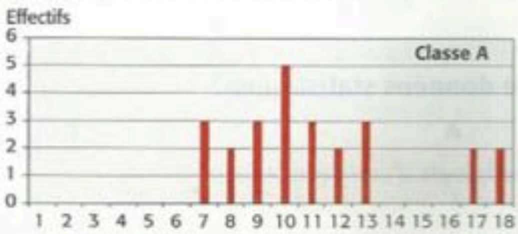
No item 3b (figura 59) solicita-se para explicar porque a média é bem superior à mediana. A resposta do livro do professor não corresponde (falha na montagem). Calculando o valor da mediana temos 11 e o da média 11,2. Assim, não temos um valor bem superior da média. Logo a questão não faz muito sentido. Apesar de termos dois valores que se distanciam dos demais (notas 17 e 18), eles não chegam à influênciar o suficiente para a média se deslocar muito para a direita do gráfico. Caso a influência fosse forte, poderíamos pensar na propriedade de que a média é influenciada por valores extremos (propriedade 1, no capítulo 2 da primeira parte desta tese), mas neste caso não se trata.

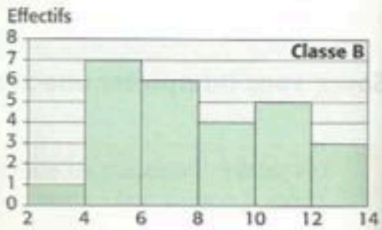
Figura 59 – Atividade 1 – Em torno da média e da mediana.

Découvrir

Activité 1 Autour de la moyenne et de la médiane Calculatrice

Les notes de deux classes de Seconde sont présentées sur ces deux graphiques.





1.a. Dans la classe A, combien d'élèves ont une note inférieure ou égale à 8 ?
Ce nombre est appelé l'effectif cumulé croissant pour la note 8.
b. Calculer l'effectif cumulé croissant pour la note 9 dans la classe A.
2. Recopier et compléter les tableaux suivants :

Notes	7	8		
Effectifs	3	2		
Effectifs cumulés	3	5		

Notes	[2 ; 4[	[4 ; 6[		
Effectifs	1	7		
Effectifs cumulés	1	8		

3.a. Déterminer la moyenne et la médiane de la classe A.
b. Expliquer pourquoi, dans la classe A, la moyenne est bien supérieure à la médiane.
c. Déterminer le premier quartile de cette série de notes. Donner une interprétation de ce nombre.
4. Que peut-on penser de la phrase : « Dans la classe B, au moins 50 % des élèves ont une note strictement inférieure à 8 » ?

Fonte: Gauthier e Poncy (2009a, p.130)

2.2.1.1.4. O Curso

Esta parte é chamada de “Le Cours” (o curso). Temos o curso dividido em 6 partes que contemplam cada uma das divisões dos conteúdos abordados no capítulo para cada curso. Temos uma parte que é chamada de “método”, que apresenta um enunciado e a solução da questão proposta comentada (vamos tratar do método na seção seguinte). A parte 3 é chamada de “medidas em estatística” (trata-se de um termo bastante amplo para definir o que será apresentado a seguir). Esta parte é dividida em: medidas de posição e medidas de dispersão (figura 60). O termo medida de posição não é tão preciso como medidas de tendência central, pois as medidas separatrizes também podem ser consideradas de posição. As medidas de posição apresentadas são de posição central (média, moda e mediana). Nas medidas de dispersão são apresentadas duas medidas separatrizes: Q1 e Q3. Contudo, elas são apresentadas para o cálculo do desvio interquartil. Dessa forma, o termo medidas de dispersão está adequado, embora seja apresentado apenas o desvio interquartil e a amplitude.

Figura 60 – Texto que trata das medidas de tendência central e de dispersão.

3. Des mesures en statistiques

3

Technique
Si les valeurs sont regroupées dans des classes, on prend le centre des classes pour calculer la moyenne.

Technique
Au moins 50 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à la médiane ; au moins 50 % des valeurs de la série sont supérieures ou égales à la médiane.

Pour interpréter les données il est souvent utile de **connaître un nombre résumant** ces données ; ces nombres sont de deux types : les mesures de position et les mesures de dispersion

Mesures de position

• **La moyenne** est la somme des produits $n_i x_i$ divisée par l'effectif total ; 1

elle est souvent notée $\bar{x}$ et on a : $\bar{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_px_p}{N}$. 2

On peut écrire $\bar{x} = \dfrac{n_1x_1}{N} + \dfrac{n_2x_2}{N} + \ldots + \dfrac{n_px_p}{N}$ d'où : $\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_px_p$.

La moyenne est fortement influencée par les valeurs extrêmes de la série.

• **Le mode** est la valeur ayant le plus grand effectif ; elle a un intérêt si l'effectif de cette valeur est nettement plus grand que les autres effectifs.
Il peut y avoir plusieurs modes.
Si les données sont regroupées en classes, on parle de **classe modale**.

• Lorsque les données sont rangées dans l'ordre croissant, la **médiane** est un nombre qui partage la population en deux parties. La médiane est la valeur centrale si l'effectif est impair, ou la demi-somme des deux valeurs centrales si l'effectif est pair.

Exemple : Pour $N = 15$, la médiane est la 8ᵉ valeur.
Pour $N = 16$, la médiane est la demi-somme de la 8ᵉ et de la 9ᵉ valeur.

La médiane ne dépend pas des valeurs extrêmes.

Mesures de dispersion

• **L'étendue** d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur.

• Le **premier quartile** Q_1 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % des données soient inférieures ou égales à ce nombre Q_1.
Le **troisième quartile** Q_3 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75 % des données soient inférieures ou égales à Q_3.

• **L'écart interquartile** est égal à la différence $Q_3 - Q_1$

Calcul pratique des quartiles : Pour Q_1, on calcule $\dfrac{N}{4}$, puis on détermine le premier entier p supérieur ou égal à $\dfrac{N}{4}$; cet entier p est le rang de Q_1, que l'on peut alors déterminer. Pour Q_3, on fait de même en remplaçant $\dfrac{N}{4}$ par $\dfrac{3N}{4}$.

Exemple : Pour $N = 15$, $\dfrac{N}{4} = 3{,}75$ donc Q_1 est la 4ᵉ valeur de la série. $\dfrac{3N}{4} = 11{,}25$ donc le troisième quartile Q_3 est la 12ᵉ valeur de la série.

Fonte: Gauthier e Poncy (2009a, p.134). Indicamos nesta figura através de setas e números três técnicas.

A apresentação da média (figura 60) é bastante limitada e apresenta alguns problemas. Temos três técnicas para o cálculo da média que indicamos na figura 60. Na fórmula indicada pela seta 1, temos uma fórmula que indica de forma forma bastante sintética a técnica para o cálculo da média, considerando os efetivos, observações e o total de efetivos (não se faz distinção de população e amostra). Essa técnica corresponde a que chamamos de $\boldsymbol{\tau_{m_{02}-1}}$. Na fórmula indicada pela seta 2, temos com base na fórmula anterior como se chegar à fórmula para o cálculo da média dada a frequência e as observações, essa fórmula pode ser associada à técnica que apresentamos como: $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{m\_03}}$. Na seta 3, temos uma observação que indica como calcular a média para dados agrupados (variável quantitativa contínua). Nessa observação, não se abordam: a importância de agrupar os dados; os casos em que os dados podem ser agrupados; que ao agrupar os dados temos uma variável quantitativa contínua; que a média é obtida com um valor aproximado dos centros.

O livro nesta seção, limita-se a dizer que quando os dados são agrupados, toma-se o centro de cada classe para calcular a média. Temos assim, uma apresentação incompleta da técnica. Este autor descreve esta informação como técnica. A técnica para este caso poderia ser o que chamamos de $\tau_{\mathrm{m\_04}}$ e na qual descrevemos como:

- Determina-se o centro de cada intervalo - c_k - (uma aproximação da média destes valores);
- Multiplica-se o centro de cada intervalo pelo seu efetivo $(n_k c_k)$;
- Em seguida soma-se o produto obtido $(\sum_{k=1}^{k=p} n_k\, c_k)$;
- Divide-se o resultado obtido pelo número total de observações e obtém-se a média $(m = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=p} n_k\, c_k)$.

É destacada apenas uma propriedade da média: “a média aritmética é fortemente influenciada por valores extremos da série” (tradução nossa). Apresentamos esta propriedade como sendo a número 1 na lista de propriedades da média no capítulo 2 da primeira parte desta tese.

Também no texto, temos a apresentação da moda de forma bastante sintética. É apresentada a propriedade 2 da moda (a moda corresponde ao efetivo máximo). Contudo, não fica claro que esta propriedade aplica-se às variáveis quantitativas discretas e variáveis qualitativas. Quanto às variáveis quantitativas contínuas, informam-se apenas que quando os dados são agrupados em classes, fala-se de classe modal. Informação insuficiente para emitir uma apreciação crítica e muito menos para o aluno obter alguma informação sobre a moda de variáveis quantitativas contínuas ou ainda como calcular a moda.

A apresentação da mediana é bastante resumida e a técnica para o seu cálculo não é bem apresentada.

As medidas de dispersão se limitam à amplitude e o desvio interquartil. Assim, como as demais medidas, elas são apresentadas de forma abreviada, sem indicar suas propriedades e detalhar as técnicas.

O bloco tecnológico não aparece no texto, nem para as medidas de posição, nem para as medidas de dispersão. Assim, a apresentação é bastante sucinta, deixa de apresentar as inúmeras propriedades e observações que apresentamos sobre a média, bem como, são discutida sem pesquisas sobre a aprendizagem dessa medida. Ao tomarmos como exemplo a pesquisa que apresentamos de Cazorla (2002) com alunos de graduação de diversos cursos no Brasil, temos um grande parte de questões em branco e não respondidas na questão "o que é média aritmética?". Das questões respondidas corretamente, a maioria apresentava uma resposta baseada no algoritmo e não no conceito. O que observamos neste livro analisado é que o próprio livro didático também se limitava a uma apresentação do conceito associado ao algoritmo. A limitação da média se estende às outras medidas.

2.2.1.1.5. Os métodos

Na figura 61, temos a parte intitulada "método" que faz parte do curso. Esta parte foi selecionada dentro dos métodos a que contemplam as MTCD. Contudo, ela apenas apresenta a moda, mediana e média aritmética.

Figura 61 – Trecho que mostra os métodos para o cálculo dos parâmetros de uma série.

Déterminer des paramètres d'une série

ÉNONCÉ 2 : Voici la répartition des salaires mensuels en euros des employés d'une petite entreprise : 1 650 ; 1 650 ; 1 200 ; 2 100 ; 3 500 ; 1 650 ; 1 200 ; 2 100 ; 2 400 ; 2 100 ; 1 650 ; 2 100 ; 1 650 ; 2 400 ; 2 100 ; 1 650 ; 2 400 ; 2 400 ; 3 500 ; 1 650 ; 1 200.

a. Construire un tableau donnant les salaires, les effectifs et les effectifs cumulés.
b. Déterminer le mode de cette série et le salaire moyen d'un employé.
c. Déterminer la médiane de cette série. Quelle est la signification de ce nombre ?
d. Déterminer le premier quartile de cette série, puis l'interpréter.

Solution

a. Avec ces données on construit le tableau :

Salaires	1 200	1 650	2 100	2 400	3 500
Effectifs	3	7	5	4	2
Effectifs cumulés	3	10	15	19	21

b. Le mode est 1 650.
L'effectif total est 21, et :

$$\frac{1200 \times 3 + 1650 \times 7 + 2100 \times 5 + 2\,400 \times 4 + 3\,500 \times 2}{21} \approx 2011{,}9.$$

Le salaire moyen est donc environ égal à 2 011,90 euros.

MÉTHODE
Pour déterminer la médiane, ranger les données dans l'ordre croissant puis utiliser les effectifs cumulés croissants.

c. N est impair donc la médiane est la valeur centrale, c'est-à-dire ici la 11ᵉ valeur ; la médiane est donc 2 100. Il y a au moins 50 % des employés pour lesquels le salaire mensuel est inférieur ou égal à 2 100 euros.

d. $\frac{N}{4} = 5{,}25$, donc le premier quartile est la 6ᵉ valeur ; le tableau des effectifs cumulés croissants montre que la 6ᵉ valeur est égale à 1 650 euros : $Q_1 = 1\,650$. Il y a au moins 25 % des employés pour lesquels le salaire mensuel est inférieur ou égal à 1 650 euros.

Fonte: Gauthier e Poncy (2009a, p.135)

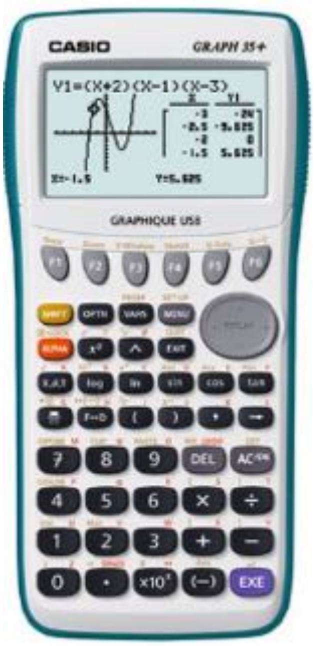
Na questão, os dados não estão ordenados. Solicita-se então construir uma tabela com os salários, os efetivos e os efetivos acumulados. Esta tabela vai facilitar os demais cálculos. Na solução, apresenta-se então a tabela construída sem explicar o processo de construção, ou seja, embora seja uma parte denominada método, neste primeiro item, limita-se a apresentar a resposta. Na letra b, é solicitado para determinar a moda e o salário médio de um empregado. Devia-se solicitar o salário médio dos empregados desta pequena empresa. Quando se utiliza o termo o salário médio "de um empregado", se está dizendo que é o salário de apenas um empregado. Assim, temos um problema com a forma de elaborar a questão, pois não faz sentido esta pergunta. Podemos ter até um empregado cujo salário corresponde ao médio dos empregados da empresa (o que nesta questão não ocorre), mas não é isto que se pretende com a questão. Quanto à solução da letra b, temos o valor da moda (o resultado e não como achar) e o procedimento usado para calcular a média.

Na letra c é solicitado determinar a mediana e depois pergunta-se qual o significado deste número. A solução é bastante sintética. Primeiro, coloca-se que como o total é ímpar, a mediana é um valor central. Neste caso, usa-se valor no sentido de uma das observações. Este sentido de que valor corresponde a uma observação, não achamos nos textos pesquisados em francês. Considerando que faz sentido, temos um problema, pois quando é par, dependendo dos dados, a mediana pode ser também um valor das observações. Para responder qual o significado deste número, temos como resposta que “existe ao menos 50% dos empregados para os quais o salário mensal é inferior ou igual a 2100 euros” (tradução nossa). A resposta é bastante resumida, não indo a outras propriedades. As duas medidas de dispersão apresentadas no curso, não foram abordadas nesta parte que trata dos métodos, apesar da importância das mesmas. Poder-se-ia por exemplo tratar da variabilidade (um conceito fundamental da estatística) explorando a amplitude. Outra opção seria relacionar a mediana com o desvio interquartil para comparar as duas séries.

2.2.1.1.6. Com a calculadora

Neste seção, temos como usar a calculadora Texas e Casio para calcular parâmetros estatísticos. Destacamos que as calculadoras utilizadas e apresentadas nos livros didáticos para o ensino médio na França, que tivemos acesso, são calculadoras mais avançadas do que se usam normalmente nas escolas do ensino médio no Brasil. Estas calculadoras permitem programar funções, plotar gráficos, entre outras coisas. Na figura 62, apresentamos uma imagem da calculadora Casio GRAPH 35+, similar as que observamos em livros pesquisados.

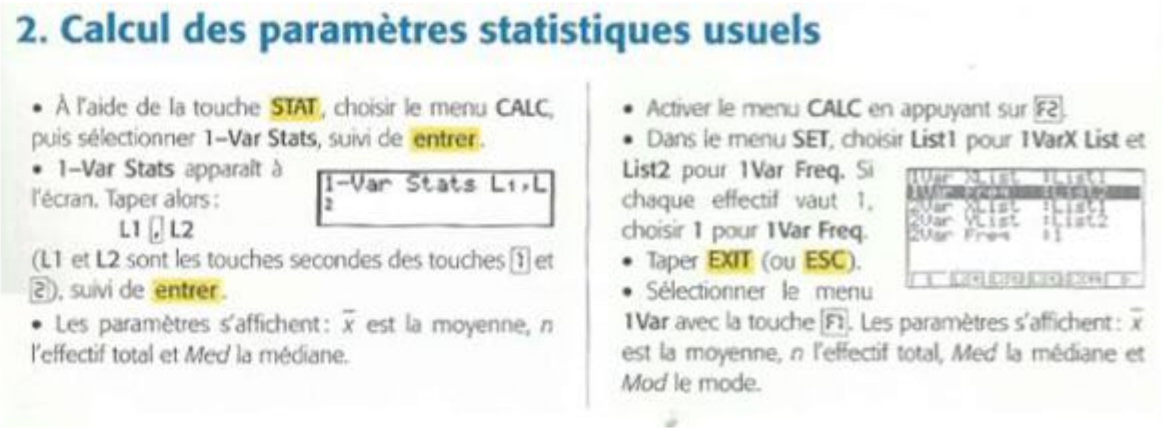
Figura 62 – Calculadora Casio Graph



Fonte: http://www.boutique-calculatrice-casio.com/casio-graphiques-tarif-promo/21-casio-graph-35-usb-4971850138167.html

A atividade limita-se a mostrar como introduzir as observações e o comando para listar os parâmetros usuais à média, à moda, à mediana e os efetivos totais. Assim, temos uma apresentação com um uso muito limitado. Poderia-se explorar a velocidade com que esse instrumento determina estes valores para comparar diversas séries, procurando induzir a um melhor compreensão destas medidas. O manual do professor não tem qualquer indicação de como explorar a calculadora junto com as MTCD. Na figura 63, reproduzimos o texto referente ao uso das calculadoras (o texto à esquerda se refere à calculadora Texas e o da direita à calculadora Casio).

Figura 63 – Instruções para as calculadoras Texas (esquerda) e Casio (direita).



2. Calcul des paramètres statistiques usuels

- À l'aide de la touche **STAT**, choisir le menu **CALC**, puis sélectionner **1–Var Stats**, suivi de **entrer**.
- **1–Var Stats** apparaît à l'écran. Taper alors : **L1** , **L2**

1–Var Stats L1,L2

(**L1** et **L2** sont les touches secondes des touches 1 et 2), suivi de **entrer**.
- Les paramètres s'affichent : $\bar{x}$ est la moyenne, *n* l'effectif total et *Med* la médiane.

- Activer le menu **CALC** en appuyant sur F2.
- Dans le menu **SET**, choisir **List1** pour **1VarX List** et **List2** pour **1Var Freq.** Si chaque effectif vaut 1, choisir **1** pour **1Var Freq.**
- Taper **EXIT** (ou **ESC**).
- Sélectionner le menu **1Var** avec la touche F1. Les paramètres s'affichent : $\bar{x}$ est la moyenne, *n* l'effectif total, *Med* la médiane et *Mod* le mode.

Fonte: Gauthier e Poncy (2009a, p.142)

2.2.1.1.7. Exercícios e problemas

Não temos nos livros didáticos uma justificativa dos termos exercícios e problemas. Como não fazem parte de nossa análise a discussão sobre este termos e o uso feito pelo livro dos mesmos, vamos chamá-las de questões. Nesta seção, temos um total de 62 questões (4 questões não numeradas). Elas são assim distribuídas:

- Da 1 a 37 são chamadas de “Para treinar”;
- Da 38 a 40 chamadas de “Para testar o essencial” (3 questões que agrupam um total de 11 de múltipla escolha);
- De 38a e 39a elas são agrupadas em um seção chamada “Para trabalhar a ajuda individualizada”. Esta é organizada em duas partes: calcular um parâmetro de uma série e elaborar uma simulação. Em cada uma destas partes temos duas questões.

Como elas abordam o mesmo tópico da questão 38, elas não possuem uma numeração. Para efeito de pesquisa, vamos considerar estas questões como sendo atividades A38a; A38b; A39a; A39b.

- De 41 a 56 elas são denominadas “Para aprofundar”;

De 57 a 62, formam o grupo chamado “Para ir mais longe”.Dessa forma, temos um total de 66 questões.

Das 37 questões agrupadas em “Para treinar”, 13 questões apresentam atividades que envolvem as medidas de tendência central. Assim, levantamos 31 atividades.

Das 3 questões que agrupam 11 perguntas de múltipla escolha, temos atividades que envolvem as MTCD.

Nas questões agrupadas em “Para trabalhar a ajuda individualizada”, levantamos no item 38a 5 atividades sobre as MTCD.

Nas questões agrupadas em “Para aprofundar”, levantamos 5 questões que apresentavam, entre as atividades propostas, atividades relacionadas às MTCD. Foram levantadas 24 atividades sobre as MTCD.

Das 6 questões agrupadas em “Para ir mais longe”, levantamos 1 questão sobre as MTCD que envolve 3 atividades.

Faremos uma análise destas questões quantitativamente na análise das atividades resolvidas e propostas nos livros didáticos.

2.2.1.1.8. TP – Trabalho prático

Temos ao todo quatro trabalhos práticos. Destes, apenas o segundo, chamado de TP2, apresenta atividades que envolvem o cálculo das medidas de tendência central e de dispersão. Estes trabalhos envolvem o uso de uma planilha eletrônica, como o Excel. No TP2 temos uma tabela com o peso de 89 trufas recolhidas por um fornecedor de trufas. Neste trabalho é fornecida a tabela 56 (tradução nossa).

Tabela 56. Extraída de TP2 – Cálculo dos parâmetros estatísticos com uma planilha eletrônica.

Massa xi (em gramas)	15	15,5	16	16,5	17	17,5	18	18,5	19	19,5	20	20,5	21	21,5	22
Numero de trufas ni	15	3	18	12	19	3	7	3	2	1	2	1	2	0	1

Fonte: Gauthier e Poncy (2009a, p.155, tradução nossa)

A tarefa consiste em preencher estes dados na planilha e efetuar várias operações com o uso da planilha eletrônica. Na duas últimas atividades, pede-se para obter o valor total de efetivos pelas observações e dividir pelo total dos efetivos. Pergunta-se então qual o número que foi obtido (a resposta é a média) e o que este número representa para as massas das trufas. No livro do professor, temos apenas uma descrição de que neste trabalho prático, pode-se manipular as fórmulas na planilha eletrônica, reconhecendo os parâmetros estatísticos indicados. Assim, não se indica a exploração de nenhuma propriedade da média aritmética. Podemos pensar em várias propriedades da média, contudo, a questão não induz através desta pergunta a nenhuma destas.

2.2.1.2. Coleção Fr_C1.2A

Apresentamos a mesma estrutura de apresentação do primeiro volume relativo ao primeiro ano do ensino médio na França para o livro do segundo ano do ensino médio da série científica nesse país. Na tabela 57, temos uma visão de como está organizado este livro didático do segundo ano do ensino médio.

Tabela 57 – Organização do livro Fr_C1.2[A]

Parte/Capítulo	Páginas		
	Inicial	Final	Total
Folha de rosto	1	1	1
Apresentação do livro	2	2	1
Sumário	3	3	1
Programa	4	5	2
1. Segundo grau	6	31	26
2. Estudo das funções	32	57	26
3. Derivação	58	83	26
4. Aplicação da derivação	84	107	24
5. As séries numéricas	108	137	30
6. Geometria plana	138	163	26
7. Trigonometria	164	189	26
8. Produto escalar	190	215	26
9. Aplicações do produto escalar	216	239	24
10. Estatística	240	265	26
11. Probabilidade: variáveis aleatórias	266	291	26
12. Lei binominal e aplicações	292	325	24
Complementos			
Revisão	326	331	6
Algoritmo	332	335	4
Conjuntos – raciocínio lógico	336	340	5
Fichas de softwares	341	349	9
Fichas de calculadoras	350	357	8
Exercícios resolvidos	358	366	9
Índice	367	367	1
Total de páginas do livro			367

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Na tabela 58, apresentamos a organização do livro segundo os domínios, sendo a estatística o domínio 3 e os demais domínios (1 e 2) agrupados. Tal como no primeiro volume, a estatística possui uma participação não proporcional aos outros domínios. Enquanto que o domínio destinado à estatística está com apenas 24,52% (aproximadamente ¼ do total das páginas destinadas aos três domínios). Os demais domínios juntos estão com 75,48% (aproximadamente ¾ do total de páginas). Em relação ao primeiro volume, a estatística tem um aumento na participação, uma vez que no primeiro volume (apresentado anteriormente) a estatística ocupa 18,85% (menos de 1/5) do total de páginas, enquanto que os outros dois domínios possuem 81,15% (mais de 4/5) do total de páginas.

Tabela 58 – Organização do livro Fr_C1.2^{A} (Bordas – Índice)

Domínio	Capítulo	Páginas	
		Capítulos	%.
Domínios 1 e 2	1. Segundo grau	26	8,39
	2. Estudo de funções	26	8,39
	3. Derivação	26	8,39
	4. Aplicação da derivação	24	7,74
	5. As séries numéricas	30	9,66
	6. Geometria plana	26	8,39
	7. Trigonometria	26	8,39
	8. Produto escalar	26	8,39
	9. Aplicações do produto escalar	24	7,74
Total domínios 1 e 2		234	75,48
Domínio 3: Estatística e probabilidade	10. Estatística	26	8,39
	11. Probabilidade: variáveis aleatórias	26	8,39
	12. Lei binomial e aplicações	24	7,74
Total Domínio 3		76	24,52
Total		310	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Apresentamos na tabela 59 a organização do capítulo que trata das medidas de tendência central e de dispersão.

Tabela 59 – Estrutura do capítulo que aborda as medidas de tendência central e de dispersão do livro Fr_C1.2^A.

N.	Parte	Do que trata	Páginas		
			Inicial	Final	Total
01	Antes de iniciar...teste-se	Segundo os autores do livro, este capítulo se destina a verificar se os alunos possuem os pré-requisitos para iniciar o capítulo.	240	240	1
02	Abertura do capítulo	Apresenta uma introdução do capítulo, indicando as aplicações deste, e o que será abordado no mesmo.	241	241	1
03	Atividades	Atividades de descoberta para preparar as noções do capítulo (conforme esclarecem os autores).	242	243	2
04	O curso/saber-fazer.	Segundo os autores: envolvem as definições e as propriedades a conhecer, com o olhar do saber fazer indispensáveis para assimilar estas noções. É dividido em duas partes: o curso e o saber-fazer.	244	247	4
05	Exercícios	Os exercícios, segundo os autores, possuem níveis de dificuldades graduadas e organizadas em 6 níveis: iniciar-se; treinar; topo cronometrado (top chrono!); para fazer o ponto da situação; pesquisar com método; para aprofundar.	248	262	15
06	Atividades TICE[21]	São apresentadas atividades para ser usadas em sua maioria com uma planilha eletrônica e uma com um software de geometria.	263	265	3
Total de páginas					26

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Em relação ao livro anterior (Fr_C1.1^A), observamos uma inversão dos dois primeiros itens da tabela 59, o que consideramos mais pertinente, pois primeiro testam-se os conhecimentos prévios antes de iniciar o capítulo. O item “atividades” está na mesma ordem (terceiro item) e corresponde “a descobrir” no livro anterior. No lugar de usar o termo “método”, ele foi substituído por “saber-fazer”. Ambos tratam de apresentação de atividades e sua solução,u seja, neste aspecto não houve mudanças. Dois itens no livro anterior foram tirados deste (como a calculadora, ferramentas para simular). Sobre estes itens removidos, destacamos que as informações sobre o uso da calculadora estão distribuídos nos outros itens. Logo a simulação não é objeto de estudo deste capítulo, mas é usada em algumas questões como ferramenta para compreensão dos conceitos abordados. O item “exercício” representa o

[21] TICE é uma abreviatura de “technologies de l’information et de la communication pour l’enseignement” (BIHOUÉE; COLLIAUX, 2011) que poderíamos traduzir como tecnologia da informação e da comunicação para o ensino. Apesar da ampla variedade de tecnologias associadas à informação e comunicação para o ensino, o livro francês trata a calculadora como um item em separado e trata nas TICE dos softwares para o ensino. O livro adota dois ícones: calculadora e TICE. No item TICE (temos um ícone que é um notebook com o nome TICE na tela). Na estatística, a TICE se concentra nos livros analisados que utilizam praticamente (salvo uma atividade com um software de geometria) a planilha eletrônica.

item “exercício e problemas” do primeiro livro. O item “trabalho prático” (TP) foi substituído pelo item TICE, neste caso, abordando apenas os softwares (no TP a calculadora era abordada).

Analisaremos cada uma destas partes para mostrar como as medidas de tendência central e de dispersão aparecem neste capítulo.

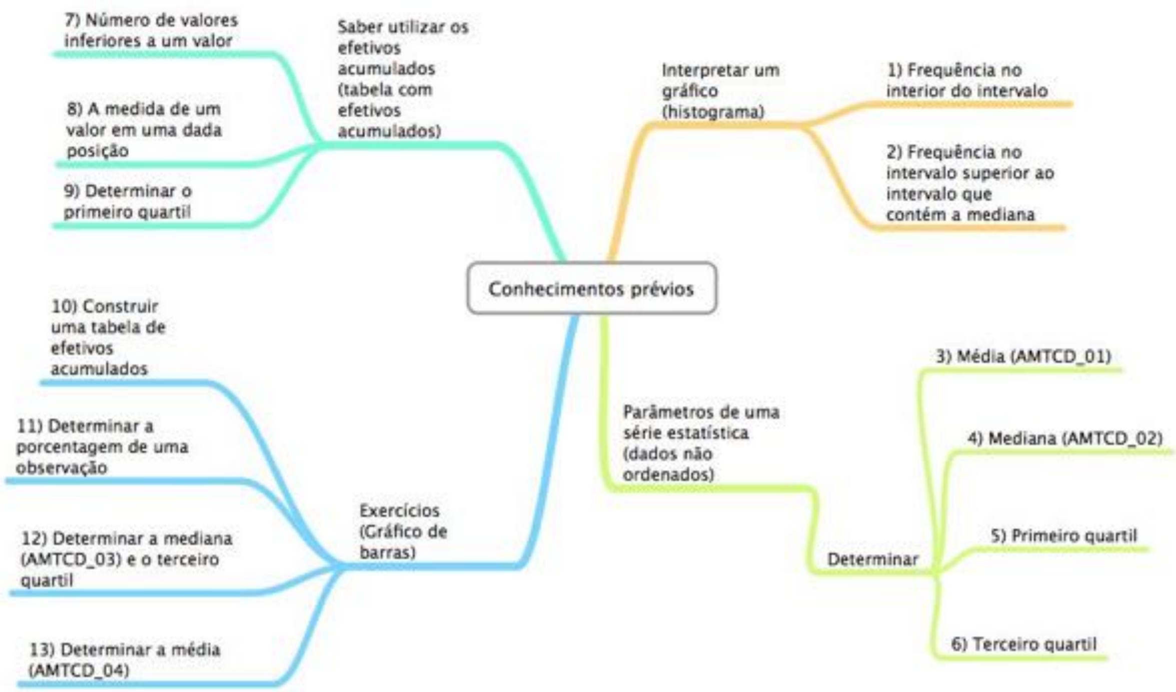
2.2.1.2.1. Antes de iniciar...teste-se

Esta atividade destina-se a verificar os conhecimentos prévios dos alunos antes de iniciar o capítulo. Ela é composta de uma página dividida em 4 grupos de atividades:

- Saber interpretar um gráfico (duas perguntas numeradas em 1 e 2);
- Saber calcular os parâmetros de uma série estatística (quatro perguntas do número 3 ao 6);
- Saber utilizar os efetivos acumulados (três perguntas com os números 7 e 8);
- Os exercícios (quatro perguntas do número 10 ao 13, uma delas com duas atividades que foram determinar a mediana e determinar o Q3.

Dessa forma, tivemos um total de 13 perguntas, compreendendo 14 atividades que indicamos na figura 64. Procuramos mostrar estas atividades em seguida:

Figura 64 – Conhecimentos prévios considerados para o capítulo.



Fonte: Desenho do autor da tese com o software MindNode Lite[22]

Conforme indicado na figura 65, das 14 atividades, 4 são atividades (A) sobre as MTCD (AMTCD.01, AMTCD.02, AMTCD.03, AMTCD.04). Indicamos entre parênteses em cada etapa como os dados são apresentados. Destacamos que os conhecimentos apesar de termos apenas 3 atividades sobre as MTCD, as demais envolvem conhecimentos necessários a estas medidas. Por exemplo, determinar Q1 e Q3 é necessário para o cálculo do desvio interquartil. Os efetivos acumulados são utilizados para determinar a mediana. Observar os dados não ordenados em um histograma, em um gráfico de barras ou em uma tabela com efetivos acumulados, podem ser requeridos na determinação das MTCD. Na próxima seção, trataremos do que chamamos de abertura do capítulo.

2.2.1.2.2. Abertura do capítulo

Nesta parte são apresentadas as noções do capítulo:

- Desvio interquartil – diagrama de caixa
- Variância e desvio padrão

[22] © 2008-2013 Ideas On Canvas GmbH

Na abertura do capítulo, realizada em uma página específica, temos uma apresentação do livro mostrando o uso das medidas de tendência central e da dispersão,citando o seu uso, como exemplo na meteorologia. Destaca também a importância do diagrama em caixa para visualizar os dados. Isto corresponde aos conteúdos da estatística descritiva no programa francês atual para este ano. Nas capacidades previstas no programa, temos o estudo de uma série ou comparação com a ajuda de um software ou calculadora. Na figura 65, apresentada nesta seção, temos a indicação das páginas do uso dos softwares (logiciels), mas apesar de usar a calculadora neste capítulo, como nos demais, não aparece a indicação na abertura do capítulo de um símbolo associado à calculadora e das páginas nas quais esta foi utilizada.

Figura 65. Ícones indicativos de atividades ligadas ao uso de softwares, algoritmos e raciocínio lógico.

Fonte: Poncy, Guichard e Russier (2011a, p.241)

Na próxima seção, abordaremos o item atividades.

2.2.1.2.3. Atividades

As atividades práticas são apresentadas em 4 itens que ocupam duas páginas:

19) Despesas na OCDE[23] - apresenta uma tabela com as despesas dos países membros pertencentes à comunidade europeia com educação e propõem algumas atividades. Essas atividades envolvem o intervalo interquartil, desvio interquartil, Q1 e Q3.
20) Repartição dos dados em uma série. Apresenta outras atividades que envolvem o uso do diagrama em caixa (Q1), a mediana (Q2), o Q3, o máximo, o mínimo e a amplitude.

---

[23] Organização para Cooperação e o Desenvolvimento Econômico, composto atualmente por 34 países,

21) Pode-se medir a regularidade? Tratar da mediana, da variância, do desvio padrão. Propõe uma situação de investigação com o auxílio de um software de geometria, com a calculadora (para traçar uma parábola) para demonstrar que a média dos quadrados dos desvios de uma série é mínimo, quando tomando em relação à média, e neste caso temos a variância (propriedade 1 da variância que apresentamos no capítulo 2 do primeiro volume).
22) Dispersão em duas séries estatísticas. Compara-se duas séries utilizando a média e a mediana. Para verificar a dispersão utiliza-se o desvio padrão para comparar as séries.

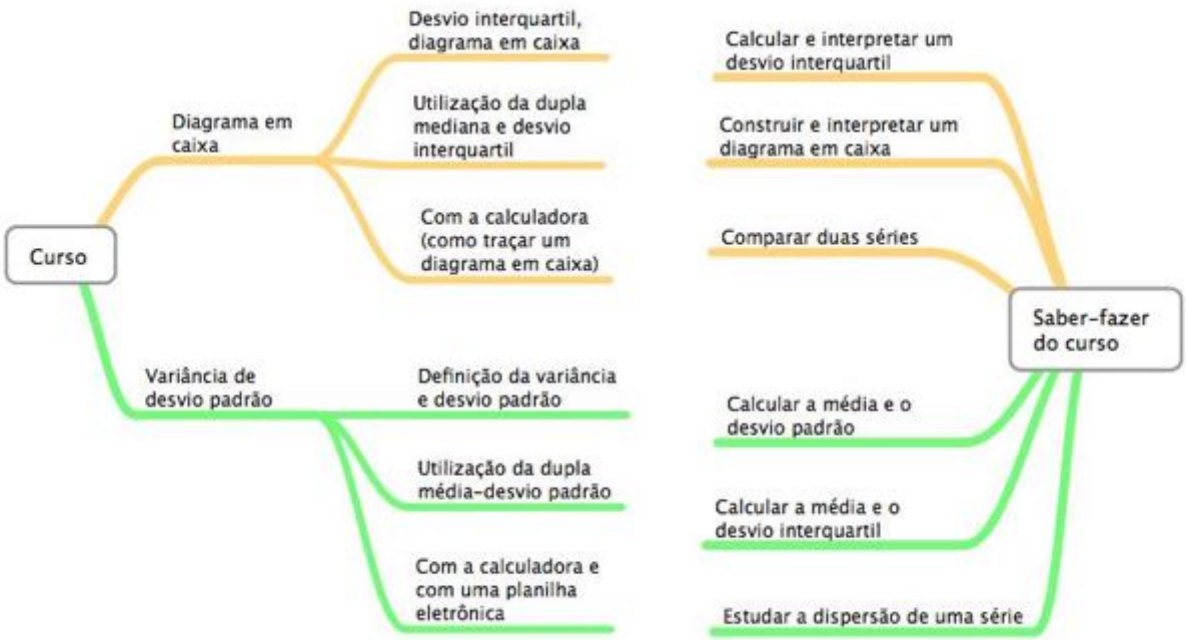
Não observamos nestas atividades uma comparação de duas ou mais séries utilizando ao mesmo tempo as duplas média/ desvio padrão e mediana/intervalo interquartil. No item 3, identificamos um problema com uma fórmula apresentada, no lugar de $\mathrm{S} = \mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 + \mathrm{MC}^2 + \mathrm{MD}^2$, contudo, trata-se de um descuido, pois na hora de aplicar, na resposta que consta no livro do professor, temos o emprego correto: $\mathrm{S} = (7-3)^2 + (7-9)^2 + (7-13)^2(7-8)^2$. Como apenas o professor deve ter esse livro, o aluno tem acesso a uma informação falha.

A próxima seção é chamada o curso/saber-fazer.

2.2.1.2.4. O curso/saber-fazer

Esta seção do curso é dividida em duas partes. Em cada parte desta, temos a apresentação do saber-fazer destas partes (que são exercícios propostos e resolvidos). Procuramos sintetizar esta parte na figura 66.

Figura 66 – O curso e o saber fazer



Fonte: Desenho do autor da tese com o software MindNode Lite[24].

A próxima seção é intitulada "Exercícios".

2.2.1.2.5. Exercícios

Esta parte é organizada em torno de exercícios resolvidos (alguns poucos) e propostos, agrupados em 7 categorias:

- Para iniciar;
- Para treinar;
- Top Chrono! Exercícios parar resolver em tempo curto com o cronômetro (10 minutos no máximo);
- Para fazer o ponto da situação; Questões de múltipla escolha.
- Pesquisar com método;
- Para aprofundar;
- Tomar a iniciativa.

[24] Versão para OS X produzido pela IdeasOnCanvas GmbH.

Para iniciar é composta de 12 exercícios (numerados de 1 a 12) propostos agrupados em duas categorias:

- Mediana, quartis e diagrama em caixa
- Média, variância e desvio padrão.

Na primeira, apesar de não fazer parte do título, o intervalo interquartil e o desvio interquartil são tratados. Como em um exercício podemos ter mais de uma atividade e nem todas as atividades envolvem as MTCD. Selecionamos para as análises que trataremos em outro capítulo, 37 atividades que numeramos de AMTCD.61 a AMTCD.97 que envolvem as MTCD.

“Para treinar” é formado por 46 exercícios, numerados no livro de 13 a 59. Analisamos quantitativamente nas categorias apresentadas nas outras seções desta tese.

Top Chrono! São formados por 5 exercícios (n.60 a 64). Eles devem ser resolvidos com o cronômetro em no máximo 10 minutos, por isso o título da seção. Estes 5 exercícios foram categorizados em 14 atividades.

Para fazer o “ponto da situação”, esse tópico é formado por 13 exercícios de múltipla escolha, numerados de 1 a 13. Destes, apenas um não consideramos como atividades (determinar o efetivo de uma série).

“Pesquisar com método” - Nesta parte (em apenas uma página) é apresentado um enunciado e depois mostrado como se deve responder indicando a solução.

“Para aprofundar” é formado pelas questões de número

65 a 81, sendo apresentado um nível maior de exigência. Tomando a iniciativa é formado por 4 questões.

A ultima parte é chamada de “atividades de TICE”.

2.2.1.2.6. Atividades de TICE

Nesta parte são propostos três trabalhos práticos que devem ser realizados com o uso da planilha. O ultimo trabalho, além de usar a planilha, utiliza também um software de geometria.

2.2.2. COLEÇÃO BR_C1.

Esta coleção é dividida em três volumes. As medidas de tendência central e de dispersão são apresentadas e desenvolvidas apenas no último volume que corresponde ao terceiro ano do ensino médio no Brasil. Dessa forma, a nossa análise é centrada neste último volume.

2.2.2.1. Coleção Br_C1.3A

Utilizando a mesma estrutura para análise dos outros livros, dividimos a coleção em duas partes: os domínios e outros elementos que não foram incluídos nos capítulos. Com base neste critério, apresentamos na tabela 60 uma visão geral do livro.

Observamos que no livro francês temos outros elementos. Na parte fora dos capítulos com uma parte que trata dos algoritmos, do uso da calculadora e softwares, além do extrato do programa oficial. Neste livro, temos por outro lado, questões extras no final dele que fazem parte do vestibular e do ENEM. Das suas 280 páginas , temos 214 destinadas aos domínios (76,43% do total das páginas) do total de páginas e 66 páginas destinadas a outras partes (que correspondem a 23,57 % do total de páginas).

Tabela 60 – Organização das partes do livro didático Br_C1.3[A]

UNIDADE/Capítulo	Páginas		
	Inicial	Final	Total
Folha de rosto	1	1	1
Dados do livro/ficha catalográfica	2	2	1
Apresentação da obra	3	3	1
Sumário	4	5	2
Esquema da unidade	6	7	2
UNIDADE 1. MATEMÁTICA FINANCEIRA E ESTATÍSTICA	8	9	2
Capítulo 1. Matemática financeira	10	29	20
Capítulo 2. Análise de dados	30	55	26
Capítulo 3. Medidas estatísticas	56	79	24
UNIDADE 2. GEOMETRIA ANALÍTICA	80	81	2
Capítulo 4. Conceitos básicos e a reta	82	127	46
Capítulo 5. Circunferência	128	145	18
Capítulo 6. Cônicas	146	167	22
UNIDADE 3. COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA	168	169	2
Capítulo 7. Números complexos	170	195	26
Capítulo 8. Polinômios e equações polinomiais	196	221	26
Questões de vestibular	222	235	14
Questões do Enem	236	251	16
Sugestões de leitura	252	253	2
Respostas	254	278	25
Listas de siglas	279	279	1
Bibliografia	280	280	1
TOTAL			280

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Na tabela 61, apresentamos a organização segundo os domínios. Em cada unidade temos duas páginas com a apresentação da unidade. A matemática financeira foi incluída na mesma unidade da estatística. Mantivemos no domínio 3 as duas páginas da apresentação da unidade, mas retiramos o capítulo que trata da matemática financeira, que não faz parte da estatística.

Tabela 61 – Organização dos capítulos no livro Br_C1.3[A] de acordo com os domínios.

Domínio	Capítulo	Páginas	
		Capítulos	%
Domínio 1 e 2	Capítulo 1. Matemática financeira	20	9,35
	UNIDADE 2. GEOMETRIA ANALÍTICA	2	0,93
	Capítulo 4. Conceitos básicos e a reta	46	21,50
	Capítulo 5. Circunferência	18	8,41
	Capítulo 6. Cônicas	22	10,28
	UNIDADE 3. COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA	2	0,93
	Capítulo 7. Números complexos	26	12,15
	Capítulo 8. Polinômios e equações polinomiais	26	12,15
		162	75,70
Domínio 3	UNIDADE 1. MATEMÁTICA FINANCEIRA E ESTATÍSTICA	2	0,93
	Capítulo 2. Análise de dados	26	12,15
	Capítulo 3. Medidas estatísticas	24	11,21
		52	24,30
	TOTAL	214	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Dentro da organização das unidades e capítulos, a estatística ocupa 52 páginas do livro, que corresponde a apenas 24,30 % do total de páginas destinadas aos domínios. Temos assim menos de ¼ do livro destinado à estatística e ¾ destinado aos outros domínios.

A nossa análise se limitará ao capítulo 3, que trata das medidas de tendência central e de dispersão (MTCD) e é intitulado de medidas estatísticas. Na tabela 62 apresentamos a organização deste capítulo.

Tabela 62 – Estrutura do livro Br_C1.3[A]

N.	Parte	Do que trata	Páginas		
			Inicial	Final	Total
01	Abertura do capítulo	Apresenta uma introdução do capítulo indicando as aplicações deste e o que será abordado no mesmo.	56	56	0,5
02	Medidas de tendência central	Trata das medidas de tendência central (média, mediana e moda).	56	68	12,5
03	Medidas de dispersão	Aborda as medidas de dispersão.	69	73	5,0
04	Exercícios complementares	Lista de exercícios complementares.	74	75	2,0
06	Resumo do capítulo	Trata da definição e fórmulas sintetizadas em uma página.	76	76	1,0
07	Autoavaliação	Apresenta questões para testar os conhecimentos adquiridos no capítulo.	77	77	1,0
08	Compreensão de texto	Texto sobre a gripe suína, no qual não constam dados sobre as MTCD.	78	79	2,0
Total de páginas					24

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Analisaremos a seguir cada uma destas partes, indicando como as medidas de tendência central e de dispersão aparecem em cada uma delas.

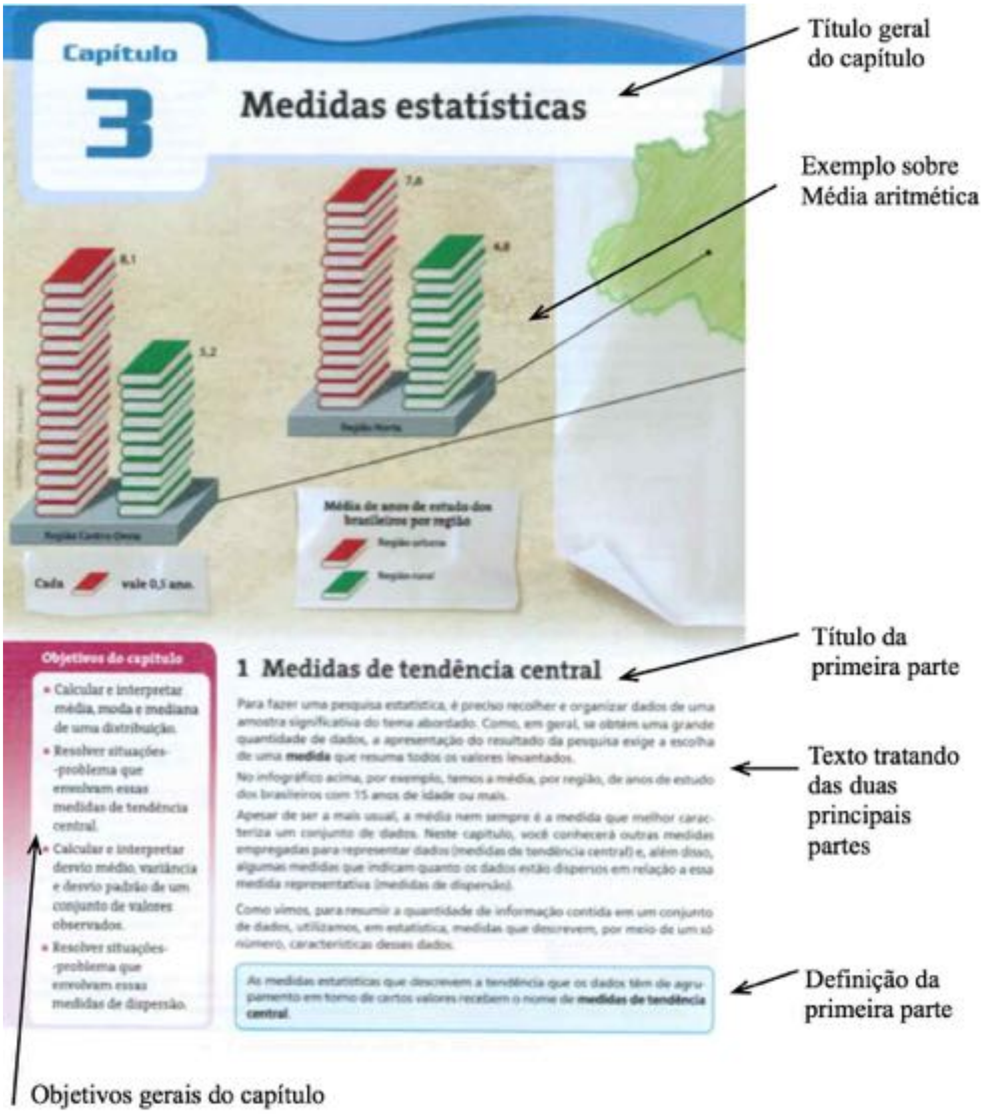
2.2.2.1.1. Abertura do capítulo

Utilizamos o termo “abertura do capítulo”, pois nesta parte são tratadas as duas grandes partes nas quais estão organizados os temas do capítulo. Ao contrário do livro analisado na França, no qual cada capítulo apresenta uma abertura com uma introdução geral do capítulo, neste capítulo temos na primeira página um misto de apresentação geral e introdução da página, como ilustramos na figura 67. Na parte que chamamos de abertura do capítulo, temos os objetivos deste:

- Calcular e interpretar a média, moda e mediana de uma distribuição;
- Resolver situações-problema que envolvem essas medidas de tendência central;
- Calcular e interpretar o desvio médio, a variância e o desvio padrão de um conjunto de valores observados;
- Resolver situações-problema que envolvam essas medidas de dispersão.

Observamos que os objetivos, em nenhum momento, tratam da articulação destas medidas. Deixam também de indicar outras medidas como a amplitude, o desvio interquartil etc. No que chamamos de abertura, também se faz uma apresentação do que sejam as medidas de tendência central e de dispersão e sua importância como instrumentos de resumir os valores levantados.

Figura 67 – Primeira página do capítulo.



Fonte: Barroso (2010, p. 56).

2.2.2.1.2. Medidas de Tendência Central

Esta seção do livro é dividida em duas grandes partes. Na primeira, são tratadas as medidas de tendência central (média aritmética, mediana e moda) e na segunda parte são tratadas estas medidas para dados agrupados.

Nas duas partes, como em outras partes, observamos uma estrutura tradicional de ensino que pode ser assim descrita:

- Definição, normalmente apoiada no algoritmo;
- Exemplos;
- Exercícios resolvidos;
- Exercícios propostos.

Podemos observar no documento atual do MEC que analisamos às OCEM, uma crítica a este tipo de postura. Este documento destaca que:

> Sobre o processo de ensino e aprendizagem, uma primeira corrente, historicamente a mais presente nas nossas salas de aula de Matemática, identifica o ensino como transmissão de conhecimento e a aprendizagem como mera recepção de conteúdos. Nesta concepção, a aprendizagem é vista como um acúmulo de conhecimentos e o ensino baseia-se essencialmente na "verbalização" do conhecimento por parte do professor. Se por um lado essa concepção teórica apresenta a vantagem de se atingir um grande número de alunos ao mesmo tempo, visto que a atividade estaria a cargo do professor, por outro lado, demanda alunos bastante motivados e atentos à palavra do professor. O que não parece ser o caso para grande parte de nossos alunos que estão imersos em uma sociedade que oferece uma gama de outras motivações (BRASIL, 2006, p. 80).

Quando pensamos na construção do conceito para analisar as MTCD, nos apoiamos em Vergnaud (2012) que corresponde a uma outra concepção que considera que a aprendizagem não deve se limitar à memorização e reprodução. Que um conceito vai além da simples descrição, mas é construído em torno das situações que dão sentido a esse conceito, às situações vivenciadas pelos alunos e da forma como esses aprendizes se apropriam destas situações, ou seja, os sentidos, os significantes e os significados atribuídos a estes conceitos pelo aluno. Em outro trecho das OCEM (BRASIL, 2006, p. 81) referindo-se ao texto anterior que citamos, temos:

> A primeira concepção dá origem ao padrão de ensino "definição exemplos exercícios", ou seja, a introdução de um novo conceito dar-se-ia pela sua apresentação direta, seguida de certo número de exemplos, que serviriam

> como padrão, e aos quais os alunos iriam se referir em momentos posteriores; a cadeia seria fechada com a apresentação de um grande número de exercícios, bastante conhecidos como "exercícios de fixação".

Observamos que este autor utiliza o termo média ponderada em um sentido amplo que consideramos inadequado. O termo média ponderada foi introduzido por Roger Cotes em 1712 (Dodge, 2007a) e é usado por diversos autores no sentido de um peso que é atribuído aos valores para diferenciá-los (MANN, 2006; DODGE, 2007a, 2006; SPIEGEL, 1993; LEVIN; FOX, 2004).

Nesta apresentação, inicialmente, a média ponderada é indicada no qual os efetivos são considerados como peso. Dessa forma, este autor descreve que "O número de vezes que um valor se repete, recebe o nome de peso e a média aritmética calculada com pesos é chamada de média aritmética ponderada" (p. 58). Podemos considerar que cada observação é um peso e o seu valor afeta a medida da média e esclarecer isso. Contudo, quando se usa o termo média ponderada utiliza-se em outro sentido. Consideramos assim um problema de transposição didática neste livro.

Este autor também apresenta a média ponderada no outro sentido que consideramos mais adequado que é "representar a importância que cada valor tem na composição" (p. 58). Este autor apresenta também a mediana e a moda no sentido usual nesta parte do livro. Em seguida às medidas de tendência central, temos as medidas de dispersão.

2.2.2.1.3. Medidas de Dispersão

O autor inicia apresentando a seguinte definição: "As medidas estatísticas que descrevem o comportamento de um grupo de valores em torno das medidas de tendência central, recebem o nome de medidas de dispersão ou de variabilidade" (p.69).

É uma definição um pouco vaga, e no final se afirma que dispersão é o mesmo que variabilidade. Tomando como referência Régnier (2007, p. 11, tradução nossa), ao tratar de variável este afirma que:

> A variável estatística que modeliza o objeto de estudo é aplicação matemática que a um indivíduo (unidade) estatística faz corresponder um resultado (quantidade ou

> qualidade); este conceito fundamental remete ao objetivo principal da ciência estatística que deu um quadro teórico ao estudo da variabilidade.

Esta definição da variável nos remete à variabilidade e sua grande importância para a estatística. As medidas de tendência central, as medidas de dispersão, os gráficos e outras ferramentas estatísticas, nos auxiliam a estudar a variabilidade. Contudo, afirmar que variabilidade é o mesmo que dispersão é um equívoco. Pode-se afirmar que as medidas de dispersão são instrumentos para o estudo da variabilidade, mas não como está descrito neste livro. Podemos observar em algumas questões resolvidas esta associação: maior desvio padrão, maior dispersão (ou variabilidade). É preciso esclarecer este engano. Tomemos um conjunto de observações que chamaremos de A. A={5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5; 5}, neste caso, o desvio padrão é igual a zero. Como seria igual a zero para qualquer série de observações de mesmo valor, neste caso, os dados não variam, contudo se tomarmos como referência os conjuntos B e C de mesmo número de dados (10) e mesma média (5,5). B={ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10} e C={1; 1; 1; 1; 1; 10; 10; 10; 10; 10}. No conjunto B, temos dez observações diferentes e no conjunto C temos apenas duas. Qual destas duas tem maior variação nas medidas? O conjunto B seria a resposta. O desvio padrão de B é 2,87 enquanto que o desvio padrão de C é 4,5. Este autor também associa menor dispersão à maior regularidade. Podemos atribuir mais de um significadoa este significante, por exemplo, sujeito a regras. Neste sentido o que seria mais regular entre as séries D e E: D{0; 3; 6; 9; 12; 15} e E={0; 1; 4; 7; 8; 10}. A série D nos parece mais regular. Poderíamos associá-la a uma progressão aritmética de razão 3. A segunda é menos regular. A primeira tem o desvio padrão igual a 5,12 e a segunda 3,65. Dessa forma, consideramos que não faz sentido também associar a dispersão à regularidade.

Nesta seção são apresentadas como medidas de dispersão:

- Desvio médio;
- Variância;
- Desvio padrão.

Assim, deixa-se de trabalhar com outras medidas de dispersão importantes como a amplitude, o desvio interquartil e o coeficiente de variação.

O desvio médio é definido como sendo “a média aritmética dos valores absolutos dos desvios”. Assim, ele dá um sentido diferente ao que observamos em diversos autores. Kendall e Yule (1948) utilizam o desvio médio como a média dos desvios. Esta média pode ser tomada em relação a qualquer número. Quando é tomada em relação à mediana ou intervalo mediano, ele é mínimo (RÉGNIER, 2011a). Régnier (2011a), no mesmo sentido, tem o termo desvio médio absoluto (no original em francês “écart absolu moyen”). Observamos assim um outro problema de transposição. Em razão deste problema, desconsideramos esta medida em nossa análise.

Ao tratar da variância, apresenta-se como problema o fato de se obter uma unidade de medida incompatível com os valores da variável. Em função disso, se justifica que se deve usar uma medida que tenha a mesma natureza dos valores observados, que seria o desvio padrão. Esta apresentação é muito limitada. Após esta justificativa, o autor do livro utiliza a variância nas atividades resolvidas e propostas. Tratamos sobre as unidade de medida na variância da observação 2 sobre a variância, e não consideramos isto como um problema, embora deve-se destacar este característica para os estudantes. O desvio padrão é uma medida muito usada pelas suas inúmeras aplicações. O desvio quadrático médio é minimizado pelo desvio padrão. Assim, consideramos que esta justificativa de utilização do desvio padrão é restritiva e deveria ser evitada. Este livro também utiliza a medida do desvio padrão como indicativo da variabilidade e regularidade. Consideramos, como comentamos anteriormente, inadequado, que um maior valor do desvio padrão corresponderia à maior variabilidade e menor regularidade.

Tal como na seção anterior, esta seção é dividida em duas partes. Na primeira se trata das medidas de dispersão citadas e na segunda abordam-se a variância e o desvio padrão para dados agrupados.

Ao tratar da variância para o desvio padrão para dados agrupados, se esclarece que quando temos dados agrupados, sem intervalo, utiliza-se no cálculo da variância “a média aritmética ponderada dos quadrados dos desvios” (72). O que nos remete ao problema comentado do uso do termo média ponderada no sentido de efetivo. Na fórmula da variância, observamos o símbolo de frequência e não de média ponderada utilizada por este autor. A próxima seção do livro é chamada de “exercícios complementares”.

2.2.2.1.4. Exercícios complementares

Nesta seção, são apresentados exercícios complementares às MTCD. Estes exercícios foram tratados quantitativamente quando fizemos a análise das atividades propostas nos livros didáticos, na qual identificamos algumas limitações. Observamos que a maioria das questões se limitam a determinar medidas estatísticas ou à população como dados faltantes. Não se exploram estas ferramentas para comparar duas séries, salvo uma questão que utiliza a média e o desvio padrão e na qual se propõe que informe qual companhia área teve o desempenho mais regular no sentido de menor dispersão, usando para isso o desvio padrão. O próximo item trata-se de um resumo do capítulo.

2.2.2.1.5. Resumo do capítulo

Apresentado em uma página com fórmulas e definições já vistas anteriormente, algumas das quais já comentadas. . A próxima seção é denominada autoavaliação.

2.2.2.1.6. Autoavaliação

A autoavaliação é composta de duas partes. Na primeira temos 8 questões de múltipla escolha. Na segunda o aluno dever verificar se não acertou alguma das questões. Caso não tenha acerto, o livro apresenta uma tabela como as questões similares a cada uma das oito questões, o aluno deve então reler o texto sobre o assunto apresentado no livro e refazer os exercícios correspondentes a questão que errou. Esta segunda parte chama-se retomada do conceito.

Algumas destas questões estão em um nível mais simples do que outras apresentadas. São apresentadas questões para determinar as medidas de tendência central. Questões para verificar se o aluno memorizou a definição apresentada no livro. Por exemplo: _______ é a única medida de tendência central que admite mais de um valor. E outras categorias de questões. Na próxima seção, apresentamos a última parte deste capítulo intitulada: compreensão de texto.

2.2.2.1.7. Compreensão de texto

Nesta questão é apresentado um texto sobre a pandemia em declínio que aborda o vírus influenza A (H1N1). O texto faz uma apresentação de alguns dados da gripe suína e apresenta alguns dados sobre a mesma. São apresentadas seis questões. As três primeiras são sobre as informações apresentadas no texto sem uma ligação direta com a estatística.

Perguntas do tipo: Em que período do ano há mais facilidade para a ocorrência de epidemia de gripe? As outras três questões são pertinentes.

Nos exercícios propostos, resolvidos e nos textos apresentados nos livros analisados, podem ser vistos em função das praxeologias. Isto será tratado na próxima seção da tese.

2.3. ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO DOS CAPÍTULOS SELECIONADOS

Procuramos analisar nos livros quais as praxeologias observadas. Os livros analisados se limitam a apresentar tarefas, tipos de tarefas e as técnicas. Eles não abordam as tecnologias ou teorias. Iniciamos a nossa análise pelas organizações praxeológicas relativas a "determinar a média aritmética". Destacamos que algumas praxeologias iniciais foram ampliadas, tendo em vista as praxeologias encontradas nos livros didáticos analisados. Dessa forma, contemplamos todas as praxeologias observadas nos livros didáticos analisados e procuramos comparar a diversidade de um livro para outro que também pode refletir a diversidade de um país para o outro.

2.3.1. ANÁLISE PRAXEOLÓGICA PONTUAL SOBRE O TIPO DE TAREFA: DETERMINAR A MÉDIA ARITMÉTICA

Organizamos as praxeologias da média aritmética em três partes: média aritmética, média ponderada e média combinada. Outras médias, tais como: a média geométrica, harmônica, quadrática e amparada não foram exploradas, uma vez que não foram observadas nos livros didáticos.

Levantamos seis organizações pontuais sobre o tipo de tarefa "determinar a média aritmética". Procuramos levantar na coleção do livro didático selecionada no Brasil e na França para este tipo de análise, quais as praxeologias que se formam em torno desse tipo de tarefa.

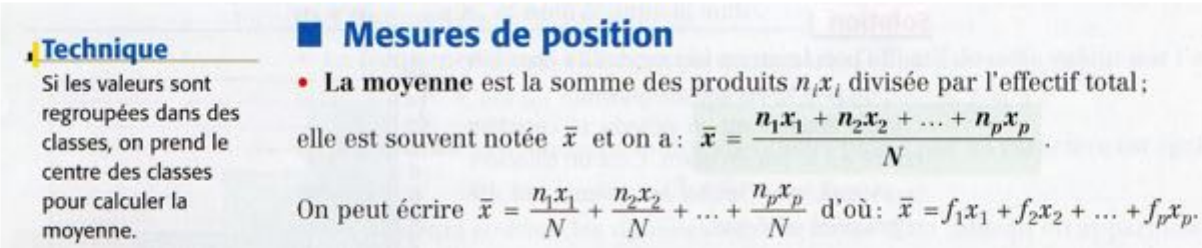
Uma primeira limitação que observamos, tanto no Brasil como na França, foi que em nenhum dos dois casos foram observadas teorias associadas a estas organizações praxeológicas e no caso das tecnologias, estas se limitaram a apenas uma apresentada no livro didático Fr_C1.1[A]. Limitando-se estas coleções, na maioria dos casos, às técnicas utilizadas para desenvolver as tarefas apresentadas nos livros didáticos analisados. Como destacamos ao tratar da TAD, estas limitações já indicam uma restrição destas organizações, não conduzindo, dessa forma, os alunos às tecnologias (com a exceção apresentada) que justificam as técnicas utilizadas, nem a teoria que justifica estas e a organização pontual que se apoia numa teoria maior que é teoria estatística.

No livro do primeiro ano do ensino médio francês, foram observadas cinco dos seis tipos de tarefas levantadas (uma utilização de 83,33 %). Sendo utilizadas nestas, oito técnicas diferentes das doze levantadas (uma utilização de 66,67%).

No livro do segundo ano do ensino médio francês selecionado, observamos uma redução do número de tipos de tarefas, uma vez que neste livro temos a introdução de novas medidas de dispersão e o foco em atividades de relacionamento da tendência central à dispersão, com o uso de um menor número de tipos de tarefas das medidas de tendência central. Assim, foram observadas três tipos de tarefas das seis que levantamos (uma utilização de apenas 50%). Observamos contudo, que foram utilizadas também oito técnicas das doze levantadas (uma utilização de 66,67%) das técnicas. Isto se deve ao fato de se explorar mais os tipos de tarefas existentes com técnicas que não foram utilizadas antes. Considerando os dois livros franceses, tivemos um total de cinco tipos de tarefas utilizadas, ou seja, uma utilização de 83,33%.

Observamos também, no livro do primeiro ano, o uso de apenas uma técnica sem indicar o tipo de tarefa. Neste exemplo, foi apresentado o algoritmo através da linguagem natural e da fórmula para indicar como realizar o cálculo da média para os dados agrupados em observações de mesmo efetivo. Em seguida, temos a passagem desta fórmula da média para a da média, obtida com base nas frequências, na passagem de uma para outra, temos uma fase intermediária que funciona como uma demonstração da nova técnica. Chevallard (1999) esclarece que duas das funções da tecnologia é justificar uma técnica e também produzir uma técnica. Neste caso, temos com base em um técnica apresentada, uma nova técnica baseada na anterior que é produzida e ao mesmo tempo uma justificativa desta técnica (apoiando-se na propriedade distributiva). Assim, temos neste caso, tanto uma técnica como uma tecnologia. Contudo, não observamos a indicação da forma do tipo de tarefa, embora se pressuponha o uso desta. Esta técnica apresentada não foi utilizada nas atividades propostas no livro didático, temos assim apenas a indicação. Na figura 68, apresentamos este caso extraído do livro didático. Logo, temos assim apenas uma tecnologia no livro Fr_C1_1[A]. Nos demais livros, não observamos a apresentação de nenhuma tecnologia relacionada à "determinar a média aritmética".

Figura 68. Técnica τ_{m02-1}, τ_{m03-1} e τ_{θ_02}



Technique
Si les valeurs sont regroupées dans des classes, on prend le centre des classes pour calculer la moyenne.

Mesures de position

• **La moyenne** est la somme des produits $n_i x_i$ divisée par l'effectif total ; elle est souvent notée $\bar{x}$ et on a : $\bar{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_px_p}{N}$.

On peut écrire $\bar{x} = \dfrac{n_1x_1}{N} + \dfrac{n_2x_2}{N} + \ldots + \dfrac{n_px_p}{N}$ d'où : $\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_px_p$.

Fonte: Gauthier, Poncy (2009a, p. 134).

Considerando o total de tipos de tarefas nos dois livros da coleção francesa, observamos no livro Br_C1.3^A cinco dos seis tipos de tarefas levantadas (uma utilização de 83,33 %). Sendo utilizadas nestas, nove técnicas diferentes das doze levantadas (uma utilização de 75 %).

Na coleção brasileira analisada, observamos a utilização de quatro dos seis tipos de tarefas, ou seja, 66,67 % dos tipos de tarefas empregadas. Comparando com os dois volumes franceses, a coleção brasileira utilizou um menor número de tipos de tarefas relacionadas à "determinar a média aritmética". Quanto às técnicas levantadas, a coleção francesa utilizou um número ainda mais reduzido. Foram empregadas apenas quatro das doze técnicas levantadas, ou seja, 33,33%. Um número bastante reduzido comparando com o total da coleção francesa com 75% das técnicas utilizadas.

Um outro aspecto a considerar é a quantidade de atividades que envolviam os tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Na coleção Fr_C1.1^A foram observadas 58, enquanto que no livro Fr_C1.2^A levantamos 148 (tabela 63). Assim, no segundo livro, tivemos um maior número de atividades nas quais foram identificadas estas organizações praxeológicas. A coleção Fr_C1 teve um total de 206 atividades que envolviam esta organização praxeológica investigada. No caso da coleção brasileira, este número foi bem abaixo com um total de 97.

Tabela 63 – Praxeologia matemática sobre o tipo de tarefa determinar a média aritmética em torno das coleções selecionadas.

Organ. praxeológicas		Livros França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1^A		Fr_C1.2^A		Total		Br_C1.3^A	
Praxeologia	Tipos	N	%	N	%	N	%	N	%
1	T_{m_01}	8	13,79	37	25,00	45	21,84	31	31,96
	τ_{m_01-1}	3	5,17	9	6,08	12	5,83	32	32,99
	τ_{m_01-2}	6	10,34	14	9,46	20	9,71	0	0,00
	τ_{m_01-3}	0	0,00	14	9,46	14	6,80	0	0,00
	θ_{m_01}	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
2	T_{m_02}	12	20,69	26	17,57	38	18,45	5	5,15
	τ_{m_02-1}	12	20,69	9	6,08	21	10,19	5	5,15
	τ_{m_02-2}	3	5,17	14	9,46	17	8,25	0	0,00
	τ_{m_02-3}	0	0,00	3	2,03	3	1,46	0	0,00
3	T_{m_03}	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
	τ_{m_03}	1	1,72	0	0,00	1	0,49	0	0,00
	θ_{m_03}	1	1,72	0	0,00	1	0,49	0	0,00
4	T_{m_04}	4	6,90	11	7,43	15	7,28	9	9,28
	τ_{m_04-1}	4	6,90	2	1,35	6	2,91	11	11,34
	τ_{m_04-2}	2	3,45	9	6,08	11	5,34	0	0,00
5	T_{m_05}	1	1,72	0	0,00	1	0,49	0	0,00
	τ_{m_05}	1	1,72	0	0,00	1	0,49	0	0,00
6	T_{m_06}	0	0,00	0	0,00	0	0,00	2	2,06
	τ_{m_06-1}	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
	τ_{m_06-2}	0	0,00	0	0,00	0	0,00	2	2,06
TOTAL		58	100,00	148	100,00	206	100,00	97	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

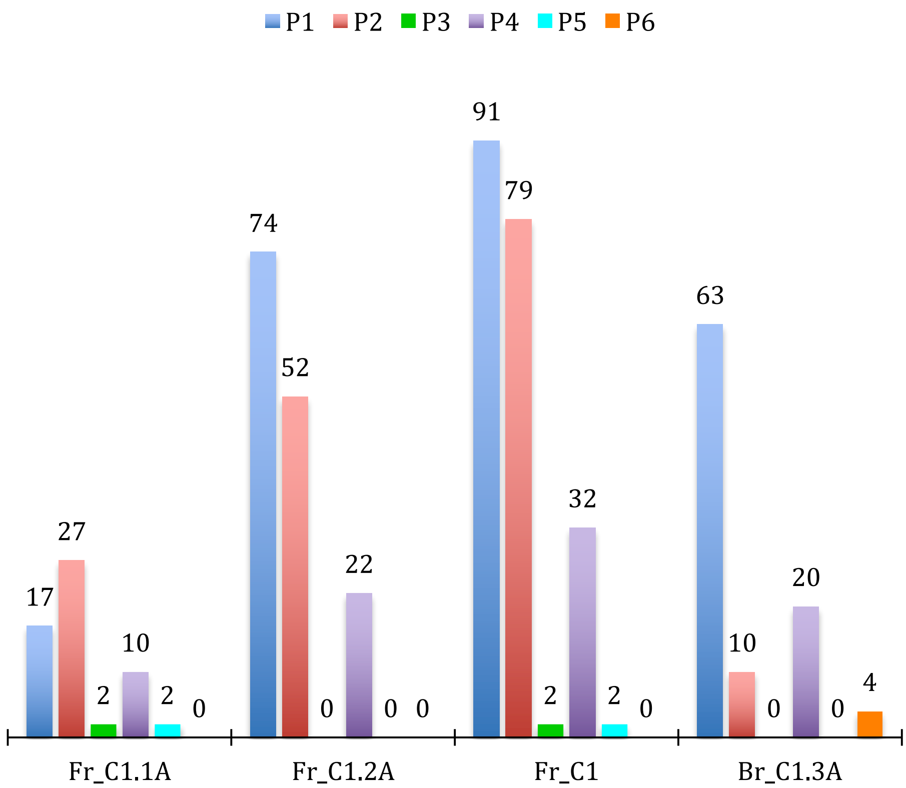
Consideramos também a forma como essas praxeologias foram distribuídas. A praxeologia mais utilizada no livro Fr_C1.1^A foi na organização praxeológica 2, na qual temos um total de 27 situações de uso. Já no livro 2, a praxeologia mais utilizada foi na praxeologia 1, com 74 situações de uso. Observamos um uso bastante limitado das praxeologias 3 e 4 no livro Fr_C1.1[A] e a ausência destas no livro Fr_C1.2[A]. Na coleção brasileira, a praxeologia mais utilizada é a praxeologia 1 com um total de 63 situações de uso. O gráfico 25 ilustra este tipo de comparação.

As praxeologias 3 e 5 foram observadas apenas nas coleções francesas, enquanto que a praxeologia 6 apenas na coleção brasileira, o que pode indicar serem próprias das diferentes instituições representadas por cada uma destas coleções, que por sua vez são de países diferentes.

Os resultados indicam a concentração em algumas técnicas, isto ficou mais forte na coleção brasileira. Isto faz com sejam exploradas mais praxeologias do que outras. Algumas das técnicas presentes nas coleções francesas são resultado da utilização de instrumentos tecnológicos (calculadora e softwares), estes não são adotados na coleção brasileira nos capítulos analisados.

Com base na análise, observamos limitações nas coleções brasileira e francesa. Estas limitações são mais acentuadas na coleção brasileira.

Gráfico 25. Total das situações agrupadas por praxeologias nas coleções selecionadas.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Na tabela 64, apresentamos os resultados sobre as organizações praxeológicas que se formam em torno do tipo de tarefa “determinar a média aritmética ponderada”. Ela apresenta uma limitação pelo número reduzido. Observamos apenas duas situações de uso no primeiro ano da coleção francesa e quatro situações de uso na coleção brasileira. A coleção brasileira, dessa forma, apresenta o dobro de situações de uso da coleção francesa. Observamos um número reduzido de situações de uso que pode contribuir pouco no conhecimento do aluno sobre este tipo de praxeologia. Observamos também a ausência de elementos tecnológicos (tecnologias e teorias). Esta ausência empobrece esta organização praxeológica.

Na coleção brasileira, tivemos um número considerável de questões que foram consideradas como média aritmética ponderada. Consideramos uma proposição que foge ao saber científico. Dessa maneira, fizemos uma redistribuição para as técnicas e tipos de tarefas adequadas. Tomemos como exemplo o tipo de tarefa:

- T_{m_02} - Determinar a média aritmética de dados apresentados em uma tabela ou em um gráfico com as observações e os efetivos de cada observação.

Segundo o livro brasileiro, tratava-se de determinar a média ponderada considerando os efetivos como pesos. Podemos considerar qualquer observação como peso, inclusive os efetivos, mas não é o sentido usado para média ponderada. Descrevemos isto ao analisar a estrutura dos livros didáticos, apresentando que este sentido é histórico e adotado pelas obras que tratam do saber científico levantadas.

Tabela 64 – Praxeologia matemática sobre o tipo de tarefa “determinar a média aritmética ponderada” em torno das coleções selecionadas.

Organizações praxeológicas		Livros França						Livro Brasil	
Praxeologia	Tipos	Fr_C1.1[A]		Fr_C1.2[A]		Total		Br_C1.3[A]	
		N	%	N	%	N	%	N	%
1	T_{mp_01}	1	50,00	0	0	1	50,00	2	50,00
	τ_{mp_01-1}	1	50,00	0	0	1	50,00	2	50,00
	τ_{mp_01-2}	0	0,00	0	0	0	0,00	0	0,00
TOTAL		2	100,00	0	0	2	100,00	4	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Na tabela 65, apresentamos os resultados sobre a organização praxeológica que se forma em torno do tipo de tarefa “determinar a média aritmética combinada”. Este tipo de tarefa aparece apenas no programa anterior ao atual na França. Contudo, ela é adotada tanto na coleção francesa como na brasileira. Na coleção francesa, temos um número de tipos de tarefas pequeno, mas que ocorre tanto no primeiro ano como no segundo ano do ensino médio. Assim, consideramos que apesar de pequeno, ele está bem distribuído se apresentando em número superior à média ponderada e outras praxeologias relativas à média aritmética. Na coleção brasileira, temos apenas uma aparição, indicando uma grande limitação na apresentação desta praxeologia.

Tabela 65 – Praxeologia matemática sobre o tipo de tarefa "determinar a média aritmética combinada" em torno das coleções selecionadas.

Organizações praxeológicas		Livros França						Livro Brasil	
Praxeologia	Tipos	Fr_C1.1[A]		Fr_C1.2[A]		Total		Br_C1.3[A]	
		N	%	N	%	N	%	N	%
1	T_{mc_01}	2	50,00	2	50,00	4	50,00	0	0,00
	τ_{mc_01}	2	50,00	2	50,00	4	50,00	1	100,00
TOTAL		4	100,00	4	100,00	8	100,00	1	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Observamos que as praxeologias relativas às médias aparecem com diversas limitações e ausências, tanto no Brasil como na França. No Brasil, a situação é mais crítica se concentrando sobretudo no primeiro tipo de praxeologia relativa à média aritmética. Observamos que esse tipo de praxeologia que ocupou 64,95 % das praxeologias sobre a média com um total de 63 atividades, foi a que na pesquisa de Cazorla (2002) apresentou um maior índice de acerto com estudantes universitários com 95,2% de acerto em um pré-teste aplicado a 757 sujeitos. Contudo, a média ponderada que apresentou apenas quatro atividades no livro do Brasil envolvendo esta organização praxeológica, apresentou um índice de erros muito alto, com apenas 30,8% de respostas totalmente corretas no pré-teste e com 28,00% de estudantes que não responderam. No caso da média ponderada, na França, a situação é mais crítica do que no Brasil, com apenas duas atividades envolvendo esta praxeologia.

Trataremos a seguir da mediana.

2.3.2. ANÁLISE PRAXEOLÓGICA PONTUAL DA MEDIANA

Organizamos a análise da organização praxeológica pontual sobre a mediana em duas partes. Na primeira, levantamos as praxeologias sobre “determinar a mediana”. Na segunda, apresentamos uma outra praxeologia sobre a mediana que levantamos em um livro didático.

Levantamos 7 organizações praxeológicas sobre “determinar a mediana”. O número de técnicas é maior do que outras, devido a mudanças nessas técnicas e em função do número total de observações ser par ou ímpar. Ao todo, foram levantadas 22 técnicas (tabela 66). Dessas, foram observadas o uso de 20 técnicas (tabela 66).

Não observamos na coleção brasileira ou francesa tecnologias e teorias sobre esta organização praxeológica pontual indicando uma limitação destas organizações.

No livro do primeiro ano da França selecionado ($Fr\_C1.1^{A}$), observamos a presença de 5 das 7 organizações praxeológicas levantadas (tabelas 66 e 67), ou seja, 71,43% do total. Das 20 técnicas utilizadas nos livros analisados, observamos neste livro a utilização de 12 técnicas que correspondem a 60,00 % do total das técnicas utilizadas em algumas destas coleções e apenas 54,54 % do total das técnicas levantadas (22). No total, temos 58 tipos de tarefas e técnicas levantadas. A moda é a organização praxeológica 3 com 44,83% (tabela 67) dos tipos de tarefas e técnicas utilizadas. A segunda mais observada foi a organização praxeológica 1 com 34,48%, o que indica uma limitação nas técnicas e uma concentração das atividades em duas organizações praxeológicas com 79,31% das atividades.

Tabela 66 – Praxeologia em torno de "determinar a mediana"

Organ. Praxeológicas		Livros França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1[A]		Fr_C1.2[A]		Total		Br_C1.3[A]	
Praxeologia	N	N	%	N	%	N	%	N	%
1	T_{md_01}	8	13,79	13	17,11	21	15,67	16	31,37
	τ_{md_01-1}	4	6,90	7	9,11	11	8,21	12	23,53
	τ_{md_01-2}	4	6,90	5	6,58	9	6,72	4	7,84
	τ_{md_01-3}	2	3,45	0	0,00	2	1,49	0	0,00
	τ_{md_01-4}	0	0,00	1	1,32	1	0,75	0	0,00
	τ_{md_01-5}	2	3,45	0	0,00	2	1,49	0	0,00
2	T_{md_02}	1	1,72	11	14,47	12	8,96	3	5,88
	τ_{md_02-1}	1	1,72	6	7,89	7	5,22	2	3,92
	τ_{md_02-2}	0	0,00	2	2,63	2	1,49	1	1,96
	τ_{md_02-3}	2	3,45	0	0,00	2	1,49	0	0,00
	τ_{md_02-4}	0	0,00	3	3,95	3	2,24	0	0,00
3	T_{md_03}	12	20,69	7	9,21	19	14,18	3	5,88
	τ_{md_03-1}	9	15,52	5	6,58	14	10,45	2	3,92
	τ_{md_03-2}	1	1,72	1	1,32	2	1,49	1	1,96
	τ_{md_03-3}	4	6,90	1	1,32	5	3,73	0	0,00
4	T_{md_04}	1	1,72	0	0,00	1	0,75	3	5,88
	τ_{md_04-1}	1	1,72	0	0,00	1	0,75	0	0,00
	τ_{md_04-2}	0	0,00	0	0,00	0	0,00	4	7,85
5	T_{md_05}	3	5,17	1	1,32	4	2,99	0	0,00
	τ_{md_05-1}	1	1,72	1	1,32	2	1,49	0	0,00
	τ_{md_05-2}	2	3,45	0	0,00	2	1,49	0	0,00
	τ_{md_05-3}	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
6	T_{md_06}	0	0,00	1	1,32	1	0,75	0	0,00
	τ_{md_06-1}	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
	τ_{md_06-2}	0	0,00	1	1,32	1	0,75	0	0,00
7	T_{md_07}	0	0,00	5	6,58	5	3,73	0	0,00
	τ_{md_07-1}	0	0,00	5	6,58	5	3,73	0	0,00
TOTAL		58	100,00	76	100,00	134	100,00	51	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

No livro do segundo ano do ensino médio na França, observamos a utilização de 6 das 7 organizações praxeológicas levantadas (tabela 66). Temos assim, 85,71% do uso dessas organizações. Das 22 técnicas levantadas, observamos a utilização de 12 técnicas. O que indica a utilização de 54,54% do total. O total de atividades neste livro é de 76 tipos de tarefas e técnicas. A moda (tabela 67) é a praxeologia pontual 1 com 34,21% das atividades (que no livro 1 aparecia como a segunda mais utilizada). Em seguida, temos a praxeologia 2 com 28,95% das atividades. No livro 1, esta praxeologia se limitava a um tipo de tarefa (1,82% do total). Observamos nesse segundo livro uma melhor distribuição em torno de três praxeologias a 1, a 2 e a 4 e uma utilização muito pequena de duas praxeologias, a 5 e a 6.

Tabela 67. Agrupando as praxeologias da tabela 66 sobre "determinar a mediana".

Praxeologia	Livros França						Livro Brasil	
	Fr_C1.1^A		Fr_C1.2^A		Total		Br_C1.3^A	
	N	%	N	%	N	%	N	%
1	20	34,48	26	34,21	46	34,33	32	62,75
2	4	6,90	22	28,95	26	19,40	6	11,76
3	26	44,83	14	18,42	40	29,85	6	11,76
4	2	3,45	0	0,00	2	1,49	7	13,73
5	6	10,34	2	2,63	8	5,97	0	0
6	0	0	2	2,63	2	1,49	0	0
7	0	0	10	13,16	10	7,46	0	0
TOTAL	58	100,00	76	100,00	134	100,00	51	100,00

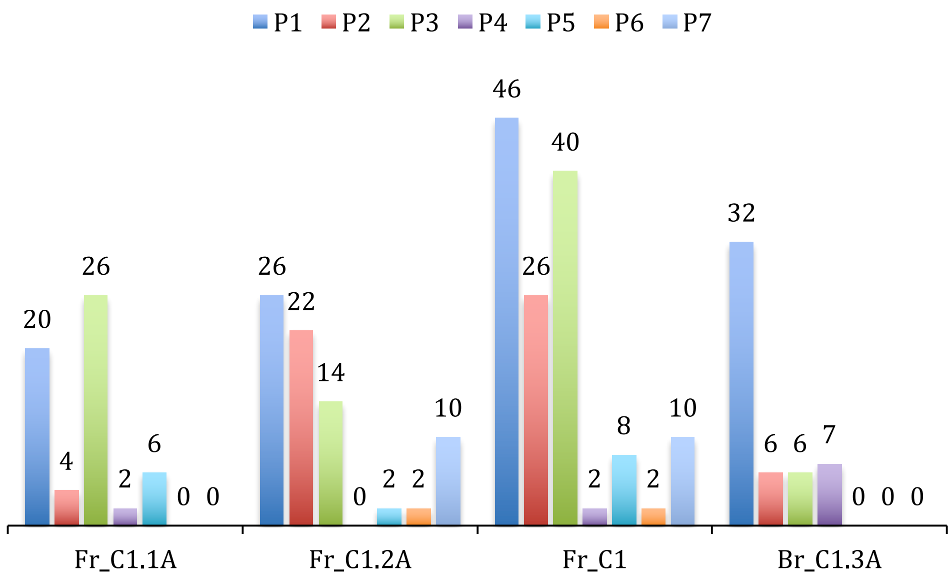
Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Considerando a coleção Fr_C1 (total), observamos a presença de sete das sete organizações praxeológicas com 100% de utilização. Observamos que em um livro concentra-se mais em uma e no outro concentra-se mais em outra. Das 19 técnicas levantadas, observamos a utilização de 16 que correspondem a 84,21 %, o que indica um nível muito bom de apresentação das técnicas. A limitação desta coleção é a não utilização de tecnologias e teorias indicando uma grande limitação no bloco tecnológico. Temos um total de 133 atividades em torno desta organização praxeológica. Observamos que a moda é na praxeologia 1 com 34,59% do total, sendo seguida pela praxeologia 3 com 30,08% e a praxeologia 2 com 17,29%. A praxeologia 6 é a que se apresenta como a mais limitada, com apenas um tipo de tarefa e uma técnica apresentada, que corresponde a 1,50% do total.

Na coleção brasileira Br_C1, observamos uma grande limitação de praxeologias utilizadas. Ela apresenta apenas 4 das 7 praxeologias que correspondem a 57,14% do total destas. Com relação às técnicas, foram observadas 7 das 18 levantadas. Logo, temos assim apenas 38,89% das técnicas. O total de atividades levantadas foi de 51. Observamos que estas se concentram na praxeologia 1 com 62,75% das atividades. Uma concentração muito alta, considerando ainda o número reduzido de atividades (51) quando comparadas com a coleção francesa (133). Também observamos a concentração nas técnicas $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{md_{01}-1}}$ (com 12 atividades) e $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{md_{01}-2}}$ (com 4 atividades). O que diferencia estas técnicas é que a primeira com três vezes mais atividades é para situações nas quais o efetivo total é par e na segunda o efetivo total é ímpar. No primeiro livro da coleção francesa, temos uma distribuição equilibrada e no segundo um pouco maior na primeira. Estas características indicam que nas instituições temos a valorização de determinadas técnicas em detrimento à outra.

No gráfico 26, apresentamos uma ilustração da comparação das organizações praxeológicas sobre determinar a mediana na França e no Brasil, levando em conta os efetivos. Pode-se observar que o número de efetivos na França é bem maior do que no Brasil e que esta distribuição é mais equilibrada em relação às três praxeologias. Já no Brasil, a concentração é em apenas uma praxeologia.

Gráfico 26. Participação em número de efetivos das coleções analisadas.

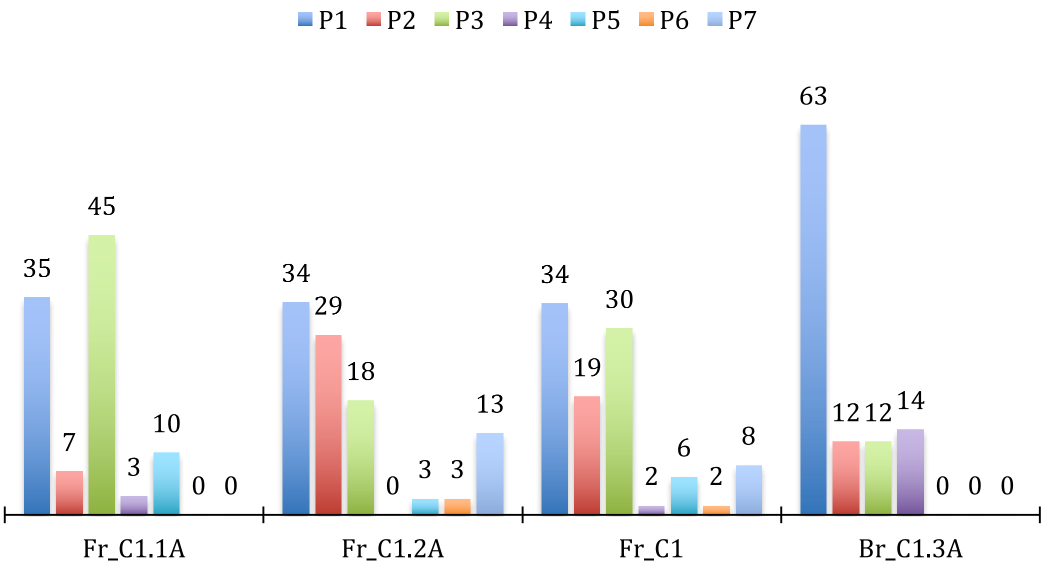


Fonte: elaborado pelo autor da tese.

No gráfico 27, procuramos levar em conta não a quantidade de efetivos, mas a distribuição em porcentagem do Brasil e da França. Fica mais nítido, no caso do Brasil, a concentração em apenas uma organização praxeológica. Observamos também que tanto no

Brasil como na França, existe o privilégio que algumas organizações praxeológicas têm em relação a outras.

Gráfico 27. Participação das praxeologias em porcentagem (os valores foram arredondados eliminando as decimais) nas coleções analisadas.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Apresentamos na tabela 68, a organização praxeológica que se forma em torno da tarefa "determinar uma série", sendo dado o número total de observações, a mediana, o Q1 e o Q3. Este tipo de atividade admite mais de uma resposta e pode-se observar pela manipulação dos dados que os valores extremos não influenciam estas medidas. Ela foi observada em apenas um livro e em uma atividade proposta.

Tabela 68. Resultado sobre a organização praxeológica que se forma em torno da tarefa determinar uma ou mais séries dada a mediana, o Q1 e o Q3.

Organ. Praxeológicas			Livros França					Livro Brasil	
		Fr_C1.1A		Fr_C1.2A		Total		Br_C1.3A	
Praxeologia	*N*	N	%	N	%	N	%	N	%
1	T_{md_08}	0	0,00	1	1,28	1	0,76	0	0,00
	τ_{md_08-1}	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
	τ_{md_08-2}	0	0,00	1	1,28	1	0,76	0	0,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Apresentamos a seguir a análise praxeológica sobre a organização pontual em torno de determinar a moda.

2.3.3. ANÁLISE PRAXEOLÓGICA PONTUAL SOBRE O TIPO DE TAREFA: DETERMINAR A MODA

Levantamos seis organizações praxeológicas pontuais sobre a moda. Destas, tivemos um total de onze técnicas das quais observamos nas coleções analisadas a utilização de nove que correspondem a 81,81% das levantadas. Não observamos na coleção brasileira ou francesa tecnologias e teorias sobre esta organização praxeológica pontual, indicando uma limitação destas organizações.

Observamos no livro do primeiro ano da França que foi selecionado (Fr-C1.1^{A}), uma limitação a três das seis organizações praxeológicas levantadas (tabela 69), ou seja, apenas 50,00% do total. Das nove técnicas utilizadas em alguns dos livros analisados, observamos a presença de quatro delas, que correspondem a 44,44 % do total das técnicas utilizadas em algumas destas coleções e apenas 36,36% do total das onze técnicas levantadas. No total, temos apenas doze tipos de tarefas ou técnicas levantadas. A moda é a organização praxeológica 3 com 83,33 %. As outras duas organizações levantadas apresentam apenas uma atividade em cada que corresponde a 8,33 % do total. Assim, observamos uma grande limitação neste livro em relação à moda. O livro do segundo ano do ensino médio da França (Fr_C1.2^{A}) não apresenta a moda. Logo, o total dos dois anos é apenas uma repetição do primeiro ano. Assim, consideramos que a moda apresenta grandes limites na coleção francesa, isto também reflete no programa francês. A moda não aparece no programa francês atual. No programa anterior, para o primeiro ano do ensino médio, tínhamos apenas a indicação do termo classe modal. Assim, o total dos dois volumes reflete e reproduz os dados do volume do primeiro ano.

Na coleção brasileira, temos uma participação bem maior do que na coleção francesa. Das seis organizações praxeológicas levantadas, temos atividades que envolvem todas estas no livro Br_C1.1^{A} que corresponde a 100% de utilização. Das nove técnicas utilizadas, observamos a utilização de seis que correspondem a 66,67%. Considerando as onze técnicas levantadas, esta participação se reduz a 54,45%. Isto indica uma limitação da coleção brasileira.

A moda é a organização praxeológica 1 com 40,70% do total. Em segundo lugar, temos a organização praxeológica 4 com 22,04%. A organização praxeológica 5 é a que apresenta a maior limitação na coleção brasileira, restringindo-se a apenas duas atividades, que correspondem a 1,69% do total.

Tabela 69 – Organizações praxeológicas pontuais sobre a moda.

Organ. Praxeológicas		Livros França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1[A]		Fr_C1.2[A]		Total		Br_C1.3[A]	
Praxeologia	N	N	%	N	%	N	%	N	%
1	T_{mo_01}	0	0	0	0	0	0	12	20,35
	τ_{mo_01-1}	0	0	0	0	0	0	12	20,35
	τ_{mo_01-2}	1	8,33	0	0	1	8,33	0	0,00
2	T_{mo_02}	0	0	0	0	0	0	4	6,78
	τ_{mo_02-1}	0	0	0	0	0	0	4	6,78
	τ_{mo_02-2}	1	8,33	0	0	1	8,33	0	0,00
3	T_{mo_03}	4	33,34	0	0	4	33,34	3	5,08
	τ_{mo_03-1}	5	41,67	0	0	5	41,67	3	5,08
	τ_{mo_03-2}	1	8,33	0	0	1	8,33	0	0,00
4	T_{mo_04}	0	0	0	0	0	0	6	10,17
	τ_{mo_04-1}	0	0	0	0	0	0	0	0
	τ_{mo_04-2}	0	0	0	0	0	0	7	11,87
5	T_{mo_05}	0	0	0	0	0	0	1	1,69
	τ_{mo_05}	0	0	0	0	0	0	1	1,69
6	T_{mo_06}	0	0	0	0	0	0	3	5,08
	τ_{mo_6-1}	0	0	0	0	0	0	0	0
	τ_{mo_06-2}	0	0	0	0	0	0	3	5,08
TOTAL		12	100,00	0	0	12	100,00	59	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Comparando as duas coleções, observamos limitações em ambas as coleções dos dois países em relação à moda. As organizações praxeológicas 4, 5 e 6 não aparecem na coleção francesa, o que pode ser uma limitação desta coleção. É possível que estas organizações estejam mais presentes nos livros do Brasil. A coleção brasileira é a que tem um melhor desempenho em relação à moda, apesar disso, ela concentra-se em algumas técnicas em detrimento de outras. Uma justificativa para esta limitação das coleções francesas está no programa. Enquanto que o programa atual da França não aborda a moda, no programa atual como no programa anterior no Brasil, a moda aparece como um tema.

2.3.4. ANÁLISE PRAXEOLÓGICA PONTUAL SOBRE O TIPO DE TAREFA: DETERMINAR A AMPLITUDE

Observamos no caso da amplitude que ela não está presente no programa brasileiro atual nem no anterior analisado. Isto se reflete no livro que não aborda esta medida de dispersão. No programa francês, a amplitude aparece apenas no programa do primeiro ano, anterior ao programa atual. Apesar disso, ela se mantém tanto no livro do primeiro ano na França como no livro do segundo ano. Isto indica que apesar do rigor do programa francês, ele deixa aberto a inclusão de elementos não previstos no programa, ampliando estes nos livros didáticos, o que faz com que a análise do programa seja insuficiente para indicar os temas que aparecem nesses manuais escolares.

Levantamos três organizações básicas sobre a amplitude. A terceira trata da amplitude quando temos dados agrupados, um tipo de atividade comum quando temos um volume grande de dados. Esta não foi observada em nenhum dos livros selecionados. Observamos também que o bloco tecnológico não é estudado, o que indica uma limitação nesta organização praxeológica nos livros didáticos.

No livro Fr_C1.1^{A} foram observadas duas das três praxeologias levantadas, o que corresponde a 66,67 % do total. Consideramos como uma limitação não considerar a amplitude em dados agrupados. Levantamos ao todo quatro técnicas neste livro, mas foram utilizadas apenas duas (tabela 70) que correspondem, neste caso, a 50%. Considerando que foram utilizadas apenas três técnicas nos dois livros, temos então 66,67 % de utilização nessa coleção..

No livro Fr_C1.2^{A} identificamos duas das três praxeologias apresentadas nesta tese, temos assim 66,67% do total. Tal como no livro do primeiro ano, este livro apresenta a limitação de não abordar a amplitude nos dados agrupados (praxeologia 3). Das quatro técnicas levantadas, esse manual apresenta três que correspondem a 75% de uso.

Considerando as duas coleções francesas, observamos uma utilização da amplitude em 45 atividades. Consideramos que para as praxeologias 1 e 2 não se configura como um problema. Contudo, a não utilização da praxeologia 3 é uma limitação, uma vez que o uso de dados agrupados em intervalos de classe é algo comum na estatística.

No Brasil, temos a ausência da amplitude, o que consideramos uma grande limitação nesta coleção. Ela é inclusive destacada no PNLD (BRASIL, 2011, P.37) "um dos conceitos considerados fundamentais na estatística é o de variabilidade e a medida mais simples para introduzir o conceito é a amplitude (diferença entre o valor máximo e o valor mínimo), raramente mencionada nas obras". Esta coleção é uma das selecionadas no PNLD. Logo, o comentário indica que esta limitação se estende às outras coleções no Brasil.

Tabela 70 – Organizações praxeológicas pontuais sobre a amplitude

Organ. praxeológicas		Livros França						Livro Brasil	
		$Fr\_C1.1^A$		$Fr\_C1.2^A$		Total		$Br\_C1.3^A$	
Praxeologia	N	%	N	%	N	%	N	%	%
1	T_{a_01}	3	20,00	5	16,67	8	17,78	0	0
	τ_{a_01-1}	3	20,00	4	13,33	7	15,56	0	0
	τ_{a_01-2}	0	0	1	3,34	1	2,22	0	0
2	T_{a_02}	4	26,67	10	33,33	14	31,11	0	0
	τ_{a_02}	5	33,33	10	33,33	15	33,33	0	0
3	T_{a_03}	0	0	0	0	0	0	0	0
	τ_{a_03}	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL		15	100,00	30	100,00	45	100,00	0	0

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

2.3.5. ANÁLISE PRAXEOLÓGICA PONTUAL SOBRE O TIPO DE TAREFA: DETERMINAR A VARIÂNCIA

Levantamos quatro organizações praxeológicas sobre a variância, com quatro tipos de tarefas e onze técnicas. No livro Fr_C1.1^{A} a variância não é abordada. Esta coleção concentra o seu estudo no livro do segundo ano.

No livro Fr_C1.2^{A}, a variância é abordada em todas as quatro organizações praxeológicas. Destas observamos a presença de três tipos de tarefas. A organização 4, limita-se a apresentar uma fórmula que indica a técnica utilizada e demonstra a fórmula que corresponde à tecnologia. Neste livro foram apresentadas oito técnicas das onze levantadas (tabela 71) que correspondem a 72,72%. Como o volume total é pequeno (23 atividades), as técnicas foram pouco exploradas. Na organização 4, limitou-se apresentar a fórmula. Não foi apresentada nenhuma técnica que envolvia esta atividade. A moda foi a técnica $\tau_{\sigma^2\_02-1}$, aparecendo em três atividades. Assim, em alguns casos, as praxeologias sobre "determinar a variância" não foram exploradas e na maioria foi pouco explorada na coleção francesa, apresentando assim limitações.

Na coleção brasileira, das quatro organizações praxeológicas levantadas, foram apresentadas três organizações que correspondem a 75% do total. Das onze técnicas levantadas, foram observadas apenas três que correspondem a 27,27 %, ou seja, um valor baixo. Observamos que concentrou-se as atividades em uma técnica com treze atividades. A segunda técnica mais utilizada se apresentava em três atividades e a terceira em duas. Assim, observamos limitações na organização praxeológica da coleção Br_C1.3^{A}.

Comparando a coleção francesa com a brasileira, na brasileira foram observadas mais atividades do que a francesa. Contudo, estas se concentraram em uma técnica e um tipo de tarefa. Por outro lado, a francesa apresentou uma maior variedades de técnicas utilizadas, mas pouco exploradas. Não observamos teorias e as tecnologias se resumiram a uma apresentada na coleção francesa. Assim, o bloco tecnológico apresenta um grande limitação.

Tabela 71 – Organizações praxeológicas em torno da variância

Organ. praxeológicas		Livros França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1[A]		Fr_C1.2[A]		Total		Br_C1.3[A]	
Praxeologia	N	N	%	N	%	N	%	%	%
1	$T_{\sigma^2\_01}$	0	0,00	3	13,64	3	13,64	11	35,48
	$\tau_{\sigma^2\_01-1}$	0	0,00	2	9,09	2	9,09	13	41,93
	$\tau_{\sigma^2\_01-2}$	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
	$\tau_{\sigma^2\_01-3}$	0	0,00	1	4,55	1	4,55	0	0,00
2	$T_{\sigma^2\_02}$	0	0,00	4	18,18	4	18,18	1	3,23
	$\tau_{\sigma^2\_02-1}$	0	0,00	2	9,09	2	9,09	3	9,68
	$\tau_{\sigma^2\_02-2}$	0	0,00	3	13,64	3	13,64	0	0,00
	$\tau_{\sigma^2\_02-3}$	0	0,00	1	4,55	1	4,55	0	0,00
3	$T_{\sigma^2\_03}$	0	0,00	2	9,09	2	9,09	1	3,23
	$\tau_{\sigma^2\_03-1}$	0	0,00	0	0,00	0	0,00	2	6,45
	$\tau_{\sigma^2\_03-2}$	0	0,00	1	4,55	1	4,55	0	0,00
	$\tau_{\sigma^2\_03-3}$	0	0,00	1	4,55	1	4,55	0	0,00
4	$T_{\sigma^2\_04}$	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
	$\tau_{\sigma^2\_04-1}$	0	0,00	1	4,55	1	4,55	0	0,00
	$\theta_{\sigma^2\_04-1}$	0	0,00	1	4,55	1	4,55	0	0,00
	$\tau_{\sigma^2\_04-2}$	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
TOTAL		0	0,00	22	100,00	22	100,00	31	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

2.3.6. ANÁLISE PRAXEOLÓGICA PONTUAL SOBRE O TIPO DE TAREFA: DETERMINAR O DESVIO PADRÃO

Levantamos sete organizações pontuais sobre o desvio padrão. Destas, temos quatro organizações praxeológicas sobre “determinar o desvio padrão”. As organizações praxeológicas 5 e 6 envolvem o desvio padrão. Contudo, não trata-se de determinar o desvio padrão. A organização praxeológica 7 envolve “determinar o desvio padrão” tendo por base as médias e o número de observações de duas séries. Ao tratar destas organizações praxeológicas, apresentamos com detalhes o seu emprego. O desvio padrão não é abordado pelo livro do primeiro ano na França, dessa forma, as organizações praxeológicas se limitam aos livros do segundo ano do ensino médio na França e do terceiro ano na coleção brasileira selecionada. No livro Fr_C1.2^{A} são abordadas seis organizações praxeológicas e um total de onze técnicas diferentes das quinze levantadas, que correspondem a 85,71% do total das organizações praxeológicas e 73,33 % do total dos tipos de técnicas. Enquanto que na coleção brasileira tivemos um total de três organizações pontuais e apenas três técnicas diferentes das 15, ou seja, 42,86% do total das organizações praxeológicas e apenas 20% do total das técnicas. Comparando as duas coleções, levando em conta as 7 organizações pontuais, a coleção francesa apresenta uma grande superioridade em termos de diversidade.

Considerando apenas as organizações pontuais que envolvem “determinar a média aritmética”, temos um total de 5 organizações pontuais e 13 técnicas. O livro da coleção francesa aborda 4 organizações pontuais e um total de 9 técnicas, que correspondem a 80% das organizações pontuais e 69,23% das técnicas (tabela 72). Já o livro da coleção brasileira, aborda 3 organizações pontuais e um total de 3 técnicas diferentes, que correspondem a 60% do total das organizações pontuais e apenas 23,08 técnicas (tabela 72).

Levando em consideração o total de tipos de tarefas ou técnicas de cada organização, na coleção francesa observamos um total de 127 contra 49 . Nesse aspecto, a coleção francesa também apresenta uma superioridade.

Tabela 72 – Organizações praxeológicas pontuais em torno do desvio padrão.

Organ. praxeológicas		Livros França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1A		Fr_C1.2A		Total		Br_C1.3A	
Praxeologia	N	N	%	N	%	N	%	N	%
1	T_{σ_01}	0	0,00	36	28,35	36	28,35	17	34,69
	τ_{σ_01-1}	0	0,00	2	1,57	2	1,57	19	38,78
	τ_{σ_01-2}	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
	τ_{σ_01-3}	0	0,00	18	14,17	18	14,17	0	0,00
	τ_{σ_01-4}	0	0,00	16	12,60	16	12,60	0	0,00
2	T_{σ_02}	0	0,00	17	13,39	17	13,39	4	8,17
	τ_{σ_02-1}	0	0,00	2	1,57	2	1,57	5	10,20
	τ_{σ_02-2}	0	0,00	5	3,94	5	3,94	0	0,00
	τ_{σ_02-3}	0	0,00	11	8,66	11	8,66	0	0,00
3	T_{σ_03}	0	0,00	5	3,94	5	3,94	2	4,08
	τ_{σ_03-1}	0	0,00	0	0,00	0	0,00	2	4,08
	τ_{σ_03-2}	0	0,00	2	1,57	2	1,57	0	0,00
	τ_{σ_03-3}	0	0,00	3	2,36	3	2,36	0	0,00
4	T_{σ_04}	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
	τ_{σ_04-1}	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
	τ_{σ_04-2}	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
5	T_{σ_05}	0	0,00	3	2,36	3	2,36	0	0,00
	τ_{σ_05-1}	0	0,00	3	2,36	3	2,36	0	0,00
6	T_{σ_06}	0	0,00	1	0,79	1	0,79	0	0,00
	τ_{σ_06-1}	0	0,00	1	0,79	1	0,79	0	0,00
7	T_{σ_07}	0	0,00	1	0,79	1	0,79	0	0,00
	τ_{σ_07-1}	0	0,00	1	0,79	1	0,79	0	0,00
TOTAL		0	0,00	127	100,00	127	100,00	49	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

As limitações destas coleções se ampliam se consideramos que muitas das organizações são vistas de forma superficial, concentrando-se em algumas organizações e técnicas. Na coleção francesa observamos uma concentração na organização praxeológica 1, sendo utilizadas como maior frequência duas técnicas. Em seguida, temos a organização praxeológica 2, também com o predomínio de uma técnica. Na coleção brasileira, observamos também esta concentração na organização praxeológica 1. Nesta, pode-se observar na tabela 72 que limita-se ao uso de uma técnica. Em segundo lugar, temos a organização praxeológica 2, na coleção brasileira. Observamos que neste caso, também há limitação a apenas uma técnica. As técnicas de maior utilização não são as mesmas quando comparamos o livro brasileiro com o livro francês.

Observamos também a não apresentação dos elementos tecnológicos, tanto na coleção brasileira como na francesa.

Como base nesta apresentação, observamos que ambas as coleções apresentam limitações, deixando-se de explorar técnicas e organizações praxeológicas, como também o bloco tecnológico. Observamos que as limitações na coleção brasileira foram maior do que na coleção francesa.

2.3.7. ANÁLISE PRAXEOLÓGICA PONTUAL SOBRE O TIPO DE TAREFA "DETERMINAR O INTERVALO INTERQUARTIL".

Levantamos quatro organizações praxeológicas pontuais sobre "determinar o intervalo interquartil". Na coleção brasileira não foi observado esse tipo de organização praxeológica, não sendo este tema abordado na coleção analisada. Na coleção Fr_C1.1^{A} foi observada apenas a apresentação de uma técnica (tabela 73) sem ser aplicada a mesma em nenhuma questão proposta ou resolvida. Na coleção Fr_C1.2^{A} foram observadas as 4 organizações praxeológicas propostas e todas as técnicas propostas. Assim, nesse aspecto, esta coleção teve um bom desempenho. Por outro lado, neste livro, as atividades são concentradas na praxeologica 1 com 76,11% das atividades, sendo seguidas pela praxeologia 2. As praxeologias 3 e 4 apresentam uma exploração superficial e é a segunda técnica utilizada na praxeologia 1.

O que podemos observar em relação a estas praxologias são problemas com a coleção brasileira que não a exploram, sendo ela muito importante para ser usada junto com a mediana. E na coleção francesa temos uma apresentação concentrada em metade das organizações praxeológicas.

Tabela 73 – Organizações praxeológicas pontuais em torno do intervalo interquartil.

Organ. Praxeológicas		Livros França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1[A]		Fr_C1.2[A]		Total		Br_C1.3[A]	
Praxeol.	N	%	N	%	N	%	N	%	%
1	$T_{[Q1;Q3]\_01}$	0	0,00	25	37,88	25	37,31	0	0,00
	$\tau_{[Q1;Q3]\_01-1}$	1	100,00	24	36,36	25	37,31	0	0,00
	$\tau_{[[Q1;Q3]\_01-2}$	0	0,00	1	1,52	1	1,49	0	0,00
2	$T_{[Q1;Q3]\_02}$	0	0,00	6	9,09	6	8,96	0	0,00
	$\tau_{[Q1;Q3]\_02}$	0	0,00	6	9,09	6	8,96	0	0,00
3	$T_{[Q1;Q3]\_03}$	0	0,00	1	1,52	1	1,49	0	0,00
	$\tau_{[Q1;Q3]\_03}$	0	0,00	1	1,52	1	1,49	0	0,00
4	$T_{[Q1;Q3]\_04}$	0	0,00	1	1,52	1	1,49	0	0,00
	$\tau_{[Q1;Q3]\_04}$	0	0,00	1	1,52	1	1,49	0	0,00
TOTAL		1	100,00	66	100,00	67	100,00	0	0,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Outra praxeologia que levantamos foi determinar o desvio quartil ou amplitude semi-interquartil. Apresentamos um tipo de tarefa e uma técnica. Não observamos em nenhuma coleção o emprego desta organização praxeológica.

As análises apresentadas nesta seção indicam deficiências/ausências nas organizações praxeológicas levantadas.

Além das praxeologias, consideramos pertinente analisar outros elementos que envolvem as situações propostas nos livros didáticos.

2.4. ANÁLISE DAS SITUAÇÕES PRESENTES NOS CAPÍTULOS QUE ABORDAM AS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO

Como tratamos em outros capítulos, as situações de ensino das medidas de tendência central e de dispersão podem ser tanto dentro da escola como fora dela. Nestas situações, podem estar presente no livro didático. Nas situações nas quais temos o livro didático, podemos ter uma situação na qual o professor faz a leitura do livro para os alunos ou demanda que o mesmo leia. Logo, o aluno também pode achar conveniente fazer uma leitura desse manual escolar. Temos também situações que envolvem a observação de questões resolvidas ou a realização destas. Assim, dentro das limitações que envolvem a análise do livro, organizamos as situações propostas pelos autores tais como: a leitura de um texto; a observação de uma atividade resolvida; uma atividade proposta; a observação de uma demonstração apresentada; uma solicitação de uma demonstração ou uma justificativa.

Apresentamos a seguir uma descrição de cada um destes itens das situações organizadas para análise.

2.4.1. LEITURA DE UM TEXTO

Na metodologia, apresentamos algumas situações que utilizamos na análise do texto. Apresentamos na tabela 74, os resultados obtidos. Destacamos que algumas destas não foram observadas nos textos, foram elas:

- Demonstração de propriedades ou observações;
- Comparação de qual medida de tendência central é a mais adequada em função das situações de uso;
- Apresentação de uma distinção de que variáveis podem ser utilizadas com as MTCD.

Assim das onze situações na leitura de um texto levantadas, foram observadas oito situações que correspondem a 72,72%. Na coleção Br_C1, tivemos seis situações de uso utilizadas que correspondem a 54,55% das situações levantadas. Na coleção Fr_C1, observamos sete situações de uso, sendo desta forma 63,64% do total. Assim, em ambas as coleções temos um número de atividades inferiores às previstas. Logo, sendo na coleção brasileira este número menor do que na francesa.

Tabela 74 – Situações de leitura de um texto

Assunto	Livros França						Livro Brasil	
	Fr_C1.1^A		Fr_C1.2^A		Total		Br_C1.3^A	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Definição e/ou descrição	2	11,11	1	4,17	3	7,50	3	5,45
Definição apoiada no algoritmo	4	22,22	3	12,50	7	17,50	19	34,55
Apresentação de propriedades e observações	4	22,22	9	37,50	13	32,50	11	20,00
Demonstração de propriedades e observações	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Apresentação de fórmula	2	11,11	5	20,83	5	12,50	17	30,91
Demonstrar fórmula	1	5,56	1	4,17	2	5,00	0	0,00
Aplicações de fórmula	0	0,00	0	0,00	0	0,00	2	3,64
Como usar calc./soft.	5	27,78	4	16,67	9	22,50	0	0,00
Contextos	0	0,00	1	4,17	1	2,50	3	5,45
Emprego em função das situações de uso	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Que variáveis podem ser usadas	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
TOTAL	18	100,00	24	100,00	40	100,00	55	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Considerando não a variedade, mas a quantidade de situações de leitura, observamos uma maior quantidade de situações de leitura de um texto no livro do Brasil do que no livro da França. Apesar de um maior número de páginas da coleção francesa, observamos que a coleção brasileira que adota uma postura mais tradicional, reserva mais atividades relacionadas à leitura de texto. São 55 atividades de leitura de texto no livro da coleção brasileira contra 40 atividades nos dois livros da coleção francesa. Um número bem mais elevado na coleção brasileira. Poderíamos pensar que isto se deve à postura mais tradicional da coleção brasileira que apresenta as definições, as questões resolvidas e depois as questões propostas que se apoiam no texto e nas questões resolvidas.

A coleção francesa, por outro lado, valoriza mais a aprendizagem através da resolução de questões propostas. Antes mesmo de apresentar um texto que trate das MTCD, ela já propõe questões iniciais para avaliar os conhecimentos anteriores e questões que são propostas para mobilizar os esquemas dos alunos. Consideramos importante esta forma de apresentação. Contudo, a quantidade de texto reduzida, como se fosse algo indesejado ter muito texto em uma concepção que privilegie a aprendizagem em matemática, não pode ser considerada como algo positivo ou negativo em uma coleção. Uma vez que um texto pode ser usado para levar a reflexões e inferências sobre o conceito em matemática, e mais particularmente ao abordar dentro da estatística descritiva as MTCD. Tudo depende da forma como o texto é apresentado. Assim, não consideramos que a quantidade de texto seja um item positivo ou negativo, depende da forma como ele é proposto para ser usado no livro didático.

A moda do livro brasileiro é a definição apoiada no algoritmo. As fórmulas e as atividades propostas poderiam conduzir o aluno não apenas compreender o algoritmo, como também ir além ampliando o conceito. Consideramos que se restringir apenas à definição na construção do conceito, pode limitar-se a construção deste. Por exemplo, considerar que a média é apenas a soma das observações dividida pelo total de observações é uma visão restrita do que seja média. E considerar que este deve ser o conhecimento que o aluno deve ter, ainda mais limitado na construção de um conceito. Por outro lado, ao olhar para uma fórmula, pode-se pensar que cada elemento acrescentado pode alterar a média e pode ser considerado um peso. Podemos observar outros elementos e propriedades ao olhar para a fórmula da média, mas para isso é necessário que se criem situações que propiciem o desenvolvimento do conceito.

Na coleção francesa, a moda é a apresentação de propriedades e algoritmos. Consideramos que algumas propriedades podem ser deduzidas das situações propostas. Contudo, acreditamos que algumas observações podem ser incluídas para que o aluno se atenha a determinados aspectos do tema. Algumas propriedades podem ser descritas, mas precisam ser exploradas e aprofundadas nas atividades propostas para a compreensão da mesma. Não observamos no texto de nenhuma das duas coleções analisadas, a demonstração das propriedades ou observações. Consideramos muito importante que estas propriedades e observações devam ser exploradas nas questões propostas. Contudo, algumas demonstrações mais complexas poderiam ser indicadas no texto.

A segunda situação de leitura mais observada na coleção brasileira foi a apresentação de fórmulas, que são indicadas no início de cada tema e no resumo do capítulo. Ao contrário disso, a coleção francesa não apresenta muitas fórmulas (12,5% do total contra 30,91% da coleção brasileira). Outro aspecto em relação à fórmula é a sua aplicação. Na coleção brasileira, observamos a explanação sobre a aplicação da fórmula no texto. A coleção francesa analisada não apresenta este tipo de situação. Apesar disso, ela apresenta a demonstração de fórmulas. Esta demonstração é importante, uma vez que através dela pode-se compreender como pode entender melhor a origem de uma fórmula. Observamos no livro francês, a partir de uma fórmula, como se chega a uma outra. Isto pode ser importante na percepção da relação entre as fórmulas e como os conceitos estão relacionados.

Na coleção francesa, a segunda situação mais apresentada nos textos foi como usar calculadora e softwares. Estas informações foram importantes para o uso dos recursos tecnológicos utilizados. Estes podem servir como instrumentos na construção do conceito dependendo da forma como eles foram explorados nas situações resolvidas e propostas. Assim, consideramos importante a apresentação no texto de como utilizar estas ferramentas, tendo em vista o seu potencial na construção do conceito.

Outro aspecto levantado são as situações de uso. Pode-se levantar o seguinte questionamento: em que situações são mais recomendadas/ou aplicáveis determinada medida de tendência central e de dispersão? Ao tratarmos das medidas de tendência central, no capítulo 2 da primeira parte desta tese, abordamos algumas situações de uso da média, mediana e moda, em função do tipo de variável, da forma de distribuição dos dados e dos objetivos de uso. Por exemplo, ao comparar os salários dos funcionários de uma empresa, para assessoria de comunicação dessa empresa, pode ser mais interessante falar da média aritmética para o sindicato dos trabalhadores poder melhor divulgar a moda. Para um pesquisador, pode ser mais interessante utilizar a mediana, sobretudo se tivermos grandes diferenças salariais. Este tipo de questionamento e debate poderia ser trazido em um texto que aborda estas medidas. Contudo, não observamos em nenhuma das coleções levantadas, um texto que tratasse sobre esta variável.

Outro aspecto importante são as variáveis empregadas. Que tipos de variáveis são exploradas? Que tipos de medidas podem ser usadas com estas variáveis? Não observamos nos textos qualquer menção a este aspecto.

Além das ausências, observamos que alguns itens foram pouco explorados, tais como: o contexto, a definição e/ou descrição e a demonstração de fórmulas.

Observamos tanto na coleção brasileira como na francesa limitações na forma de apresentar o texto.

Na próxima seção, vamos explorar as atividades resolvidas e propostas, um elemento importante na construção do conceito e da observação das praxeologias.

2.4.2. ATIVIDADES RESOLVIDAS E PROPOSTAS

No item "atividade", agrupamos estas em atividades propostas e resolvidas. Em cada uma delas criamos diversas categorias. Nas atividades resolvidas, observamos tanto na coleção brasileira como na francesa que a maioria se limita a determinar estas medidas (tabela 75). Chamamos de "determinar" qualquer atividade que demanda obter uma medida, por exemplo: dada a tabela A, calcule a média. Considerando uma perspectiva mais tradicional que se faz necessário resolver uma questão para depois os estudantes resolverem questões similares, observamos no livro Br_C1.3^{A} um maior número de questões resolvidas que envolvem determinar uma medida. Este tipo de atividade envolve 93,75% das atividades resolvidas. Na coleção francesa, temos um número total de questões resolvidas menor quando comparado com a coleção brasileira. São 27 nos dois livros contra 32 em um único livro. O percentual das atividades resolvidas do tipo "determinar" também é menor, com 60,00 % no livro Fr_C1.1^{A}, 77,27 % no livro Fr_C1.2^{A} e 74,07% nos dois livros juntos. Observamos apenas uma atividade resolvida que envolve comparação das medidas no livro Fr_C1.2^{A} e nenhuma atividade na coleção Br_C1. Assim, o número de atividades de comparação é muito reduzido em uma coleção e ausente em outra. Observamos na coleção francesa "outras atividades resolvidas" que não se incluem nas categorias levantadas em maior número do que na coleção brasileira. Consideramos em termos de atividade resolvida, que a maioria nas duas coleções se restringe a determinar a medida, sendo mais forte esta diferença na coleção brasileira.

Tabela 75 – Atividades resolvidas nos livros didáticos.

Assunto	Livros França						Livro Brasil	
	Fr_C1.1^{A}		Fr_C1.2^{A}		Total		Br_C1.3^{A}	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Determinar	3	60,00	17	77,27	20	74,07	30	93,75
Comparar	0	0,00	1	4,55	1	3,70	0	0
Aplicar propriedade/obs.	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Induzir a demonstração da fórmula	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Solicitar a demonstração da fórmula	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Outras	2	40,00	4	18,18	6	22,22	2	6,25
TOTAL	5	100,00	22	100,00	27	100,00	32	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

O total de atividades resolvidas e propostas (tabela 76) da coleção francesa (375 atividades) é bem superior à brasileira (168 atividades). Apesar da coleção brasileira possuir um número total inferior de atividades, se considerarmos apenas as atividades resolvidas, a coleção brasileira possui mais atividades resolvidas (32) sobre as medidas de tendência central e de dispersão do que a coleção francesa (27). Somando as atividades resolvidas e propostas, na coleção Br_C1, a participação das atividades resolvidas é de 19,05%. Já na coleção Fr_C1 temos uma participação bem menor das atividades resolvidas com 7,20% quando comparamos com as atividades propostas. Dos dois livros da coleção Fr_C1, temos a menor participação das atividades resolvidas no livro Fr_C1.1^{A} com 6,41%. Essa diferença entre a coleção brasileira e a francesa se deve pela proposta da coleção Br_C1 ser mais tradicional, que considera a necessidade de apresentar após a descrição do tema, a apresentação de questões resolvidas que servirão de base para resolver as questões propostas.

Tabela 76. Comparando o total de atividades resolvidas e propostas nas duas coleções selecionadas.

Total	Livros da França						Livro Brasil	
	$Fr\_C1.1^A$		$Fr\_C1.2^A$		Total		$Br\_C1.3^A$	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Atividades Resolvidas	5	6,41	22	7,41	27	7,20	32	19,05
Atividades Propostas	73	93,59	275	92,59	348	92,80	136	80,95
Total	78	100,00	297	100,00	375	100,00	168	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Na tabela 77, apresentamos as atividades propostas nas duas coleções analisadas. Observamos no que diz respeito às questões propostas, tanto na coleção brasileira como na francesa, que as atividades com maior participação são as que envolvem "determinar" uma medida, sendo proprorcionalmente maior a participação na coleção brasileira (80,88%) quando comparada com a coleção francesa (67,82%). Quando comparamos os livros isolados, o livro $Fr\_C1.1^A$ com 80,82% tem uma participação próxima ao do Brasil $Br\_C1.3^A$ com 80,88%. A diferença maior é a coleção $Fr\_C1.2^A$ que apresenta uma proposta no conjunto melhor do que a $Fr\_C1.1^A$ e $Br\_C1.3^A$. As atividades de "comparar", muito importantes na construção do conceito e utilização das medidas de tendência central e de dispersão, como ferramentas para "olhar para o mundo" apresentam um percentual maior de participação no livro $Fr\_C1.2^A$. Apesar deste número maior, considero que a participação deste tipo de atividade poderia ser em maior número, como também as atividades que envolvem aplicar observações e propriedades (que também apresentam uma maior participação neste livro). Atividades que induzem ou solicitam a demonstração, se apresentam com um número reduzido, limitando-se a um livro ($Fr\_C1.2^A$). Com relação a outras atividades, observamos que o livro $Fr\_C1.2^A$ também apresenta um maior número do que os outros livros. Assim, considerando o conjunto, apesar das limitações das duas coleções analisadas, a coleção francesa possui considerando estes critérios tendo uma apresentação mais diversificada. Na coleção francesa, o livro Fr_C1.2 é bem superior ao livro Fr_C1.1, assim como o livro da coleção brasileira, tanto quantitativamente como em distribuição das atividades resolvidas.

Tabela 77 – Atividades propostas nos livros didáticos.

Assunto	Livros da França						Livro Brasil	
	Fr_C1.1[A]		Fr_C1.2[A]		Total		Br_C1.3[A]	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Determinar	59	80,82	177	64,36	236	67,82	110	80,88
Comparar	7	9,59	37	13,45	44	12,64	4	2,94
Aplicar propriedade/obs.	0	0,00	11	4,00	11	3,16	1	0,74
Induzir a demonstração da fórmula	0	0,00	1	0,36	1	0,29	0	0,00
Solicitar a demonstração da fórmula	0	0,00	2	0,73	2	0,57	0	0,00
Outra	7	9,59	47	17,09	54	15,52	21	15,44
TOTAL	73	100,00	275	100,00	348	100,00	136	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Outro aspecto que iremos tratar no próximo item é a utilização nas atividades propostas/resolvidas das medidas de tendência central e de dispersão na comparação de um ou mais conjuntos de dados.

2.4.2.1. Comparação de um ou mais conjuntos de dados

As medidas de tendência central e de dispersão têm a função de resumir um conjunto de dados de uma série e a partir deste resumo podermos pensar sobre esta série e fazer inferências. Este pensar, significa comparar com outras informações que temos sobre o assunto. Quando falamos do salário médio de uma empresa, podemos comparar com o nosso salário. Dessa forma, a comparação ocorre mesmo quando não estamos comparando duas séries. Para comparar duas séries, devemos levar em conta tanto as medidas de tendência central como as de dispersão. Assim, estas medidas fornecem informações para comparação e podemos utilizar uma ou mais destas medidas para comparar. Estas medidas funcionam como instrumentos de comparação e formas de olhar os dados e o mundo representado através destes dados. Ao comparar estas séries, podemos comparar dados do presente, do passado ou do futuro (projeções). Podemos na comparação, utilizar a mesma série, duas séries ou mais séries. Dessa forma, levamos em consideração três tipos de comparação:

- Número de séries utilizadas na comparação;
- Comparação estática e dinâmica de séries;
- Levando em consideração as ferramentas utilizadas, as medidas de tendência central e/ou dispersão utilizadas;

Trataremos nas próximas subseções desta parte, destes elementos de análise.

2.4.2.1.1. Número de séries utilizadas na comparação

Procuramos levantar também se, ao comparar, estava-se comparando apenas medidas sobre a mesma série, por exemplo, a mediana com a média de uma série ou se estávamos comparando duas ou mais séries. No caso de duas ou mais séries, temos um maior número de dados comparados quando se consideram as mesmas médias. Tomemos como exemplo, comparar a média e a mediana de uma mesma série, teremos a comparação de duas medidas. Quando comparamos estas medidas de três séries, temos um maior número de combinações possíveis, tanto considerando a mesma medida (média com média) como de medidas diferentes, (média com mediana) ao mesmo tempo que temos uma maior riqueza na análise como mais elementos envolvidos, que se bem explorado pelo livro pode ser importante na construção do conceito das MTCD.

A comparação poderia ser apenas entre medidas de tendência central (MTC), entre medidas de dispersão (MD) e entre medidas de tendência central e de dispersão (MTCD).

Na tabela 78, apresentamos os resultados da comparação das séries, considerando as atividades resolvidas e propostas. A coleção brasileira apresenta grandes deficiências com apenas quatro situações de comparação, sendo a moda as situações de comparação de duas séries. Já na coleção francesa, temos a moda com mais de três séries no total dos livros da coleção francesa. Assim, estas apresentam situações possivelmente mais ricas. Outro elemento de diferenciação é a quantidade de comparações. Enquanto que na coleção brasileira temos apenas 4, na coleção francesa temos 44 situações de comparação. Comparando os dois livros da coleção francesa percebe-se a nítida superioridade, considerando este critério, do livro Fr_C1.2^{A}.

Tabela 78 – Comparação das séries

Comparação	Livros da França						Livro Brasil	
	Fr_C1.1^{A}		Fr_C1.2^{A}		Total		Br_C1.3^{A}	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Na mesma série	2	28,57	0	0,00	2	4,55	1	25,00
2 séries	5	71,43	14	37,84	19	43,18	2	50,00
3 séries	0	0,00	2	5,41	2	4,55	0	0,00
Mais de 3 séries	0	0,00	21	56,76	21	47,73	1	25,00
TOTAL	7	100,00	37	100,00	44	100,00	4	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Além do número de séries utilizadas na comparação, consideramos importante levantar as situações de comparação (estática/dinâmica) definidas na parte 2 desta tese.

2.4.2.1.2. Situações de comparação estática e dinâmica de séries nos livros didáticos selecionados

Na tabela 79, apresentamos as situações de comparação. Na coleção brasileira, observamos apenas quatro situações de comparação. Desta, duas foram apenas com números. Uma foi para comparar os dados de uma série temporal. A outra foi de comparação de duas amostras do passado. O número observado na coleção brasileira foi bastante reduzido, não apresentando nenhuma comparação dinâmica. Na coleção francesa, a maioria das situações está na coleção Fr_C1.2^{A}, se consideramos o total das situações. Contudo, considerando as situações de comparação temporais de duas séries que é tratado neste item. Ambos os livros apresentam o mesmo total, são sete situações de comparação em cada coleção. Apesar disso, o livro Fr_C1.2^{A} apresenta os dados mais distribuídos em duas situações estáticas e uma situação dinâmica, considerando que foram levantadas 4 situações estatísticas 3 três dinâmicas, temos apenas 50% situações estáticas previstas e 33,33 % das situações dinâmicas. Já o livro Fr_C1.1^{A} se limita a duas situações estáticas (50% da situações estatísticas previstas e 28,57% do total das situações estáticas e dinâmicas. Considerando que a estatística, e dentro desta, as medidas de tendência central e de dispersão têm a função de comparar dados, tanto de forma dinâmica como estatíca, ambas as coleções analisadas apresentam grandes deficiências neste elemento de análise, sendo que na coleção brasileira estas são mais fortes. Nesta, temos uma ausência de situações de comparação dinâmica e apenas dois casos de comparação estática. Consideramos o contexto algo muito importante, e a utilização da estatística se faz em determinados contextos. Através dos contextos pode-se fazer uma análise apropriada das medidas de tendência central e de dispersão e as implicações obtidas com base nas séries analisadas e sua utilização na tomada de decisões.

Tabela 79 – Comparação de duas séries nos livros selecionados.

Comparação	Livros França						Livro Brasil	
	Fr_C1.1A		Fr_C1.2A		Total		Br_C1.3A	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Estática								
Com os mesmos dados	2	28,57	0	0,00	2	4,55	1	25,00
Passado com passado	0	0,00	3	8,11	3	6,82	1	25,00
Presente com presente	5	71,43	2	5,41	7	15,91	0	0,00
Futuro com futuro	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Dinâmica								
Passado com presente	0	0,00	2	5,41	2	4,55	0	0,00
Passado com futuro	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Presente com futuro	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Sem data	0	0,00	30	81,08	30	68,18	2	50,00
TOTAL	7	100,00	37	100,00	44	100,00	4	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Na próxima seção, trataremos do segundo item de comparação que analisa a utilização das medidas de tendência central e de dispersão como ferramenta de comparação.

2.4.2.1.3. Comparação de séries utilizando as medidas de tendência central e/ou dispersão

Para análise desta parte, procuramos observar três tipos de comparação de séries:

- Comparação utilizando as medidas de tendência central;
- Comparação utilizando as medidas de dispersão;
- Comparação utilizando as medidas de tendência central e de dispersão.

Trataremos a seguir de cada uma destas ferramentas de comparação.

2.4.2.1.3.1. Comparação de séries utilizando as medidas de tendência central

Na tabela 80, apresentamos o levantamento das situações de comparação utilizando as medidas de tendência central. Podemos utilizar a média para comparar os dados de duas ou mais séries. A coleção brasileira não apresenta comparação da média com média de duas ou mais séries, indicando assim uma deficiência. A coleção apresenta 14 situações de comparação, contudo 12 no livro do segundo ano e apenas 2 no livro do primeiro ano. Assim, neste aspecto o livro do primeiro ano da França apresenta limitações, como indicada na tabela 80.

Podemos utilizar também a mediana para comparar duas ou mais séries. Existem casos em que esta medida é mais adequada do que a média, como por exemplo, quando temos uma grande dispersão dos dados, como o salário dos funcionários de uma fábrica. Quando temos variáveis qualitativas ordinais podemos usar a mediana ou a moda, mas não podemos utilizar a média. Apesar destas situações e a importância desta medida na comparação, não observamos em nenhuma das coleções analisadas este tipo de comparação, o que se apresenta como uma deficiência destas coleções.

Outra medida também importante é a moda. Existem situações em que apenas podemos utilizar a moda, como quando tratamos de variáveis qualitativas nominais. São diversas as situações em que podemos explorar este tipo de variável. Por exemplo, em uma pesquisa sobre marcas pode-se tentar levantar qual é a marca mais citada pelos consumidores. Teremos neste caso, apenas a moda como medida de tendência central que se pode utilizar.

Não observamos nenhum caso de comparação em nenhuma coleção analisada envolvendo a moda.

Outra forma de comparar é utilizando duas medidas de tendência central diferente, como média com mediana. Das situações levantadas, apenas foram observadas tanto na coleção brasileira como na francesa, a comparação utilizando a média e a mediana de duas ou mais séries e com poucos casos (4 na coleção francesa e 1 na coleção brasileira).

Assim, considerando a comparação utilizando uma ou mais medidas de tendência central, observamos deficiências tanto na coleção brasileira como na francesa, sendo mais acentuada na coleção brasileira (1 situação contra 18 na coleção francesa). Comparando os livros Fr_C1.1[A] e Fr_C1.2[A], a deficiência nitidamente maior é no livro do primeiro ano (com 4 situações contra 14 no livro do segundo ano).

Tabela 80 – Comparação utilizando uma ou mais medidas de tendência central.

Comparação	Livros França						Livro Brasil	
	Fr_C1.1[A]		Fr_C1.2[A]		Total		Br_C1.3[A]	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Média com Média	2	50,00	12	85,71	14	77,78	0	0,00
Mediana com mediana	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Moda com moda	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Média com mediana	2	50,00	2	14,29	4	22,22	1	100,00
Média com moda	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Mediana com moda	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Média com mediana e moda	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
TOTAL	4	100,00	14	100,00	18	100,00	1	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Trataremos a seguir do segundo caso de comparação.

2.4.2.1.3.2. Comparação de séries utilizando as medidas de dispersão.

As medidas de dispersão nos dão informações importantes de como os dados estão dispersos. Algumas medidas de dispersão como o coeficiente de variação não foram observados nas coleções analisadas, o que consideramos como uma deficiências destas. Dessa maneira, elas não entraram nas situações de comparações. A amplitude, apesar de abordada na coleção francesa, não aparece (tabela 81). Esta medida nos da uma ideia de como todos os dados estão dispersos. O salário médio dos funcionários de duas empresas podem ser os mesmos. Contudo, se uma empresa possui uma amplitude de R$ 5.000,00 e a outra de R$ 100.000,00, temos uma informação fundamental que diferencia em muito estas duas empresas. Assim, consideramos que a amplitude deveria ter sido explorada. A maioria dos casos da coleção francesa se refere as situações de comparação que envolvem o desvio padrão (tabela 81), com 12 situações de comparação nas atividades propostas pelo livro Fr_C1.2^{A}. O desvio interquartil foi pouco explorado. E as demais situações não foram exploradas. No livro brasileiro, tivemos apenas 4 situações de comparação que envolviam a variância e o desvio padrão. Com base nestes resultados, observamos limitações nas duas coleções, sendo mais acentuadas estas na coleção brasileira.

Tabela 81 – Comparação utilizando as medidas de dispersão.

Comparação	Livros França						Livro Brasil	
	Fr_C1.1[A]		Fr_C1.2[A]		Total		Br_C1.3[A]	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Amplitude com amplitude	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Variância com variância	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Desvio padrão com desvio padrão	0	0,00	12	92,31	12	92,31	0	0,00
Variância e desvio padrão com variância e desvio padrão	0	0,00	0	0,00	0	0,00	2	100,00
Desvio interquartil com desvio interquartil	0	0,00	1	7,69	1	7,69	0	0,00
TOTAL	0	0,00	13	100,00	13	100,00	2	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Tratamos a seguir das situações de comparação que envolvem as medidas de tendência central e de dispersão.

2.4.2.1.3.3. Comparação de séries utilizando as medidas de tendência central e de dispersão

No programa francês atual para o segundo ano do ensino médio da série científica, temos como uma das capacidades esperadas “utilizar de modo apropriado as duas duplas usuais que permitem resumir uma série: (média de desvio padrão) e (mediana, desvio interquartil)” (FRANCE, 2010a, p. 5, tradução nossa). Consideramos assim necessário, três situações de comparações como fundamentais:

- Comparar a média com o desvio padrão;
- Comparar a mediana com o desvio interquartil;

Comparar as duas duplas: média com desvio padrão e mediana com desvio interquartil, como forma de se perceber quando é mais adequada utilizar uma dupla do que a outra.

No primeiro caso da média com o desvio padrão, levantamos cinco dos casos de situações de comparação de duas ou mais séries que utilizavam como ferramenta a média com o desvio padrão (tabela 82), no livro Fr_C1.1^{A}, o que corresponde a 50% dos casos.

No segundo caso, não observamos apenas a média com o desvio interquartil, mas observamos a média com o desvio interquartil e a amplitude em apenas duas atividades, ou seja, em 20 %. No terceiro caso, também não encontramos apenas a comparação das duas duplas, mas encontramos comparações das duas duplas junto com a amplitude no livro Fr_C1.2^{A} com apenas uma atividade (10%). Identificamos outros casos tais como: média com amplitude, uma atividade (33,33 %) no livro Fr_C1.1^{A}; média com mediana e amplitude, um caso (33,33%) no livro Fr_C1.1^{A} e um caso (10%) no livro Fr_C1.2^{A}; média com desvio padrão e mediana em um caso (10%) no livro Fr_C1.2^{A}; média com mediana e amplitude em um caso (33,33%) no livro Fr_C1.1^{A}. No livro Br_C1.3^{A}, observamos apenas um caso da média com a variância e desvio padrão.

Outra situação de comparação como envolvendo o coeficiente de variação e a média não foram observados.

Estes resultados indicam que apesar da importância deste tipo de comparação para compreensão do conceito destas medidas "para olhar o mundo" e fazer comparações entre observações que norteiam a tomada de decisões e da indicação das mesmas no programa francês atual, estas foram pouco exploradas nos livros didáticos, comprometendo o processo de construção do conhecimento e levando em conta que o professor se limite à utilização apenas do livro didático em suas atividades. Comparando a coleção francesa selecionada e a brasileira, as deficiências da brasileira neste item são bem maiores do que a francesa.

Tabela 82 – Comparação utilizando as medidas de tendência central e de dispersão

Comparação	Livros França						Livro Brasil	
	$Fr\_C1.1^A$		$Fr\_C1.2^A$		Total		$Br\_C1.3^A$	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Média com desvio padrão	0	0,00	5	50,00	5	38,46	0	0,00
Média com amplitude	1	33,33	0	0,00	1	7,69	0	0,00
Mediana com amplitude e desvio interquartil	0	0,00	2	20,00	2	15,38	0	0,00
Média, mediana e amplitude	1	33,33	1	10,00	2	15,38	0	0,00
Média, desvio padrão e mediana	0	0,00	1	10,00	1	7,69	0	0,00
Média, desvio padrão, mediana, amplitude e desvio interquartil	0	0,00	1	10,00	1	7,69	0	0,00
Média, variância e desvio padrão	0	0,00	0	0,00	0	0,00	1	100,00
Média com mediana, moda e amplitude	1	33,33	0	0,00	1	7,69	0	0,00
TOTAL	3	100,00	10	100,00	13	100,00	1	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Considerando os três casos que envolviam comparar medidas de tendência central com medidas de tendência central; medidas de dispersão com medidas de dispersão e medidas de tendência central com medidas de dispersão, observamos limtações nas duas coleções. Sendo sendo bem mais nítida na coleção brasileira. Na coleção francesa, o livro $Fr\_C1.2^A$ apresentou um desempenho melhor do que o livro $Fr\_C1.1^A$ da mesma coleção.

Abordamos a seguir outro critério de análise das situações que chamamos de dados.

2.4.2.2. Dados

Neste item, abordamos a forma como os dados foram apresentados nas questões propostas e resolvidas. Conforme indicado na primeira parte desta tese, organizamos o item "dados" em que este foi dividido em cinco tipos de análise:

- Tipos de variáveis;
- Forma de apresentação dos dados;
- Números;
- População ou amostra;
- Contexto.

2.4.2.2.1. Tipos de variáveis

As variáveis podem ser quantitativas (discretas ou contínuas) e qualitativas (ordinais ou nominais). Observamos também questões apenas com números que não permitem classificar em uma destas variáveis. Conforme a tabela 83, a maioria das variáveis utilizadas foram quantitativas contínuas, seja por serem variáveis contínuas, seja por serem variáveis discretas, apresentadas em intervalos de classe, sendo tratada assim como contínua. Apesar de se trabalhar com este tipo de variável, observamos que as variáveis discretas foram pouco exploradas em relação às contínuas. As variáveis qualitativas não foram exploradas, estas podiam ter sido exploradas para indicar que tipos de medidas de tendência central e de dispersão poderiam ser utilizadas com estas. Para que os alunos percebessem as limitações deste tipo de variável, ao mesmo tempo, através das atividades, o autor poderia apresentar em que situações dever-se-iam explorar estas variáveis. Os resultados indicaram uma grande limitação nestes livros, o que pode levar os alunos a pensarem que podem utilizar qualquer tipo de variável com qualquer medida de tendência central. Ou ainda, que não sabem calcular a média em determinadas situações e que pelo tipo de variável poderíamos apenas usar a moda ou mediana (variáveis qualitativas ordinais). Ou ainda, apenas a moda (qualitativas nominais), além de outras situações não descritas. Outro aspecto destacado pelo programa brasileiro é a questão da exploração da contextualização. A estatística é uma importante ferramenta para se aplicar em diferentes contextos. Observamos no livro do Brasil que 42,67% eram apenas números para se explorar a técnica, limitando-se ao contexto da matemática e não iam além para compreender as situações de uso em outros contextos. Este problema se estende para a coleção francesa, em número menor com 10,29 % das questões, com variáveis limitadas a números no livro do primeiro ano e 11,95% no livro do segundo ano. O que podemos concluir que, em relação à questão de pesquisa, para este item, temos grandes limitações em relação ao tipo de variável.

Tabela 83 – Tipos de variáveis nas situações que envolvem as MTCD nos livros analisados[25]

Variáveis	Livros França						Livro Brasil	
	Fr_C1.1[A]		Fr_C1.2[A]		Total		Br_C1.3[A]	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Quantitativas discretas	11	16,18	90	35,86	101	31,66	31	21,38
Quantitativas contínuas	50	73,53	131	52,19	181	56,74	54	37,24
Qualitativas ordinais	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Qualitativas nominais	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Apenas números	7	10,29	30	11,95	37	11,60	60	41,38
TOTAL	68	100,00	251	100,00	319	100,00	145	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Outro aspecto relativo aos dados é a forma como eles são apresentados nas questões que trataremos no próximo item.

2.4.2.2.2. Forma de apresentação dos dados

Das formas de apresentação dos dados indicados na parte 2 desta tese, alguns não foram observados nos livros didáticos. Estes constam na lista dos gráficos mais utilizados

[25] O total dos tipos de variáveis é menor do que o total das atividades resolvidas e propostas, visto que em uma questão na qual temos duas tabelas (ou dois gráficos ou outra forma de apresentação dos dados), teríamos dois tipos de variáveis, contudo podemos ter seis atividades que envolvem as MTCD, por exemplo, calcule a média, a mediana e a moda de cada uma das tabelas.

(CAZORLA, 2002) são eles: gráfico de área, diagrama de ramo e folha, gráfico de pontos, gráfico de linhas, diagrama de dispersão e gráfico de pontos.

Dos dezoito tipos de apresentações dos dados indicados na tabela 84, observamos a utilização de quatorze deles (77,77 %), considerando as duas coleções levantadas. Observando apenas o livro Br_C1.3^{A}, temos apenas nove formas de apresentação, que correspondem a 50% dos levantados. Dos apresentados neste livro, temos 51,03% concentrados em apenas uma forma de apresentação (dados não ordenados), sendo seguido pela tabela com os intervalos de classe e os efetivos com 14,48% e dados ordenados com 12,41%. As outras seis formas de apresentação ocupam 25,08%. A tabela com intervalo de classe e frequência não foi observada em nenhuma atividade proposta ou resolvida. Assim, consideramos que o livro Br_C1.3^{A} apresenta limitações na forma de apresentação dos dados. Concentrando-se em um único tipo, deixando de apresentar nove das formas levantadas, ou quando utiliza-as, usa-se em poucas situações outras formas de apresentação dos dados.

Com relação à coleção francesa, dos 18 tipos que procuramos investigar, foram utilizados nos dois livros desta coleção 11 (61,11%), ou seja, um percentual baixo, mas superior ao brasileiro. Isto não significa que estas coleções não utilizem outros tipos de representação dos dados, pois estamos analisando o uso de diferentes formas de apresentação dessess dados utilizados em atividades que envolvem as medidas de tendência central e de dispersão. Na coleção Fr_C1.1^{A}, observamos a utilização de gráficos de linhas (para representar os efetivos acumulados crescente) e gráfico de nuvens de pontos, no mesmo capítulo que incluía as MTCD. Contudo, em outros temas, analisando em separado cada coleção, observamos que no livro do primeiro ano do ensino médio na França foram apresentadas apenas 9 formas (50%) dos 18 tipos. Ao contrário da coleção brasileira, a moda foi “tabela com observações e efetivos” com 51,39% dos casos levantados neste livro. O que observamos com isso, tal como na coleção brasileira, é uma grande concentração em uma forma de apresentação dos dados. A segunda forma de apresentação dos dados mais usada foi com dados ordenados com 15,28% do total de formas utilizadas.

Tabela 84 – Forma de apresentação dos dados

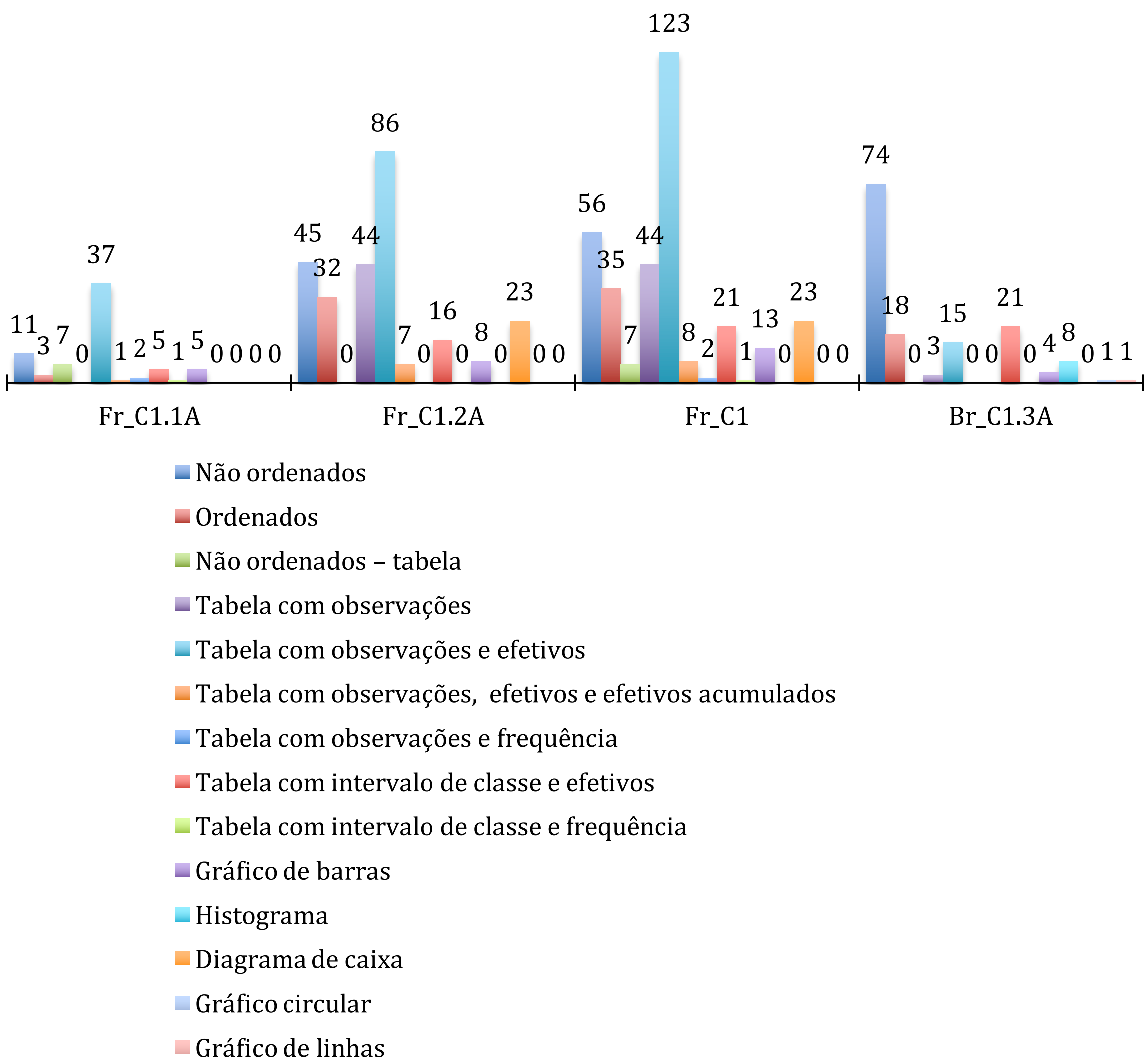
Forma de apresentação dos dados	Livros França						Livro Brasil	
	Fr_C1.1^A		Fr_C1.2^A		Total		Br_C1.3^A	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Não ordenados	11	15,28	45	17,24	56	16,82	74	51,03
Ordenados	3	4,17	32	12,26	35	10,51	18	12,41
Não ordenados – tabela	7	9,72	0	0,00	7	2,10	0	0,00
Tabela com observações	0	0,00	44	16,86	44	13,21	3	2,07
Tabela com observações e efetivos	37	51,39	86	32,95	123	36,94	15	10,34
Tabela com observações, efetivos e efetivos acumulados	1	1,39	7	2,68	8	2,40	0	0,00
Tabela com observações e frequência	2	2,78	0	0,00	2	0,60	0	0,00
Tabela com intervalo de classe e efetivos	5	6,94	16	6,13	21	6,31	21	14,48
Tabela com intervalo de classe e frequência	1	1,39	0	0,00	1	0,30	0	0,00
Gráfico de barras	5	6,94	8	3,07	13	3,90	4	2,76
Histograma	0	0,00	0	0,00	0	0,00	8	5,52
Diagrama de caixa	0	0,00	23	8,81	23	6,91	0	0,00
Gráfico circular	0	0,00	0	0,00	0	0,00	1	0,69
Gráfico de linhas	0	0,00	0	0,00	0	0,00	1	0,69
Gráfico de áreas	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Diagrama de dispersão	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Diagrama de ramo e folha	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Gráfico de pontos	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
TOTAL	72	100,00	261	100,00	333	100,00	145	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Na coleção Fr_C1.2^A, temos oito formas de apresentação dos dados que correspondem a 44,44 % dos 18 tipos apresentados. Das oito formas apresentadas, a que apresentou um maior número foi a tabela com observações e efetivos com 32,95% das formas. Esta corresponde à mesma moda para o livro do primeiro ano na França, mas com uma participação menos acentuada como no primeiro ano. Em segundo, com 17,24% das formas incluídas para este ano, temos "não ordenados", tal como na coleção do primeiro ano na França, este foi o segundo mais utilizado. Em terceiro, temos a tabela com observações com 16,86% que não aparece no primeiro ano na França. A participação dos gráficos foi muito pequena, tanto na coleção brasileira como na francesa, havendo alguns tipos que não foram utilizados. Consideramos que este tipo deveria ser mais explorado.

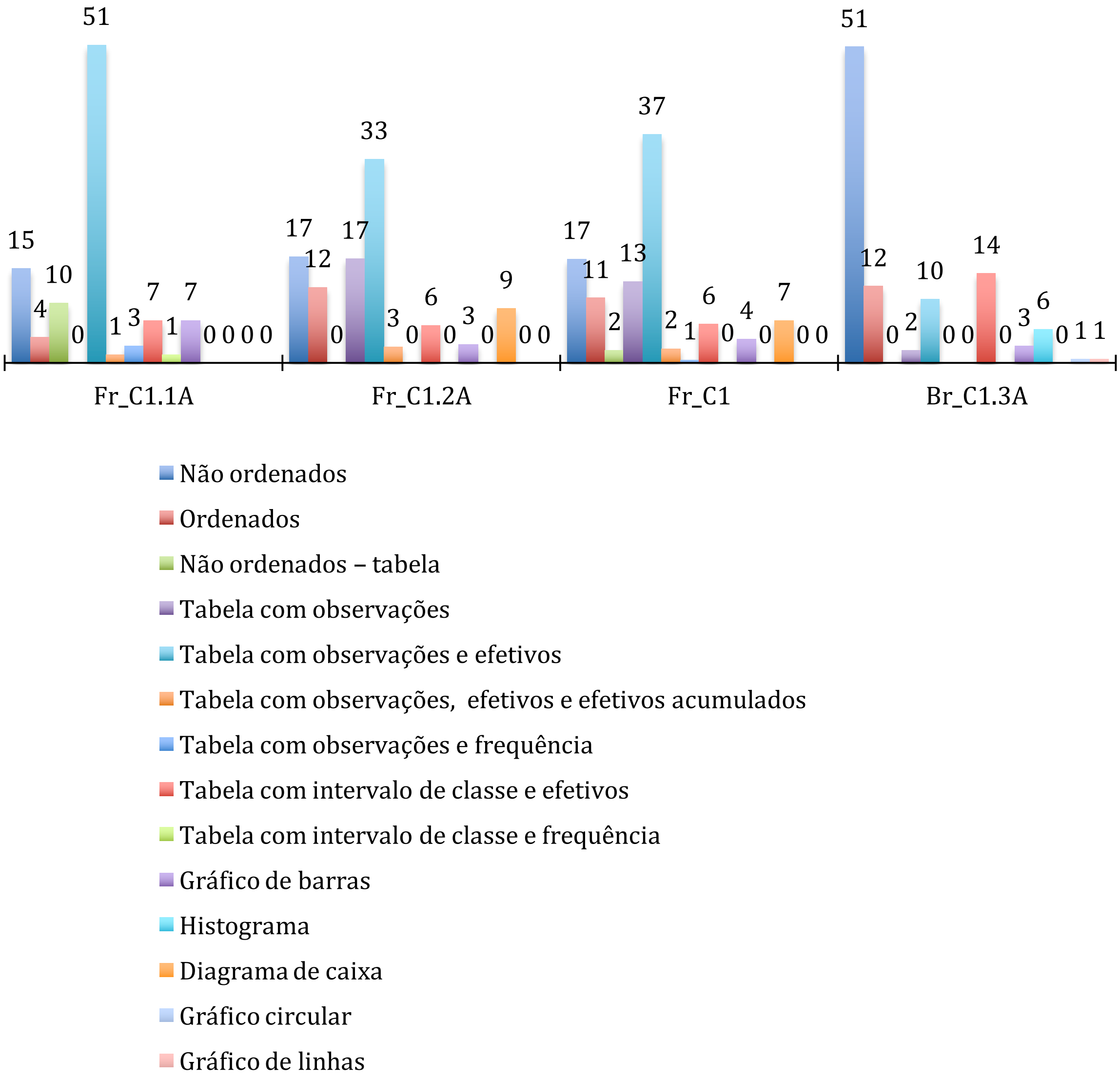
Apresentamos no gráfico 28 uma comparação dos três livros analisados em relação à forma de apresentação dos dados. Pode-se observar nitidamente a diferença entre a coleção francesa e brasileira. No gráfico 29, apresentamos os percentuais no lugar dos efetivos. Neste gráfico, pode-se observar que a coleção brasileira, além de ter uma menor utilização de gráficos, apresenta uma concentração maior do que a francesa, em algumas formas de apresentação, comparando os dois volumes da coleção francesa. O livro Fr_C1.2^{A} apresenta uma quantidade de formas de apresentação dos dados bem maior do que o livro Fr_C1.1^{A} . São 261 formas contra 72 (tabela 84), isto pode ser ilustrado pelo gráfico 28. Por sua vez, isto faz com que a coleção francesa possua uma superioridade em termos de quantidade de formas de apresentação. Apesar do livro Fr_C1.2^{A} possuir uma forma de apresentação a menos do que o livro Fr_C1.1^{A} e a coleção brasileira, temos uma maior utilização de todas as formas de apresentação. No livro Fr_C1.1^{A} temos duas formas de apresentação que aparecem apenas uma vez (1,39% do total), uma forma que aparece apenas três vezes e uma forma que aparece cinco vezes. No livro Br_C1.3^{A} ,temos duas formas de apresentação que aparecem apenas uma vez (0,69% do total), temos uma forma de apresentação que aparece três vezes (2,07 % do total) e uma forma de apresentação que aparece apenas quatro vezes. Na coleção Fr_C1.1^{A} , a forma de apresentação que aparece o menor número de vezes, aparece sete vezes (2,68% do total).

Gráfico 28. Forma de apresentação dos dados nas questões propostas e resolvidas nos três livros das duas coleções analisadas (considerando os efetivos para cada um dos 14 tipos de gráficos que foram observados em ao menos um dos livros).



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Gráfico 29. Forma de apresentação dos dados nas questões propostas e resolvidas nos três livros das duas coleções analisadas, considerando o percentual para cada um dos 14 tipos de gráficos que foram observados em ao menos um dos livros. Os valores foram arredondados para eliminar as decimais.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Na tabela 85, comparamos a média, o desvio padrão e o coeficiente de variação dos livros das três coleções. Apesar do desvio padrão ser menor no livro Br_C1.3^A, esta medida de dispersão não é a mais indicada para comparar os três livros, uma vez que a quantidade total de formas de apresentação é bem diferente em cada livro. Assim, deve-se levar em conta o coeficiente de variação. Neste caso, a maior dispersão é o livro Br_C1.3^A com 183,47, sendo seguido pelo livro Fr_C1.1^A. A menor dispersão está no livro Fr_C1.2^A . Considerando a coleção francesa e a coleção brasileira, a menor dispersão é na coleção francesa com um coeficiente de variação de 136,52. Apesar deste número menor, os valores dos coeficientes de variação de todos os livros indicam uma grande dispersão.

Tabela 85 – Média e desvio padrão considerando os dados da tabela 84.

	Livros França			Livro Brasil
	$Fr\_C1.1^A$	$Fr\_C1.2^A$	Total	$Br\_C1.3^A$
Média	5,14	18,64	23,79	10,36
Desvio padrão	9,39	24,51	32,47	19,00
Coeficiente de variação (em porcentagem)	182,53	131,49	136,52	183,47

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Retomando à questão da pesquisa, levando em conta a forma de apresentação dos dados, consideramos que este item apresenta limitações, tanto na coleção brasileira como na francesa. Logo, estas limitações são mais acentuadas na coleção brasileira. Na coleção francesa, o livro $Fr\_C1.2^A$ apresenta um desempenho melhor do que o livro $Fr\_C1.1^A$.

Na próxima seção trataremos do critério que chamamos de números.

2.4.2.2.3. Números

Na tabela 86 apresentamos os resultados obtidos. Nas três coleções levantadas, a moda foi os números naturais sem zero com 69,84 % dos casos no livro $Fr\_C1.1^A$, 55,42% no livro $Fr\_C1.2^A$ e 72,79% na coleção $Br\_C1.3^A$. Destacamos que mesmo quando os dados são apresentados agrupados em intervalos, se os intervalos são delimitados por números naturais sem zero, agrupamos-os nesta categoria. Os dados na tabela 86, indicam uma concentração muito alta nos números naturais sem zero. Não observamos nenhuma situação na qual os números eram apresentados na forma de fração. Na coleção francesa, observamos apenas uma atividade no volume $Fr\_C1.1^A$ com negativos. Atividades envolvendo sistema de medidas de base 60, tais como: temperatura, medição de tempo foram encontradas no livro $Fr\_C1.2^A$ e no livro $Br\_C1.3^A$. Assim, apesar de termos questões que envolvem o zero entre os números em relação a outras situações, os dados indicam limitações nas coleções analisadas nesta categoria.

Tabela 86 – Os números nas séries nas quais são propostas atividades sobre as MTCD.

Números	Livros França						Livro Brasil	
	Fr_C1.1^{A}		Fr_C1.2^{A}		Total		Br_C1.3^{A}	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Naturais sem zero	44	69,84	133	55,42	177	58,42	107	72,79
Naturais	6	9,52	37	15,42	43	14,19	13	8,84
Negativos	1	1,59	0	0,00	1	0,33	7	4,76
Inclui fração	0	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
Inclui decimais	12	19,05	68	28,33	80	26,40	9	6,12
Logarítmos	0	0,00	0	0,00	0	0,00	1	0,68
Base 60	0	0,00	2	0,83	2	0,66	4	2,72
Valores gerados	0	0,00	0	0,00	0	0,00	6	4,08
TOTAL	63	100,00	240	100,00	303	100,00	147	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Na próxima seção trataremos do critério que chamamos de população ou amostra.

2.4.2.2.4. População ou amostra

Procuramos avaliar se são apresentadas atividades que tratam da população ou da amostra. Existem casos que são apresentados apenas números ou situações que não permitem identificar se trata de população ou de amostra. Na tabela 87, apresentamos os resultados em cada livro analisado. Dos três livros, o Br_C1.3^{A} foi o que apresentou maiores problemas. A moda das questões são questões que não permite identificar (46,21%), o que não possibilita abordar se trata de população ou amostra. Uma questão como: determine a média de 3; 4; 5; 8, não pode ser identificada em população ou amostra. Na coleção francesa, observamos uma inversão entre a moda do livro do primeiro ano e do segundo. No livro Fr_C1.1^{A} a população é de 75,76%, enquanto que a amostra é de 24,24%. Já no livro Fr_C1.2^{A} a maior participação é da amostra com 64,52% dos casos. De todos os livros, apenas o livro Fr_C1.1^{A} foi o que não apresentou questões apenas com números ou sem informações que permitam classificar em população ou amostra.

Tabela 87 – População ou amostra.

	Livros França						Livro Brasil	
	Fr_C1.1^{A}		Fr_C1.2^{A}		Total		Br_C1.3^{A}	
	N	%	N	%	N	%	N	%
População	50	75,76	53	28,49	103	40,87	32	22,07
Amostra	16	24,24	120	64,52	136	53,97	46	31,72
Não identificado	0	0,00	13	6,99	13	5,16	67	46,21
TOTAL	66	100,00	186	100,00	252	100,00	145	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Abordaremos a seguir a categoria que chamamos de contexto.

2.4.2.3. Contexto

A contextualização das atividades no ensino é algo relevante. No caso da matemática, existem situações que o contexto é da própria matemática pelas características dessa disciplina. Contudo, a estatística é uma ferramenta para olhar o mundo e esta ligação forte com o seu uso em diversos contextos é destacada como uma das razões do seu ensino na educação básica (BRASIL, 1998).

Na tabela 88, apresentamos os contextos observados. A coleção Br_C1.3^{A} possui como moda as questões apenas com números, com 37,01% das questões, que no caso da estatística deveria ser evitada. Logo, consideramos como uma deficiência nessa coleção. O segundo item mais observado neste livro foi o mundo do trabalho com 21,43 %, um tema relevante, pois indica a aplicação da estatística no contexto das futuras profissões que podem ser seguidas pelos alunos do ensino médio, destacando assim sua importância dentre as disciplinas da educação básica. Na coleção Fr_C1.1^{A},a moda foi o contexto da escola/universidade observado em 30,56% dos casos. Um contexto mais próximo dos alunos (no caso da escola). Nesta coleção, o segundo mais observado foi apenas números (18,06%), o que não deveria ocorrer com tal frequência. A moda da coleção Fr_C1.2^{A} foi o mundo do trabalho (21,40%), um contexto importante, sobretudo no segundo ano do ensino médio, próximo a uma definição da sua futura profissão e que vem a contribuir para indicar diversas situações de utilização da estatística no mundo do trabalho. Em segundo lugar, tivemos o contexto “escola/universidade” (19,46%) e em terceiro lugar, apenas números ou situações que não permitem identificar o contexto com 14,79%. Observamos um número elevado de questões sem apresentação do contexto nas três coleções, o que se configura como uma deficiência destas coleções.

Tabela 88 – Contextos observados.

Contexto	Livros França						Livro Brasil	
	Fr_C1.1[A]		Fr_C1.2[A]		Total		Br_C1.3[A]	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Apenas números	13	18,06	38	14,79	51	15,50	57	37,01
Cotidiano	5	6,94	34	13,23	39	11,85	22	14,29
Escola/universidade	22	30,56	50	19,46	72	21,88	12	7,79
Geografia	8	11,11	15	5,84	23	6,99	5	3,25
Matemática	0	0,00	0	0,00	0	0,00	12	7,79
Biologia	1	1,39	3	1,17	4	1,22	1	0,65
Estatística	0	0,00	4	1,56	4	1,22	0	0,00
Mundo do trabalho	8	11,11	55	21,40	63	19,15	33	21,43
Lazer	6	8,33	28	10,89	34	10,33	6	3,90
Esporte	9	12,50	28	10,89	37	11,25	5	3,25
Cultura geral	0	0,00	2	0,78	2	0,61	1	0,65
TOTAL	72	100,00	257	100,00	329	100,00	154	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Outro aspecto analisado foram as propriedades e observações.

2.4.2.4. Propriedades e observações

Ao abordamos a teoria dos campos conceituais, apresentamos um exemplo de como se pode desenvolver um conceito por meio da exploração de uma propriedade. No estudo das MTCD, levantamos diversas propriedades e observações, algumas destas foram resultados de pesquisas sobre aprendizagem que indicavam que os estudantes apresentavam falhas em algumas atividades por não perceberem estas propriedades ou observações. Na metodologia, fazemos uma ligação destas propriedades e observações com a nossa hipótese de pesquisa. Uma vez identificada algumas das propriedades ou observações que levantamos, estas serão organizadas em uma das cinco categorias detalhadas na metodologia:

- Desc - Descrição da propriedade;
- Demo - Demonstração da propriedade;
- A.Res. - Apresentação da propriedade em uma atividade resolvida;
- Sol. - Indicação da propriedade na solução de uma atividade apresentada no livro do aluno (exercícios corrigidos) ou ainda no livro do professor;
- Pensar - Pode-se pensar na propriedade pela forma como a atividade foi formulada.

Outro elemento analisado nesta tese foram as ferramentas tecnológicas.

Apresentamos a seguir as propriedades e observações levantadas nos livros didáticos analisados sobre cada uma das medidas de tendência central e de dispersão encontradas nestes manuais escolares.

2.4.2.4.1. Propriedades e observações sobre a media aritmética

Levantamos 16 propriedades sobre a média e 7 observações. Na tabela 89, apresentamos o resultado sobre as propriedades observadas. Levantamos no livro Br_C1.3^{A} apenas uma atividade na qual se poderia pensar nesta propriedade. Ao pensarmos em um ensino no qual se pretende desenvolver o conceito de média, este livro apresenta uma grande deficiência neste aspecto. No livro Fr_C1.1A observamos o mesmo problema. Identificamos apenas um propriedade na qual se apresentava a descrição desta. No livro Fr_C1.2A este se diferencia dos outros apresentando três propriedades. Logo, a descrição da propriedade 1 foi um caso em que se poderia pensar nesta propriedade. A propriedade 10 foi a mais explorada neste livro apresentada em uma atividade para a demonstração desta propriedade e apresentação da propriedade em uma atividade resolvida. Contudo, em quatro atividades propostas foram observadas o uso desta propriedade. Observamos também uma atividade na qual se poderia pensar na propriedade 10. Também observamos neste livro um caso no qual se pode pensar na propriedade 14. Assim, em relação à propriedade da média, a apresentação nos três livros é bem limitada, sendo um pouco menos acentuada no livro Fr_C1.2[A]. Consideramos assim uma deficiência em relação às propriedades da média.

Tabela 89 – Propriedades observadas sobre a média.

		Livros França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1A		Fr_C1.2A		Total		Br_C1.3A	
		N	%	N	%	N	%	N	%
Prop.1	Desc.	1	100,00	1	10,00	2	18,18	0	0,00
	Pensar	0	0,00	1	10,00	1	9,09	1	100,00
Prop.10	Demo	0	0,00	1	10,00	1	9,09	0	0,00
	A.Res.	0	0,00	1	10,00	1	9,09	0	0,00
	Sol.	0	0,00	4	40,00	4	36,36	0	0,00
	Pensar	0	0,00	1	10,00	1	9,09	0	0,00
Prop.14	Desc.	0	0,00	1	10,00	1	9,09	0	0,00
TOTAL		1	100,00	10	100,00	11	100,00	1	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Na tabela 90, apresentamos os resultados em relação às observações sobre a média. Foram levantadas sete observações sobre essa medida. Destas, apenas foram encontradas duas observações no livro Fr_C1.1[A] e uma observação no livro Br_C1.3[A]. O livro Fr_C1.2[A] não apresentou observações. Neste caso, temos também grandes deficiências em relação a esse item.

Tabela 90 – Observações levantadas sobre a média.

		Livros França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1A		Fr_C1.2A		Total		Br_C1.3A	
		N	%	N	%	N	%	N	%
Obs.1	Sol.	1	50,00	0	0,00	1	50,00	0	0,00
Obs. 3	Desc.	0	0,00	0	0,00	0	0,00	1	100,00
	Pensar	1	50,00	0	0,00	1	50,00	0	0,00
TOTAL		2	100,00	0	0,00	2	100,00	1	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Trataremos no próximo item sobre as propriedades e observações em relação à mediana.

2.4.2.4.2. Propriedades e observações sobre a mediana

Levantamos cinco propriedades sobre a mediana. Nas duas coleções analisadas, observamos apenas três dessas cinco propriedades que correspondem a 60% do total das propriedades. Em termos de quantitativos, a coleção francesa apresentou o dobro de situações da coleção brasileira. Mesmo assim, um número pequeno diante da quantidade de propriedades levantadas. A coleção brasileira limitou-se a apresentar as propriedades 1 e 2 (40% do total das propriedades levantadas). Sobre a propriedade 1, nesta coleção, observamos em dois momentos uma descrição dessa propriedade. Sobre a propriedade 2, observamos duas atividades nas quais se poderiam pensar nesta propriedade, embora o livro não apresentasse uma indicação da mesma.

A coleção francesa também limitou-se a apenas duas propriedades, as que numeramos como 2 e 4, o que corresponde a apenas 40% do total levantado. A propriedade 1 descrita na coleção brasileira não aparece na francesa e a propriedade 4 descrita e utilizada na coleção francesa não aparece no livro brasileiro. Assim, observamos em comum nas instituições representadas por este livro, a propriedade 2. Embora que na coleção brasileira ela não aparece, apenas se poderia pensar nela.

No livro Fr_C1.1^{A} , foram observadas um número total de atividades que envolvem as propriedades da mediana maiores do que no livro Fr_C1.2^{A}.

Tabela 91 – Propriedades levantadas sobre a mediana.

		Livros França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1^A		Fr_C1.2^A		Total		Br_C1.3^A	
		N	%	N	%	N	%	N	%
Prop.1	Desc.	0	0,00	0	0,00	0	0,00	2	50,00
Prop. 2	Desc.	1	20,00	0	0,00	1	12,50	0	0,00
	Pensar	0	0,00	1	33,33	1	12,50	2	50,00
Prop. 4	Desc.	3	60,00	0	0,00	3	37,50	0	0,00
	Sol.	0	0,00	2	66,67	2	25,00	0	0,00
	Pensar	1	20,00	0	0,00	1	12,50	0	0,00
TOTAL		5	100,00	3	100,00	8	100,00	4	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Os dados indicados na tabela 91 apresentam deficiências tanto na coleção brasileira como na francesa em relação às propriedades da média, sendo mais acentuada esta deficiência na coleção brasileira.

Levantamos um total de duas observações sobre a mediana. Na tabela 92, apresentamos os resultados. Foram observadas apenas no livro Fr_C1.2^A uma destas observações. Assim, podemos constatar deficiências tanto na coleção francesa como na brasileira. Esta última mais acentuada pela ausência de qualquer observação.

Tabela 92 – Observações levantadas nos livros didáticos sobre a mediana.

		Livros França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1^A		Fr_C1.2^A		Total		Br_C1.3^A	
		N	%	N	%	N	%	N	%
Obs. 2	Sol.	2	100,00	0	0,00	2	100,00	0	0,00
TOTAL		2	100,00	0	0,00	2	100,00	0	0,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Trataremos a seguir das observações e propriedades sobre a moda.

2.4.2.4.3. Propriedades e observações sobre a moda

Levantamos cinco propriedades sobre a moda. Na coleção francesa levantamos duas destas, que correspondem a 40% dos tipos levantados. Na coleção brasileira, observamos apenas um tipo que é a propriedade 2, conforme indicado na tabela 93, que corresponde a 20% do total.

Os dados da tabela 93 indicam uma deficiência em relação às propriedades da moda, tanto na coleção brasileira como na francesa, sendo um pouco mais acentuada na coleção brasileira.

Tabela 93 – Propriedades observadas sobre a moda.

		Livros França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1[A]		Fr_C1.2[A]		Total		Br_C1.3[A]	
		N	%	N	%	N	%	N	%
Prop. 2	Desc.	1	50,00	0	0,00	1	50,00	0	0,00
	Pensar	0	0,00	0	0,00	0	0,00	1	100,00
Prop. 4	Pensar	1	50,00	0	0,00	1	50,00	0	0,00
TOTAL		2	100,00	0	0,00	2	100,00	1	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Foram levantadas quatro observações sobre a moda (tabela 94). Destas, foram identificadas apenas uma na coleção francesa, em um dos livros, o que indica uma grande deficiência desta coleção neste aspecto. Na coleção brasileira, foram identificadas apenas dois tipos de observações, 50% do total levantado, indicando também uma deficiência. Ao comparar a coleção brasileira com a francesa, nesse aspecto, a coleção francesa aparece com uma limitação maior à brasileira. Observamos também que as observações encontradas em uma coleção são diferentes das encontradas em outra coleção.

Tabela 94 – Observações sobre a moda

		Livros França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1A		Fr_C1.2A		Total		Br_C1.3A	
		N	%	N	%	N	%	N	%
Obs.1	Desc.	0	0,00	0	0,00	0	0,00	2	50,00
Obs. 2	Desc.	1	100,00	0	0,00	1	100,00	0	0,00
Obs. 4	Desc.	0	0,00	0	0,00	0	0,00	2	50,00
TOTAL		1	100,00	0	0,00	1	100,00	4	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

No próximo tópico trataremos das propriedades sobre a amplitude.

2.4.2.4.4. Propriedades sobre a amplitude

Levantamos um total de cinco propriedades sobre a amplitude e nenhuma observação. Na tabela 95 apresentamos o que foi identificado nas coleções analisadas. A coleção brasileira não apresenta a amplitude, assim deixa também de explorar suas propriedades. A coleção francesa apresenta a amplitude, contudo se limita a apenas duas atividades que se poderiam pensar nas propriedades 1 e 4, sem contudo, deixar claro isso. Assim, tanto a coleção brasileira como a francesa apresentam limitações em relação às propriedades.

Tabela 95 – Propriedades sobre a amplitude

		Livros França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1A		Fr_C1.2A		Total		Br_C1.3A	
		N	%	N	%	N	%	N	%
Prop.1	Pensar	0	0,00	1	50,00	1	50,00	0	0,00
Prop. 4	Pensar	0	0,00	1	50,00	1	50,00	0	0,00
TOTAL		0	0,00	2	100,00	2	100,00	0	0,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

No próximo tópico trataremos das propriedades e observações sobre a variância.

2.4.2.4.5. Propriedades e observações sobre a variância

Levantamos um total de 6 propriedades sobre a variância. Na coleção brasileira, observamos apenas uma propriedade (tabela 96) utilizada na solução de uma atividade, o que corresponde a apenas 16,67% do total de propriedades levantadas. No caso da coleção francesa, levantamos apenas uma propriedade, constatando também como um problema. Logo, tanto a coleção brasileira como a coleção francesa apresentam grandes limitações em relação às propriedades apresentadas.

Tabela 96 – Propriedades sobre a variância.

		Livros França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1A		Fr_C1.2A		Total		Br_C1.3A	
		N	%	N	%	N	%	N	%
Prop.1	Demo	0	0,00	1	50,00	1	50,00	0	0,00
	Sol.	0	0,00	1	50,00	1	50,00	0	0,00
Prop. 6	Sol.	0	0,00	0	0,00	0	0,00	1	100,00
TOTAL		0	0,00	2	100,00	2	100,00	1	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Levantamos duas observações sobre a variância, estas não foram levantadas nem na coleção brasileira nem na coleção francesa.

Tratamos no próximo item sobre as observações e propriedades do desvio padrão levantadas nas coleções analisadas.

2.4.2.4.6. Propriedades e observações sobre o desvio padrão

Foram levantadas onze propriedades sobre o desvio padrão. Na tabela 97, apresentamos as observadas em ao menos uma das coleções. Na coleção brasileira, foram levantadas apenas duas situações nas quais poderíamos pensar na propriedade 10. Considerando um total de onze propriedades, temos apenas 9,09% do total, uma grande limitação considerando este aspecto. Na coleção francesa, levantamos sete das onze propriedades que correspondem a 63,64 % do total. Estas se concentraram apenas no livro Fr_C1.2^A . Estas foram pouco exploradas se limitando em quatro casos a apenas uma situação. Assim, em relação às propriedades do desvio padrão, ambas as coleções apresentaram restrições, sendo mais acentuada na coleção brasileira.

Tabela 97 – Propriedades sobre o desvio padrão.

		Livros França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1^A		Fr_C1.2^A		Total		Br_C1.3^A	
		N	%	N	%	N	%	N	%
Prop. 2	Desc.	0	0,00	1	8,33	1	8,33	0	0,00
Prop. 6	Desc.	0	0,00	1	8,33	1	8,33	0	0,00
	Pensar	0	0,00	1	8,33	1	8,33	0	0,00
Prop. 7	Sol.	0	0,00	2	16,67	2	16,67	0	0,00
Prop. 8	Demo	0	0,00	1	8,33	1	8,33	0	0,00
	Sol.	0	0,00	3	25,00	3	25,00	0	0,00
Prop. 9	Sol.	0	0,00	1	8,33	1	8,33	0	0,00
Prop.10	Desc.	0	0,00	1	8,33	1	8,33	0	0,00
	Pensar	0	0,00	0	0,00	0	0,00	2	100,00
Prop.11	Desc.	0	0,00	1	8,33	1	8,33	0	0,00
TOTAL		0	0,00	12	100,00	12	100,00	2	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Levantamos seis observações sobre o desvio padrão. Destas, foram identificadas cinco (tabela 98). Na coleção brasileira foi observada apenas uma situação que envolve a observação 1 na solução de uma atividade. Na coleção francesa, foram identificadas cinco, um número bem superior à coleção brasileira. Estas foram encontradas apenas no livro Fr_C1.2^A e em número reduzido, na maioria dos casos, limitada a uma atividade. No caso da observação 1, a única observada na coleção brasileira, foi identificada uma situação que se poderia pensar nesta. Assim, o que é utilizada em uma coleção não é apresentada na outra.

Todas as duas coleções apresentaram limitações neste item, sendo mais acentuada na coleção brasileira.

Tabela 98 – Observações sobre o desvio padrão.

		Livro França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1^{A}		Fr_C1.2^{A}		Total		Br_C1.3^{A}	
		N	%	N	%	N	%	N	%
Obs.1	Sol.	0	0,00	0	0,00	0	0,00	1	100,00
	Pensar	0	0,00	1	16,67	1	16,67	0	0,00
Obs. 2	Sol.	0	0,00	1	16,67	1	16,67	0	0,00
Obs. 3	Sol.	0	0,00	2	33,33	2	33,33	0	0,00
Obs. 4	Sol.	0	0,00	1	16,67	1	16,67	0	0,00
Obs. 6	Sol.	0	0,00	1	16,67	1	16,67	0	0,00
TOTAL		0	0,00	6	100,00	6	100,00	1	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Trataremos a seguir das propriedades e observações sobre o intervalo interquartil.

2.4.2.4.7. Propriedades e observações sobre o intervalo interquartil

O intervalo interquartil é abordado apenas na coleção francesa, dessa forma, levantamos duas propriedades sobre o intervalo interquartil. Estas aparecem apenas no livro Fr_C1.2^{A} . Neste a maior ênfase foi na propriedade 1, com sete atividades envolvendo esta propriedade. A propriedade 2 foi observada em apenas três atividades que envolviam a demonstração e solução (tabela 99).

Tabela 99 – Propriedades sobre o intervalo interquartil

		Livro França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1[A]		Fr_C1.2[A]		Total		Br_C1.3[A]	
		N	%	N	%	N	%	N	%
Prop.1	Desc.	0	0,00	2	20,00	2	20,00	0	0,00
	A.Res.	0	0,00	1	10,00	1	10,00	0	0,00
	Sol.	0	0,00	4	40,00	4	40,00	0	0,00
	Pensar	0	0,00	1	10,00	1	10,00	0	0,00
Prop. 2	Demo	0	0,00	1	10,00	1	10,00	0	0,00
	Sol.	0	0,00	1	10,00	1	10,00	0	0,00
TOTAL		0	0,00	10	100,00	10	100,00	0	0,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Levantamos duas observações sobre o intervalo interquartil. Estas foram observadas apenas no livro Fr_C1, indicadas na tabela 100. Nos dois casos, foram observadas na solução de atividades propostas e em apenas três situações.

Tabela 100 – Observações sobre o intervalo interquartil

		Livros França						Livro Brasil	
		Fr_C1.1[A]		Fr_C1.2[A]		Total		Br_C1.3[A]	
		N	%	N	%	N	%	N	%
Obs. 1	Sol.	0	0,00	1	33,33	1	33,33	0	0,00
Obs. 2	Sol.	0	0,00	2	66,67	2	66,67	0	0,00
TOTAL		0	0,00	3	100,00	3	100,00	0	0,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Os resultados sobre as propriedades e observações sobre o intervalo interquartil indicaram que elas apresentaram limitações no livro francês sobretudo em relação à propriedade 2 e nas observações que podiam ser mais exploradas. No livro brasileiro, identificamos a sua ausência, uma vez que este tema não é abordado, constituindo uma deficiência desta coleção.

Trataremos a seguir do uso das calculadoras e softwares nos livros didáticos analisados.

2.4.2.5. Uso da calculadora e softwares nos livros didáticos

Apenas na coleção francesa analisada utiliza-se a calculadora e softwares. Na análise dos livros, criamos cinco categorias de uso destes instrumentos e apresentamos detalhadamente cada uma delas na metodologia. As categorias levantadas são:

- Ensino do comando para obter uma medida
- Obter uma medida
- Resolver uma atividade
- Descobrir propriedades
- Comparar medidas

Na tabela 101, apresentamos os resultados obtidos nos livros investigados.

Tabela 101 – Uso que se faz das ferramentas calculadora e planilha eletrônica nos livros didáticos.

Assunto	Livros França						Livro Brasil	
	Fr_C1.1^A		Fr_C1.2^A		Total		Br_C1.3^A	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Comando para obter uma medida	5	11,11	4	2,78	9	4,76	0	0,00
Obter uma medida	40	88,89	127	88,19	167	88,36	0	0,00
Resolver uma atividade	0	0,00	6	4,17	6	3,17	0	0,00
Descobrir uma propriedade	0	0,00	4	2,78	4	2,12	0	0,00
Comparar medidas	0	0,00	3	2,08	3	1,59	0	0,00
TOTAL	45	100,00	144	100,00	189	100,00	0	0,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

No livro Fr_C1.1^A da coleção francesa selecionada, as atividades propostas com o uso das ferramentas tecnológicas se limitam a dois tipos: o ensino dos comandos para obter uma medida e obter uma medida (atividades na qual é solicitada a obtenção de uma medida). Consideramos que este tipo de uso é muito limitado em relação às possibilidades deste instrumento. No segundo livro desta mesma coleção, observamos uma ampliação para outras situações que indicam o potencial destes instrumentos na sala de aula no processo de ensino-aprendizagem. Assim, observamos 4,17% das atividades em "como resolver uma atividade", 2,78% em "descobrir uma propriedade" e 2,08% em "comparar medidas". Apesar do número muito baixo de utilizações nestas outras atividades que consideramos relevantes na construção do conceito, destacamos que algumas atividades para "obter uma medida" estavam associadas a estas outras, pois era solicitado que determinassem com o auxílio certas medidas e em seguida, por exemplo, procurava-se observar certas relações entre estas medidas para que o aluno chegasse à determinada propriedade.

Procuramos levantar qual era a ferramenta mais utilizada. No livro Fr_C1.1^{A}, a moda foi sobre o uso da calculadora em 97,78% das atividades, em que tivemos um uso extremamente limitado da planilha eletrônica, como indicado na tabela 102. A planilha oferece diversos recursos para se explorar as medidas de tendência central que poderiam ter sido utilizadas. Não foi explorado um software de geometria, que poderia ter sido usado em atividades que possibilitassem visualizar certas propriedades destas medidas. No livro Fr_C1.2^{A}, tivemos uma distribuição mais equilibrada em relação ao uso de planilhas, as situações com uso da calculadora ficaram com 58,33% e o uso da planilha com 40,97%. O uso do software de geometria foi em apenas uma situação, este poderia ter sido mais utilizado.

Tabela 102 – Tipos de ferramentas no livro didático

Assunto	Livros França						Livro Brasil	
	Fr_C1.1^{A}		Fr_C1.2^{A}		Total		Br_C1.3^{A}	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Uso da calculadora	44	97,78	84	58,33	128	67,72	0	0,00
Uso da planilha eletrônica	1	2,22	59	40,97	60	31,75	0	0,00
Uso de software de geometria	0	0,00	1	0,69	1	0,53	0	0,00
TOTAL	45	100,00	144	100,00	189	100,00	0	0,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese.

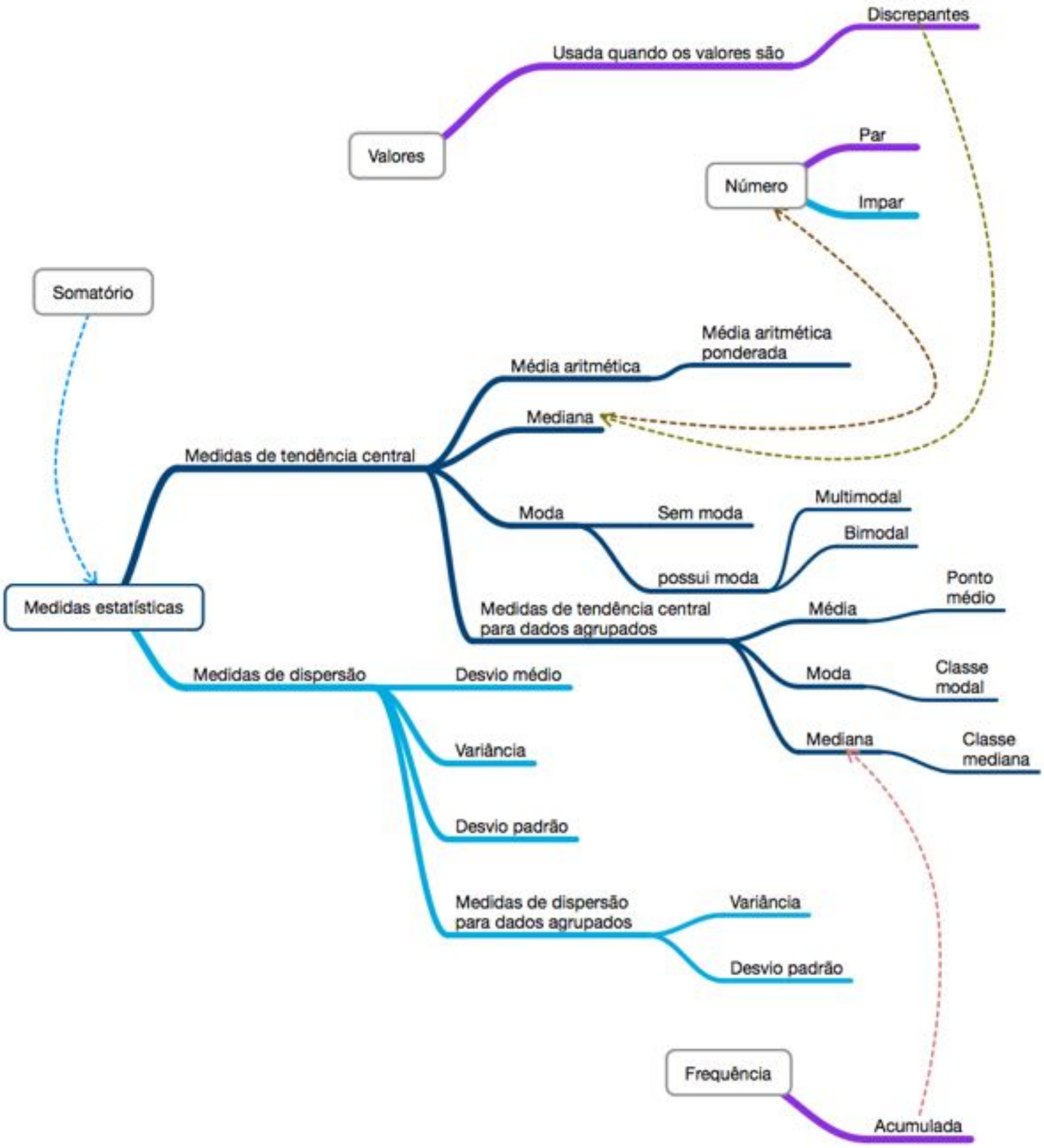
Consideramos que essas atividades propostas vêm a ampliar o nível de conceptualização dos alunos. Apesar disso, observamos uma limitação nos tipos de atividades que vão além de obter uma medida, no tipo de ferramenta utilizada, em apenas um livro se utiliza a planilha e em apenas uma atividade se utiliza um software gráfico. Existem atualmente outras ferramentas que poderiam ser exploradas, tais como: a calculadora para computador, uso de softwares em smartphones com aplicações para estatística e o uso de softwares utilizando tablets.

2.4.2.6. Conceitos associados às MTCD nos livros selecionados

Procuramos neste capítulo fazer uma síntese de alguns dos conceitos associados às medidas de tendência central e de dispersão. Para isso, fizemos uma apresentação inicial dos conceitos associados às MTCD em cada livro. Contudo, diante da complexidade desses temas e a variedade deles, procuramos simplificar esta apresentação. Depois fazemos uma retomada da nossa estrutura de pesquisa que possibilitou analisar muitos outros conceitos de diferentes naturezas que estavam associados a estas medidas.

Na figura 69, temos alguns dos conceitos observados no livro Br_C1 associados às medidas de tendência central e de dispersão. O livro brasileiro possui uma estrutura bem definida dos temas abordados, iniciando pela apresentação do mesmo. Assim, retratamos na figura 69 esta estrutura. Este livro apresenta inicialmente o conceito de medida estatística dividindo-a em duas partes: medidas de tendência central e medidas de dispersão. São apresentadas a média aritmética e o conceito de média aritmética ponderada de uma forma ampla e com problemas que já descrevemos. Em seguida, apresentamos a mediana e a moda, classificando esta última para os casos com mais de uma moda, em bimodal e multimodal. No mesmo nível hierárquico, são apresentadas as medidas de tendência central para dados agrupados e são apresentados como subitens a média, a moda e a mediana nesta ordem. Para cada um destes é apresentado o conceito de ponto médio, classe modal e classe mediana. Na parte da medida de dispersão, temos uma estrutura similar à medida de tendência central e são apresentadas as três medidas abordadas neste capítulo e no mesmo nível hierárquico são apresentadas as medidas de dispersão para dados agrupados e retomada a variância e o desvio padrão. Observamos também neste livro outros conceitos associados e utilizados junto com a mediana, como o de frequência acumulada (no sentido de efetivo acumulado). O conceito de somatório é apresentado uma vez que este é utilizado nas fórmulas. Para o uso no cálculo da mediana, temos o conceito de número par e ímpar. Destaca-se o papel da mediana ao explorar dados discrepantes. Como já destacamos anteriormente, alguns conceitos não foram abordados como o de amplitude, de intervalo interquartil e coeficiente de variação.

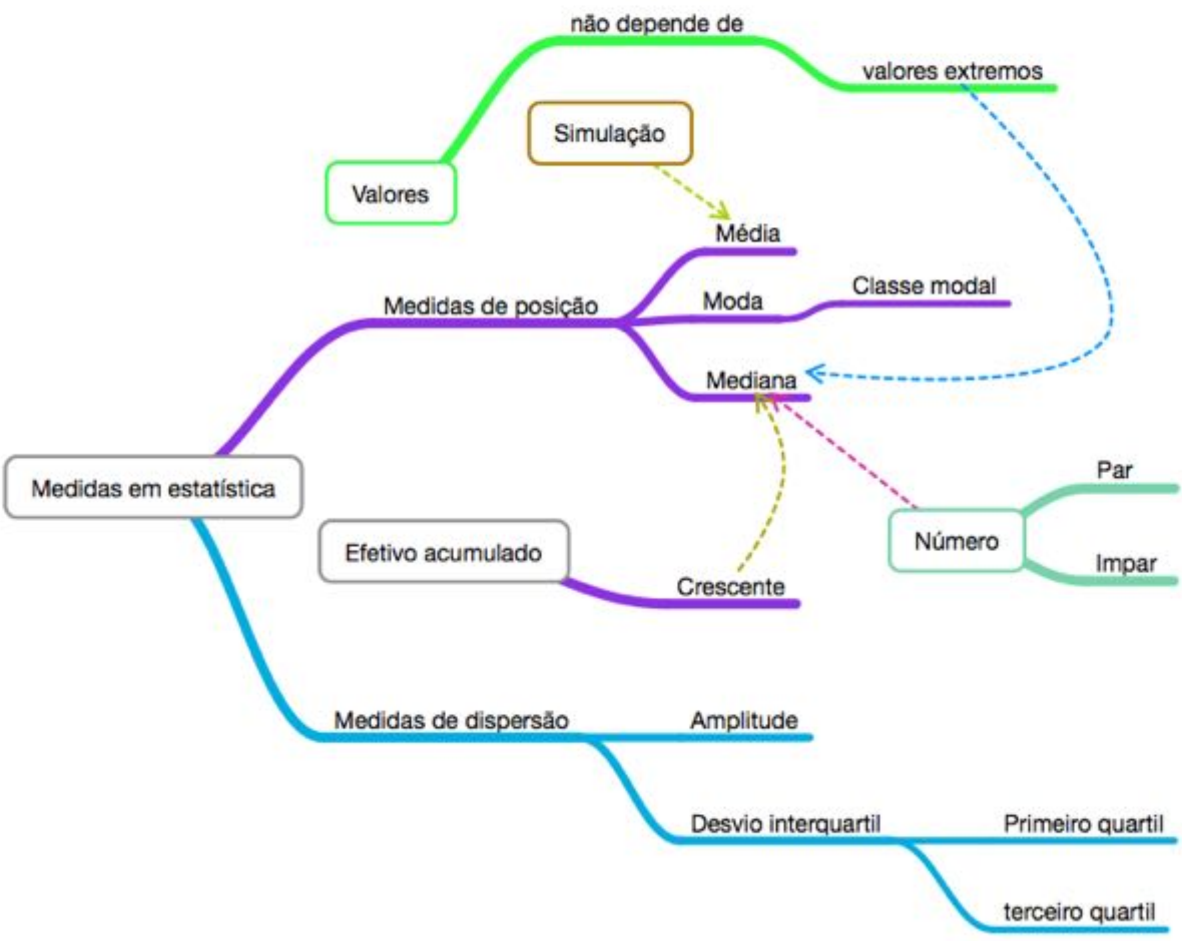
Figura 69. Conceitos sobre as MTCD levantados no livro Br_C1.3[A].



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Na figura 70, apresentamos os principais conceitos observados no livro Fr_C1.1[A]. Este livro não possui a organização rígida de apresentação do livro brasileiro. Primeiro são exploradas as atividades introdutórias antes de se abordar os temas do capítulo, sem contudo procurar se deter muito ao texto. Neste livro, temos as medidas estatísticas nas quais se encontram as medidas de posição e de dispersão. As medidas de posição apresentadas são a média, a moda incluindo o conceito de classe modal e a mediana. Explora-se junto com a média o conceito de simulação, que é também tratado em separado. Junto à mediana, temos o conceito de número par e ímpar, necessário ao seu cálculo e o de efetivo acumulado que facilita a determinação da mediana com um número maior de dados. Destaca-se também que a mediana não é afetada por valores extremos, se diferenciando da média. As medidas de dispersão são tratadas de forma superficial, deixando para explorá-las no segundo ano do ensino médio. São apresentadas como medidas de dispersão a amplitude e o desvio interquartil. Deixa-se de explorar outras medidas de dispersão como já tínhamos comentado.

Figura 70. Conceitos no livro Fr_C1.1^{A}.

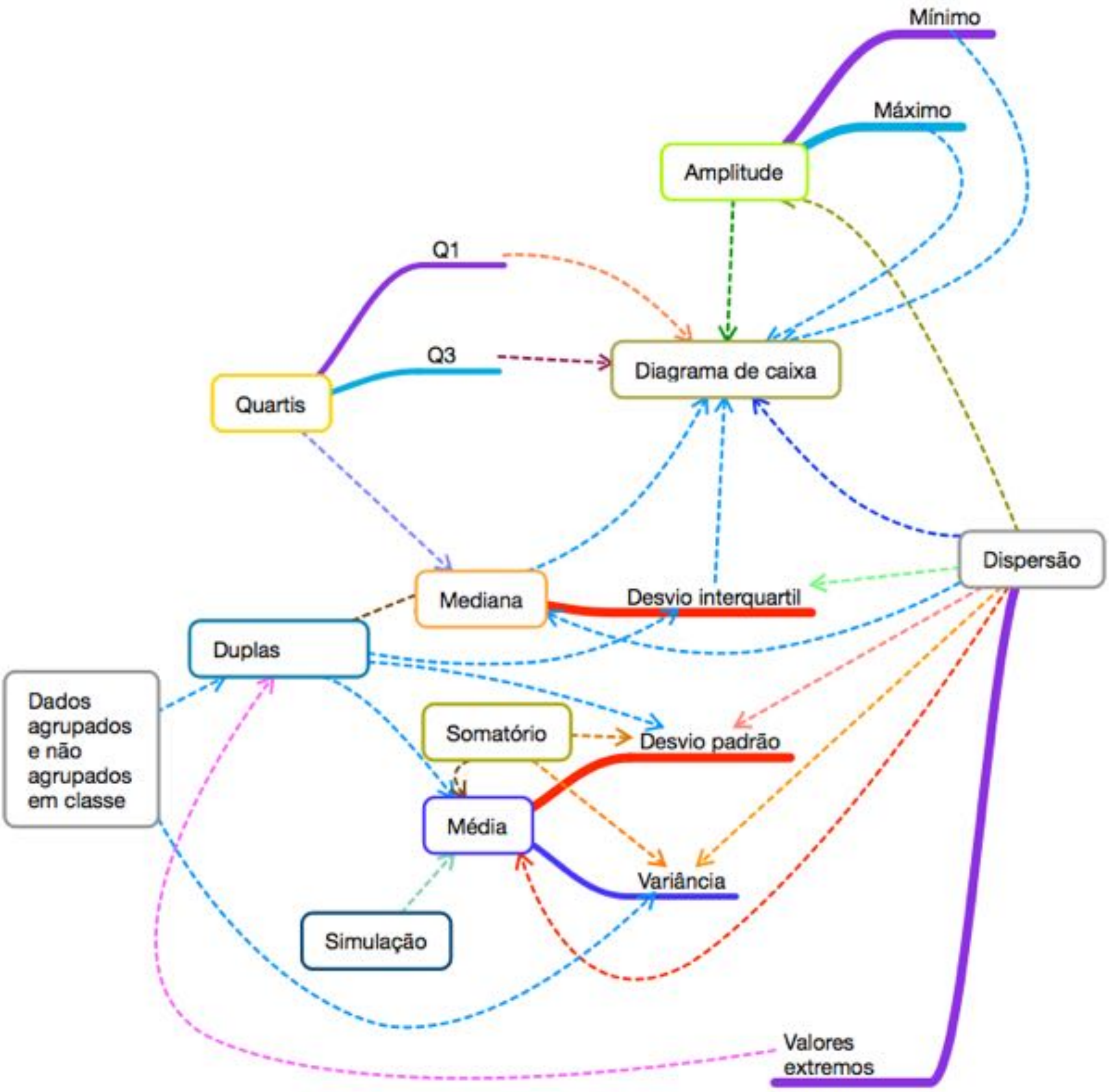


Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Comparando este livro com o livro brasileiro, observamos que não foi explorada a média ponderada e a noção de somatório (que é introduzida no livro do segundo ano). As medidas de dispersão, variância e desvio padrão abordadas no livro brasileiro, serão apenas exploradas no livro do segundo ano. A coleção francesa não aborda o desvio médio. O desvio interquartil apresentado no livro Fr_C1.1^{A} e no livro Fr_C1.2^{A} não é abordado no livro brasileiro. Assim, observamos em termos gerais restrições em ambas as coleções. Também não se exploram outras médias como a média harmônica, a geométrica, em nenhuma das duas coleções analisadas.

Na figura 71 apresentamos alguns conceitos do livro Fr_C1.2^{A}. Tal como no livro do primeiro ano, neste livro são apresentadas as atividades para depois se apresentar um texto com os temas. Neste texto, os temas são agrupados em função das necessidades de uso. Assim, se explora o diagrama de caixa e são apresentadas a dupla mediana e desvio interquartil e outras medidas de dispersão usadas no diagrama em caixa como a amplitude (e o conceito de máximo e mínimo), os quartis (Q1 e Q3) utilizados no cálculo do desvio interquartil e a mediana (Q2), além do intervalo interquartil e o desvio interquartil. Estas medidas no diagrama de caixa são usados para comparar duas séries. Em seguida, se apresenta a variância e o desvio padrão e como retomada à média necessária no cálculo destes. A noção de somatório é introduzida em uma pequena nota neste livro francês. Junto da utilização da mesma nas fórmulas da variância, desvio padrão e média. Ao contrário do livro brasileiro que faz uma divisão destas medidas junto a dados agrupados e não agrupados, neste livro isto é abordado pontualmente (através de notas e observações ao serem tratados os assuntos) e nas atividades. Neste livro, deixa-se de explorar a moda e algumas medidas de dispersão como o coeficiente de variação. Aborda-se o desvio interquartil não visto no livro do Br_C1.3^{A}. Contudo, não é tratado do desvio médio apresentado neste último.

Figura 71. Conceitos no livro Fr_C2.1[A].

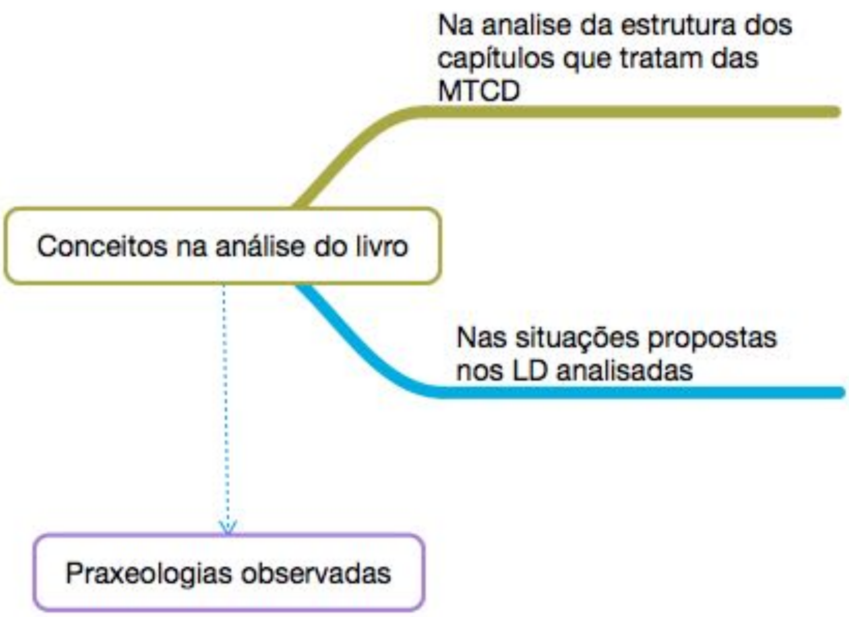


Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Esta apresentação simplificada nas figuras 69, 70 e 71 não dão conta dos conceitos que envolvem estas medidas analisadas no livro. Estes foram discutidos de forma mais detalhada em seções precedentes. Nestas, analisamos a estrutura dos capítulos que tratam das medidas de tendência central e de dispersão e das situações propostas. Na estrutura dos capítulos, fizemos uma análise predominantemente qualitativa de cada elemento do capítulo e dos conceitos apresentados nestes. E nas situações propostas, fizemos uma análise do texto e das questões resolvidas e propostas (figura 72).

Uma outra análise feita foi a praxeológica. Embora as praxeológicas se insiram dentro de um outro campo teórico, ao utilizar esta ferramenta teórica podemos pensar em formas diferentes de apropriação do conceito. Tomemos como referência o conceito de variância em uma abordagem que privilegia uma descrição algorítmica como sendo a média dos quadrados dos desvios em relação à média. Esta descrição está associada a uma técnica. Por outro lado, neste livro, temos uma outra técnica que também é utilizada na qual temos a variância como a diferença entre a média do produto dos efetivos pelo quadrado das observações e o quadrado da média. É uma outra forma de descrever e pensar sobre a variância. Assim, consideramos que as diferentes organizações praxeológicas que se formam em torno das MTCD podem contribuir para a construção do conceito. Por outro lado, a limitação destas também restringe o conceito destas medidas. Tomemos como um segundo exemplo as organizações praxeológicas que se formam em torno da média aritmética. Levantamos nesta tese diversas praxeologias, cada uma mostrando diferentes formas de lidar com a média em contextos diferentes. Uma destas foi determinar a média de dados não ordenados e ordenados. Esta se aplica a determinadas situações em que se podem aplicar determinadas técnicas, que podem mudar de uma instituição para outra. Logo, faz-se necessário também compreender as justificativas para o uso desta técnica e pode-se ir além conhecendo as teorias que justificam estas últimas. Assim, o conhecimento destas diferentes organizações praxeológicas podem por outro lado ampliar o conceito de média aritmética. Muitas das praxeologias levantadas não foram exploradas nos livros, o que empobrece o conceito e limita as suas concepções a algumas práticas. Destacamos que não estamos querendo associar a TAD ou o termo praxeologia à teoria dos campos conceituais, mas as observações levantadas nos LD, levando em conta este olhar, ou seja, as técnicas, os tipos de tarefas identificadas ou não, como exemplificamos para as diferentes definições apoiadas no algoritmo. Para média também podemos indicar limitações ou não na construção deste conceito, uma vez que estas representam situações de uso e justificativas para estas. Por isso, observamos uma ligação na figura 72 das praxeologias observadas com os conceitos na análise dos livros.

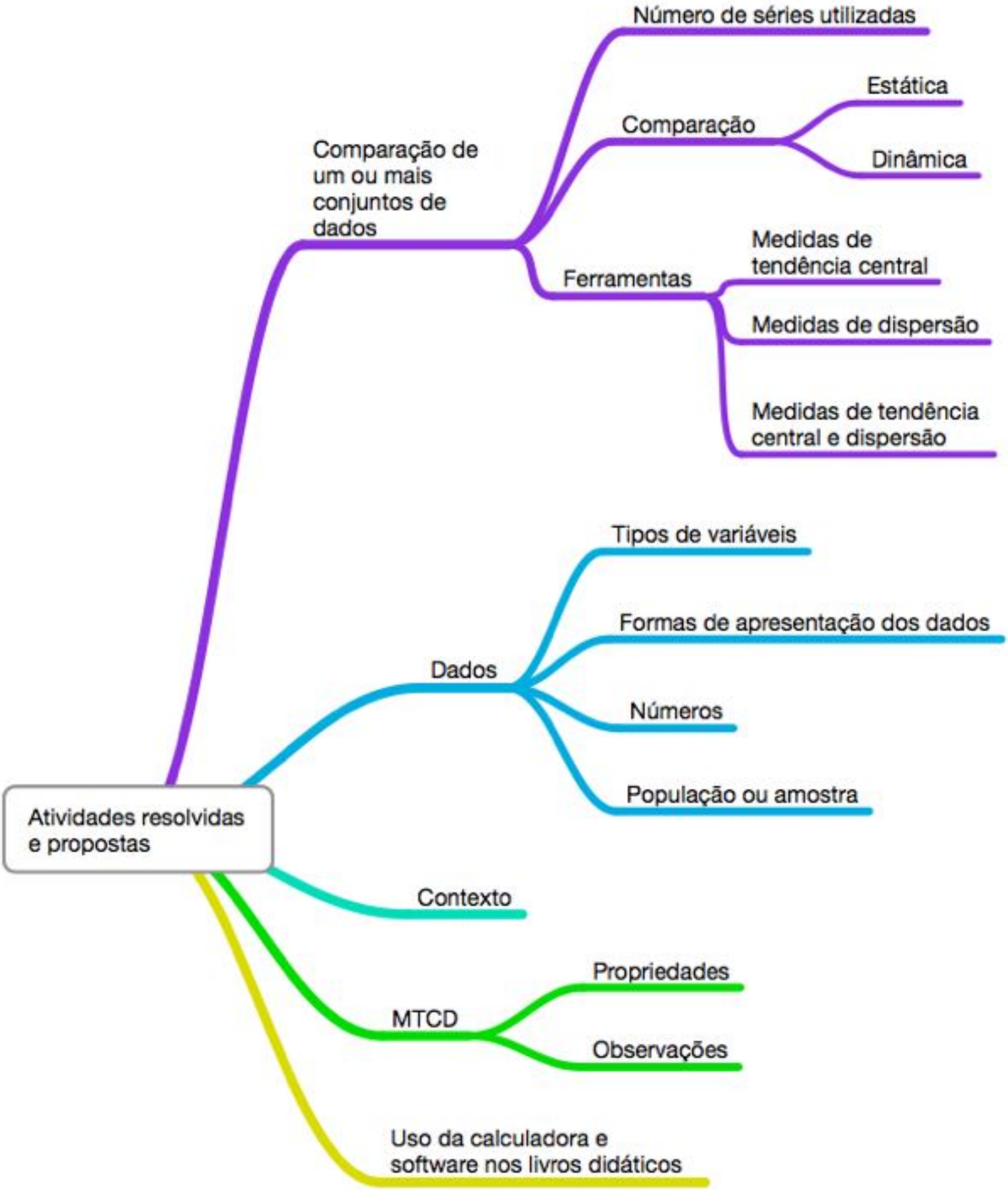
Figura 72. Conceitos na análise dos livros didáticos.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Como exemplo da exploração na análise da estrutura dos capítulos que tratam das medidas de tendência central e de dispersão, temos o conceito de média ponderada apresentado no livro Br_C1.3[A] e os problemas com a forma como este foi apresentado. Analisamos com mais detalhes este como outros conceitos e os problemas na sua forma de apresentação. Na análise das situações propostas, consideramos tanto o texto como as questões propostas e resolvidas. A figura 73 ilustra os elementos de análise das questões propostas e resolvidas. Apenas na forma de apresentação dos dados, levantamos 18 formas diferentes e analisamos a sua presença nos livros didáticos. Com relação às propriedades e observações, foram levantadas um total de 73. Algumas destas, foram frutos investigados em pesquisas e apontam para deficiências na compreensão dos estudantes da educação básica e em alguns casos na educação superior. Dessa forma, a nossa pesquisa procurou investigar com detalhes a apresentação dos conceitos nos livros didáticos e apontar as limitações, considerando diferentes elementos que envolvem a construção do conceito.

Figura 73. Atividades resolvidas e propostas nos livros didáticos.



Fonte: elaborado pelo autor da tese.

Abordaremos a seguir os prolongamentos e discussões da terceira parte desta tese.

3. PROLONGAMENTO DAS DISCUSSÕES E CONCLUSÃO DA TERCEIRA PARTE

Esta pesquisa se apoia em uma premissa de que existe transposição didática, que o saber sofre transformações e modificações, essa é a pedra angular que nos apoiamos. Os problemas investigados nos levaram a propor uma hipótese geral:

H_G. Existem limitações na transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os programas e para os livros didáticos.

Assim como hipóteses específicas que foram avaliadas e o seus resultados para confirmação ou não à hipótese geral.

Para responder a essas hipóteses, esta pesquisa se fundamenta na existência do fenômeno da transposição didática e nos estudos realizados sobre o mesmo por Chevallard e em duas teorias densas: a teoria antropológica do didático (TAD) e a teoria dos campos conceituais descritos no primeiro volume desta tese. Esses foram utilizados como suporte para a metodologia de análise dos programas e livros didáticos que apresentamos nesta tese. Para isso, fizemos um levantamento de diversas variáveis criadas para este fim, além de analisar as variáveis levantadas, procuramos observar outros elementos. No caso mais específico do livro, apresentamos a estrutura desse, suas partes, suas ligações, considerando que a forma como estas se interligam podem contribuir para a construção do conceito e refletir uma ideia de como se deve ensinar. Um ensino baseado na construção do conceito e não um ensino apoiado na memorização de técnicas e definições de algoritmos. Nesta análise, também podemos observar limitações e problemas com os conceitos indicados. Assim, estas diversas partes que comportam a metodologia e a análise dos dados se entrelaçaram para atender aos objetivos e nos auxiliar a responder as hipóteses de pesquisa. O nível de exigência e aprofundamento que exigimos nesta pesquisa fez com que nos limitássemos à análise mais específica dos livros, a uma coleção de cada país. Por outro lado, esta limitação possibilitou uma proposta metodológica que levou em conta um leque mais amplo de elementos a serem analisados. Podemos assim concluir que a metodologia possibilitou uma articulação dos diferentes elementos, tendo em vista responder as questões da pesquisa. Na próxima seção, apresentaremos as conclusões obtidas com esta pesquisa.

Apresentamos a seguir uma retomada das análises feitas, procurando uma síntese destas e uma confrontação com as hipóteses.

Com relação aos programas, tanto no Brasil como na França, estes não detalham o suficiente para podermos prever as situações nos livros didáticos e as praxeologias. O programa atual brasileiro não apresenta uma indicação da distribuição dos conteúdos por ano. Quando comparamos com o livro do Brasil analisado, isto se revela como um problema, uma vez que as medidas de tendência central e de dispersão são vistas apenas no último ano do ensino fundamental e médio, de forma pontual e não algo que deveria ser construído ao longo dos anos. No programa brasileiro anterior e nos programas franceses analisados, as MTCD são tratadas nos dois primeiros anos do ensino médio. Consideramos esta organização bem articulada, pois se pensa em uma evolução dos conhecimentos vistos no ensino fundamental de forma gradual e evolutiva. O livro francês analisado adota esta distribuição. O número de temas propostos no programa atual brasileiro é maior do que o programa anterior, contudo o desvio interquartil deixa de ser explorado. O programa francês atual é mais simplificado do que o anterior, sendo deixado de tratar da moda, que é abordada no programa brasileiro. Os dois programas, tanto o brasileiro quanto o francês também deixam de detalhar alguns tipos de médias. Assim, consideramos que os programas deveriam aprofundar mais a apresentação das medidas de tendência central e de dispersão, retomando as hipóteses iniciais que envolvem o programa:

Para os programas:

H_3. As limitações na transposição didática das medidas de tendência central e de dispersão para os programas são de naturezas diferentes;

Os resultados indicam que existem limitações tanto no programa brasileiro como no programa francês. Também observamos que elas são de naturezas diferentes:

- A apresentação de ambos os programas é limitada e não permite uma análise das praxeologias;
- A apresentação destas medidas no programa brasileiro atual deveria ser, ao longo dos dois primeiros anos, como o programa francês e como no programa brasileiro anterior;
- Tanto no programa brasileiro, como no francês, deixaram de abordar as propriedades e observações. No programa francês anterior foi apresentado tanto uma propriedade importante da média, como uma observação. Enquanto que no atual foi removido;

- Alguns dos temas relativos às MTCD deixaram de ser explorados nos dois programas. No programa francês, em vigor, deixaram de abordar a moda e o coeficiente de variação. No programa brasileiro deixaram de explorar o desvio interquartil e o coeficiente de variação.

CONCLUSÃO

Partimos para realização desta pesquisa, de estudo sobre média, mediana e moda que apontavam para restrições na aprendizagem dessas medidas. Em maior número, observamos os estudos sobre a média aritmética, com pesquisas que vêm dos anos 80. A média é um conceito amplo e muitas vezes é utilizado em outros contextos que não são da própria estatística. A necessidade da divisão de um dado conjunto em partes iguais, considerando uma divisão equitativa, está inserido no quadro das estruturas multiplicativas e aditivas. Contudo, quando pensamos no que representa a média das alturas dos alunos de uma dada sala, a média passa a representar a condensação levada ao extremo dos dados da sala referente à altura dos alunos e representa uma informação sobre esta sala que faz parte do objeto de estudo da estatística. Por outro lado, questões como por exemplo: sabendo-se que dividiu-se 15 barras de chocolates para 5 crianças, de forma que cada criança recebeu a mesma quantidade, determine quantos chocolates cada criança recebeu. São questões que envolvem a média aritmética. Contudo, neste caso, o sentido não é o das situações que envolvem a estatística. Logo, consideramos um primeiro elemento que diferencia esta pesquisa de outras que é o sentido proposto no quadro da estatística. A estatística apresenta uma estreita relação com a matemática e se apropria de ferramentas dessa para suas análises, como também, precisa dessa para o desenvolvimento de novas ferramentas trazidas pelas necessidades que surgem de pesquisas na área. Contudo, as ferramentas oferecidas pela matemática, quando se pensa no ensino de estatística na educação básica, devem ser vistas no quadro da estatística.

Portanto, a estatística oferece instrumentos para olhar o mundo e apresenta ferramentas apropriadas dentro dos limites estabelecidos pelo quadro teórico que a sustenta. Deve-se conduzir no seu ensino a utilizar-se de forma apropriada essas ferramentas e a refletir sobre os resultados apresentados por elas. Esta é a formação que se espera dos alunos, quando se introduz a estatística na educação básica, um instrumento para contribuir com a formação básica de um indivíduo. Instrumento que se apoia em dados para tomada de decisões, para fazer escolhas, para justificar procedimentos, seja ele no mundo do trabalho, na política interna ou mundial, na vida de uma família e em diversas situações de nossa época. Logo, consideramos que o ensino das MTCD deve ir além de manipulações algoritmicas. Neste sentido, a teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1990) foi um instrumento teórico fundamental nesta pesquisa.

Quando pensamos no ensino de estatística, as discussões são bastante antigas que ultrapassam a barreira dos séculos. Quando pensamos nas pesquisas no campo da educação estatística, na educação básica, estas são bem mais recentes, como apresentamos na introdução do primeiro volume. Portanto, esta pesquisa vem a contribuir no quadro das pesquisas realizadas na educação estatística, uma área atual. No Brasil, as pesquisas nessa área ainda são mais recentes do que na França.

Os nossos principais aportes teóricos foram: a teoria da transposição didática, a teoria dos campos conceituais e a teoria antropológica do didático (TAD) que são atuais e pertinentes para a nossa pesquisa.

Retomando as nossas hipóteses e questões de pesquisa consideramos que em parte os problemas com a aprendizagem das medidas de tendência central e de dispersão são efeitos da transposição didática nos programas e nos livros didáticos, procuramos nesta conclusão fazer uma breve retomada dessas questões, procurando pontuar cada um desses aspectos. Logo, iniciamos com os programas.

Sobre os programas, o que podemos concluir?

Observamos tanto no programa brasileiro como no francês limitações e estas têm efeito na transposição didática para o livro didático. Existem diferenças nessas limitações de país para país.

Ao contrário do programa francês, o programa brasileiro é apresentado com orientações. Destacamos que em alguns aspectos devemos considerar importante a limitação do programa às orientações, no que diz respeito a uma certa liberdade em função de características próprias de cada local. Contudo, por outro lado, deveria se definir uma agenda mínima para o Brasil, em relação ao programa e a carga horária, de forma a assegurar o mínimo que o país precisa para se desenvolver em Matemática e dentro dessa a estatística, como na França. Consideramos que além da carga horária e do programa, deveria-se definir o que seria abordado em cada ano para evitar o que observamos no programa brasileiro para as MTCD.

No programa francês, temos as medidas de tendência central e de dispersão definidas para o primeiro e segundo ano do ensino médio, de forma a aprofundar o que foi visto no ensino fundamental. Isso tem força de lei e os livros da França adotam essa determinação. As

Orientações Curriculares Nacionais não fazem esta delimitação, deixam em aberto. Os resultados podem ser vistos nas coleções aprovadas pelo PNLD. A maioria concentra essas medidas no último ano do ensino médio, isso foge ao que normalmente é apresentado nos livros de estatística, quando esses conceitos aparecem no início do livro, deixando a inferência estatística para o final, quando vamos tratar das médias das amostras em um nível mais aprofundado. A concentração das medidas de tendência central e de dispersão, na maioria dos livros analisados em um único ano, podia ser evitada se fosse definido no programa que deveria ser em dois anos. O programa poderia também definir que seriam nos dois primeiros anos do ensino médio. Assim, consideramos que com relação a esse aspecto, o programa brasileiro apresenta deficiências. Destacamos que no programa anterior ao atual (PCN+EM), se procurou esboçar uma distribuição dos temas nos três anos do ensino médio. Contudo, pela sua apresentação sucinta, não deixa claro a posição das medidas de tendência central e de dispersão.

Em relação aos assuntos abordados, o programa brasileiro atual apresenta as médias, a moda e a mediana como medidas de posição. Além de usar um termo mais amplo (medida de posição), ele não especifica quais médias. Como medidas de dispersão, temos o desvio médio, a variância e o desvio padrão. Logo, deixa-se de apresentar a amplitude, o coeficiente de variação e o desvio interquartil, apresentando por isso deficiências. Como não aprofunda o detalhamento desses temas, não temos muitos elementos para analisar sobre as situações de utilização e sobre as organizações praxeológicas que se formam em tornos deles.

O programa francês atual apresenta como medida de posição a média e a mediana, deixando de apresentar a moda. Como medida de dispersão, apresenta a variância, o desvio padrão e o desvio interquartil, deixando de indicar a amplitude e o coeficiente de variação, além de não detalhar outras médias. Esse programa também não apresenta muitos elementos que permitam uma análise das organizações praxeológicas.

Portanto, em relação aos assuntos, observamos limitações nos programas dos dois países, mudando o tipo de limitação de um país para o outro.

Com relação às situações propostas nos programas para a construção dos conceitos, observamos também problemas nos dois países. No programa francês anterior, tínhamos algumas situações propostas que remetiam a propriedades sobre a média e a mediana, que apresentamos no primeiro volume desta tese, que foram tirados do atual. Assim, em termos de propriedades e observações, os programas não exploraram essas. Algumas ainda resultantes de pesquisas que apontaram dificuldades na aprendizagem das MTCD. Os programas assim, se mostraram pouco sensíveis a esses estudos ou não consideraram que se deveria abordar isso no nível desses programas. O programa francês apresenta uma articulação da média com o desvio padrão e da mediana com o desvio interquartil que vem a enriquecer a exploração dessas duplas na análise de séries estatísticas. Contudo, o programa brasileiro não apresenta esse tipo de tratamento.

Um aspecto das situações são os contextos, eles são muito importantes na formação em estatística. O programa brasileiro anterior (PCN+EM) apresentou uma visão de contextualização sociocultural mais ampla do que o programa atual brasileiro e francês. Contudo, não orienta a sua aplicação para as MTCD. Os livros analisados, tanto na França como no Brasil, quando trata das MTCD, não apresentam esta perspectiva de contexto mais ampla.

Do ponto de vista do uso de ferramentas tecnológicas, essas são muito importantes na construção dos conceitos, como pudemos observar na coleção francesa. O programa francês apresenta uma proposta mais avançada em relação às MTCD, nesse aspecto tecnológico. O programa brasileiro faz uma apresentação muito geral, trata das planilhas apenas sem um uso mais aprofundado, não estabelecendo um vínculo com o desenvolvimento dos conceitos das MTCD. Ambos os programas deixam de explorar ferramentas tecnológicas mais atuais como os smartphones e tablets (no caso do Brasil, o programa atual é anterior à difusão dessas tecnologias).

Comparando o programa brasileiro com o francês, observamos que ambos possuem deficiências. Os seus limites mudam de país para país. Os limites envolvem tanto as situações como as praxeologias. As limitações no programa brasileiro são maiores do que no francês.

Trataremos a seguir dos livros analisados.

O que podemos falar dos livros didáticos?

Ao tratarmos dos livros didáticos, apresentamos uma visão mais geral desses e depois selecionamos uma coleção de cada país para uma análise mais detalhada.

Numa visão global, analisamos 14 coleções compostas de um total de 49 livros. Destas, 7 coleções do Brasil eram compostas de 21 livros e 7 coleções da França eram compostas de 28 livros. Pudemos observar que tanto no Brasil como na França, a estatística nos livros didáticos analisados ocupa uma posição com menor destaque em relação aos outros domínios. A participação das medidas de tendência central e de dispersão, tanto no Brasil como na França é a mesma em relação à estatística (em torno de 15% das médias das coleções de cada país). Contudo, pela menor participação da estatística em relação aos outros domínios nas coleções de LD no Brasil do que na França, temos uma menor participação das MTCD em relação às coleções dos livros didáticos no Brasil quando comparada com a França.

Observamos na França uma distribuição mais organizada e com uma dispersão menor do que no Brasil. No Brasil, as coleções possuem uma maior independência, não indicando claramente uma tendência. As MTCD na França são apresentadas em dois anos, numa perspectiva de continuação do que foi visto no ensino fundamental, sendo aprofundados alguns aspectos, considerando um gradativo aprofundamento dos conceitos. Na maioria das coleções brasileiras, as MTCD são vistas apenas no último ano do ensino médio de forma pontual.

Consideramos em relação ao aspecto global, que existem limitações na forma de apresentar as MTCD, mas estas limitações ficam bem mais fortes nas coleções do Brasil em que cada autor do livro didático tem uma maior liberdade, o que foge à ideia de um padrão para o Brasil. Como podemos observar na França, esse país também apresenta um programa de formação diversificada, tendo em vista os caminhos profissionais que cada cidadão pretende formar. Portanto, no ensino médio, temos três percursos a partir do segundo ano, além da formação técnica também presente no Brasil.

Outro aspecto não específico das MTCD, mas que influencia toda a educação básica, é que a grande maioria dos professores são funcionários do governo francês, mesmo em algumas escolas particulares. O salário desses e a estrutura das escolas está bem acima dos padrões do Brasil. Do ponto de vista da educação matemática, o pioneirismo nessa área e o grande investimento (ao longo de décadas) em pesquisas na área de educação na França, também são fatores que devem ser levados em conta. Os efeitos dos investimentos em educação não são algo que podem ser sentido, muitas vezes de imediato, mas que pavimenta o futuro do país. Há algum tempo, a França passa por cortes em educação que também vão ter influência no futuro.

Para uma análise mais detalhada dos livros, selecionamos duas coleções de cada país. Isso permitiu aprofundar as nossas análises. Contudo, por outro lado, limitam-se os seus resultados. Esse aprofundamento também permitiu observar a metodologia de análise que também é uma contribuição desta pesquisa. Tanto na coleção francesa como na coleção brasileira, observamos limitações e essas foram de várias naturezas. A metodologia proposta possibilitou observar essas diversas limitações.

Com relação aos assuntos abordados, observamos que na coleção francesa foi abordado no primeiro ano do ensino médio, a média, a mediana, a moda, a amplitude e o desvio interquartil. No livro do segundo ano, temos a média, a mediana, o desvio interquartil, a variância, o desvio padrão e a amplitude. Assim, temos um número maior de itens do que os indicados no programa atual da França.

No livro analisado do Brasil, observamos a média aritmética, a média aritmética ponderada, a mediana, a moda, o desvio médio, a variância e o desvio padrão. Assim, o livro se limita a apresentar o que consta no programa atual no Brasil (OCEM).

Do ponto de vista das praxeologias, limitamos a maioria dos casos sobre o gênero de tarefa "determinar". Assim, a pesquisa não abordou todos os gêneros, mas o mais frequente, tanto nas coleções do Brasil como na coleção francesa. Destacamos que nem todos os assuntos foram tratados nessas organizações praxeológicas, por exemplo, as organizações praxeológicas sobre o desvio interquartil não estavam no livro brasileiro, uma vez que este assunto não foi abordado no livro. Outro exemplo é o desvio médio, que apesar de ser apresentado no livro do Brasil, esse não foi considerado, pois não correspondia ao que nós pesquisamos sobre o saber científico. No caso da média ponderada no livro do Brasil, tivemos uma apresentação que divergia da forma como ela foi apresentada no saber científico. Para não desconsiderar este item importante, procuramos fazer uma equivalência com a forma como esta deveria ser apresentada, tomando por base os textos de referência que utilizamos para tratar do saber científico. Dessa forma, poderíamos fazer uma comparação com a coleção francesa e separamos dessa, apenas o que de fato era média ponderada. Assim, o que era peso, deveria ser considerado na maioria dos casos como efetivos. Quando se tratava de peso propriamente dito, no sentido do saber científico, agrupamos as questões em média ponderada. Esses problemas com a transposição do saber científico para a coleção brasileira, no nosso entender, pode gerar problemas na aprendizagem dessas medidas, caso o professor não considere como inadequada e faça os devidos comentários.

As praxeologias também refletem a ausência dos assuntos. Na tabela 103, apresentamos as praxeologias presentes em ao menos uma das coleções. A praxeologia sobre o desvio médio não foi apresentada, pois ela tinha problemas no livro brasileiro, assim não foi analisada. Das 9 praxeologias, 7 foram observadas no Brasil e todas as 9 foram observadas na França. Portanto, em termos de presença e ausência, a coleção francesa se destaca. Em termos da quantidade de atividades que envolviam essas praxeologias, a superioridade da coleção francesa é nítida, com mais de duas vezes a encontrada na coleção brasileira. Outro ponto observado foi a variedade de praxeologias presentes na coleção. Sobre média aritmética (incluindo a ponderada e a combinada), tivemos um total de 8 organizações praxeológicas pontuais levantadas e 15 técnicas diferentes para os 8 tipos de tarefas dessas organizações. Na coleção brasileira foram observadas 6 organizações, enquanto que na coleção francesa foram

7. Nesse aspecto, a coleção francesa apareceu em um número superior. Considerando as técnicas, foram levantadas 15 delas. Na coleção Br_C1 levantamos 6 técnicas utilizadas. Na coleção Fr_C1 tivemos 12, ou seja, o dobro de técnicas da coleção brasileira. Observamos também uma maior concentração da coleção Br_C1 em cima da técnica τ_{m_01-1} com 60,38 % das técnicas utilizadas, sendo seguida pela técnica τ_{m_04-1} com 20,75%. Na França, as técnicas mais utilizadas foram a τ_{m_02-1} com 18,92%, sendo seguida pela técnica τ_{m_01-2} com 18,02 %.

Tabela 103. Praxeologias observadas nos livros didáticos analisados.

MTCD		França		Brasil	
		N	%	N	%
Medidas de tendência central	Média aritmética	206	33,17	97	33,22
	Média aritmética ponderada	2	0,32	4	1,37
	Média aritmética combinada	8	1,29	1	0,34
	Mediana	131	21,10	51	17,41
	Moda	12	1,93	59	20,21
Medidas de dispersão	Amplitude	45	7,25	0	0,00
	Desvio interquartil	67	10,79	0	0,00
	Variância	23	3,70	31	10,62
	Desvio padrão	127	20,45	49	16,78
Total		621	100,00	292	100,00

Fonte: elaborado pelo autor da tese com base nos dados levantados.

Analisando a tabela 103 no conjunto, observamos uma maior diversidade na coleção francesa. Apesar disso, pode-se observar limitações de ambas as coleções dos dois países, essas podem repercutir nas pesquisas sobre a aprendizagem desses conceitos. Tomemos como exemplo o estudo de Cazorla (2002), realizado com estudantes universitários, no qual em uma questão sobre média ponderada observamos que no pré-teste com 757 sujeitos, apenas 30,8% apresentaram uma resposta totalmente correta. Será que o problema estaria apenas nos alunos que não estudaram bem esse assunto ou não lembravam mais? O problema poderia, por outro lado, ser por conta dos próprios livros em que isso não é visto, ou o fato dos professores não terem abordado esse assunto. O que observamos na tabela 103 é que se dependermos desses livros para a construção do conceito de média ponderada, ou seja, se o professor se limitar a explorar esses livros, podemos ter problemas com a aprendizagem desses conceitos. Na tabela 103, pode-se verificar que na coleção brasileira tivemos apenas quatro (1,37%) atividades[26] sobre média aritmética ponderada. Dessas, eram duas que tratavam da apresentação da fórmula no capítulo e no resumo desse e uma questão resolvida. Não observamos nenhuma questão proposta. Caso venha a limitarmos as atividades do livro, o aluno não resolveria nenhuma questão sobre média ponderada. Na coleção francesa, a média ponderada também apresenta limitações, tendo apenas duas atividades (0,32% do total). Os resultados observados nos livros didáticos indicam que se os professores se limitarem as atividades nos livros didáticos sobre média ponderada, teríamos uma formação limitada dos alunos, pois os livros analisados exploram pouco esse conceito (tanto no Brasil como na França).

Os resultados sobre as praxeologias indicaram que além de mal exploradas, muitas delas sequer foram abordadas nos livros, de acordo com os resultados que apresentamos. Essas se concentraram mais nos tipos de tarefas e técnicas. As tecnologias foram observadas em poucos casos nos livros didáticos. As teorias deixaram de ser exploradas nesses livros. Portanto, podemos concluir que ambas as coleções apresentam limitações no que diz respeito às praxeologias investigadas.

Outro aspecto levantado no LD são as situações que dão sentido ao conceito. Na maioria dos itens analisados, observamos limitações em ambas as coleções dos dois países. Ao analisarmos o saber científico sobre as medidas de tendência central e de dispersão, bem como nas pesquisas sobre o tema, levantamos propriedades e observações que podem contribuir para construção do conceito dessas medidas, como ilustramos no capítulo que abordamos a teoria dos campos conceituais. Algumas dessas observações foram indicadas por pesquisadores como responsáveis por problemas na construção dos conceitos e respostas inadequadas a testes avaliativos. O que observamos é que os livros didáticos não exploram muitas dessas propriedades e observações e quando utilizam-nas se limitam a poucas. Logo, se considerarmos esses livros como principal base de apoio para o professor, os problemas apontados pelas pesquisas podem se repetir pelas deficiências apontadas nos livros didáticos. Assim, podemos pensar que essas limitações nos LD podem gerar deficiências na aprendizagem, mas os livros não contribuem para superar essas deficiências, como também apresentam o conceito limitado à descrição apoiada no algoritmo e não no conceito.

---

[26] Tivemos um número maior de questão se considerarmos que o livro brasileiro trata a média de dados agrupados por observações e efetivos e agrupados em intervalos de classe como média ponderada (como já descrevemos antes). Contudo, considerando o conceito de média ponderada como foi usado na pesquisa de Cazorla (2002) e como apresentamos ao abordar o saber científico, o LD brasileiro se limita a 4 atividades sobre média ponderada.

Ao analisarmos a estrutura dos livros, observamos que o livro brasileiro possui uma apresentação bastante tradicional, que não colabora para a construção dos conceitos, nem às demandas atuais em termos de formação. Uma formação que leve o aluno a refletir e explorar situações novas utilizando os seus antigos esquemas, reordenandos-os, combinando-os ou ainda criando novos esquemas. Nesse aspecto, o livro francês apresenta uma proposta que apesar de ter limitações, é bem mais atual. Comparando ainda os dois livros franceses, a versão mais nova para o segundo ano do ensino médio é melhor organizada do que a do primeiro ano, mostrando uma preocupação dos autores no aperfeiçoamento da coleção francesa[27].

Nas análises, apresentamos as deficiências em cada um dos outros itens levantados. Consideramos que a metodologia da pesquisa que desenvolvemos permitiu uma análise ampla de diversos aspectos associados à construção dos conceitos. A ferramenta de análise elaborada na metodologia indicou deficiências de diferentes naturezas nessas coleções, tanto no Brasil como na França. No conjunto, as deficiências na coleção do Brasil foram maiores do que na França, com as apresentações de conceitos e fórmulas com problemas, o que por sua vez afetará a construção dos conceitos pelos alunos. No caso do professor, se o mesmo se limitar a considerar que o que está no livro “sempre” está certo, não fazendo reflexões sobre o conceito, isso será um grande problema para a aprendizagem dos alunos.

Outro problema que levantamos nas duas coleções foram as respostas fornecidas aos professores. Essas respostas eram apresentadas na França em um livro à parte, chamado livro do professor. No Brasil, temos um livro que combina o livro do professor com o do aluno, apesar da proposta brasileira para o livro do professor ser bem mais completa do que a francesa, pois vai além das respostas das questões e apresentações mais gerais. Observamos que com relação às respostas que tratam das medidas de tendência central e de dispersão, essas poderiam ter aprofundado as questões trazendo à discussão conceitos importantes sobre essas medidas. No lugar disso, as coleções selecionadas apenas apresentavam as respostas e comentários superficiais. Logo, as respostas fornecidas para o professor, na maior parte dos casos, no lugar de ampliar os conceitos, empobreciam a discussão, tanto no Brasil como na França.

Consideramos que a pesquisa não deve se limitar a estes resultados, mas ser ampliada para outros livros que contudo demandam tempo de investigação, face ao nível de

[27] Observamos também mudança na posição destes autores na obra. No livro do primeiro ano (GAUTHIER, PONCY, 2009a), temos como direção René Gauthier e Michel Poncy e no livro do segundo ano (PONCY, GUICHARD, RUSSIER, 2011a) a direção é de Michel Poncy, Yves Ghichard e Marie-Christine Russier.

detalhamento que apresentamos. Esta pesquisa não visou apenas a responder as hipóteses, mas propor uma metodologia de análise de livros didáticos, levando em conta diversos aspectos e trazendo categorias diferentes de análises apoiadas em duas teorias densas.

Esta pesquisa também apresentou um levantamento do saber científico indicando que para análise do processo de transposição didática é necessário também analisar o saber científico. Que esse saber também apresenta divergências, o que nos leva a concluir, ancorados na TAD, que o saber científico está presente em diferentes instituições e que o saber compartilhado em uma instituição produtora do saber não é idêntico à outra instituição produtora (Academia). Sendo assim, essas divergências que vão para o livro podem se apoiar em algumas dessas instituições para sua transposição didática.

Consideramos também importante a vigilância desse saber, que no processo de transposição, pode apresentar modificações que alteram o sentido do saber original.

REFERÊNCIAS

ACIOLY-RÉGNIER, Nadja Maria. Educação Formal, não formal e informal: desconstruindo muros que separam e enfatizando os poros invisíveis entre diferentes formas de aprender. In: LIMA FERREIRA, A.; ACIOLY-RÉGNIER, Nadja Maria (coord.). **Psicologia e processos interativos nos espaços de periferia**: a formação humana em questão. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, 2011. p. 41- 59. ISBN: 978-85-415-0009-8.

ACIOLY-RÉGNIER, Nadja Maria.; MONIN, Noëlle. Da Teoria dos Campos Conceituais à Didática Profissional para a formação de professores: contribuição da psicologia e da sociologia para a análise de práticas pedagógicas (2009) **Educação Unisinos** 13(1) 5-16, jan/abr 2009.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007. 218 p.

AMARAL, João Tomás do. **Minimanual Compacto de Matemática**: teoria e prática. Ensino Fundamental. São Paulo: Rideel, 1999. ISBN: 85-339-0294-8.

ANDRADE, Vladimir L. V. X. de. Didática da Matemática: transformações no olhar para a sala de aula. In: MENEZES, J. E.; SOUZA, C. M. (Org.). **Tópicos de História, Recreações e Didática da Matemática**. v. 3. Recife: Universitária da UFRPE, 2007. p.105-124

ANDRADE, Vladimir.L.V.X.; ARAÚJO, Lucia de Fátima.; LIMA, Anna Paula de Avelar Brito.; LIMA, Iranete Maria da Silva (orgs). **Pesquisas em Fenômenos Didáticos**: alguns cenários. Recife: Editora Universitária da UFRPE (EDUFRPE), 2010. p.195(Coleção Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática). ISBN: 978-85-7946-060-9.

ANDRADE, Vladimir. L. V. X. de; BASTOS, Heloísa F. B. N. Avaliação das mudanças nas concepções dos licenciandos sobre o papel do professor de matemática. **Educação Matemática em Revista**, Recife, v. 13, n. 20/21, p. 87-99, dez. 2006.

ANDRADE, Vladimir L. V. X. de; RÉGNIER, Jean-Claude. A formação do licenciando em Matemática para o ensino de Estatística na Educação Básica: problemas e desafios. In: II Seminário Internacional de Educação Matemática, São Paulo. **Anais**... São Paulo: Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – UNIBAN, 2009a.

ANDRADE, Vladimir L. V. X. de; RÉGNIER, Jean-Claude. Problems and challenges in teacher training of mathematics students with a view to preparing them to teach statistics in basic education. In: International Congresso of Mathematics, Engineering and Society. **Anais**... Curitiba: PUCPR, 2009b.

ANDRADE, Vladimir L. V. X. de; RÉGNIER, Jean-Claude. Formação do licenciando em matemática: da didática da Matemática para didática da Estatística. In: ANDRADE, V.L.X. de; ARAÚJO, L. F.; BRITO LIMA, A. P.; LIMA, I. M. da S.(orgs) **Pesquisas em Fenômenos Didáticos**: alguns cenários. Recife: Editora Universitária da UFRPE, 2010. p.159-185. (Coleção Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática). ISBN:978-85-7946-060-9.

ARAÚJO, Abraão. J. **O Ensino de Álgebra no Brasil e na França**: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da Teoria Antropológica do Didático. 2009. 291 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação e Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14724**: Informação e documentação – Trabalhos acadêmicos: apresentação. Rio de Janeiro, 2011a.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 15287**: Informação e documentação - Projeto de pesquisa: apresentação. Rio de Janeiro, 2011b.

BACKES, L.; ACIOLY-RÉGNIER, N. M. Transmission et Rupture dans l'analyse du travail enseignant: une étude exploratoire par l'utilisation de l'hybridisme technologique numérique. In: Biennale Internationale de l'éducation, de la formation et des pratiques professionnelles. **Annales**… Paris: France. ABIEFPP. 2012.

BARRA, R. et al. **Transmath 2de**. Paris : Nathan, 2010.

BARRA, R. et al. **Transmath 1re S**. Paris : Nathan, 2011.

BARRA, R. et al. **Transmath TERM S Enseignement Spécifique**. Paris : Nathan, 2012a.

BARRA, R. et al. **Transmath TERM S Enseignement Spécialité**. Paris : Nathan, 2012b.

BARROSO, Juliane M (Ed). **Conexões com a matemática**. São Paulo: Moderna, 2010. v.1 (Obra em 3 volumes para o ensino médio).

BARROSO, Juliane M (Ed). **Conexões com a matemática**. São Paulo: Moderna, 2010. v.2 (Obra em 3 volumes para o ensino médio).

BARROSO, Juliane M (Ed). **Conexões com a matemática**. São Paulo: Moderna, 2010. v.3 (Obra em 3 volumes para o ensino médio).

BATANERO, Carmen. Significado y comprensión de las medidas de posición central. **UNO**, v. 25, p.41-58, 2000.

BATANERO, Carmen. **Didáctica de La Estadística**. Granada: SRFC, 2001. Disponível em: < http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm>. Acesso em: 6 ago. 2010.

BATANERO, Carmen.; MAYÉN, Silvia.; DÍAZ, Carmem. Student's semiotic conflicts in the concept of median. **Statistics Education Research Journal**, 8(2), 74-93. IASE/ISI, Nov. 2009.

BELTRAMONE, Jean-Paul et al. **Déclic mathématiques seconde**. Paris: Hachette Éducation, 2010.

BELTRAMONE, Jean-Paul et al. **Déclic mathématiques 1re S**. Paris: Hachette Éducation, 2011.

BELTRAMONE, Jean-Paul et al. Déclic mathématiques TS Enseignements Spécifique et de Spécialité. Paris: Hachette Éducation, 2012.

BESSA DE MENEZES, Marcus. **Praxeologia do professor e do aluno**: uma análise das diferenças no ensino de equações do segundo grau. 2010. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

BETTONE, Alain; DECUGIS, Marie-Ange; DOLLO, Christine ; RODRIGUES, Christophe. **Les sciences économiques et sociales**: Enseignement et apprentissages. Bruxelles: De Boeck, 2004. Acesso em: 23 de set. 2011. Disponível em: < http://books.google.it/books?id=y1VYfpg6Y24C&printsec=frontcover&hl=fr&source=gbs_g_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false >.

BIHOUÉE, Pascal; COLLIAUX, Anne. **Enseigner différemment avec les TICE**. Eyrolles: Paris, 2011.

BOUVIER, Jean-Pierre. **Maths**: collection pixel. Paris: Bordas, 2010.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Prefácio: Isaac Asimov. Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. 496 p.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em 16 de outubro de 2011.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: introdução. 2 ed. Rio de Janeiro: DP &A, 2000a.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**: bases legais. Brasília: Ministério da Educação, 2000b.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2000c.

BRASIL. Congresso Nacional. **PNE**: Plano Nacional De Educação: Lei nº 10.172/2001. Brasília: Congresso Nacional: 2001.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Básica, 2006. 2. v. disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/ arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 24 maio 2011.

BRASIL, Congresso Nacional. **LDB**: Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional: lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996 que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. 5. ed. Brasília : Câmara dos Deputados, Coordenação Edições Câmara, 2010. Disponível em: < http://bd.camara.gov.br/bd/bitstream/handle/bdcamara/2762/ldb_5ed.pdf>. Acesso em: 24 de maio de 2011.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos**: PNLD 2012: Matemática. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Básica, 2011.

BRAULT, Roger et al. **Mathématiques 3e**. Paris: Hachette livre, 2012. Collection Phare.

BRITO MENEZES, Anna Paula. **Contrato Didático e Transposição Didática**: Inter-relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6ª série do Ensino Fundamental. 2006. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação e Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

BROUSSEAU, Guy. **La Théorie des Situations Didactiques**. 1997. Curso dado na Universidade de Montreal durante a atribuição do título de Doutor Honoris Causa. Acesso em 25 set. 2011. Disponível em: < http://daest.pagesperso-orange.fr/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf>.

CAI, Jinfa. Exploring students' conceptual understanding of the averaging algorithm. **School Science and Mathematics**, Stillwater, v. 98, n.2. p. 93-98, 1995.

CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. O professor e o tempo. **Revista Tópicos Educacionais**, Recife, v.15. n. 1/2, p. 105-116, 1997.

CARRAHER, Terezinha; CARRAHER, David; SCHILIEMANN, Analúcia. **Na vida dez, na escola zero**. 15 ed. São Paulo: Cortez, 2010.

CARVALHO, Sérgio. **Estatística Básica**: teoria e 150 questões. 2. Ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006. 492 p.

CARVALHO, J. I. F. De. **Média aritmética nos livros didáticos nos anos finais do ensino fundamental**. 2011. 141 f. Dissertação (Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

CAZORLA, Irene. **A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos**. 2002. 335 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

CAZORLA, Irene. **O ensino de Estatística no Brasil.** Disponível em: http://www.sbem.com.br/gt_12/arquivos/cazorla.htm. Acesso em 10 de set. 2009.

CAZORLA, Irene; SANTANA, Eurivalda (org.). **Do tratamento da informação ao letramento estatístico**. Itabuna: Via Litterarum, 2010.

CHESNÉ, Jean-François; YAOUANQ, Marie-Hélène (dir). **2e Collection Math´x**. Paris: Didier, 2010.

CHESNÉ, Jean-François; YAOUANQ, Marie-Hélène (dir). **1re S Collection Math´x**. Paris: Didier, 2011.

CHESNÉ, Jean-François; YAOUANQ, Marie-Hélène (dir). **Term S Enseignement Spécifique Programme 2012**. **Collection Math´x**. Paris: Didier, 2012a.

CHESNÉ, Jean-François; YAOUANQ, Marie-Hélène (dir). **Term S Enseignement Spécifique Programme 2012**. **Collection Math´x**. Paris: Didier, 2012b.

CHEVALLARD, Yves. **Les Programmes et la Transposition Didactique Illusion, contraintes et possibles**. Texto disponível na página pessoal do autor e apresentado em uma conferência em 24 de outubro de 1985, publicado com outra paginação no Jornal da APMEP, n.352, p.32-50 em fevereiro de 1986. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=107&var_recherche=Les+programmes+et+la+transposition+didactique+Illusion%2C+contraintes+et+possibles >. Acesso em: 31 ago. 2011.

CHEVALLARD, Yves. **La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigner**. 240 p. Incluído: CHEVALLARD, Y. JOHSUA M. A. Un exemple d'analyse de la transposition didactique. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Yves. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches em didactique des mathématiques**, Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage. v.12.1, n.1, p.73-111. 1992.

CHEVALLARD, Yves. Conceitos fundamentais da didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUN, J (dir.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. cap. 2, p.115-153. 1996.

CHEVALLARD, Yves. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques : l'approche anthropologique. In :L'Université d'Eté, 1998, p.91-118. **Actes de l'Université d'Eté la Rochelle**, Irem, Clermont-Ferrand, France.1998.

CHEVALLARD, Yves. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du Didactique. **Recherches em didactique des mathématiques**, Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage. v.19.2, n.56, p.221-265.1999.

CHEVALLARD, Yves. **Organiser l'etude. 1**. Structures & fonctions. Curso ministrado na XIe école d'été de didactique des mathématiques, 11. p. 21-30, ago. 2002a.

CHEVALLARD, Yves. **Organiser l'etude. 3.** Ecologie & régulation. Curso ministrado na école d'été de didactique des mathématiques, 11. p. 41-56, ago. 2002b.

CHEVALLARD, Yves. Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathematiques. In: MAURY, S. ; CAILLOT, M. (éds). **Rapport au savoir et didactiques**, Paris : Éditions Fabert. p.81-104. 2003.

CHEVALLARD, Yves. La TAD face au professeur de mathématiques. In: **Seminário** organizado pelo laboratório Didactique de Disciplines Scientifiques et Technologiques (DiDiST), Toulouse, 2009. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/ article.php3?id_article=162 >. Acesso em: maio 2011.

CHEVALLARD, Yves. **Iniciação à Teoria Antropológica do Didático**. São Paulo: UNIBAN, 2011. (Curso ministrado na Escola de Altos Estudos).

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna. La sensibilité de l'activé mathématique aux ostensifs. Objet d'etude et problematique. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage. v.19.1, n.55, p.77-123, 1999.

CHOQUER-RAOULT, A. et al. **Maths Repères Nouveau Programme 2de**. Paris: Hachette Éducation, 2010.

CHOQUER-RAOULT, A. et al. **Maths Repères Nouveau Programme 1re**. Paris: Hachette Éducation, 2011.

CHOQUER-RAOULT, A. et al. Maths Repères Nouveau Programme T^{erm}S Enseignement Spécifique et Spécialité. Paris: Hachette Éducation, 2012.

COUTANSON, Bernard. **La question de l'éducation statistique et de la formation de l'esprit statistique à l'école primaire en France**: étude exploratoire de quelques caractéristiques des situations inductrices d'un enseignement de la statisitque au cycle III. 2010. 283 f. Tese (Doutorado em Sciences de l'Éducation) – Universidade Lumière Lyon 2, Lyon, 2010.

DANCEY, Christine P.; REIDY, John. **Estatística sem matemática para psicologia**. Tradução Lorí Viali. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006. 608 p.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010a. v.1 (obra em 3 volumes para o ensino médio).

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010b. v.2 (obra em 3 volumes para o ensino médio).

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010c. v.3 (obra em 3 volumes para o ensino médio).

DA ROCHA FALCÃO, Jorge. T. **Psicologia da educação matemática**: uma introdução. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. Coleção tendências em educação matemática

DEHON, Catherine; DROESBEKE, Jean-Jacques; VERMANDELE, Catherine. **Eléments de Statistique**. 5 ed. Bruxelles: Université de Bruxelles, 2008. – Fonte: Biblioteca Chevreul – Lyon2.

DESCHAMPS, Claude (dir.). **Symbole Maths 2^{e} Nouveau Programme 2009**. Paris: Belin, 2010.

DESCHAMPS, Claude (dir.). **Symbole Maths 1re S Nouveau Programme 2011**. Paris: Belin, 2011.

DESCHAMPS, Claude (dir.). Symbole Maths T^{erm} S Enseignement Spécifique Programme 2012. Paris: Belin, 2012a.

DESCHAMPS, Claude (dir.). Symbole Maths T^{erm} S Enseignement Spécialité. Programme 2012. Paris: Belin, 2012b.

DODGE, Yadolah. **Premiers pas en Statistique.** Paris: Springer, 2006.

DODGE, Yadolah. **Statistique**: Dictionnaire encyclopédique. Paris: Springer, 2007a.

DODGE, Yadolah. **Statistique**: Dictionnaire encyclopédique (versão eletrônica). Paris: Springer, 2007b. ISBN :978-2-287-720-93-2.

DROESBEKE, Jean-Jacques; TASSI, Philippe. Historie de la Statistique. Paris: **Presses Universitaires de France**, 1990. ISBN: 2 13 0430147

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e introdução: Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

EURYDIC. **National summary sheets on education systems in Europe and ongoing reforms**: France, 2009. EACEA - Education Audiovisual & Culture Executive Agency, Bruxelas, 2009. Disponível em: <http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/eurybase/national_summary_sheets/047_FR_EN.pdf>. Acesso em: 01/04/2011.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo dicionário Eletrônico Aurélio**, versão 6.1. 4. ed. Curitiba : Positivo, 2008. (CD-ROM).

FRADE, C.; ACIOLY-RÉGNIER, N. M.; JUN, L. Beyond deficit models of learning mathematics: sociocultural directions for change and research. In: CLEMENTS, M.A. K.; BISHOP, A.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J.; LEUNG, F. (Eds.). **Third International Handbook of Mathematics Education.** New York: Springer, 2013. p. 101-144. ISBN 978-1-4614-4683-5

FRANCE, Ministère de l'Éducation Nationale de la Recherche et de la Technologie. **Bulletin Officiel de l´Éducation Nationale**: Programmes des Lycées: Programmes de la classe de seconde génerale et technologiques. v. 2, n. 6, 12 ago. Paris: Ministère de l'Éducation Nationale, de la Recherche et de la Technologie, 1999.

FRANCE, Ministère de l'Éducation Nationale et de la Recherche. **Bulletin Officiel de l´Éducation Nationale**: Classe de premiere : Mathématiques série scientifique. n. 7, 31 ago. Paris: Ministère de l'Éducation Nationale et du ministère de la Recherche, 2000. Disponível em :www.education.gouv.fr/bo/2000/hs7/vol5mathsc.htm. Acesso em 11 de jun. 2012.

FRANCE, Ministère de l'Éducation Nationale. **Bulletin Officiel de l´Éducation Nationale**: Programmes des Lycées: Programme de l´Enseignement des Mathématiques en Classe Terminale de la Série Scientifique. n. 4, 30 ago. Paris: Ministère de l'Éducation Nationale, 2001. Disponível em: <http://www.education.gouv.fr/bo/2001/hs4/default.htm>. Acesso em: 26 de set. 2011.

FRANCE, Ministère de l'Éducation Nationale. **Bulletin Officiel du Ministère de l'Éducation Nationale**: Mathématiques: classe de seconde. n. 30, 23 juil. Paris: Ministère de l'Éducation Nationale, 2009a. Disponível em: <http://media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_ mathematiques_seconde_65523.pdf.>. Acesso em: 22 ago. 2010.

FRANCE, Ministère de l'Éducation Nationale. **Ressources pour la classe de seconde** : Probabilités et Statistiques. Paris :ÉduSCOL, 2009b.

FRANCE, Ministère de l'Éducation Nationale. **Bulletin Officiel Spécial**: annexe Mathématiques Cycle Terminal de la Série Scientifique: Classe de Première. n. 9, 30 set. Paris: Ministère de l'Éducation Nationale, 2010a. Disponível em: < http://media.education.gouv.fr/file/special_9/21/1/mathsS_155211.pdf >. Acesso em 26 de set. 2011.

FRANCE. Ministère de l´Éducation Nationale. **Le Nouveau Lycée**: repères pour la rentrée 2010. França: Ministère de l´Éducation Nationale, 2010b. Disponível em:< http://media.education.gouv.fr/file/reforme_lycee/91/8/Nouveau-lycee-Reperes-pour-la-rentree-2010_133918.pdf>. Acesso em 26 de set. 2011.

FRANCE, Ministère de l'Éducation Nationale. **Ressources pour la classe de première génerale et technologique.** Statistiques et probabilités. Paris: ÉduSCOL, 2012.

FREUND, John E. **Modern Elementary Statistics**. 3 ed. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood, 1967.

GAL, Iddo (1995). Statistical tools and statistical literacy: the case of the average. **Teaching Statistics**, Rapid City, v. 17, n.3, p. 97-99. Set. 1995.

GAUTHIER, René. PONCY, Michel. **2de Indice Maths**. Paris: Bordas/SEJER, 2009a. 304 p. ISBN: 978-2-04-732641-1

GAUTHIER, René. PONCY, Michel. **2de Indice Maths**: livre du professeur. Paris: Bordas/SEJER, 2009b. 152 p. ISBN: 978-2-04-732721-0.

GITIRANA, V. et al. Média aritmética no ensino fundamental. In: LOPES, C. E.; COUTINHO, C. Q. S.; ALMOULOUD, S. A. (Org.) **Estudos e reflexões em educação estatística**. Campinas: Mercado de Letras, 2010. p. 105-131.

GOODCHILD, S. School pupil's understanding of average. **Teaching Statistics**, Rapid City, v.10, n.3, p.77-81, 1988.

HUBLER, Jérôme. **Statistique descriptive appliquée à la gestion et à l'économie**. 2 ed. Paris: Bréal, 2007. ISBN: 978 2 7495 0660 9.

IBGE. **Normas de apresentação tabular**. 3.ed. Rio de Janeiro: Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. Centro de Documentação e Disseminação de informações, 1993. 62p. ISBN: 85-240-0471-1.

IEZZI, Gelso. et al. **Matemática**: ciência e aplicações. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010a. v.1. (Obra em 3 volumes para o ensino médio).

IEZZI, Gelso. et al. **Matemática**: ciência e aplicações. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010b. v.2. (Obra em 3 volumes para o ensino médio).

IEZZI, Gelso. et al. **Matemática**: ciência e aplicações. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010c. v.3. (Obra em 3 volumes para o ensino médio).

JACKSON, Ribeiro. **Matemática**: ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010a. v.1. (Obra em 3 volumes para o ensino médio).

JACKSON, Ribeiro. **Matemática**: ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010b. v.2. (Obra em 3 volumes para o ensino médio).

JACKSON, Ribeiro. **Matemática**: ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010c. v.3. (Obra em 3 volumes para o ensino médio).

KHALIL, N. Teaching Average to Secondary School students. **Journal of Kufa for Mathematics and Computer**. v.1, n. 2, p. 123-131, out. 2010.

KENDALL, Maurice G.;YULE, G. Udny. **Introdução à Teoria da Estatística**. Tradução Evandro de Oliveira Silva. Rio de Janeiro: IBGE, 1948.

KENDALL, Maurice G.; STUART, Alan. **The Advanced Theory of Statistics**. 4. ed. v.1. Londres: Charles Griffin e Company Limited, 1977.

LEITE, A. P. F. **Estimativa de medidas de tendência central: uma intervenção de ensino**. 2010. 161 f. Dissertação (mestrado profissional em ensino de matemática) – PUCSP, São Paulo, 2010.

LEON, Marjorie Roth.; ZAWOJEWSKI, Judith S. Use of the arithmetic mean: an investigation of four properties issues and preliminary results. In: International Conference on Teaching Statistics (ICOTS), 3. , 1990, Dunedin (Nova Zelândia). **Proceedings**... Dunedin: IASE, 1990, p. 302-306.

LEVIN, Jack; FOX, James A. **Estatística para Ciências Humanas**. 9.ed. Tradução Alfredo Alves de Farias. São Paulo: Prentice Hall, 2004.

LI, K. J.; SHEN, S. M. Students' weaknesses in statistical projects. **Teaching Statistics**, 14(1), 2-8. 1992.

LIMA, Rosana C. R. **Introduzindo o Conceito de Média aritmética na 4ª série do Ensino Fundamental Usando o Ambiente Computacional**. 2005. 272f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, Blumenau, ano 3, n.4, p. 3-13, 1 sem. 1995.

MANN, Prem S. **Introdução à Estatística**. Tradução: Eduardo Benedito Curtolo. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. 758 p.

MARQUES, Mabel; GUIMARÃES, Gilda; GITIRANA, Verônica. Compreensão de alunos e professores sobre Média Aritmética. **Bolema**, Rio Claro, v.24, n.40, p.725-745, dez 2011.

MATHIEU-WOZNIAK, Floriane. **Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale**. Un repérage didactique. 2005. 439 f. Tese (Doutorado) - Université Claude Bernard - Lyon 1, Lyon, 2005

MAYÉN, Silvia A. G. **Compreension de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato**. 2009. 396 f. Tese (Programa de Doutorado de la Didáctica de la Matemática), Universidade de Granada, Granada (Espanha), 2009.

MAYÉN, Sílvia A. G. et al. Comprensión de las medidas de posición central em estudiantes mexicanos de bachillerato. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática- UNIÓN**, n.9, p.187-201. marzo de 2007. ISSN: 1815-0640.

MAYÉN, Silvia A. G.; BATANERO, Carmen. Validez y fiabilidad de un cuestionario sobre medidas de tendencia central para estudiantes de secundaria y bachillerato. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM), 13., 2011, Recife. **Anais**... Recife: EDUMATEC, 2011. p. 74-93.

MERINO, Belén Cobo. **Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de Secundaria**. 2003. 301f. Tese (Departamento de Didáctica de la Matemática).Granada:Universidade de Granada, 2003.

MEVARECH, Zemira R. A Deep Structure Model of Students'Statistical Misconceptions. **Educational Studies in Mathematics**. v.14, n.4, p. 415-429. 1983. ISSN: 0013-1954. ISSN (on-line): 1573-0816.

MOKROS, Jan; RUSSELL, Susan. J. Children's Concepts of Average and representativeness. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v.26, n. 1, p.20-39, 1995.

NOVAES, Diva Valério; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. **Estatística para educação profissional**. São Paulo: Atlas, 2009.

PAIS, Luiz Carlos. Transposição didática. In: MACHADO, Silvia. D. A. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

PAIS, Luiz Carlos. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 128 p.

PAIVA, Manoel. **Matemática – Paiva**. São Paulo: Moderna, 2009a. v.1 (obra em 3 volumes para o ensino médio).

PAIVA, Manoel. **Matemática – Paiva**. São Paulo: Moderna, 2009b. v.2 (obra em 3 volumes para o ensino médio).

PAIVA, Manoel. **Matemática – Paiva**. São Paulo: Moderna, 2009c. v.3 (obra em 3 volumes para o ensino médio).

PAVANELO, Regina Maria; ANDRADE, Roseli Nozaki Grave. Formar professores para ensinar Geometria: um desafio para as licenciaturas de Matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, ano 9, edição especial, p. 78-87, mar. 2002.

POLLATSEK, A.; LIMA, S.; WELL, A. D. Concept or computation: students'understanding of the mean. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, n.2, maio, p. 191-204, 1981.

PONCY, Michel; GUICHARD, Yves; RUSSIER, Marie-Christine. **1reS Nouvelle Collection Indice Maths**. Paris: Bordas/SEJER, 2011a. 368 p. ISBN: 978-2-04-732849-1.

PONCY, Michel; GUICHARD, Yves; RUSSIER, Marie-Christine. **1reS Nouvelle Collection Indice Maths**: livre du professeur. Paris: Bordas/SEJER, 2011b. 368 p. ISBN: 978-2-04-732849-1.

PONCY, Michel; BONNAFET, Jean-Louis; RUSSIER, Marie-Christine. **T^{erm}S Enseignement Spécifique Nouvelle Collection Indice Maths**. Paris: Bordas/SEJER, 2012a. 368 p. ISBN: 978-2-04-732926-9. 432 p. ISBN : 978-2-04-732926-9

PONCY, Michel; BONNAFET, Jean-Louis; RUSSIER, Marie-Christine. **T^{erm}S Enseignement Spécialité Nouvelle Collection Indice Maths**. Paris: Bordas/SEJER, 2012b. 368 p. ISBN: 978-2-04-732926-9. 145 p. ISBN : 978-2-04-732927-6

PRIOLET, Maryvonne**. Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques**. 2008. 1006 f. Tese (Doutorado) – Université Lyon 2, Lyon, 2008.

RABARDEL, P. **Les Hommes & les Technologies**: approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin, 1995.

RÉGNIER, Jean-Claude. Finalités et enjeux de l'enseignement de la statistique. In : GIRARD, J-C.; GROSS, D.; PLANCHETTE, P.; RÉGNIER, J-C. ;THOMAS, R. (org.). **Enseigner la Statistique du CM à la Seconde, Pourquoi?Comment?** Villeurbanne: IREM de Lyon, 1998a. p. 5-20.

RÉGNIER, Jean-Claude. Histogramme. In: RÉGNIER, Jean-Claude et al. **Enseigner la statistique du CM à la seconde. Pourquoi? Comment?** Villeuurbanne: IREM de Lyon, 1998b. 203 p.

RÉGNIER, Jean-Claude. **Méthodes Quantitatives & Statistique**: Notions, méthodes et formules de base. Lyon: Université Lumière Lyon2/ISPEF, 2000a. 158 p.

RÉGNIER, Jean-Claude. **Auto-évaluation et autocorrection dans l'enseignement des mathématiques et de la statistique**. Entre praxéologie et épistémologie scolaire. Thèse en HDR en Sciences de l'Éducation. Université Marc Bloch Strasbourg: France, 2000b.

RÉGNIER, Jean-Claude. Formation de l'esprit statistique et raisonnement statistique. Que peut-on attendre de la didactique de la statistique? In: Séminaire National de Didactique des Mathématiques. 2005, Paris. **Anais**... Paris: IREM Paris, 2005.

RÉGNIER, Jean-Claude. Formação de espírito estatístico e cidadania: instrumentos matemáticos para a leitura do mundo. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 1., 2006, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 2006.

RÉGNIER, Jean-Claude. **Vocabulaire de Statistique**. Lyon: ISPEF – Université Lumière Lyon 2, 2007.

RÉGNIER, Jean-Claude.; BRAGA, E. M. Instrumento estatístico para uma leitura do mundo: formação do espírito estatístico e cidadania. **Revista Conjectura: Filosofia e Educação**, v. 13, n. 2, 2008.

RÉGNIER, Jean-Claude. **Approche méthodologique de l'enquête par questionnaire & Statistique**. Lyon: Université Lumière Lyon2/ISPEF, 2010. 109 p.

RÉGNIER, Jean-Claude. **Méthodes Quantitatives & Statistique**: Notions, méthodes et formules de base. Lyon: Université Lumière Lyon2/ISPEF, 2011a. 158 p. (versão mais atual com modificações).

RÉGNIER, Jean-Claude. **Didactique des Disciplines & Apprentissage**. Lyon : Université Lumière Lyon 2/ISPEF, 2011b.

RÉGNIER, Jean-Claude. Production et traitement des données quantitatives. Lyon: ISPEF, 2012.

RÉGNIER, J-C. Notas pessoais em aula ou sob orientação. Lyon, 2013.

SAMURÇAY, Renan; VERGNAUD, Gérard. Que peut apporter l'analyse de l'activité à la formation des enseignants et des formateurs? **Carrefours de l'Éducation**. Amiens (França), n.34, p. 49-63, nov. 2012. ISSN 1262-3490.

SIGWARD, Éric (dir.). **Odyssée 2^de Mathématiques Nouveau Programme**. Paris: Hatier, 2010.

SIGWARD, Éric (dir.). **Odyssée 1re Mathématiques Nouveau Programme**. Paris: Hatier, 2011a. (Collection Odysée). ISBN: 978-2-218-95346-0.

SIGWARD, Éric (dir.). **Odyssée Tle S Mathématiques Nouveau Programme Enseignement Spécifique**. Paris: Hatier, 2011b. (Collection Odysée). ISBN: 978-2-218-95408-5.

SIGWARD, Éric (dir.). **Odyssée Tle S Mathématiques Nouveau Programme Enseignement Spécialité**. Paris: Hatier, 2012. (Collection Odysée). ISBN: 978-2-218-95405-4.

SMOLE, Kátia C. S. DINIZ, Maria I. S. V. **Matemática**: ensino médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010a. v.1. (Obra em 3 volumes para o ensino médio).

SMOLE, Kátia C. S. DINIZ, Maria I. S. V. **Matemática**: ensino médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010b. v.2. (Obra em 3 volumes para o ensino médio).

SMOLE, Kátia C. S. DINIZ, Maria I. S. V. **Matemática**: ensino médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010c. v.3. (Obra em 3 volumes para o ensino médio).

SOUZA, Joamir R. de. **Novo olhar matemática**. São Paulo: FTD, 2010a. v.1. (Obra em 3 volumes para o ensino médio).

SOUZA, Joamir R. de. **Novo olhar matemática**. São Paulo: FTD, 2010b. v.2. (Obra em 3 volumes para o ensino médio).

SOUZA, Joamir R. de. **Novo olhar matemática**. São Paulo: FTD, 2010c. v.3. (Obra em 3 volumes para o ensino médio).

SPIEGEL, Murray R. **Estatística**. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 1993. (Coleção Schaum).

STELLA, Cristiane A. **Um estudo sobre o conceito de média com alunos do Ensino Médio**. 2003. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

STRAUSS, S.; BICHLER, E. The development of children's concepts of the arithmetic average. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston. v.19. n.1. p. 64-80, 1988.

UCCELLINI, John C. Teaching the Mean Meaninfully**. Mathematics Teaching in the Middle School**, 2 (3),p.112-115. november-december. 1996.

VERGNAUD, Gérard. La Théorie des Champs Conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. n.10, p.133-170. 1990.

VERGNAUD, Gérard. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, Jean (org.). **Didáctica das matemáticas**. Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

VERGNAUD, Gérard.; PLAISANCE, Éric. **Les Sciences de l'Éducation**. 5.ed. Paris : éditions La Decouverte, 2012. ISBN : 978-2-7071-7436-9. (Collection Repères).

VERRET, Michel. **Le Temps dês Études**. (Tese) Universidade de Paris V. 837f. Paris: Champion, 1975.

VYGOTSKI, L. **Pensée et Langage**. Paris : Messidor/Editions Sociales. 1985.

WALLE, John A. Van de. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professor e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6.ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

WATSON, J. What's the point? **The Australian Mathematics Teacher**, Stepney, v. 52, n.2, p.40-43, 1996.

ZAWOJEWSKI, J. S. **Teaching Statistics**: mean, median and mode: research into practice. Arithmetic Teacher, p.25-26, 1988.